Science & Philosophy **ISSN**: 2282-7757
Vol. 6(1), 2018, pp. 47--66 **eISSN**: 2282-7765

Bruno Rizzi and Number Theory
(Bruno Rizzi e la Teoria dei Numeri°)

Franco Eugeni*, Fabrizio Maturo•

Received: 01-02-2018. **Accepted**: 01-05-2018. **Published**: 30-06-2018

doi: 10.23756/sp.v6i1.417

© Eugeni and Maturo

Abstract

Franco Eugeni remembers Bruno Rizzi: in this brief introduction, I would like to remember an afternoon spent in "*Roma Tre*" with Bruno, since we were both Ordinary Professors at that University. We passed it doing a dense program of work for the next three years. At 6.00 pm, I left for "Roseto degli Abruzzi". At six o'clock a.m. of the next morning, I still have the voice in my ears. A phone call from the Headmaster Ciro d'Aniello, who told me "*The Professor is dead"* In that afternoon, Emilio Ambrisi and I went to Rome; we were stunned and desperate. Not many days later, a conference was held at the

° Dedicato al compianto amico Bruno Rizzi a venti anni dalla sua scomparsa.

* Teramo University, Italy; eugenif3@gmail.com.

• Department of Management and Business Administration, "G. d'Annunzio" University of Chieti-Pescara; f.maturo@unich.it.

University of Teramo; it was the conference that we had prepared for Bruno, to celebrate his 60th birthday, but it was his memory. In the opening conference, Prof. Antonino Giambo, also fraternal friend of Bruno, burst into a tearful cry, which expressed in a moment, the senses of friendship and love that we all had for the missing friend! Starting from this work with Fabrizio Maturo, the study of some problems left open by the works of Eugeni and Rizzi will be investigated.

Sunto

Ricordo di Franco Eugeni su Bruno Rizzi: in questa brevissima introduzione vorrei ricordare un pomeriggio passato a Roma Tre con Bruno, visto che allora eravamo entrambi Professori Ordinari in quella Università. Lo passammo a fare un denso programma di lavoro per i successivi tre anni. Alle 18.00 ripartii per Roseto degli Abruzzi. Alle sei del mattino successivo, ho ancora la voce nelle orecchie, una telefonata del Preside Ciro d'Aniello, che mi diceva "*Il Professore è morto"* Nel pomeriggio Emilio Ambrisi ed io ci recammo a Roma, eravamo attoniti e disperati. Non molti giorni dopo si tenne presso l'Università di Teramo un Convegno, era il Convegno che avevamo preparato per Bruno, per festeggiare i suoi 60 anni, fu invece il ricordo. Nella conferenza di apertura il prof. Antonino Giambò, anche lui, come noi, fraterno amico di Bruno, scoppiò in un pianto dirotto, che espresse in un attimo, i sensi dell'amicizia e dell'amore, che tutti noi avevamo per l'amico scomparso! A partire da questo lavoro con Fabrizio Maturo verrà approfondito lo studio di alcune problematiche rimaste aperte dai lavori di Eugeni e Rizzi.

1. La Teoria delle Funzioni Aritmetiche ed il Contributo di Bruno Rizzi

Il contributo di B. Rizzi[1] (1935-1995), nell'ambito della Teoria dei Numeri è essenzialmente dedicato alla Teoria delle funzioni aritmetiche. Tale teoria ha in Italia un primo grande personaggio, che se ne è occupato [21], [22], precisamente Michele Cipolla[2]. È interessante notare che [23], uno studioso americano di tale teoria, contemporaneo del Cipolla, fu Eric Temple Bell[3], più noto come storico.

Un'indagine da fare sarebbe quella di comparare i lavori di Cipolla con quelli di Bell. Tali lavori contengono vari risultati comuni e non sembra che i due

[1] Bruno Rizzi (1935-1995) – vedi appendice
[2] Michele Cipolla (1880 - 1947) – vedi appendice
[3] Eric Temple Bell (1883 - 1960) – vedi appendice

fossero in contatto, in quanto il simbolismo usato dagli stessi fu essenzialmente differente.
Un allievo di Cipolla, che riprese i lavori e il simbolismo del maestro, fu Franco Pellegrino[4], Libero Docente di Teoria dei Numeri e Ricercatore dell'Istituto di Alta Matematica[5], ottimo matematico con il quale noi abbiamo collaborato per qualche anno fino alla sua scomparsa [29]. Pellegrino era stato studente del Cipolla e l'Istituto INDAM, annoverava Cipolla tra i suoi prestigiosi conferenzieri.
La Teoria delle funzioni aritmetiche fu ripresa e generalizzata [30] da nostro compianto amico e maestro Giancarlo Rota[6], nelle più generali Algebre di Incidenza. Per i dettagli di tali aspetti e degli inquadramenti si può fare riferimento ad un lavoro di Eugeni e Rizzi [15], sull'argomento.
Per comprendere l'ambiente entro il quale operavano Cipolla prima e Pellegrino poi, ambiente nel quale abbiamo a lungo lavorato noi stessi, muoviamo le nostre considerazioni da due famose e datate funzioni aritmetiche:

L'indicatore Φ di Eulero[7] e la funzione μ di Möbius[8]

Sia n è un numero naturale[9] allora $\Phi(n)$ è la cardinalità dell'insieme dei numeri naturali m non superiori ad n[10] stesso e primi[11] con esso, cioè i numeri m, tali che:

$$(1) \qquad 1 \leq m \leq n$$
$$(2) \qquad (m; n) = 1.$$

In altre parole[12]:

---

[4] Franco Pellegrino (1908 - 1979)- vedi appendice
[5] INdAM – Istituto Nazionale di Alta Matematica – vedi appendice.
[6] Giancarlo Rota (1932-1999). Grande personaggio della Matematica contemporanea e Dean dell'M.I.T. per il cui profilo è su Wikipedia. Ricordiamo che per il volume "Elementi di Matematica discreta" per i tipi della Zanichelli, scritto da Cerasoli, Eugeni, Protasi avemmo l'onore di una ampia presentazione di Giancarlo Rota.
[7] Leonhard Euler (1707 - 1783). Nella letteratura italiana spesso tale funzione è indicata con la φ minuscola.
[8] August Ferdinand Möbius (1790 - 1868)
[9] E' $n \in \mathbb{N}$, dove con N indichiamo l'insieme $\{1, 2, \ldots\}$. In altre parole, se consideriamo la coppia (N,|) come un insieme parzialmente ordinato (poset), rispetto alla relazione di divisibilità "|", in N non si considera presente lo zero, in quanto lo 0, è diviso da ogni numero, ma nel caso dello zero che divide se stesso non si ha un unico quoziente.
[10] L'uguale di $m \leq n$ serve per avere la proprietà $\Phi(1) = 1$, del resto n è primo. Infatti, l'insieme dei numeri m non superiori ad 1 sono il numero 1 soltanto, che peraltro non avendo fattori in comune con se stesso soddisfa la definizione.
[11] Dire che m è primo con n significa che essi non hanno divisori in comune. In altre parole se denotiamo con (m;n) il loro MCD (si noti nel mezzo"; " il punto e virgola risulta (m;n)=1.
[12] Dato un insieme di numeri naturali A, il simbolo $|A|$ ne indica la cardinalità.

$$\Phi(n) = \left|\left\{m \in \mathbf{N} : 1 \le m \le n, (m;n) = 1\right\}\right| \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Varie sono le proprietà della funzione di Eulero. Ricordiamo le seguenti:

(a) $(m;\, n) = 1 \Rightarrow \Phi(m\cdot n) = \Phi(m)\cdot\Phi(n)\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}$ (Proprietà moltiplicativa);

(b) $\Phi(1) = 1$, $\Phi(p^{\alpha}) = (p^{\alpha} - p^{\alpha-1}) = p^{\alpha}\left[1 - \dfrac{1}{p}\right]\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}, \forall\, p \in \mathbb{P}$ [13];

(c) $\sum_{d|n} \Phi(d) = n$.

La proprietà (c) è molto importante, poiché, come non del tutto evidente, risulta che la proprietà è caratteristica della funzione Φ., cioè:

"*Se f è una funzione aritmetica tale che* $\sum_{d|n} f(d) = n$, *allora* $f = \Phi$",

NOTA. Ci si può chiedere cosa succeda della relazione:

$$\Phi(m\cdot n) = \Phi(m)\cdot\Phi(n)$$

quando m ed n non sono primi tra loro. Nel 1973, in due lavori indipendenti di Eugeni e Rizzi, [2], [34], e per vie differenti, è stato dimostrato che, per m e d n qualsiasi, risulta:

$$\Phi_q(mn)\Phi_q[(m;n)] = [(m;n)^q]\Phi_q(m)\Phi_q(n)$$

dove (m;n) è il MCD e il valore[14] $\Phi_q(n)$ è il numero delle q-ple di numeri non superiori ad n e tali che il MCD degli elementi della q-pla sono primi con n.

Leggendo il suo lavoro Franco Eugeni telefonò a Bruno Rizzi e da quella telefonata nacque una collaborazione e principalmente una lunga amicizia.

La funzione μ di Möbius si definisce intanto come una funzione, per definizione moltiplicativa, verificante la condizione caratteristica di tali funzioni, ovvero:

$$f(n) = f\left(\prod_{p|n} p^k\right) = \prod_{p|n} f(p^k)$$

[13] Con P denotiamo l'insieme dei numeri primi.

[14] Si tratta di una nota generalizzazione dovuta a Cahen, Eckford Cohen e tanti altri.

e le condizioni $\mu(1)=1$, $\mu(p)=-1$, $\mu(p^k)=0....se...k>1$, il che implica che:

$$\mu(n)=\begin{cases}..1......se...n=1\\ (-1)^k...se...n=p_1p_2...p_k...(k.primi.distin.ti)\\ ..0......altrimenti\end{cases}$$

Per comprendere i primi elementi e la filosofia che è sottesa a quest'algebra, definiamo le funzioni *N* ed *u* seguenti:

$N(n) = n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ (*funzione identità*), $u(n) = 1 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ (funzione unitaria)

Nell'insieme **H** delle funzioni aritmetiche definiamo la cosiddetta "*convoluzione di Dirichlet*[15]" per due qualsiasi funzioni aritmetiche *f*, *g* $\in$ **H**, nel modo che segue:

$$\left(f\times g\right)(n)=\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Questa operazione, come è immediato, è associativa, commutativa, ed è anche dotata di un elemento neutro, tale essendo la funzione:

$$\varepsilon(n)=\begin{cases}1 & se\ n=1\\ 0 & altrimenti\end{cases}$$

poiché

$$f\times\varepsilon=\varepsilon\times f=f \qquad (\forall f \in \mathcal{H}).$$

Definita l'operazione di convoluzione osserviamo che come struttura algebrica, l'insieme **H** delle funzioni aritmetiche
f: N $\rightarrow \mathbb{C}$
rispetto all'addizione funzionale e al prodotto per un numero complesso, costituisce quella ben nota struttura che prende il nome di *spazio vettoriale hilbertiano numerico*, spesso denotato in letteratura con l^2, nel quale ogni funzione ha come immagine una successione numerica di numeri complessi.
Se lo spazio hilbertiano (**H**, +) si completa con la convoluzione, la struttura:

$$(\mathcal{H}, +, \times)$$

[15] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859)

è un *anello commutativo ed unitario*, anzi un'algebra (con la moltiplicazione di uno scalare per una funzione). In più si può provare che [29]:

1) *L'anello è integro* (cioè non ammette divisori propri dello **0**);
2) *Gli elementi invertibili sono tutti e soli gli elementi f tali che* $f(1) \neq 0$.

Come noto, per ogni *anello commutativo ed unitario*, gli elementi invertibili, o *unità*, formano un gruppo rispetto alla "moltiplicazione", l'operazione X, nel nostro caso.
Si dimostra che le funzioni moltiplicative formano all'interno di questo gruppo un sottogruppo formato dalle funzioni aritmetiche moltiplicative.

Vediamo ora qualche dettaglio, ad esempio si può dimostrare che:

$$\mu \times u = \varepsilon\,,$$

Ovvero le funzioni u e μ,, *sono una l'inversa dell'altra.* Infatti:

$(\mu \times u)\ (1) = (\mu \times u)(1) = 1 = \varepsilon(1)$

$(\mu \times u)\ (p) = \mu(1)\, u(p) + \mu(p)\, u(1) = 1 - 1 = 0 = \varepsilon(\mathrm{p}) \ldots\ \forall\, p \in \mathbb{P}$

$(\mu \times u)\ (p^{\alpha}) = ((\mu \times u)(p))^{\alpha} = 0 = \varepsilon(p^{\alpha})$.

E essendo le due funzioni moltiplicative, tale è il loro prodotto e quindi:

$$(\mu \times u)(\mathrm{n}) = (\mu \times u)\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}\right) = \prod_{i=1}^{r} (\mu \times u)\left(p_i^{\alpha_i}\right) = 0 = \varepsilon(\mathrm{n})\ .\forall\ \mathrm{n} \in \mathbb{N},\ \mathrm{n}>1.$$

La proprietà caratteristica della funzione di Eulero

$$\sum_{d|n} \Phi(d) = n$$

si può ora così scrivere:

$$\sum_{d|n} \Phi(d) u(\frac{n}{d}) = N(n)$$

che si traduce nella espressione simbolico-funzionale:

$$\Phi \times u = N.$$

Dalla relazione $\mu \times u = \varepsilon,$ segue

$$\mathrm{N} \times \mu = \Phi \times u \times \mu = \Phi \times \varepsilon = \Phi$$

ovvero:

$$\Phi = \mathrm{N} \times \mu$$

definizione formale, questa, della funzione di Eulero, sulla quale si fondano tutte le molteplici generalizzazioni della funzione di Eulero stessa, quali ad esempio:

$$\Phi_q = N^q \times \mu \qquad \text{dove} \qquad N^q(n) := n^q ,$$

modo formale di introdurre la funzione di Eulero-Cohen, dove, come ricordato, $\Phi_q(n)$ è il numero delle q-ple di numeri non superiori ad n e tali che il MCD degli elementi della q-pla sono primi con n.
Dalla precedente si ricava facilmente:

$$\Phi_q(n) = n^q \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p^q}) \ .$$

Nell'indirizzo Cipolla – Pellegrino – Rizzi – Eugeni si è preferito portare l'attenzione su questo anello,e in particolare sull'uso, dei *calcoli simbolici*, che in esso si possono fare, con metodi più vicini a quelli dell'algebra. L'altro indirizzo, diciamo di Bell – Cohen – Subbarao - Suryanarayana ed altri, ha portato l'attenzione sulle formule "*non simboliche*", utilizzando per provare le identità, le regole del confronto delle maggiorazioni in ambo i sensi, di parti delle identità con metodi più vicini a quelli dell'analisi matematica.
Nel 1959 Cashwell ed Everett [27], provarono che *l'anello delle funzioni aritmetiche è a fattorizzazione essenzialmente*, *unica*, per via di un isomorfismo con l'anello dei polinomi con una infinità numerabile di variabili, e lavorando su questo. Si può anche costruire un secondo isomorfismo tra l'anello delle funzioni aritmetiche e l'anello delle serie formali di Dirichlet, argomento che tratteremo tra breve.
Non sono state caratterizzate le funzioni prime, e nemmeno la differenza con le irriducibili. Alcuni lemmi interessanti sull'argomento sono dovuti a Renato Migliorato che se n'è occupato nei primi anni '80, in lavori di carattere locale che non hanno avuto grande diffusione.

2. Le Generalizzazioni della Funzione di Eulero

È costume che quasi tutti gli studiosi di Teoria delle funzioni aritmetiche, hanno presentato una loro generalizzazione della funzione di Eulero, talvolta detta "*indicatore*" o anche "*totient*" . Così si parla di indicatori e di classi di indicatori di Cohen, di Stevens, di Subbarao, di Mc Carty, Suryanarayana,Horadam, Eugeni, Nagell, etc. Un definizione interessante dovuta a Rizzi [18], su indicazione di Eugeni, fornisce una definizione formale, molto generale, da includere tutti quelli presentati dai vari autori. Per comprendere questa definizione, sia $A \subseteq$ N, un insieme di naturali non vuoto e sia I_A la funzione indicatrice di *A*, cioè la funzione definita ponendo

$$I_A(\mathrm{n}) = 1 \quad \text{se} \quad \mathrm{n} \in A, \qquad I_A(\mathrm{n}) = 0 \quad \text{se} \quad \mathrm{n} \notin A,$$

Sia poi K una funzione *completamente moltiplicativa*, cioè tale che:

$$\mathrm{K(mn) = K(m)K(n)}, \quad \forall\ \mathrm{m, n} \in \mathrm{N}.$$

Chiameremo *indicatore generalizzato* la funzione definita ponendo:

$$\Phi(K, A) = K \times \mu \times I_A.$$

Osserviamo che per *A*=N, l'indicatore definito sopra, si denota con Φ_K, e si ha:

$$\Phi_K(n) = \Phi_K(\prod_{p|n}(K \times \mu)(p^{\alpha}) = \prod_{p|n}[K(p)^{a-1}(K(p)-1)] = \prod_{\substack{....p|n \\ K(p)\neq 0}}[1 - \frac{1}{K(p)}] =$$

1.-Se K=*N*, con *N*(n) = n, *A*= N, allora $\Phi(K, A) = \Phi$ (Indicatore di Eulero)

2.- Se K= $N^q ...con... N^q(n) = n^q$, *A*= N, allora $\Phi(K, A) = \Phi_q$ (Indicatore di Cohen)

3.- Se K= $N^q ...con... N^q(n) = n^q$, ed A è l'insieme dei numeri liberi da quadrati, ovvero l'insieme dei numeri primitivi di dato ordine si hanno gli indicatori di Eugeni.

4.- Se K=*N*, con *N*(n) = n, *A*= Q (insieme dei quadrati) allora si ha il numero dei numeri m, non superiori ad n, primi con m e che sono dei quadrati (introdotti da vari autori)

5. - Se K=*N*, con *N*(n) = n ed *A* è un qualsiasi insieme di numeri naturali, allora si ha il numero dei numeri m, non superiori ad n, primi con m e che sono elementi di *A*.

Gli esempi dati chiariscono la vastità della generalizzazione!

In questo contesto, si può anche assegnare una espressione simbolica, alla celebratissima funzione detta *somma di Ramanujan* [24], precisamente la:

$$\mathrm{C}(n,r) := \sum_{\substack{m(\bmod n)\\(m;n)=1}} \exp(2\pi imr/n)$$

Nella somma *m* prende i valori nel sistema dei residui mod *n*. L'espressione inoltre rappresenta la somma delle potenze r-me delle radici n-me primitive dell'unità. È ben noto che Snivrasta Ramanujan[16] ricavò da questa sua funzione un incredibile numero di applicazioni. Si noti pure che:

$$\mathrm{C}(n,n)=\mathrm{C}(n,0) = \Phi(n)$$

È noto che:

$$C(n,r) = \sum_{\substack{d|n\\d|r}} d\mu(n/d) = \sum_{d|(n,r)} d\mu(n/d)$$

Se denotiamo con D(r) l'insieme dei divisori dell'intero r, si può scrivere:

$$\mathrm{C}(\_,\, r) = \mathrm{N} \times \mu \times I_{D(r)}$$

che è appunto una espressione simbolica della parte funzionale della somma di Ramanujuan.

3. La Funzione di Möbius Generalizzata

Un capitolo ulteriore si apre con la teoria della funzione di Möbius generalizzata, all'interno delle Algebre di Incidenza [30], definite su un insieme parzialmente ordinato (poset) ed introdotte da Gian-Carlo Rota[17]. [Per il lettore interessato possiamo riferimento al lavoro di Eugeni e Rizzi, dal titolo: *An Incidence Algebra On Rational Numbers* [15]. In quel lavoro, noi costruiamo e studiamo nei dettagli, un caso, quello nel quale il *poset* è l'insieme dei numeri razionali (ridotti ai minimi termini), parzialmente ordinati secondo la regola di divisibilità seguente:

(h/k) |(m/n) nei razionali <u>se e solo se</u> h|m, k|n nei naturali.

Il lettore interessato può leggere la costruzione per analogia delle funzioni classiche e la revisione di tutte le varie proprietà ma sui numeri razionali invece che negli interi.
Tra le applicazioni è interessante il nostro lavoro, che generalizza il lavoro classico di de Finetti [25], sulla probabilità che il MCD di n numeri scelti a

[16] Le applicazioni trovate da Snivrasta Ramanujan (1887-1920) sono riportate nel suo lavoro del 1918 citato in bibliografia.
[17] Vedi precedente nota.

caso sia un numero assegnato. Nel nostro lavoro [16], ci occupiamo della valutazione delle probabilità inferiore e superiore[18] che il k-MCD[19] di n numeri scelti a caso appartengano ad un insieme prefissato. La nozione di scelta a caso è ricondotta ad una idea di Baclawski e Rota [31] che collega la scelta a caso alla cosiddetta funzione <u>*zita di Rieman* $\zeta(s)$</u> (con s variabile complessa), della quale parleremo tra breve.
Precisamente prefissato un numero reale α >1e una parte *A* dell'insieme N dei numeri naturali, consideriamo l'evento, che indichiamo ancora con *A*, "*un naturale scelto a caso in* N *appartiene ad A*". Ciò premesso la probabilità dell'evento A (detta *probabilità di Dirichelet*) è definita ponendo:

$$P_\alpha(A) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \sum_{n \in A} n^{-\alpha}$$

Si verifica facilmente che P_α è una misura di probabilità su N. Inoltre, denotati con M_p l'insieme dei multipli di un intero *p*, la misura di probabilità è tale che:

$$P_\alpha(M_p \cap M_q) = P_\alpha(M_p) P_\alpha(M_q)$$

quali che siano i due primi *p* e *q*.
In questo contesto poi se B (N) è la σ-algebra delle parti di N, lo spazio di probabilità (N, B (N), P_α) si chiamerà lo S*pazio di probabilità di Dirichlet.* In tal modo, per l'evento *A*, la locuzione *"scelto a caso"* significa che la probabilità di A è presa nello Spazio continuo di Dirichlet.

La funzione ζ rientra in una vasta classe, denotata con D, di funzioni di variabili complesse[20], definite formalmente da una classe di serie, dette di Dirichlet, delle quali non ci preoccupiamo della convergenza ma solo delle loro strutture algebriche. La generica serie è definita da:

$$\text{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$$

Ed appare ben chiaro come la funzione di variabile complessa F(s) sia generata dalla funzione aritmetica *f(n)*, che ne assegna i coefficienti dei vari termini.
La relazione fondamentale è la seguente:

---

[18] Tali probabilità inferiore e superiore coincidono quando k=1, caso dell'ordinario MCD, generalizzando in tal modo il teorema di de Finetti.
[19] Il k-MCD di due numero m,n è il più grande divisore comune che sia una potenza k-ma.
[20] Definite ove le rispettive serie convergono.

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (f \times g)(n) n^{-s}$$

Dalla quale è facile intuire il sottogiacente <u>isomorfismo</u> tra l'anello (algebra) delle funzioni aritmetiche (**H**, +, X) con l'anello (algebra) delle serie formali di Diriclhet (**D, +, .) !**

4. Conclusioni

Una ultima questione da mettere in risalto è che, nel volume [22], del prof. Pentti Haukkanen, dell'Accademia Finnica delle Scienze, volume nel quale si fa il punto della situazione a tutto il 1987, direi lo stato dell'arte della teoria, delle ricerche di identità nell'ambito della Teoria delle Funzioni aritmetiche, in particolare per tutto il settore riguardante le generalizzazioni in varie direzioni delle identità di Snivrasta Ramanujan. Molto importante la bibliografia internazionale che compare in questa opera, che si completa con l'elenco aggiuntivo posto dopo la lista dei lavori collegati a Bruno Rizzi, dal [24] in poi. Da notare che nel lavoro di Huakkanen i i lavori di Eugeni e Rizzi e del loro gruppo di ricerca sull'argomento, fanno ottima comparsa. Sono citati in bibliografia ben dieci lavori e gli stessi sono costantemente richiamati in diversi punti nelle pp. 16, 23, 25,30, 31, 33, 35, 54, 56. del volume.

Appendice

1.- Bruno Rizzi (1935-1995). Trascorre l'infanzia a Tripoli dove i genitori insegnano nel Liceo italiano. La famiglia è di 14 figli. Si laurea all'Università di Roma nel 1960 e inizia la carriera come docente di scuola secondaria. Entra nel gruppo del Prof. Bruno de Finetti[21], che sarà il suo principale maestro, essendo divenuto Assistente Ordinario e Professore incaricato, stabilizzato dal 1969. Nel 1982 diviene Professore Associato di Matematica Finanziaria, presso l'Università di Roma la Sapienza. Vincitore del Concorso da Professore Ordinario nel 1986, viene chiamato all'Università di Napoli sulla Cattedra di Matematica Generale presso il Dipartimento di Matematica e Statistica, allora

[21] Bruno de Finetti (1906-1995). Sono tante le commemorazioni e i ricordi di questo grande matematico italiano. Ne ricordiamo due. Si legga G. Anichini, *Giornata in ricordo di Bruno de Finetti*, Per. di Mat. (7) n.2, (2015) 109-121. Si legga pure l'Introduzione, a cura di Giordano Bruno e Giulio Giorello, al volume: B.de Finetti*, L'invenzione della verità,* Cortina Editore Milano 2006 (il volume era un inedito del 1934, ritrovato dalla figlia Fulvia, come si legge nella premessa, da Lei fatta al meraviglioso inedito del Padre.). Il volume fu presentato anche al Congresso Nazionale della Mathesis di Trento del 2006 e in quasi tutte le Università italiane.

diretto dal prof. Alessandro di Lorenzo. Nel 1989 è chiamato presso la cattedra di Analisi Matematica della Facoltà di Ingegneria di Roma la Sapienza e nel 1990, per opzione, si sposta sulla medesima cattedra della nascente Università di Roma tre, dove militerà fino alla sua scomparsa nel 1995. La sua attività scientifica è fortemente legata allo sviluppo e alla rinascita della Società Italiana “Mathesis”, rinascita dovuta, nel dopoguerra, all’opera instancabile di Bruno de Finetti, suo maestro. Sarà tuttavia Rizzi il promotore dei rinati Convegni Mathesis del dopo guerra, che a partire dal Convegno di Monopoli del 1980, si sono poi tenuti annualmente da allora ad oggi. Dopo la Presidenza de Finetti, iniziata nel 1970 e terminata per ragioni di salute nel 1981, collaborerà con il nuovo Presidente Angelo Fadini [22] (1915-1992), che dirigerà la Società fino al 1987, anno in cui Rizzi stesso ne diverrà Presidente, ruolo che terrà fino al 1993. La sua attività è fortemente legata al Periodico di Matematica, organo della Mathesis, rivista fondata nel 1894 e pubblicata ininterrottamente fino ad oggi. Suo successore sarà Silvio Maracchia (1994-1999) e dopo la scomparsa di Rizzi saranno Presidenti nell’ordine Franco Eugeni (2000-2003), Andrea Laforgia (2003-2008) e l’attuale Presidente Emilio Ambrisi dal 2009 ad oggi, tutti suoi fedeli amici e collaboratori. Tra costoro vanno particolarmente annoverati, ciascuno in vari periodi temporali, per collaborazioni in articoli e partecipazioni come membri del direttivo Mathesis, i professori Ordinari Angelo Fadini, Giovanni Melzi, Franco Moriconi, Franco Eugeni, Luigia Berardi, Eliano Pessa, Francesco Sanna, Andrea Laforgia, Antonio Maturo, i professori associati Aldo Morelli, Silvio Maracchia, Fabio Mercanti, Mauro Cerasoli, Giordano Bruno, gli Ispettori tra i quali citiamo Giuseppe Festa, Emilio Ambrisi, Antonino Giambò, Salvatore Furneri , Marilena Levato, Presidi e Professori universitari a contratto (Ciro d’Aniello, Ferdinando Casolaro) e ancora centinaia tra Presidi e professori di scuola secondaria. I lavori e l’organizzazione del Periodico erano nella storica sede di via Vicenza (Università di Roma, la Sapienza) e presso il glorioso Circolo Matematico di Via Segesta, anche questo notevole centro di attività. La sua vastissima produzione scientifica, in articoli e volumi, riguarda i campi della didattica e storia della matematica e della scuola, la matematica finanziaria, la teoria dei numeri e la lunghissima serie di lavori sui modelli economici dinamici di tipo “morfogenetico” (generalizzazioni del modello di Goodwin), per un totale di opere non facilmente quantizzabili ma che si aggirano su oltre 300 titoli. Interessante il gruppo culturale che si era formato attorno a lui per lo sviluppo della diffusione della cultura e le innovazioni per la didattica. Sono di notevole interesse anche i tre lavori scritti con Antonio Maturo, sul settore dell’aritmetica addittiva, relativi alla decomposizione di un

[22] Si vedano gli articoli E. Ambrisi-B. Rizzi, *Ricordo di Fadini*, Per.di Mat. N.2 (1992) e quello di A.Ventre, *Ricordo di Angelo Fadini*, Cento anni di Matematica, Atti del Convegno “Mathesis Centenario-1895-1995”, Palombi Editore Roma (1996) 165-167.

numero primo in somma di quadrati, che costituiscono lo stato dell'arte del problema, del resto l'interesse per l'aritmetica addittiva nasce fin dal lavoro [3].

2.- Michele Cipolla[23] (1880-1947), laureato a Palermo nel 1902, insegnò per quasi un decennio nelle scuole medie, nel 1911 divenne professore di Analisi algebrica all'Università di Catania. Dal 1923, si trasferì all'Università di Palermo. Dottore honoris causa dell'Università di Sofia, membro di varie accademie italiane fra cui quella dei Lincei. Importanti i contributi di Cipolla alla teoria dei gruppi finiti e alla teoria dei numeri con particolare riguardo alla teoria delle funzioni aritmetiche. Le sue pubblicazioni assommano a circa un centinaio di lavori oltre ad una decina di trattati di livello universitario, una collana di testi per le scuole medie, scritti con Vincenzo Amato e Gaspare Mignosi. Fra i trattati universitari ricordiamo il volume di analisi algebrica, il volume sulla teoria dei gruppi e la raccolta delle sue conferenze sulle matematiche elementari dal punto di vista superiore.

3.- Eric Temple Bell (1884-1960), nacque in Scozia, ma la sua famiglia si trasferì in California subito dopo la sua nascita. Rientrarono in Inghilterra nel 1896. Tornò negli Stati Uniti nel 1902, dove Bell completò gli studi. Presso la Stanford University e la Columbia University. Lavorò alla Washington University e poi al California Instituteof Technology. I suoi lavori di ricerca hanno riguardato soprattutto la teoria dei Numeri e delle funzioni aritmetiche e l'Analisi Algebrica (Combinatoria), dando il nome ai cosiddetti numeri di Bell, e all'idea delle serie formali (studio della struttura delle serie senza preoccuparsi della loro convergenza) come base per lo studio delle funzioni generatrici. L'idea, che ebbe Bell nel 1940, di definire il *calcolo umbrale* su basi logicamente rigorose non ebbe successo (lil successo lo ebbe Giancarlo Rota negli anni '80 nel 1900). Le due opere che ricordiamo con maggiore interesse nel nostro contesto sono: *An Arithmetical Theory of Certain Numerical Functions* (Seattle Washington, The University, 1915) e *I grandi matematici* (*Men of Mathematics*, New York, Simon and Schuster, 1937), Rizzoli, 1997 – 2010).

Bell, con lo pseudonimo di John Taine,fu anche apprezzato autore di racconti, che precorsero la fantascienza, anche tradotti in Italia.Tra i vari ricordiamo: *Il flusso del tempo* (*The Time Stream*, 1930) in: *Verso i primi giorni del mondo*, I Romanzi Travolgenti n.4, Società Editrice Cremona Nuova, 1953, *La grande razza* (*The Purple Sapphire*, 1924); traduzione di Roberta Rambelli, in *Le*

[23] Vedasi il Necrologio scritto da Giovanni Sansone su : Rend. Lincei, (8) 21 (195611), pp. 507-523

Origini (dal 1800 al 1925), Storia della Fantascienza n.1, Libra Editrice, 1980, La stella di ferro (*The Iron Star*, 1930); traduzione di Alberto Ravaglioli, SLAN – Il meglio della fantascienza n.58, Libra Editrice, 1981.

I **Numeri di Bell** - indicati con B_n sono definiti come il numero di partizioni di un insieme finito di *n* elementi, idea dovuta a Snivastra Ramanjujan ma studiati sistematicamente da Bell nel 1934.
I primi numeri di Bell sono

$$B_0 = 1 ... B_1 = 1 ... B_2 = 2 ... B_3 = 5 ... B_4 = 15 ... B_5 = 52 ... B_6 = 203 ... B_7 = 877 ... B_8 = 6863$$

Ad esempio $B_2 = 2$ perché se un insieme ha due elementi a, b, allora le partizioni sono a|b e a, b. Analogamente $B_3 = 5$ perché se l'insieme ha tre elementi a, b,c , allora presenta le 5 partizioni seguenti: a|b|c , a, b|c , a, c|b , a|b, c , a, b, c !

I numeri di Bell possono essere calcolati, mediante una formula di ricorrenza, a partire da $B_0 = 1$, oppure utilizzando l'elegante serie di Dobinski:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \qquad\qquad B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Interessante anche l'uso del cosiddetto triangolo di Bell seguente:

1							
1	2						
2	3	5					
5	7	10	15				
15	20	27	37	52			
52	67	87	114	151	203		
203	255	322	409	523	674	877	
877	1080	1335	1657	2066	2589	3263	4140

Nel triangolo ogni riga inizia con l'ultimo numero della riga precedente, seguito dalla somma del numero precedente nella riga, con quello ch è sopra di lui, nella riga precedente! Esistono ancora due formule considerate di interesse nell'ambito degli studi di Bell che sono la *funzione generatrice esponenziale dei numeri di Bell* e la seguente speciale *congruenza di Touchard*:

$$e^{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n \qquad\qquad B_{p+k}\equiv B_k+B_{k+1}..(\mathrm{mod}\;p).....p,\,primo$$

4.- **Franco Pellegrino** (1906-1978). Nato ad Ispica, fu studente di Michele Cipolla a Palermo. Personaggio molto estroso interruppe gli studi per alcuni anni per dedicarsi alla musica. Andò in giro per il mondo a dare concerti di violino in collaborazione con la sua futura moglie, abile pianista. Si laurea in matematica nel 1941 ed inizia una stretta collaborazione con il prof Luigi Fantappiè[24] (1901-1956), che lo vorrà come Ricercatore presso l'Istituto di Alta Matematica di Roma (INdAM), allora diretto da Francesco Severi. I suoi campi di ricerca saranno la teoria dei funzionali Analitici, secondo Fantappiè, e la Teoria delle funzioni aritmetiche, secondo Cipolla, teorie queste alle quali darà ampi contributi. Fu Libero docente in Teoria dei Numeri, ebbe incarichi di insegnamento di vario genere quali Analisi Matematica a Roma La Sapienza e a Perugia, Matematiche Complementari a Messina e principalmente Algebra e Teoria dei numeri, per molti anni, a L'Aquila. Pur non divenendo professore di ruolo nelle Università, nel suo *Circolo di ricerche in collaborazione,* si sono formati, almeno nelle loro attività iniziali, vari ricercatori divenuti poi professori Ordinari (Michele Vaccaro, Francesco Succi, Franco Eugeni, Bruno Rizzi, Luigia Berardi, Antonio Maturo) o Professori Associati (Giuseppe Arcidacono,, Renato Migliorato, Serafino Patrizio).

5.- **Il Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica** (oggi INDAM) venne istituito con la legge 13 luglio 1939-XVII, n. 1129, a firma di Vittorio Emanuele III e Benito Mussolini. La fondazione nasce su proposta di Francesco Severi, da una idea di Luigi Fantappiè. Secondo alcuni fu anche un ruolo permanente, ad un rango rettorale, per il prof. Severi. Il primo Consiglio scientifico fu composto da Francesco Severi (presidente), Luigi Fantappiè, Giulio Krall, Enrico Bompiani e Mauro Picone. La denominazione "reale" viene eliminata e successivamente e l'Istituto fu intitolato a "*Francesco Severi*". L'attività principale dell'INDAM è costituita dalla organizzazione di corsi avanzati rivolti ai giovani tra i più dotati, contribuendo, in misura rilevante, alla formazione di molte delle maggiori personalità della matematica italiana, anche per le possibilità loro offerte di entrare in contatto con molti matematici della scena internazionale.

Franco Eugeni, nato nel 1941, ha percorso i vari gradini della carriera universitaria da Assistente e Professore Incaricato (1963) a Professore

[24] Si veda l'articolo G. Arcidiacono, La vaita e le opere di Luigi Fantappiè, Cento anni di Matematica, Atti del Convegno "Mathesis Centenario-1895-1995", Palombi Editore Roma (1996)230-232.

Ordinario (1986), insegnando per 46 anni (1963-2009) in diverse Università: Modena, L'Aquila, Chieti-Pescara. Romatre, Milano Politecnico, Teramo) varie discipline matematiche quali Geometria, Matematiche Complementari, Istituzioni di Matematiche, Matematica generale e Analisi Matematica. Negli ultimi anni è passato sulla cattedra di Logica e Filosofia della Scienza (2002) per l'insegnamento dell'Epistemologia dell'Informatica. Attualmente in pensione è stato per 2009-2016 professore di *Geometria Descrittiva e Matematica creativa* presso l'ISIA di Pescara (sede staccata dell'ISIA di Roma) e professore a contratto di *Tecniche di ricerca* nell'Università di Chieti, nel 2013-15 è stato Direttore dell'Istituto Universitario "A. Macagno" di Cuneo. È stato Presidente Nazionale della Mathesis nel triennio2001-2004, professore onorario ad Iasi (Romania), Commendatore della Repubblica Italiana. Ha al suo attivo oltre 300 titoli di pubblicazioni. Si vedano le sue attività su wikipedia e su www.apav.it e su www.eiris.it .

Fabrizio Maturo is Ph.D. in ''Economics and Statistics'', and Researcher at the Department of Business Administration of ''G. d'Annunzio'' University of Chieti-Pescara (Italy). He is chief editor of the international journal ''Ratio Mathematica'', and co-editor of the international book ''Mathematical-Statistical models and qualitative theories for economic and social sciences'' published by Springer. Fabrizio is also associate editor of the ''Journal of Statistics and Management Systems'' published by Taylor & Francis and participate to the editorial board of many other international journals, e.g. ''Italian Journal of Pure and Applied Mathematics'' and ''International Journal of Risk Theory''. His main research interests are diversity, functional data analysis, fuzzy logic, multivariate statistics, statistical model for business and management science, item response models, econometrics, and R statistical programming. His teaching activity regards statistics for businesses, mathematics, and computer science.

Bibliografia

(nei due elenchi le opere sono in ordine cronologico)

<u>Opere con il contributo di Bruno Rizzi</u>

[1] B.RIZZI, *Sulle successioni uniformemente dense*, Giornale Ist. Ital. Attuari, Anno XXXI, n.1 (1968) 1-6.

[2] B.RIZZI, *L'albero e il traliccio degli interi*, Per.di Mat, 5 (1973), 7-31.

[3] B.RIZZI,*Teoria dell'informazione e aritmetica addittiva*, Per.di Mat, (51)4-5 (1975) 7-12.

[4] F.MORICONI-B.RIZZI, *An Alternative Appoch to YES-NOT Questions Problem*, Proc. 6th Congress of Gesellschfft fur Informatic Stuttgart (1976).

[5] B.RIZZI, *Sulla estensione delle nozioni di condizionata e incondizionata additività,* La Ricerca (4) (1977), 5-18.

[6] F.MORICONI-B.RIZZI, *Solution at finite Terms of some problems in the Theory of communication*, Ist. Mat. Finanz. Univ. Genova (1977) 1-10.

[7] B.RIZZI, *Su alcune trasformate della zeta di Rieman*, Per.di Mat, (5) 1-2 (1978) 3-33.

[8] F.MORICONI-B.RIZZI, *Dystropy in the Dichotomic Trees,* Boll. Un. Mat. Ital. (5), 15-A(1978) 180-186

[9] F.EUGENI-B.RIZZI,*Una estensione di due identità di Anderson-Apostol e Landau*, La Ricerca, Anno XXX, n.2 (1978), 16-35.

[10] F.EUGENI-B.RIZZI, *Una classe di funzioni aritmetiche periodiche*, La Ricerca, Anno XXX, n.2 (1979), 3-14.

[11] F.EUGENI-B.RIZZI, *On certain Solutions of Cohen Functional Equation Relating the Brauer- Rademacher Identity,* Boll. Un. Mat. Ital. (5), 17-B (1980) 969-978.

[12] F.EUGENI-B.RIZZI, *Sugli elementi fortemente moltiplicativi dell'anello delle funzioni aritmetiche,* Atti Fac. Ing. L'Aquila (II) (1980) 127-142.

[13] L.BERARDI-B.RIZZI, *Somma generalizzata di Ramanujan per l'indicatore di Stevens,* La Ricerca, Anno XXXI, n.3 (1980), 29-35.

[14] M.CERASOLI-B.RIZZI, *La formula di Poincaré in probabilità,* Atti Convegno Nazionale Mathesis, Monopoli (1981) 219-229.

[15] F.EUGENI-B.RIZZI, *An Incidence Algebra On Rational Numbers,* Rend. Mat.(3-4) 12 (1982) 557-576.

[16] M.CERASOLI-F.EUGENI-B.RIZZI, *Sulla probabilità del k-MCD di n naturali scelti a caso,* Rend. Mat.(7) 3 (1983) 367-379.

[17] L.BERARDI-B.RIZZI, *Generalizziamo il codice RSA e la funzione di Eulero*, Atti I Simposio Internazionale "stato e prospettive della ricerca crittografica in Italia, Fondazione "Bordoni", Roma, 1987.

[18] B.RIZZI, *Some Identities for a Generalized Eulero's* Indicator , Rend. Mat.(9) 3 (1989) 312-3332.

[19] F.CASOLARO-F.EUGENI – B.RIZZI, *Una costruzione della soluzione generale della equazione di Eckford. Cohen*, Scritti in memoria di Giovanni Melzi, Collana Vita e pensiero, Univ. Cattolica Milano (1994) 95-106.

[20] A.MATURO-B.RIZZI,Sulla decomposizione di un numero primo in somma di due quadrati, Per.di Mat 4 (1989) 17-48.

[21] A.MATURO-B.RIZZI,Sulla decomposizione di un numero primo in somma di tre quadrati, Per.di Mat 3 (1990) 14-44.

[22] A.MATURO-B.RIZZI, Sulla decomposizione di un numero primo in somma di quadrati, Per.di Mat 4 (1990) 3-27.

[23] PENTTI HUAKKANEN, *Classical arithmetical identities involving a generalization of Ramanujan's sum*, Annal. Acc. Sci. Fennicae, Series A, I.Math, Helsinki, (1988), pp.1-69.

I seguenti lavori riguardano la Teoria delle funzioni aritmetiche e sono piuttosto interessanti, e completano il panorama dei riferimenti.

Altri autori correlati

[24] E.CESARO, *Probabilité de certain faits arithmetiques*, Mathesis, 4 (1884) , (anche in opera scelte dell'U.M.I.).

[25] E.CESARO, *Sur le plus grand diviseur de plusieurs nombres*, Ann.Mat.pura e Appl., (2) 13 (1885), 291-294. 4 (1884) , (anche in opera scelte dell'U.M.I.).

[26] M. CIPOLLA, *Specimen de Calcolo Arithmetico Integrale*, Rivista di Matematica (Torino), (1908).

[27] M. CIPOLLA, *Sui principi del calcolo aritmetico integrale*, Atti Accademia Scienze di Catania(V) vol Xiii, (1915). – (Sono riassunti tutti i suoi lavori sull'argomento).

[28] E.T.BELL, *An Arithmetical Theory of Certain Numerical Functions*,Seattle Washington, The University, (1915) – (Sono riassunti tutti i suoi lavori sull'argomento).

[29] S.RAMANUJAN, *On certain trigonometrical sum and their applications in the theory of Numbers*, Trans. Cambridge Sve. 22 (1918) 259-276.

[30] B.de FINETTI, *Probabilità che il Massimo comun divisore di n numeri scelti ad arbitrio suia un numero dato*, Rend. Ist. Lomb.Sc.Lett. II, LX (1927) 638-643.

[31] E.COHEN, *Aritmetical Inversion Formulas*, Canadian J.Math, 12 (1960), 399-409.

[32] E.D.CASHWELL-C.J.EVERETT, *The ring of numeric theoretic functions*, Pacific.J.Math 9, (1959) 975-985.

[33] E.COHEN, *The Brauer- Rademacher Identity,* Amer.Math. Montly,67 (1960) 30-33.

[34] F.PELLEGRINO, *Lineamenti di una Teoria delle funzioni aritmetiche*, Rend. Mat.(5) 15 (1960) 469-504.

[35] G.C.ROTA, *Theory of Mobius functions,* Z.Wharrsch. 2 (1964) 340-368.

[37] K.BACLAWSKI-G.C.ROTA, An Introduction to Probability and Random Processes, M.I.T. (1965).

[38] M.V.SUBBARAO, *The Brauer- Rademacher Identity*, Amer.Math. Montly,*72* (1965) 135-138.

[39] F.PELLEGRINO, *Elementi moltiplicativi dell'anello delle funzioni aritmetiche*, Rend. Mat.(5) 26(1967) 422-509.

[40] F.EUGENI, *Numeri primitivi ed indicatori generalizzati*, Rend. Mat.(6) ,1 (1973) 97-130.

[41]D.SURYANARAYANA, *On a Functional Equation Relating the Brauer- Rademacher Identity,* Enseignem. Math. *(2) 24 (1978) 55-61.*

[42] D.SURYANARAYANA, *Generalization of two identities of Ramanujan and Eckford Cohen,* , Boll. Un. Mat. Ital. (5), 17-A(1978) 424-430.

[43] L.BERARDI- F.EUGENI, *La derivata numerica ed applicazioni*, Per.di Mat,2-3 (1979), 53-79.

[44] L.BERARDI- F.EUGENI, *Funzioni indicatrici e applicazioni*, Per.di Mat,3-4(1980), 51-60.

[45] M.CERASOLI-F.EUGENI-M.PROTASI, *Elementi di Matematica Discreta, Zanichelli* , Bologna 1988, con una presentazione di Giancarlo Rota..

[46] F.EUGENI, *The generalized Cohen functional equation*, Atti Fac Ing. Cagliari, 18 (1982)pp.257-267.,

[47] M.CERASOLI-F.EUGENI, (E,k)-reduced residue system(mod r^k) and a generalization of Ramanujan's sum, La Ricerca (1)34, Roma (1983), pp.78-91.N