Science&Philosophy Vol. 1, No 2, (2013) pp. 23 – 36
ISSN 2282-7765 [online] ISSN 2282-7757 [testo stampato]

Il contributo dei giochi matematici all'innovazione didattica

Paolo Rotondo[1] Agostino Zappacosta [2]

Sunto Il contributo intende illustrare il possibile ruolo dei giochi matematici come stimolo alla didattica, per avvicinare gli studenti a situazioni 'matematiche' non standard, col fine di favorire l'approccio per problemi all'apprendimento della materia.

Parole Chiave: innovazione, gioco, intuizione.

Abstract The contribution intends to illustrate the possible role of the mathematics games as stimulus to didactics, in order to make the students interested in non standard "mathematical" situations, with the aim to facilitate the approach through problems to the learning of the subject.

Keyword: innovation, game, intuition.

1. Introduzione

I cosiddetti "Giochi matematici" – di recente diffusi nella pratica didattica in diversi ordini di Scuola – risalgono, nella letteratura matematica, a tempi più che antichi, se si pensa che già nelle testimonianze sull'antico Egitto, sulla matematica greca, in quella cinese e indiana si trovano tracce di attività 'matematiche' assimilabili agli attuali giochi.

[1] ex docente di Matematica e Dirigente Scolastico Scuola I grado; Viale G. Bovio 194 PESCARA
[2] ex docente di Matematica Scuole Superiori; Via Liberazione 67; CHIETI

Nel 1484 in Francia – all'interno di un primo trattato di algebra – si trova un capitolo interamente dedicato a problemi ricreativi. Nel XVII secolo M. Mézirac (1581 – 1638) pubblica in Francia un primo libro di giochi matematici.

In anni moderni, tutti conosciamo Martin Gardner che, dal 1956 sulla Rivista "Scientific American", si è occupato con particolare originalità ed acume di tale tipo di giochi.

2. **Che cos'è un "gioco matematico"**

Nel tentativo di dare una accettabile 'definizione' di "Gioco matematico", si conviene che esso debba soddisfare alcuni requisiti: per esempio, quello di essere accessibile ad un gran numero di persone.

Ciò comporta che esso non venga esposto con tecnicismi da 'addetti ai lavori', e che la sua soluzione non richieda particolari conoscenze teoriche; si richiede invece che il suo enunciato risulti intrigante o anche divertente, che inneschi – per così dire – uno 'scenario' quotidiano, nel quale sia evidente l'aspetto logico-matematico, ma non nel senso 'scolastico' del termine, bensì in maniera da risultare intrigante, da incuriosire chi vi si dedica. Il più delle volte la soluzione di un problema classificato come "Gioco matematico" appare semplice, finanche elegante, con pochi calcoli (o anche con nessun calcolo); ed anzi appare interessante quando le soluzioni sono più di una, legate a determinati criteri.

Un simile gioco risulta infine proficuo quando ne viene lo stimolo a saperne di più, ad approfondire, a generalizzare, a 'matematizzare' adeguatamente certe situazioni, in maniera da allargare il panorama del tipo di problematica suscitato dalla situazione iniziale.

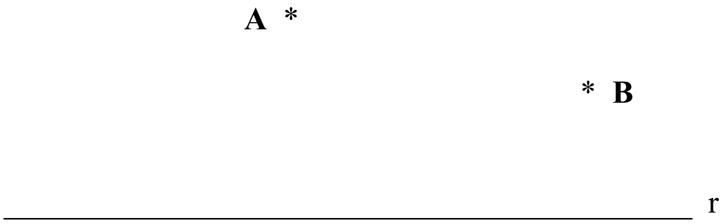
Proponiamo alcuni esempi:

a)**Penne e triangoli**

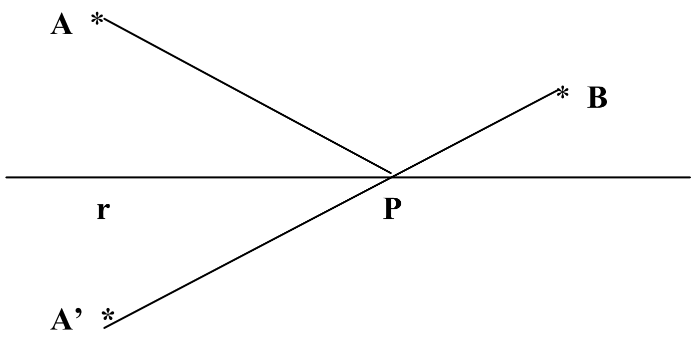
Si danno 3 penne, chiedendo di formare con esse un triangolo: sembra banale. Poi si aggiungono 2 penne, con la richiesta di formare un altro triangolo, e risulta facile. Ma infine si fornisce una sesta penna, con la richiesta di formare altri 2 triangoli, senza modificare la forma dei precedenti già formati: allora si scopre la difficoltà di comporre 4 triangoli con 6 penne . . . se si rimane sul piano. Non è banale farsi venire in mente che basta – e occorre – ‘alzare’ 2 penne precedenti ed inserire la sesta penna in modo da formare un tetraedro, per avere appunto i 4 triangoli richiesti.

b)**Il cammino minimo**

Una nave-soccorso posta in A deve soccorrere un’imbarcazione in difficoltà che si trova in B, ma deve prima fare rifornimento presso una postazione mobile collocata sulla riva, rappresentata dalla retta r. Bisogna allora trovare un cammino dal punto **A** al punto **B**, che tocchi la retta r in un punto **P** e che sia il più corto possibile. Come si può fare ?



Se si considera il simmetrico **A’** di **A** rispetto ad r, basta unire con un segmento **B** con **A’**:tale segmento necessariamente interseca r in un punto, che è il punto **P** cercato.



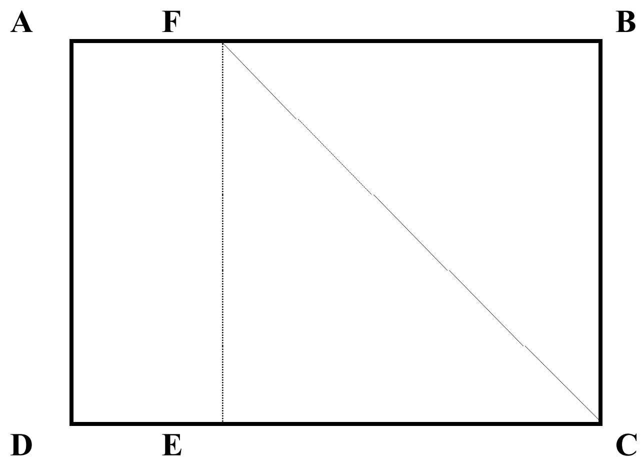
Il cammino **A P B** realizza il percorso minimo cercato. Qui appare evidente l'eleganza della soluzione grafica, rispetto ad una possibile matematizzazione 'tecnica' della questione, con ricerca del 'minimo' di un'opportuna funzione. Appare anche evidente che si possono innescare questioni riguardanti la simmetria, la legge di riflessione ottica, ed allargare il discorso ai problemi generali di 'cammino minimo'.

c)**Carta e forbici**

A) Prendiamo un foglio di carta, di forma rettangolare (va benissimo il formato A4) e lo mostriamo agli alunni. Facciamo tre prove: sempre con le braccia alzate teniamo il foglio in modo che il lato maggiore risulti: a) orizzontale; b) verticale (in questo caso è il lato minore ad essere orizzontale); c) obliquo (in modo che la diagonale risulti verticale).Una volta che ci siamo accertati che tutti stanno osservando il foglio di carta che stiamo loro mostrando, chiediamo loro: "Che figura vedete?".

Da diverse prove effettuate con alunni di quarta, quinta elementare e prima media, nei casi a) e b) la quasi totalità degli alunni risponde esattamente. Invece nel caso c) sono molto incerti: un 45% risponde che si tratta di un rombo; un altro 45% risponde che si tratta di un parallelogramma e solo il 10% degli alunni dà la risposta esatta con dei puntuali commenti (come per es.: è naturale che se giro il foglio, la sua forma è sempre la stessa).

A questo punto chiediamo ai ragazzi di ritagliare dal foglio rettangolare un quadrato il più grande possibile, senza adoperare né righello graduato, né matita (o penna).Diciamo pure che il foglio può essere piegato in qualsiasi modo, anche più volte, se necessario.



Generalmente, dopo alcuni tentativi, qualche alunno trova la giusta soluzione che facciamo poi descrivere in modo preciso: “Tenendo fermo il foglio sul banco, poniamo l’indice della mano destra sul vertice C, mentre con la mano sinistra prendiamo il lembo (spigolo, vertice) contrassegnato con la lettera B e lo portiamo a farlo combaciare su un punto situato lungo il lato CD (nella figura il punto è contrassegnato con la lettera E).

A questo punto pieghiamo il foglio di carta lungo la linea CF. Con le forbici, tenendo ben fermo il lembo FB che combacia con la linea FE, tagliamo il foglio. Otteniamo così il quadrato BCEF.”

Attenzione: in pratica le linee tratteggiate in figura, non devono essere disegnate. Siamo stati costretti a disegnarli per spiegare meglio il procedimento.

Ripetiamo, col quadrato così ottenuto, le 3 prove descritte sopra, ruotando opportunamente il foglio tra le due mani alzate. In questo caso, molto banale per la verità, per i casi a) e b) otteniamo sempre risposte esatte. Per il caso c), invece il 90% degli alunni risponde che la figura ha la forma di un rombo mentre pochissimi danno la risposta giusta (quadrato).

A questo punto passiamo alla magia:

Cominciamo con una domanda rivolta agli alunni: “Piegando opportunamente questo foglio di carta di forma quadrata con più piegature e adoperando le forbici, con un solo taglio dritto, dobbiamo ottenere 4 quadrati più piccoli uguali tra loro. Come si fa?”

Tutti i ragazzi, con spirito agonistico, si impegneranno e dovremo saper attendere con pazienza l’esito dei loro tentativi. Bisogna saper creare ad arte un’atmosfera di suspense per aumentare la curiosità nei ragazzi. Alla fine mostriamo la soluzione (dell’uovo di Colombo). Generalmente gli alunni non riescono a risolvere questo problema. Il motivo è molto semplice: se nella prima piegatura, scelgono di piegare il foglio lungo una diagonale desistono subito perché dopo la prima piegatura ottengono una forma triangolare e non sanno andare avanti.

Allora provano ad effettuare delle piegature ripetute soprattutto lungo le mediane e poi riaprendo il foglio vedono che il quadrato iniziale è stato diviso in quattro quadrati più piccoli ed uguali (ben visibili dalle pieghe rimaste sul foglio). Però questo fatto richiede due tagli e non un unico taglio di forbici, come richiesto dal quesito. Questo fatto accresce la loro curiosità insieme ad un certo fastidio più o meno malcelato.

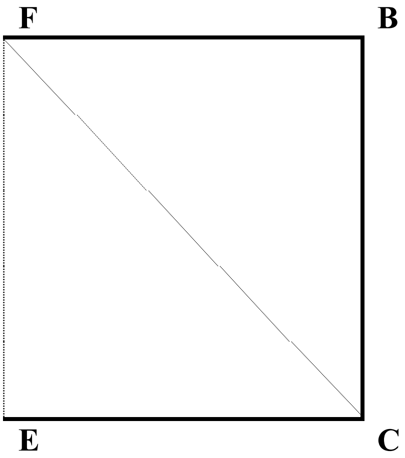


Figura 1

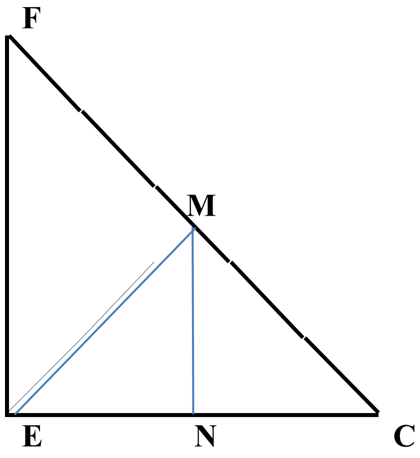


Figura 2

Alla fine diamo la soluzione: dopo aver effettuato due piegature lungo le linee CF e EM (dove M è il punto medio del segmento FC). Dopo la seconda piegatura, otteniamo EMC formato da 4 fogli piegati sovrapposti. Con le forbici effettuiamo un taglio da M al punto medio di EC (il punto N).

Automaticamente, dai fogli sovrapposti vengono fuori quattro quadrati ripiegati a forma di triangolo isoscele rettangolo. Aprendoli otteniamo i 4quadrati richiesti.

Nota Bene: Abbiamo evitato al massimo un linguaggio più tecnico (cateti, ipotenusa, ed altri termini) per una più facile comprensione.

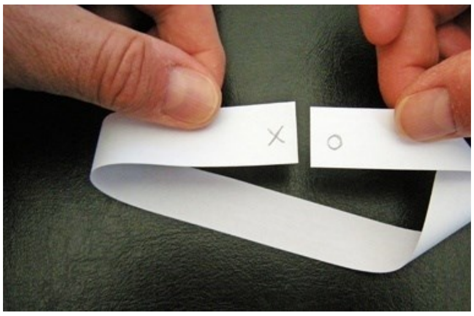


Figura 3. Per facilitare la costruzione del nastro di **Möbius,** alle due estremità del nastro, segneremo due cerchietti su una faccia e due crocette sull'altra faccia. Nell'incollaggio, dopo la torsione, i due cerchietti (o crocette) coincideranno.

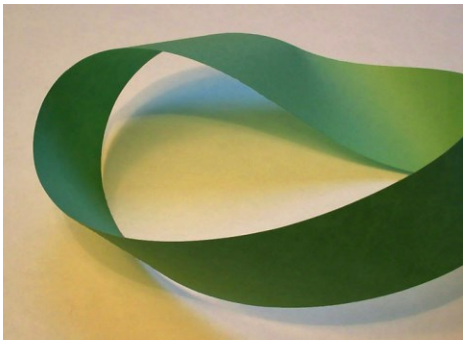


Figura 4. Ecco come si presenta il nastro di M**öbius,**alla fine dell'incollaggio. In questo caso abbiamo adoperato carta colorata. Per quanto riguarda le linee longitudinali previste nei punti a), b), c) e d), conviene tracciarle prima di effettuare la torsione di 180° e unire così le estremità.

B) Nastro di Möbius

Ritagliamo da un foglio di carta 4 strisce lunghe almeno50 cm e larghe 3, 4.5, 6 e 7.5 cm.

Su tutte e due le facce di queste strisce tracciamo, rispettivamente una, due, tre e quattro linee longitudinali ed equidistanti tra loro e dal bordo per circa 1.5 cm. Prima di incollare un'estremità all'altra, facciamo compiere ad una di esse una torsione pari a mezzo giro.

a) Prima di eseguire il taglio lungo l'unica linea presente nel nastro largo 3 cm, chiediamo agli alunni quanti nastri avremo dopo il taglio. Registriamo le risposte e un alunno procederà a tagliare il primo nastro. Alla fine ci si accorgerà, con meraviglia, che si ottiene unico nastro più lungo (al posto dei due previsti dalla maggioranza dei ragazzi).

1	2	3	4	5	6	7							
3 cm	3 cm	3 cm	3 cm	3 cm	3 cm	3 cm	3 cm						

Figura 5

Per rendere più interessante l'esperimento, una volta formato il nastro di Möbius con l'unione delle due estremità, su entrambe le facce del nastro si riportano delle linee trasversali pari alla larghezza delle varie strisce e distanti tra loro circa 3 cm. (vedi figura 3).Quindi si inizia la colorazione di queste caselle: da una parte il rosso e, in corrispondenza, sull'altra faccia della striscia il blu. Si procede casella per casella da entrambi i lati e alla fine ci si meraviglierà quando la faccia colore rosso va ad incontrare il colore blu e viceversa.

a) Ripetiamo con un altro alunno la stessa procedura col nastro che presenta due linee longitudinali. Con grande meraviglia, con un taglio solo (grazie alla torsione fatta prima di incollare il nastro), non si otterranno tre nastri separati ma un nastro dentro l'altro.

b) Lo stesso si farà col terzo nastro.

c) Lo stesso col quarto nastro.

A questo punto si possono trarre delle conclusioni e accennare al principio di induzione, importante per la scoperta dei concetti matematici.

3. **Quale il confine tra Matematica e Matematica divertente**

Se si cerca di individuare una sorta di 'confine' tra Matematica (p. es. quella della Scuola) e 'Matematica divertente', occorre prima avere in mente qualche caratteristica della Matematica – diciamo così

– ufficiale. Una celebre osservazione paradossale dovuta a B. Russell recita: <*La Matematica è quella scienza nella quale non si sa di che cosa si parla, e non si sa se quello che si dice sia vero o falso*>.

Non essendo qui il luogo per cercare una qualche definizione generale della scienza matematica, forse è più utile richiamare il concetto di "competenza matematica" – come è stato definito in ambito internazionale – e accennare alla tematica del "Problem solving", essendo questi due temi tra i più dibattuti nell'attuale ammodernamento nella didattica della Matematica nelle Scuole di ogni ordine.

- **Competenza matematica** (definizione internazionale P. I. S. A.)

La competenza matematica è la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione.

- **Problem solving**

La capacità di un individuo di mettere in atto processi cognitivi per affrontare e risolvere situazioni reali e interdisciplinari, per le quali il percorso di soluzione non è immediatamente evidente e nelle quali gli ambiti di competenza o le aree curriculari che si possono applicare non sono all'interno dei singoli ambiti della matematica, delle scienze o della lettura.

Se si considera che i giochi matematici sono un veicolo utilissimo e spesso originale per diffondere la **bellezza** e l'**utilità** della Matematica, e dunque si impongono quale strumento di una nuova didattica, si comprende che non ci sono reali confini tra *Matematica* e *Matematica divertente*. Inoltre, i 'Giochi matematici' sono spesso più vicini alla realtà quotidiana che ci circonda, pertanto occasione di 'matematizzazione' più facile ed interessante per gli alunni meno motivati.

Con i giochi l'alunno deve discernere i dati utili ed essenziali da quelli superflui o sovrabbondanti rispetto alle soluzioni possibili; ed è bene aggiungere che la pluralità delle soluzioni di una situazione problematica può essere meglio approcciata da un intrigante ‘Gioco matematico’, per il quale spesso sono possibili diverse strategie risolutive, tra le quali scegliere secondo criteri da discutere: semplicità / eleganza . . . . (anche a seconda del livello di scolarità).

Appare allora evidente come un intelligente uso dei “Giochi Matematici” tocchi da vicino sia le tematiche inerenti la *competenza matematica*, che le capacità auspicate nella definizione di “Problem solving”.

4. **I 'Giochi' come strumento di innovazione didattica**

Ricordiamo due osservazioni, che cadono a proposito per quanto stiamo argomentando.

Martin GARDNER<*Purtroppo moltissimi insegnanti continuano ad ignorare il potenziale educativo della matematica divertente*>.

Lucio LOMBARDO RADICE<*Cari colleghi insegnanti: ma perché qualche volta, per controllare quello che i vostri allievi hanno imparato, non fate in classe un’ora di palestra di giochi intelligenti, invece di interrogare ? Imparare a giocare, stabilendo e rispettando regole oneste, crea l’abitudine ad una convivenza civile molto più che non lunghe prediche di educazione civica . . . . Giocare bene significa avere gusto per la precisione, amore per la lingua, capacità di esprimersi con linguaggio non verbale; significa acquisire insieme intuizione e razionalità*>.

Ogni opera di autentica innovazione richiede sforzo, messa in discussione, cambiamenti reali – e spesso perciò scomodi – delle abitudini, pur collaudate. Così accade nel campo della didattica: se l’intuizione si potesse ‘insegnare’ . . tutti gli studenti prima o poi sarebbero bravi in matematica; ma l’intuizione si può **coltivare**, **stimolare . . . mostrare** proprio attraverso i giochi matematici; rispetto alla annosa routine “spiego – interrogo – valuto”, in cui spesso l'alunno è solo soggetto passivo che deve recepire quanto dice l'insegnante, un'innovazione didattica che faccia accorto uso dei giochi matematici (certo non solo di essi) comporta di necessità una qualche 'preparazione' che aggiorni il bagaglio professionale del docente tradizionale.

Troppo spesso un tradizionale percorso didattico della matematica (a qualunque livello) è costellato da una miriade di 'esercizi', ma troppo di rado si incontrano "problemi significativi":crediamo che sia come se una squadra di calcio si allenasse continuamente, ma non giocasse mai una partita seria ed ufficiale. I giochi matematici costituiscono un aspetto attraente dell'**apprendimento significativo** della matematica.

In proposito, ricordiamo che un **apprendimento significativo** della matematica comporta sempre un approccio per problemi, nel senso che ogni nuovo concetto, costruzione e procedimento deve venire introdotto dopo aver in qualche modo esplorato ciò che è già stato acquisito, e preso coscienza della necessità di procedere oltre a causa di qualche incompletezza, provvisorietà o errore. Va notato che tentativi personali di soluzione devono avere il giusto spazio, anche se guidati, controllando che alla fine la nuova conoscenza sia stata incorporata in maniera **valida ed efficace**, vale a dire aprendo nuove questioni su cui applicare, giudicare, sistemare quanto è stato appena raggiunto. Ed anche all'interno dell'apprendimento significativo *per ricezione*, va dato spazio all'attività di *matematizzazione* di situazioni anche 'esterne' alla matematica, alla soluzione di problemi 'non matematici' per favorire lo sviluppo di un atteggiamento propizio ad un 'modo di fare' matematico.

Proviamo ad elencare alcuni obiettivi desiderabili in generale per la didattica di qualunque disciplina, ma in particolare per la Matematica, e che si possono favorire anche con l'uso dei "Giochi Matematici":

- creare curiosità;
- sapersi porre domande;
- evitare la noia, la ripetitività e la monotonia che a volte caratterizzano i percorsi didattici tradizionali;

- evitare il più possibile la parte ‘costruita’ del sapere matematico, vale a dire che l’*apprendimento per ricezione* non sia prevalente;

- la ‘motivazione’ che oggi bisogna dare a quasi tutti gli studenti, considerato che – fuori della scuola – essi non incontrano, nella vita reale, nulla di tutto ciò che viene dato per “Matematica scolastica tradizionale”: invece i Giochi possono avvicinare e motivare con la curiosità il ‘fare matematico’.

Tutti sanno che da qualche anno, in alcune classi di ogni livello scolastico, è diventata obbligatoria la valutazione degli apprendimenti di “Italiano” e “Matematica” per mezzo delle Prove Nazionali INVALSI. Tali quesiti assegnati a livello nazionale sono nettamente diversi dai tradizionali esercizi dei corsi di Matematica, e spesso proprio questa loro diversità (per linguaggio, tipologia etc…) ha messo in difficoltà i nostri studenti. Pensiamo che questa circostanza possa risultare ancora a favore dell’attenzione ai “Giochi Matematici”, perché proprio la loro diversità dagli esercizi (o problemi) tradizionali, aiutano a guadagnare quelle abilità e competenze auspicate dalla ‘filosofia’ INVALSI sulla didattica della disciplina.

Analogo discorso si può sostenere a proposito della globalizzazione mondiale, che tende a farci considerare la necessità di tenerci al passo delle altre nazioni che da tempo hanno introdotto nella didattica l’uso di percorsi alternativi basati su giochi – gare – olimpiadi ecc.. (gli scacchi in Russia).Invero in Italia sono molto diffusi diversi tipi di gare matematiche, non tutte però basate sui Giochi.

Mentre le varie “Olimpiadi” (tra cui quelle classiche di Matematica) si basano su problemi tradizionali o comunque lontani dalle caratteristiche di un “Gioco matematico”, il miglior esempio di gare nazionali basate sui Giochi è quello dell’Università “Bocconi” di Milano, che da oltre dieci anni cura l’organizzazione – nazionale ed internazionale – di giochi che riguardano tutti i livelli scolastici, ed anche il ‘grande pubblico’ degli adulti appassionati.

5. Considerazioni conclusive

Quali possono essere le ragioni della scarsa diffusione – nella pratica didattica ordinaria – dei "Giochi matematici" come strumento didattico? C'è una sorta di "paura del nuovo"? Prevale la preoccupazione di "finire il programma"? Si presta attenzione ai mezzi di comunicazione di massa, che generalmente vantano la cultura umanistica come l'unica autentica e 'alta', a scapito di quella scientifica, con i relativi equivoci? Ci sono motivazioni economiche (scarsità di risorse dedicate)? Ci si preoccupa di una scarsa 'visibilità' dei risultati? Si pensa alla scarsa considerazione sociale dei talenti che possono emergere attraverso tali giochi? Ovviamente non abbiamo risposte certe, ed alle ragioni esposte se ne potrebbero aggiungere altre.

La nostra esperienza è però che alla maggioranza degli alunni piace cimentarsi con esercizi e giochi di carattere matematico, che siano anche divertenti, anche in competizioni con premi simbolici. Non di rado è accaduto che uno studente non particolarmente brillante nel corso ordinario di Matematica, secondo l'insegnante, si riveli poi particolarmente acuto nel cimentarsi nei giochi matematici. Episodi di questo genere dicono molto sulla reale distanza fra tradizione scolastica e possibile innovazione; se si considera che oggi l'obiettivo di una didattica moderna non dev'essere puntata sui 'contenuti' da far possedere allo studente, bensì sulle *abilità / competenze* che deve guadagnare, allora appare del tutto evidente che gli esercizi e problemi tradizionali ovvero i giochi matematici sono <u>strumenti</u>: ma non di rado i giochi si rivelano più utili, anche se certo non da soli.

In conclusione, auspichiamo una maggiore attenzione da parte dei dirigenti e dei docenti, e delle Istituzioni, a favore di un rinnovamento autentico del modo di operare, per una didattica della Matematica che riesca meglio del passato anzitutto a non far odiare la materia, e poi a renderla anche piacevole ed appassionante.

Bibliografia

[1] Cohen G. (a cura di) (2006) *Pitagora si diverte 1*, B.Mondadori, Milano
[2] Gardner M.(1967-68) *Enigmi e giochi matematici voll. 1, 2, 3*, Sansoni, Firenze
[3] Stewart I. (2008) *Come tagliare una torta e altri rompicapi matematici*, Einaudi, Torino
[4] Beutelspacher Albrecht; Wagner Marcus (2009) *Piega e spiega la matematica. Laboratorio di Giochi matematici* - Ponte alle Grazie, Salani, Milano
[5] Clifford A. Pickover (2006) *Il nastro di Möbius*, Apogeo, Milano
[6] Cohen G. (2006) *Pitagora si diverte* - Voll. 1-2-3, B. Mondadori, Milano
[7] Ghattas R. (2010) *Bricologica. Trenta oggetti matematici da costruire con le mani*, Sironi, Milano
[8] Peiretti F. (2010) *Il matematico si diverte*. Longanesi& C., Milano
[9] Peres E. (2004) *Enigmi geniali. 200 problemi da risolvere solo con un fulmineo... colpo di genio*, L'Airone Editrice, Roma
[10] Schattschneider D. (1992) *Visioni della simmetria. I disegni periodici di M. C. Escher*, Zanichelli, Bologna
[11] Ghersi I.(1988) *Matematica dilettevole e curiosa,*Editore Ulrico Hoepli, Milano
[12] Brodex A. (2011) *Enciclopedia degli origami e della lavorazione della carta*,Il Castello Editore, Milano.
[13] Sito internet www.matematicabruzzo.it