Science & Philosophy **ISSN**: 2282-7757
Vol. 5(1), 2017, pp. 91-108 **eISSN**: 2282-7765

On a Geometric Foundation of Mathematics
(Su una Fondazione Geometrica della Matematica)

Giuseppina Anatriello
Università degli Studi di Napoli “Federico II”, Naples, Italy
anatriello@unina.it

Received on: 01-04-2017. **Accepted** on: 20-06-2017. **Published** on: 30-06-2017

Abstract

Frege with *Grundlagen der Arithmetik* and Hilbert with *Grundlagen der Geometrie* are two outstanding figures that are attributed to a fundamental role in the arithmetization of mathematics. However, the latest writings of Frege, released posthumously, testify to his reflection on the nature of mathematics. In them Frege argues that mathematics is all about geometry and begins a theory that aims to define complex numbers geometrically. For this purpose he introduced a notion of identical relationships that tends to set up a geometric aspect ratio. In addition, Grundlagen der Geometrie can be given a radically different reading from that which emphasizes Hilbert's exclusive intention to found geometry on a purely formal axiomatic system. Several authors argue that by his work, and in particular through the *arithmetic of the segment*s introduced in it, Hilbert wanted to emancipate the geometry from instruments outside her, such as numbers, finding them within a substantially synthetic geometry.

Keywords: Foundations of geometry, synthetic geometry, geometric foundation of numbers.

Sunto

Frege con Grundlagen der Arithmetik e Hilbert con Grundlagen der Geometrie sono due figure di spicco alle quali si attribuisce un ruolo

fondamentale nel processo di aritmetizzazione della matematica. Tuttavia gli ultimi scritti di Frege, pubblicati postumi, testimoniano un suo ripensamento sulla natura della matematica. In essi Frege sostiene che la matematica si fonda tutta sulla geometria e avvia una teoria che punta a definire geometricamente i numeri complessi. A tal fine introduce una nozione di rapporti identici che tende a impostare una teoria geometrica delle proporzioni. Inoltre, si può dare dei Grundlagen der Geometrie una lettura radicalmente diversa da quella che enfatizza l'esclusivo intento di Hilbert di fondare la geometria su un sistema assiomatico puramente formale. Diversi autori sostengono che con la sua opera, e in particolare attraverso l'aritmetica dei segmenti in essa introdotta, Hilbert volesse emancipare la geometria da strumenti a lei estranei, come i numeri, ritrovandoli all'interno di una teoria geometrica sostanzialmente sintetica.
Parole Chiave: Fondamenti di geometria, geometria sintetica, fondazione geometrica dei numeri.

1. Introduzione

Nel suo sviluppo storico la matematica ha subito un processo di "degeometrizzazione" a favore di una sua "aritmetizzazione" ([16]). L'aritmetizzazione della matematica in qualche modo è correlata a una visione moderna della matematica che la fa coincidere con la sua struttura linguistica, indifferente all'essenza delle cose di cui tratta e slegata dalla percezione, bandendo da essa il metodo sintetico che è pesantemente presente nella matematica classica dell'antichità e di cui gli *Element*i di Euclide rappresentano un'alta espressione.

Un filone di pensiero dei nostri giorni rilegittima in qualche modo il punto di vista sintetico ritenendo che gli strumenti matematici siano stati concepiti da una mente che ha relazioni con il mondo esterno attraverso un corpo capace di interagire con esso e che le idee matematiche ricevono forma dalle nostre esperienze senso-motorie (vedi, ad esempio, [7]).

Gottlob Frege con *Grundlagen der Arithmetik* [Fondamenti dell'Aritmetica] (1894) e David Hilbert con *Grundlagen der Geometrie* [Fondamenti della Geometria] (1899) sono due figure di spicco alle quali si attribuisce un ruolo fondamentale nel processo di aritmetizzazione della matematica. In questo lavoro vogliamo riportare testimonianze del pensiero di Frege e Hilbert che proverebbero che al contrario gli stessi autori possono essere presi a sostegno del filone che si contrappone al processo di degeometrizzazione della matematica.

In *Nuovo tentativo di fondazione dell'aritmetica* e in *Numeri e Aritmetica* (pubblicati postumi in [6]), scritti degli ultimi anni della sua vita, Frege mostra di aver abbandonato l'idea che tutta la matematica possa essere fondata sull'aritmetica e individua nella geometria euclidea la vera fonte conoscitiva della matematica, e pertanto sostiene che l'essenza del numero è di natura geometrica. In particolare, in *Nuovo tentativo di fondazione dell'aritmetica* avvia un percorso per definire i numeri complessi a partire dal piano euclideo e, con un approccio sintetico, definisce una nozione di rapporto tra segmenti che utilizza la configurazione di Talete (vedi Figura 1 e Figura 3).

Di recente Giovannini in [11], basandosi anche su appunti delle lezioni di geometria tenute da Hilbert (di cui alcuni non pubblicati), ha ipotizzato che con *l'aritmetica dei segmenti,* introdotta nei suoi *Fondamenti della Geometria,* Hilbert si prefiggesse lo scopo di dotare la geometria di una base indipendente che non utilizzasse concetti presi in prestito da altre discipline matematiche, come l'aritmetica o l'analisi. La stessa tesi è espressa da Stillwell in [19] e in [20].

Attualmente coesistono tre differenti approcci alla geometria: la geometria classica che ha le sue basi nella teoria assiomatica e trae origine dagli *Elementi* di Euclide, e che codifica ad un livello razionale ed astratto l'uso della riga e del compasso, la geometria delle coordinate che nasce dalla geometria cartesiana e quindi dalla introduzione dell'algebra nella trattazione dei problemi geometrici, e la geometria delle trasformazioni la cui impostazione teorica si trova nel programma di Klein. L'assiomatica degli *Element*i di Euclide in tempi recenti è stata sostituita da quella proposta da Hilbert nei suoi *Fondamenti della Geometria*, ma, in realtà, più nei principi che nei fatti.

Di certo nella didattica della geometria elementare non si può rinunciare a un approccio sintetico del tipo di quello degli *Elementi* di Euclide e l'aritmetica dei segmenti di Hilbert potrebbe essere utilizzata con efficacia per scoprire le proprietà di struttura di cui godono gli insiemi numerici dai naturali ai complessi.

Questo tipo di approccio sarebbe coerente con le recenti ipotesi che il pensiero umano sia il risultato di una complessa interazione tra sistemi di rappresentazione eterogenei, visuali, spaziali, linguistici, interagenti tra di loro, e che utilizza inferenze logiche diverse da quelle della logica tradizionale. Ragionamenti basati sulle figure stanno diventando d'interesse in campi interdisciplinari, nella logica, nella filosofia e nelle scienze cognitive (vedi, ad esempio [2, 5, 10, 14, 15, 17]).

Nell'ultima sezione del presente lavoro esponiamo per grandi linee la proposta presente in [1] di un sistema assiomatico di tipo sintetico (nel senso della geometria classica), che tiene conto dei lavori di Frege e di Hilbert, e che consente di introdurre in modo diretto e elementare i numeri complessi in ambito puramente geometrico.

2. La *Géométrie* di Cartesio

Cartesio e Fermat introdussero il *metodo delle coordinate* separatamente, ma contemporaneamente. Cartesio fu il solo a pubblicarlo. Comunemente tale metodo è indicato come punto d'inizio del processo di aritmetizzazione della matematica. Lo storico Boyer in [4] scrive:

> *Il grande risultato ottenuto da Cartesio in matematica viene descritto invariabilmente come l'aritmetizzazione della geometria. La verità è che Cartesio non aveva alcuna intenzione di aritmetizzare la geometria. In effetti, lo scopo de La Géométrie potrebbe essere descritto con la stessa validità come la traduzione delle operazioni algebriche nel linguaggio della geometria.*

Secondo Boyer con il suo metodo Cartesio voleva creare

> *un collegamento tra i due campi quello della geometria e quello dell'algebra, ma l'associazione era bipolare e non pregiudicante a favore di una delle direzioni*.

Come riporta ancora Boyer in [4], il lavoro di Viète, definito come il più grande algebrista del XVI secolo, fu criticato da Cartesio perché segnava una separazione troppo grande tra algebra e geometria. Le oscurità della nuova algebra infastidivano Cartesio. In un certo senso Cartesio stava tornando nel pensiero all'antica algebra geometrica, mentre allo stesso tempo incoraggiò lo sviluppo delle forme simboliche delle espressioni.

La *Géométrie* fu pubblicata in appendice al celebre *Discours de la Methode*.

La prima sezione del lavoro è intitolata "Come i calcoli di aritmetica sono correlati alle operazioni di geometria" e la seconda descrive "Come moltiplicazione, divisione, e l'estrazione di radici quadrate vengono eseguite geometricamente".

Nel trattato principale Cartesio non sembra essere stato di parte né per la geometria né per l'algebra, accusando la prima di affidarsi troppo pesantemente ai disegni (che affaticano l'immaginazione inutilmente) e criticando l'altra come arte confusa e oscura (che mette in imbarazzo la mente).

Lo scopo del suo metodo era duplice: (1) attraverso la procedura algebrica liberare la geometria dall'uso di diagrammi e (2) spiegare le operazioni dell'algebra attraverso l'interpretazione geometrica.

3. Nuovo tentativo di fondazione dell'aritmetica di Frege

Frege muore il 26 luglio del 1925, sei mesi prima della sua morte affidò dei suoi manoscritti inediti al figlio adottivo Alfred scrivendogli:

> *Caro Alfred, non disprezzare questi miei manoscritti. Anche se non è tutto oro c'è dell'oro. Credo che un giorno alcune cose che contengono saranno apprezzate assai più di oggi. Fa che nulla vada perduto.*
>
> *Con affetto tuo padre.*
>
> *È una gran parte di me stesso che con essi ti lascio*.

In più alla sua morte lasciava una raccolta di scambi epistolari scientifici che, per volontà testamentaria, si sarebbe potuta pubblicare solo a trent'anni dalla morte di tutti i mittenti.

Dal 1930 H. Scholz si interessò sempre più all'opera di Frege, per questo si mise in contatto con Alfred Frege, il quale gli diede i manoscritti affidatigli dal padre per una futura pubblicazione, con l'accordo che il *Nachlass* sarebbe stato depositato nella biblioteca dell'Università di Münster. Dal 1936 Scholz cominciò a trascrivere e redigere gli scritti di Frege, che si erano arricchiti di altra corrispondenza che aveva raccolto, ai fini di una pubblicazione. Il 25-3-1945 i manoscritti originali andarono perduti in seguito ad un bombardamento aereo di Münster che colpì anche la biblioteca dove era custodito il *Nachlass*. Scholtz aveva provveduto a far trascrivere solo le parti a suo parere rilevanti degli scritti inediti raccolti. Dopo la guerra riprese il progetto di pubblicazione, ma questo fu portato a termine solo nel 1968, dopo la sua morte di (1957) (vedi Premessa in [9]). L'edizione italiana dell'opera, dal titolo *Scritti postumi* ([9]), è del 1987. Gli *Scritti postumi* raccolgono scritti di Frege che ricoprono quasi l'intero periodo produttivo dell'autore.

C. Penco nella voce Frege dell'Enciclopedia di Gallarate (revisione della precedente di F. Barone) scrive:

> *Frege nei suoi ultimi scritti, pubblicati postumi, abbandonò il logicismo e delineò una teoria della fondazione geometrica della matematica, avvicinandosi così alle idee kantiane contro cui si era scagliato nei suoi primi scritti, soprattutto in Grundlagen der Arithmetik (1894), che peraltro rappresenta a tutt'oggi un classico della filosofia della matematica.*

Effettivamente Frege in *Nuovo tentativo di fondazione dell'aritmetica,* facente parte del *Nachlass,* avvia una teoria per fondare i numeri complessi su basi puramente geometriche:

> *Ho dovuto rinunciare alla mia idea che l'aritmetica sia un ramo della logica e che di conseguenza tutto in aritmetica debba venir dimostrato in modo puramente logico. [...] Ho dovuto sacrificare la mia opinione che l'aritmetica non ha bisogno di mutuare dall'intuizione alcuna base dimostrativa, dove per intuizione intendo la fonte conoscitiva geometrica, cioè la fonte da cui derivano gli assiomi della geometria (euclidea).*

La datazione 1924-1925 dello scritto, presente nell'edizione italiana, è presunta e si fonda sull'analogia dei suoi contenuti con quelli di *Le fonti conoscitiva della matematica e delle scienze naturali matematiche,* pure appartenente agli *Scritti postumi* e che è presumibilmente un articolo dato per la pubblicazione per la serie *Wissenschaftliche Grandfragen*, serie curata da Bauch e Honigswalid. Quest'ultimo, pur esprimendo un giudizio positivo sul lavoro di Frege, ne chiese un ampliamento che non poté essere fatto perché da lì a poco Frege morì. Analoghi contenuti (assenti prima del 1924 negli scritti di Frege) vengono espressi in *Numeri e Aritmetica,* sempre pubblicato in *Scritti postumi,* e che quindi viene anch'esso datato 1924-25.

Tornando a *Nuovo tentativo di fondazione dell'aritmetica,* in esso Frege distingue tre fonti conoscitive per la matematica e la fisica: percezione sensibile, fonte conoscitiva geometrica e fonte conoscitiva logica. Sulla fonte conoscitiva logica afferma che essa è chiamata in causa laddove vengono tratte inferenze e da sola non può fornire presumibilmente alcun numero. L'intera matematica scaturisce poi da un'unica fonte conoscitiva: quella geometrica e in questa è implicitamente compresa la fonte conoscitiva della logica. Nello stesso brano scrive:

> *Esporrò prima il mio piano. Discostandomi dalla consuetudine, non estenderò il campo di quello che io chiamo numero prendendo le mosse dai numeri interi positivi [...].*
>
> *Cerchi dunque il lettore di dimenticare quel che finora ha creduto di sapere sui numeri complessi e sui rapporti di segmenti, infatti, tale sapere è probabilmente un'illusione. L'errore fondamentale consiste nel prendere le mosse dai numeri che si sono appresi da bambini.*
>
> *Se quello accettato fino ad ora si mostra insufficiente, va demolito e sostituito con un nuovo edificio. Io mi dirigo direttamente alla meta finale, ossia ai numeri complessi.*

Poi introduce un gruppo di definizioni tra cui quella *di rapporti identici di segmenti* che è la più interessante per lo sviluppo del presente lavoro. In Figura 1 riportiamo il disegno che Frege utilizza per definire che il rapporto dei segmenti MA e MB è identico al rapporto di MC e MD.

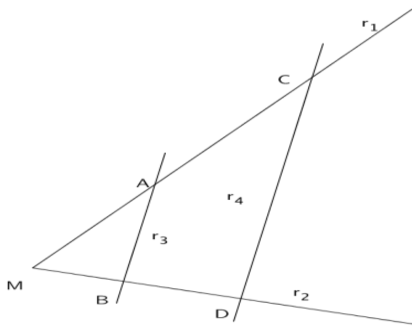

Fig 1: Rapporti identici di segmenti

Sembra stia avviando così una teoria delle proporzioni di tipo geometrico, inserendo nella definizione di rapporti identici il contenuto del Teorema di Talete.

Il lavoro di Frege si interrompe praticamente qui.

Nel brano seguente tratto da *Numeri e Aritmetica*, Frege esprime ancora in modo netto la sua convinzione che sia possibile una visione unitaria della matematica alla cui base vada posta la geometria (nel senso della geometria classica euclidea):

> *I primi numeri che si considerano, gli interi positivi, nascono dal contare. Essi sono i numeri che si insegnano per primi ai bambini perché un bambino deve essere preparato a fare conti, a vendere e a comprare. Ai matematici servono altri numeri. [...] Non c'è alcun ponte che conduce dai numeri dei bambini [gli interi positivi] ai numeri irrazionali. Anch'io un tempo ritenevo possibile conquistare per via puramente logica tutto il campo numerico a partire dai numeri dei bambini [...].*

> *Quanto più ho riflettuto su questo punto, tanto più mi sono convinto che aritmetica e geometria sono cresciute dallo stesso terreno e, precisamente, dal terreno della geometria, così che tutta l'aritmetica è, propriamente, geometria. La matematica appare così perfettamente nella sua essenza.*

4. I Fondamenti della Geometria di Hilbert

Il nome di Hilbert e quello della sua opera *Fondamenti della Geometria* sono per tradizione associati ad un programma formalista della matematica, nel quale l'accettazione del sistema di assiomi non avviene in forza della loro eventuale evidenza, bensì di una dimostrazione di non contraddittorietà, come se fosse un gioco, ricco di regole ma privo di contenuto (vedi [3], ad esempio). Secondo R. Betti (vedi [3]) piuttosto che ai *Fondamenti della geometria,* questa associazione è legata

> *forse al tentativo di Hilbert degli anni '20 di dimostrare la consistenza dell'aritmetica con procedimenti finiti - programma com'è noto vanificato dal teorema di incompletezza di Godel nel 1931*.

Sempre in [3], Betti sostiene di essere d'accordo con gli studiosi del '900 che ritengono chiaro che la conoscenza geometrica che Hilbert vuole formalizzare alla fine dell'Ottocento è di carattere empirico (vedi anche [5]). Del resto, il motto posto come epigrafe del libro, tratto dalla *Critica della ragion pura* di Kant :

> *Ogni conoscenza umana ha origine da intuizioni, procede per concetti e termina con le idee*

potrebbe essere preso come ulteriore prova della precedente affermazione.

Nei suoi *Fondamenti della Geometria* Hilbert sviluppa su basi puramente geometriche una teoria delle proporzioni. Osserva Rowe in [18]:

> *Negli Elementi di Euclide l'esposizione geometrica si interrompe dopo i primi quattro libri per esporre una teoria delle proporzioni che viene applicata nel Libro VI alle figure piane.*

Con la sua teoria delle proporzioni Hilbert

> *realizza una unificazione di teorie che, dai tempi di Euclide, si sono sempre divise su fondamenta separate* (quella geometrica e quella aritmetica (ndA)). *Questo ha permesso la costruzione di nuovi ponti tra le geometrie assiomatiche puramente sintetiche e le geometrie analitiche che operano su diversi campi numerici.*

L'unificazione della matematica, si diceva sopra, è la motivazione che spinse Cartesio a elaborare il suo *metodo delle coordinate* e Frege a voler fondare geometricamente l'aritmetica partendo dai numeri complessi.

Hilbert tenne il suo primo corso di lezioni sulla geometria nel semestre estivo del 1891. Il tema era la geometria proiettiva. Nei secoli XVII e XVIII c'era stato uno sviluppo della geometria unilaterale di tipo analitico. Al contrario, con le opere di geometria descrittiva e di quella proiettiva di Monge (1746-1818), Poncelet (1788-1867), Steiner (1796-1863) e von Staudt (1798-1867) vi fu un ritorno ai metodi puramente geometrici: la nuova geometria veniva costruita rigorosamente con le tecniche di sintesi della geometria degli *Elementi* come una reazione all'unilaterale sviluppo analitico della geometria.

In questo suo primo corso Hilbert sembra condividere la stessa opinione e come punto di riferimento di questo ritorno menziona in particolare il libro di Steiner *Entwicklung der Abhangigkeit geometrischer Gestalten voneinander* [Sviluppo sistematico della reciproca dipendenza di forme geometriche] (1832).

In [11] vengono si possono trovare interessanti passi degli appunti di Hilbert, alcuni non pubblicati, delle sue lezioni dei corsi di Geometria (appunti conservati in Niedersächsische Staats und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung) che possono gettare una nuova luce sugli scopi che si proponeva Hilbert con i suoi *Fondamenti della Geometria* del 1899. Di seguito riportiamo quelli più significativi per questo lavoro.

In Wissenschaftliche Tagebücher, Cod. Ms. D. Hilbert 535 (1891), Hilbert scrive:

> *La ricchezza della geometria greca era nelle idee, nei risultati e nei problemi, ma aveva un difetto: a essa mancava un metodo generale, che rende possibile l'ulteriore fruttuoso sviluppo della scienza. Nella geometria di Euclide ogni cosa appare già finita e non c'è posto per un lavoro produttivo [...]. Questa idea [il metodo delle coordinate] rende ogni problema geometrico immediatamente accessibile al calcolo. Così Cartesio è diventato l'inventore della geometria analitica. I teoremi dei greci sono stati dimostrati ancora una volta, e poi sono stati generalizzati. Le formule, il calcolo, e, grazie a Cartesio un vero e proprio metodo, sostituirono trucchi speciali.*

Hilbert riconosce la potenza del metodo delle coordinate, ma rileva come la riduzione a calcolo porti a un risultato che non è del tutto positivo e nello stesso brano scrive:

> *Per quanto importante questo progresso sia stato, e comunque meravigliosi i successi siano stati, tuttavia la geometria come tale ha sofferto, alla fine, dello sviluppo unilaterale di questo metodo. Si calcola esclusivamente, senza avere alcuna intuizione di ciò che si è calcolato. Il senso della figura e della costruzione geometrica è stato perso.*

Nei fatti, ritiene Hilbert, il metodo delle coordinate non aveva prodotto il risultato (auspicato da Cartesio) di uno sviluppo armonico della matematica tra algebra e geometria.

In Wissenschaftliche Tagebücher, Cod. Ms. D. Hilbert 600 (anno non presente sul manoscritto), Hilbert sostiene che la geometria dovesse essere una disciplina autonoma rispetto all'analisi, anche se entrambe potevano arricchirsi l'una degli strumenti dell'altra per fini euristici, infatti scrive:

> *Se si lavora in geometria, allora deve essere fatto sinteticamente. La superficie o la curva osservate cosa hanno a che fare con un'equazione f (x, y, z) = 0? Nell'essenza della geometria l'analisi è uno strumento estraneo, che quindi deve essere evitato, se vogliamo erigere o fondare la geometria come un edificio. Ma la geometria e l'analisi possono stimolarsi e servirsi l'una con l'altra per fini euristici.*

Nel corso della vita di Hilbert ai *Fondamenti della Geometria* si sono aggiunte dieci appendici. Allievi di Hilbert si preoccuparono di curare nuove edizioni anche dopo la sua morte. I *Fondamenti della Geometria* ebbero in cinquant'anni otto edizioni che servivano a specificare meglio alcuni punti dell'opera. La definizione di rigore matematico ha subito un'evoluzione nel tempo e già nel 1954, Freudenthal nella sua recensione all'ottava edizione dei *Fondamenti della Geometria* ([8]) osserva come certe definizioni sono "infelici" e che:

> *Quando oggi si cita qualcuno con le parole "ha dimostrato in modo più rigoroso" (8^a ediz. p. 81), si penserà che lo si stia prendendo in giro; mezzo secolo fa il rigore in Geometria era veramente diverso.*

Sempre in [8] si trovano interessanti analisi dell'opera, ad esempio si evidenzia che:

- *senza le appendici è di un settimo più lunga, rispetto all'originale;*
- *i curatori delle singole edizioni hanno gradualmente colmato alcune lacune dell'opera, a volte anche a costo di complicazioni o di soluzioni poco belle;*
- *alcune dimostrazioni che Hilbert ha tralasciato in quanto "facili" non lo erano per niente;*
- *nel Capitolo 1, anche nell'ottava edizione, permane una lacuna. Il teorema 10, relativo al fatto che un poligono semplice divide in due il piano, si ottiene "senza difficoltà", ovvero senza dimostrazione, mentre la dimostrazione è realmente faticosa se non la si tratta con ingegnosità. Come si possa fare, lo ha mostrato molto elegantemente Waerden.*

Ma oltre molte altre note puntuali, in [8] Freudethal pone l'accento che ad Hilbert, nella teoria delle proporzioni, sia riuscito qualcosa che avrebbe potuto essere l'ideale greco: una trattazione del tutto geometrica.

Nei *Fondamenti della Geometria* nel capitolo 3, *Teoria delle proporzioni*, Hilbert introduce il calcolo dei segmenti sulla retta. Hilbert specifica di voler utilizzare il termine "uguali" invece di "congruenti" e quindi il segno "=" invece di " ≡ ". Definisce la somma di segmenti consecutivi come rappresentato in figura 2 a) e osserva che valgono le proprietà commutativa e associativa per gli assiomi lineari di congruenza dati nel Capitolo1. Per il prodotto descrive la costruzione effettuata in Figura 2 b). Prova la proprietà commutativa del prodotto utilizzando il teorema di Pascal, che ha dimostrato nelle pagine precedenti in modo non semplice, e utilizzando senza dimostrarli altri teoremi della classica geometria euclidea (se gli angoli $A\hat{C}B$ e $A\hat{E}B$ sono retti allora A, B, C, E si trovano sulla stessa circonferenza e angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda sono congruenti). Prova poi la proprietà associativa del prodotto utilizzando ancora il teorema di Pascal. Dimostra infine la proprietà distributiva.

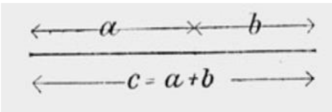

Fig. 2 a): Somma di segmenti

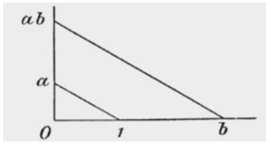

Fig. 2 b): Prodotto di segmenti

Segue il paragrafo *Le proporzioni e i teoremi sulla similitudine*. In esso Hilbert scrive:

> *Con l'aiuto del calcolo dei segmenti sopra esposto si può fondare la teoria delle proporzioni di Euclide in modo irreprensibile e senza l'assioma di Archimede nel modo seguente*:

$$a : b = c : d \Leftrightarrow a\,d = b\,c.$$

Il paragrafo successivo s'intitola *Le equazioni della retta e del piano*. In esso Hilbert introduce, a partire dall'aritmetica dei segmenti, gli assi cartesiani nel piano. Tra i punti di un asse dice di poter operare secondo le regole di calcolo dei numeri reali. Perviene all'equazione cartesiana della retta. Di seguito aggiunge che *si dimostrano in modo altrettanto facile i risultati corrispondenti nella geometria dello spazio*.

Hilbert termina il percorso mettendo in corrispondenza i punti della retta con i numeri reali, corrispondenza che è biunivoca con l'aggiunta del gruppo degli assiomi di continuità (Archimedeo+Completezza).

In [8] Freudethal scrive:

> *Ciò che si trova nel terzo capitolo delle Grundlagen è però molto più complicato e poco chiaro; una descrizione di gran lunga più semplice si trova solo nell'ottava edizione come supplemento II del curatore*.

A. Conte nelle note sui *Fondamenti* di Hilbert A. (Suppl. Not. UMI n. 7, 1979) scrive:

> *Pur trattando di argomenti elementari, la lettura del libro richiede una certa dimestichezza con la geometria affine e con la geometria proiettiva, in quanto molte delle dimostrazioni sono soltanto accennate e fanno riferimento a risultati dati per noti*.

La possibilità di individuare sulla retta euclidea una struttura algebrica di campo ordinato alla Hilbert è dimostrata in modo efficace e semplice da Stillwell in [20] utilizzando il teorema di Talete che presuppone l'uso dei numeri. La tesi di Stillwell in [20] è esattamente quella di porre l'accento su come con i numeri è tutto più semplice rispetto alla teoria sviluppata da Hilbert. Osserviamo che già in [19] Stillwell aveva scritto che:

> *Hilbert ha trasformato il nostro punto di vista sui teoremi di Pappo e di Desargues mettendo in evidenza che essi esprimono la struttura algebrica che soggiace alla geometria proiettiva Hilbert deve aggiungere l'assioma di continuità agli assiomi geometrici ma evidentemente vuole mostrare che i numeri reali possono avere una fondazione geometrica*.

Quanto detto sopra evidenzia l'importanza di sviluppare una teoria elementare delle proporzioni puramente geometrica che salvi la finalità di fondare i numeri sulla geometria.

5. Definizione dei numeri complessi via geometria sintetica secondo l'idea di Frege e utilizzando l'aritmetica dei segmenti di Hilbert.

Come rilevato in [21] da Vailati, già Euclide sembra voler cercare strade alternative a dimostrazioni che richiedono il ricorso alla teoria delle proporzioni, ad esempio quando fornisce del teorema di Pitagora anche una dimostrazione basata sulla teoria delle equivalenze. Nel Rinascimento, quando ritornò l'interesse per le speculazioni geometriche, ricomparve la tendenza a sostituire la teoria delle proporzioni esposta negli *Elementi* di Euclide con una che fosse di natura più geometrica. In [21] si può trovare un percorso storico delle teorie sviluppate dalla scuola italiana e quella tedesca fino agli inizi del 1900 (in [21] si citano studi di Giordano da Bitonto, Grassmann, Rajola-Pescarini, Hoppe, Biagi). Nello sviluppo di una teoria delle proporzioni indipendente dalla teoria delle equivalenze i teoremi di Pappo e di Desargues giocano un ruolo essenziale.

In [20] Stillwell utilizza il teorema di Talete, e quindi un approccio non puramente geometrico, per giungere a facili e rapide verifiche delle proprietà di campo soddisfatte dall'aritmetica dei segmenti.

In *Nuovo tentativo di fondazione dell'aritmetica* Frege suggerisce di sviluppare una teoria geometrica delle proporzioni attraverso la sua definizione di rapporti identici tra segmenti che esprime proprio il contenuto del teorema di Talete. In Hilbert la definizione di prodotto tra segmenti contiene lo stesso teorema di Talete.

In [1] gli autori propongono un sistema assiomatico di tipo sintetico che porta a sviluppare l'idea di Frege: tutto il piano euclideo nei suoi aspetti affini e metrici è ricondotto a operazioni tra punti che strutturano l'insieme dei punti del piano a campo.

La teoria che si sviluppa in [1] assume come definizione di uguaglianza tra segmenti e angoli quella deducibile dalle classiche costruzioni del trasporto dell'angolo e del segmento (vedi Figure 3 a) e 3 b)), costruzioni consentite dai primi tre postulati degli *Elementi* di Euclide.

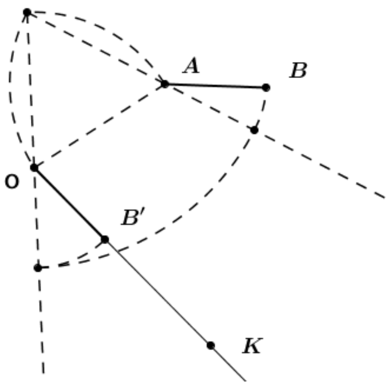

Fig. 3 a): Costruzione Trasporto del segmento

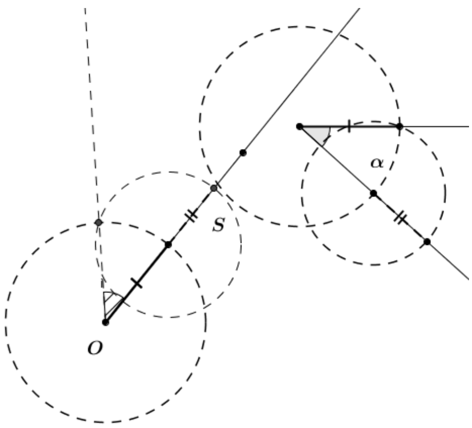

Fig. 3 b): Costruzione Trasporto dell'angolo

Si dà poi la seguente definizione di *proporzione tra punti* del piano rispetto a un polo O (vedi Figura 3):

$$P : P' =_{O} K : K' \Leftrightarrow PP' // KK'$$

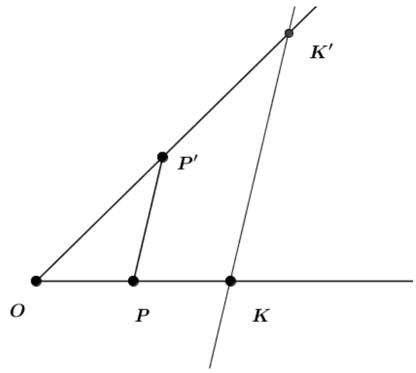

Fig. 4: Configurazione di Talete

Con riferimento alle Figure 5 a) e 5 b) si assumono come assiomi i seguenti risultati deducibili dal Teorema di Pappo e dal Teorema di Desargues.

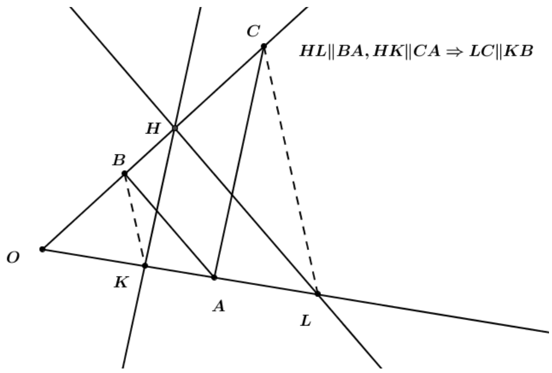

Fig. 5 a): Configurazione Teorema di Pappo

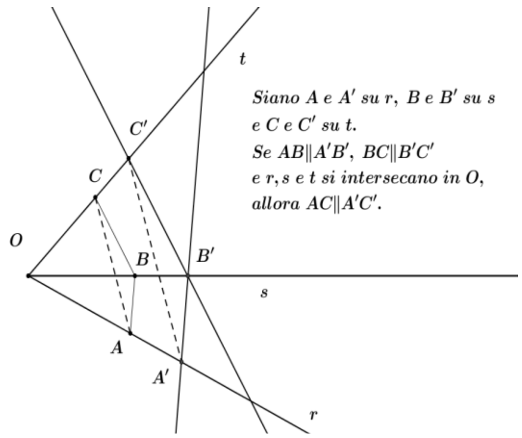

Fig. 5 b): Configurazione Teorema di Desargues

Assioma I (Pappo): Se H e C appartengono alla semiretta OB e K e L appartengono alla semiretta OA, allora vale la seguente implicazione:

$$(A:L =_O B:H,\ K:A =_O H:C) \Rightarrow K:L =_O B:C.$$

Assioma II (Desargues): Se A' appartiene alla semiretta OA, B' appartiene alla semiretta OB, e C' appartiene alla semiretta OC, allora vale la seguente implicazione:

$$(B:B' =_O C:C',\ A:A' =_O C:C') \Rightarrow A:A' =_O B:B'.$$

Introdotta la nozione di *modulo* di un punto P su semiretta OU (denotato con ||P||) come il punto d'intersezione della semiretta OU con la circonferenza di centro O passante per P (vedi Figura 6),

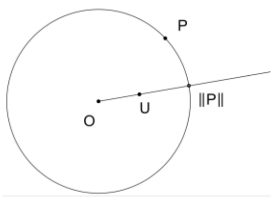

Fig 6: Definizione geometrica di modulo di un punto

si può dare la nozione di proporzionalità tra moduli come segue: siano A, A', B, B' distinti da O, diremo che A, A', B, B' hanno i moduli in proporzione e scriveremo $||A||:||A'|| =_O ||B||:||B'||$ se esistono A_0, A'_0, B_0, B'_0 tali che $||A||=||A_0||$, $||A'||=||A_0'||$, $||B||=||B_0||$, $||B'||=||B_0'||$, $A_0:A'_0 =_O B_0:B'_0$ (vedi Figura 7).

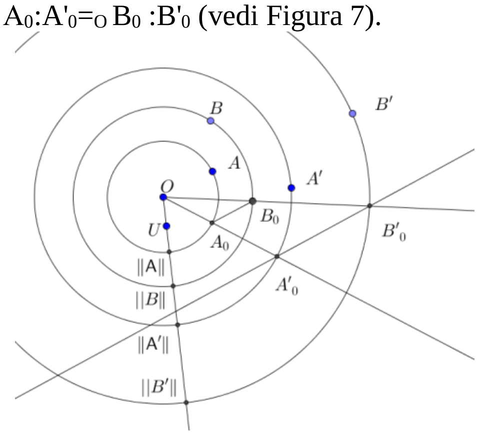

Fig 7: Definizione di proporzionalità tra moduli.

È importante evidenziare che la teoria geometrica delle proporzioni che si è definita può sostituire, laddove interviene, l'utilizzo del Teorema di Talete.

Se si vuole ottenere una nozione equivalente a quella dei rapporti identici di Frege si potrebbe procedere come segue: dato un punto O e i punti P e Q, distinti da O, si può definire *rapporto* di ||P|| e ||Q||, che denoteremo con $||P||/_O||Q||$, l'insieme delle proporzioni del tipo $||P||:||Q|| =_O P':Q'$.

5.1 Operazioni tra punti come cambi di riferimento

Fissati O e U, punti distinti, per individuare un punto P distinto da O basta considerare il rapporto $\|P\|/_O U$ e l'angolo PÔU. Pertanto chiameremo (O, U) *riferimento* del piano e $\|P\|/_O U$ e PÔU *coordinate geometriche* di P rispetto a (O, U).

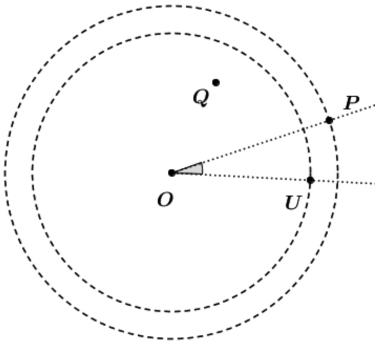

Fig. 8: Coordinate geometriche di P in un riferimento (O, U)

Sia assegnato un piano euclideo riferito a (O, U). Dati P e Q, definiamo il punto somma P+Q nel seguente modo.

Sia PU' semiretta parallela e concorde con OU e il segmento PU' uguale al segmento OU. Il punto somma P+Q viene definito come il punto che ha nel riferimento (P, U') coordinate geometriche uguali a quelle di Q in (O, U) (con la seguente convenzione: considerati R, S, O' porremo $\|P\|/_O\|Q\|=\|R\|/_{O'}\|S\|$ se esistono $\|P\|:\|Q\|=_O P':Q'$ e $\|R\|:\|S\| =_O R':S'$ tali che i triangoli P'OQ' e R'O'S sono congruenti essendo P' l'omologo di R', O quello di O', Q' quello di S').

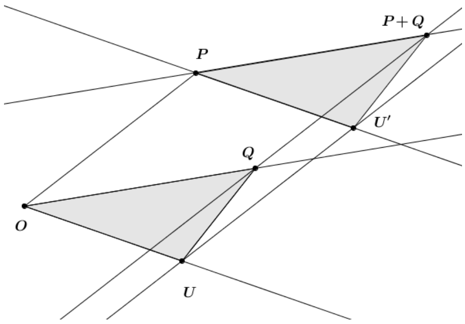

Fig. 9: Somma nel caso O, P, Q sono non allineati

Ovviamente se O, P e Q sono allineati il punto P+Q appartiene alla retta passante per essi, sicché la somma si riduce alla ordinaria somma euclidea.

Se i punti O, P e Q non sono allineati il punto K=P+Q, che si ottiene, può essere visto come vertice opposto a O nel parallelogramma avente per vertici ordinati P, O, Q e il triangolo è il traslato U'PK del triangolo UOQ.

Dati P e Q, distinti da O, definiamo il punto prodotto P $\cdot$ Q come il punto che ha in (O, P) le coordinate geometriche uguali a quelle che Q ha (O, U).

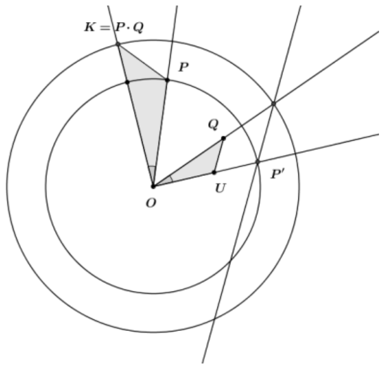

Fig.10: Prodotto nel caso O, P, Q sono non allineati.

Come conseguenza immediata si ottiene l'equazione parametrica della retta. Se con t denotiamo i punti della retta OU, allora i punti P=t Q sono tutti e soli i punti della retta OQ, e i punti $P=P_O+tQ$ sono tutti e soli i punti della retta passante per P_O e parallela alla retta OQ.

Come si può desumere dalla Figura 11, il legame tra prodotto e proporzionalità è il seguente:

||A|| : ||B|| = ||C|| : ||D|| *se e solo se* ||A|| $\cdot$||D||=||B|| $\cdot$||C||,

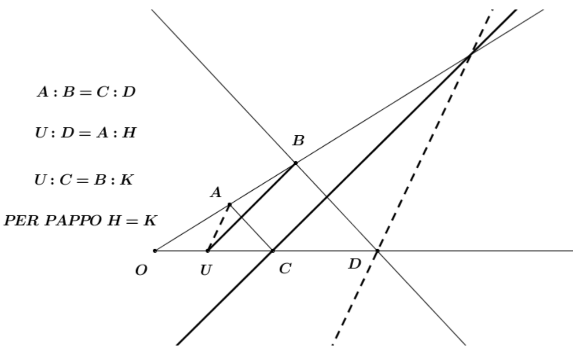

Fig. 11: Legame prodotto e proporzionalità

Il calcolo geometrico sopra introdotto nel piano euclideo a partire da due suoi punti, O e U, individua una struttura di campo nell'insieme dei punti del piano (che chiamiamo campo complesso (O,U)). Ne omettiamo per sintesi la verifica (che si riduce a costruzioni con riga e compasso e all' l'applicazione degli Assiomi I e II) può essere analoga a quella che Stillwell fa per individuare una struttura di campo su una retta euclidea in [19] (per le proprietà del prodotto e per la proprietà distributiva conviene ragionare separatamente sulle coordinate geometriche).

L'insieme dei punti della retta OU costituisce ovviamente un sottocampo del piano complesso (O,U). Se tra i punti della retta OU si considera la relazione d'ordine definita ponendo:

A<B se e solo se esiste C diverso da O e appartenente alla semiretta OU tale che A+S=B,

il campo individuato su OU è ordinato, e l'ordine è completo se si aggiunge l'assioma di Dedekind:

Se C e D sono insiemi non vuoti di punti della retta OU tali che la loro unione dia tutti i punti della retta OU e $c \le d$, $\forall c \in C$, $\forall d \in D$ *allora esiste un punto k della retta OU tale che:* $c \le k \le d$, $\forall c \in C$, $\forall d \in D$.

A questo punto la lunghezza di un segmento di estremi A e B può essere definita come ||A-B|| e agevolmente si può dimostrare il Teorema di Pitagora seguendo una classica dimostrazione che utilizza le proporzioni.

Ringraziamenti

Questo lavoro è un approfondimento della comunciazione tenuta dall’autrice al convegno dell’AILA *Educare alla razionalità. In ricordo di Paolo Gentilini* dal 9-11 giugno 2016, a Sestri Levante. Si ringraziano gli organizzatori per l’ospitalità.

Bibliografia

[1] Anatriello G., Tortoriello F.S., Vincenzi G., *On an assumption of geometric foundation of numbers.* Int. J. Math. Edu. in Sci. and Tech. 2016; 47(3): 395-407.

[2] Barwise, J, Etchemendy, J, *Visual information and valid reasoning*, In W. Zimmerman S. Cunningham (Eds.), Visualizingin teaching and learning mathematics (pp. 9-24).Washington,

DC: Mathematical Association of America, (1991).

[3] Betti R., L’analisi logica dell’intuizione spaziale, tra apriorismo ed esperienza. In D. Hilbert, Fondamenti della geometria. Con i Supplementi di Paul Bernays. 2009 FrancoAngeli Milano

[4] Boyer C.B., *Descartes and the geometrization of algebra*, Amer. Math. Monthly (1959)

[5] Brown J.R., *Philosophy of mathematics: A contemporary introduction to the world of proofs and pictures*. New York: Routledge; 2008.

[6] Corry L., *The empiricist roots of Hilbert's axiomatic approach*. In V. F. Hendricks, et al. (Eds.) *Proof theory*. Dordrecht: Springer Netherlands; 2000. p.35-54.

[7] Edwards L, Radford L, Arzarello F. (Eds.),*Gestures and multimodality in the teaching and learning of mathematics*. Special issue of Educational Studies in Mathematics. 2009; 70(2): 91-215.

[8] Freudenthal, H. *Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie*. Nieuw Archief voor Wiskunde, *4*(5), 105-142. http://math.unipa.it/~brig/sds/MATERIALI/MATEMATICA/ sitofondamenti/ Freudenthal%20nuovocarattereago2005.htm

[9] Frege G., Scritti postumi (a cura di Eva Picardi), (trad Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel vol 1. Hamburg: Felix Meiner Verlag; 1969) Bibliopolis, Napoli, 1986.

[10] Giaquinto M. Visual thinking in mathematics. Oxford: Oxford University Press; 2007.

[11] Giovannini E.N. *Bridging the gap between analytic and synthetic geometry: Hilbert's axiomatic approach*. Synthese. 2016; (193): 31-70.

[12] Hamami Y, Mumma J. *Prolegomena to a cognitive investigation of Euclidean diagrammatic reasoning*. J Log Lang Inf. 2013; 22(4): 421-448.

[13] Hilbert D. Grundlagen der mathematik. Vol. 2. Berlin: Springer; 1943.

[14] Kvasz L. Patterns of change: linguistic innovations in the development of classical mathematics. Basel: Birkhäuser, 2008.

[15] Miller N. Euclid and his twentieth century rivals:diagrams in the logic of Euclidean geometry. Stanford: CSLI Publications; 2007.

[16] Petri B., Schappacher, N. *On arithmetization*. In: The Shaping of Arithmetic after CF Gauss's Disquisitiones Arithmeticae. Springer Berlin Heidelberg, 2007. p. 343-374.

[17] Rivera F.D. Toward a visually-oriented school mathematics curriculum: Research, theory, practice, and issues. Vol. 49. Springer Science Business Media, 2011

[18] Rowe, D. *The calm before the storm: Hilbert's early views on foundations*. In V.F. Hendricks, et al. (Eds.). Proof theory. Dordrecht: Springer Netherlands; 2000. p.55-93.

[19] Stillwell J. *Ideal elements in Hilbert's Geometry*. Perspectives on Science 2014; 22(1): 35-55.

[20] Stillwell J. The four pillars of geometry. New York: Springer; 2005.

[21] Vailati G. *Sulla teoria delle proporzioni* [On the theory of proportions]. In: Enriques E, editor. Questioni riguardanti le matematiche elementari - raccolte e coordinate da Federigo Enriques. Vol. I: Critica dei principii. Bologna: Zanichelli; 1912 p. 143-191.