HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty
Matemaattis-luonnontieteellinen

Laitos — Institution — Department
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author
Vili Aapro

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Leibnizin jalanjälkiä eli vektorilaskentaa reaalikertoimisessa avaruudessa

Oppiaine — Läroämne — Subject
Matematiikan aineenopettaja

Työn laji — Arbetets art — Level
Pro gradu -tutkielma

Aika — Datum — Month and year
Joulukuu 2015

Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
30 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Rakennetaan erityisesti euklidisen avaruuden matematiikkaa matriiseja välttäen ja tähdäten Rogersin–Milnorin analyyttiseen todistukseen Brouwerin kiintopistelauseelle. Kehitetään analyysin ja multilineaarisen algebran perusteita, joista mainittakoon tulon derivaatta sekä determinantti, joista Leibniz tunnetaan — tästä otsikko.
Tieteellisistä kontribuutioista maininnan ansaitsevat tensorien määritelmä indeksoituina perheinä sekä ulkotulon yleistys tällaisille tensoreille.
Luvuissa 1 ja 3 kehitetään analyysiä käyttäen tangenssirelaation käsitettä.
Luvussa 2 määritellään tensorit indeksoituina perheinä, mikä tekee niistä kantariippumattomia. Ulkotulon määritelmä nojaa originaaleihin kombinatorisiin tuloksiin.
Luvussa 4 määritellään determinantti ulkotulon avulla käyttäen transvektioita ja dilataatioita, jotka korvaavat matriisien rivi- ja sarakeoperaatiot.
Luontevia jatkokehityksen ja harjoitustehtävien aiheita voisivat olla heterogeeniset tensorit, ulkoderivaatta sekä differentiaaligeometrian ja -topologian alkeet.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
Tangenssi, Tensori, Ulkotulo, Determinantti

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Leibnizin jalanjälkiä

eli vektorilaskentaa reaalikertoimisessa avaruudessa

Pro gradu

matematiikan aineenopettajan pääaine

Vili J. Aapro

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

28. joulukuuta 2015

Sisältö

0 Aluksi

Brouwerin kiintopistelause seuraa moniulotteisen integraalin muuttujanvaihtolauseesta [5]. Tätä silmällä pitäen olen rakentanut matematiikkaa samalla opettaen itselleni peruskursseilta hämäriksi jääneitä asioita.

0.1 Seloste

Työn kenties mielenkiintoisin kohta, lause 2.2, syntyi ulkotulon liitännäisyyden tarpeisiin. Oivalsin tässä gradussa esiintyvän ulkotulon määritelmän syksyllä 2013 eräässä buddhalaisessa retriittikeskuksessa. Määritelmä on sikäli mielenkiintoinen, että tämä ulkotulo toimii mielivaltaisilla tensoreilla, eikä vain ulkoalgebran alkioilla, kuten Artinilla [1]. Artinin kirjassa on myös kiinteä kanta. Itse asiassa Artin käsittelee Clifford-algebroja, mutta niiden joukko-opillinen rakenne on sama kuin ulkoalgebrojen. Nykyään tensorit määritellään monesti käyttäen kategoriateoriaa, jota en osaa. Tässä käytetyt *indeksoidut perheet* ovat sopivan konkreettisia mutta silti kantariippumattomia. Indeksoidut perheet ovat kuin funktioita, joiden arvon tyyppi määräytyy argumentin mukaan. Tietojenkäsittelytieteessä esiintyy sama käsite englanninkielisellä nimellä *dependently-typed function.* Erik Elfving kertoi minulle, miten niitä matematiikassa kutsutaan.

Paras tapa nähdä lause 2.2 on ajatella, miten korttipakka sekoitetaan. Tavallinen operaatio sekoituksessa on ottaa yksi pakan puolikas kumpaankin käteen ja lomittaa puolikkaat keskenään. Lause todistaa tällaisten lomitusten joukoille eräänlaisen liitännäisyysominaisuuden.

0.1.1 Motivaatio

Kevään 2002 lineaarialgebran kurssilla, jonka veti kiinalainen loogikko Yi Zhang, ei koskaan päästy determinantteihin. Hän ei olisi halunnut opettaa matriiseja ollenkaan, mutta lopulta antoi määritelmän. Tuo oli elämäni antoisimpia kursseja.

Jussi Väisälä puolustaa lineaarikuvauksia matriisien sijaan [7] ja kehottaa lukijaa tutustumaan seuraavana askeleena algebralliseen topologiaan, jota ilman, hän kirjoittaa, on vaikeaa mutta mahdollista todistaa Brouwerin kiintopistelause [6]. Rogersin–Milnorin todistuksessa Brouwerin kiintopistelauseelle käytetään determinanttia, jonka voi rakentaa ilman matriiseja Grassmannin ulkotulon avulla, kuten tässä on tehty.

Luontevia jatkokehityksen ja harjoitustehtävien aiheita voisivat olla heterogeeniset tensorit, ulkoderivaatta sekä differentiaaligeometrian ja -topologian alkeet, joista lukija saattaa tietää tekijää enemmän.

0.1.2 Kontribuutiot

Kaikki todistukset ovat originaaleja, paitsi lauseen 3.1, joka on Jouni Luukkaiselta. Hänen kädenjälkensä näkyy myös vahvasti luvussa 1, erityisesti pisteen suhteen Lipschitz -kuvauksen määritelmässä. Originaaleja lauseita ovat 1.2 ja 2.2. Lauseen 4.1 en usko olevan uusi, vaikken ole sitä mistään löytänyt; siinä mielessä se siis on originaali. Mielenkiintoinen se on joka tapauksessa. Määritelmistä originaaleja ovat tensori, tensoritulo ja ulkotulo.

0.1.3 Kiitokset ja tunnustukset

Työn tarkastaja, Jouni Luukkainen, vipusi työstä lukemattomat kivet ja kannot, ja muotoili joitakin sen kantavista rakenteista. Kiitän häntä.

0.1.4 Esitiedot

Algebra I, Analyysi I, Lineaarialgebra I sekä Topologia I riittävät esitiedoiksi.

0.1.5 Lähteet

Luvuissa 1 ja 3 on pääasiallisena innoituksen lähteenä toiminut Dieudonnén klassikko [3]. Erityisesti tangenssin käsite on tästä teoksesta. Luvussa 2 on innoittajana ollut Artinin teos [1]. Esimerkiksi lemma 2.23 on saanut tästä vaikutteita. Luvussa 4 ovat transvektion ja dilataation käsitteet tulleet Dieudonnén traktaatista [2], ja pseudoskalaarin käsite on Clifford-algebrojen sovelluksia ja historiaa erittäin valaisevasti käsittelevästä teoksesta [4].

0.2 Oletuksia ja merkintöjä

Oletetaan $0 \in \mathbb{N}$. Merkitään lukemisen helpottamiseksi $a[i] = a_i$. Merkitään tyhjää jonoa sulkumerkein $()$.

Jos X on mielivaltainen joukko ja $a \in X$, niin määritellään *karakteristinen funktio* $\chi_a \colon X \to \{0, 1\}$ asettaen

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = a, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Määritellään *Kroenecker-delta* kaavalla $\delta_{x,y} = \chi_y(x)$.

Käytetään joukon $\{1, \ldots, n\}$ symmetriselle ryhmälle merkintää S_n ja tämän identtiselle alkiolle merkintää 1_n. Käytetään permutaation $\pi \in S_n$ merkille merkintää $\operatorname{sgn}(\pi)$.

Kaikki vektoriavaruudet oletetaan reaalikertoimisiksi. Kutsutaan äärellisulotteista sisätuloavaruutta euklidiseksi. Jos E on vektoriavaruus ja $X \subseteq E$, niin käytetään joukon X virittämälle aliavaruudelle merkintää $\mathcal{L}X$. Käytetään lineaarikuvausten $E \to F$ avaruudelle merkintää $L(E, F)$; lineaaristen isomorfioiden $E \to E$ ryhmälle merkintää $GL(E)$; ja kun E on normiavaruus, sen lineaaristen isometrioiden ryhmälle merkintää $O(E)$.

1 Analyysiä

Olkoot X, Y sekä Z metrisiä avaruuksia ja E, F sekä G normiavaruuksia.

1.1 Tangenssi

Sanomme, että $f, g\colon X \to Y$ *koskettavat* eli *ovat tangentit pisteessä* $x_0 \in X$,

$$T_{x_0}(f, g),$$

jos

$$\frac{d(f(x), g(x))}{d(x, x_0)} \to 0,$$

kun $x \to x_0$ pitkin joukkoa $X \setminus \{x_0\}$.

Lemma 1.1. *Relaatio T_{x_0} on ekvivalenssi.*

Todistus. Refleksiivisyys ja symmetrisyys ovat ilmeiset. Riittää osoittaa transitiivisuus, joka seuraa kolmioepäyhtälöstä:

$$d(f(x), h(x)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x)).$$

□

Lemma 1.2. *Jos f, g ovat jatkuvia pisteessä x_0 ja $T_{x_0}(f, g)$, niin $f(x_0) = g(x_0)$.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että $r = d(f(x_0), g(x_0)) > 0$. Nyt kuitenkin jatkuvuuden nojalla

$$\frac{d(f(x), g(x))}{d(x, x_0)} \to \frac{r}{0} = \infty,$$

kun $x \to x_0$; ristiriita. □

Lemma 1.3. *Jos $T_{x_0}(f|_U, g|_U)$ jollakin pisteen x_0 ympäristöllä U, niin $T_{x_0}(f, g)$.*

Todistus. Seuraa suoraan tangentin määritelmästä. □

Sanomme, että funktio $f\colon X \to Y$ on *M-Lipschitz pisteessä x_0*, jos

$$d(f(x), f(x_0)) \leq M d(x, x_0)$$

kaikilla $x \in X$.

Lemma 1.4. *Jos $f\colon X \to Y$ on M-Lipschitz pisteessä x_0 ja pätee $T_{x_0}(f, g)$ sekä $f(x_0) = g(x_0)$, niin kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa pisteen x_0 ympäristö U, jolla $g|_U$ on $(M + \epsilon)$-Lipschitz pisteessä x_0.*

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Tangentin määritelmän nojalla on olemassa pisteen x_0 ympäristö U, jolla

$$d(f(x), g(x)) \leq \epsilon d(x, x_0),$$

kun $x \in U \setminus \{x_0\}$; toisaalta Lipschitz-ehdon nojalla kaikilla $x \in X$

$$d(f(x), f(x_0)) \leq M d(x, x_0).$$

Nyt koska $f(x_0) = g(x_0)$, niin saadaan kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(g(x), g(x_0)) \leq d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(x_0)) \leq (M + \epsilon) d(x, x_0),$$

kun $x \in U \setminus \{x_0\}$. □

Lemma 1.5. *Jos f on M-Lipschitz pisteessä x_0, niin f on jatkuva pisteessä x_0.*

Todistus. Pätee $d(f(x), f(x_0)) \leq M d(x, x_0) \to 0$, kun $x \to x_0$. □

Lemma 1.6. *Olkoon $f, g \colon X \to Y$, $T_{x_0}(f, g)$ ja $h \colon Y \to Z$ M-Lipschitz. Tällöin $T_{x_0}(h \circ f, h \circ g)$.*

Todistus. Nyt

$$\frac{d(h(f(x)), h(g(x)))}{d(x, x_0)} \leq \frac{M d(f(x), g(x))}{d(x, x_0)} \to 0,$$

kun $x \to x_0$. □

Lemma 1.7. *Olkoon $f, g \colon X \to Y$, $T_{x_0}(f, g)$ ja $h \colon Z \to X$ M-Lipschitz pisteessä z_0. Tällöin $T_{z_0}(f \circ h, g \circ h)$ aina, kun $h(z_0) = x_0$ ja $f(x_0) = g(x_0)$.*

Todistus. Merkitään $x = h(z)$ ja $Q = h^{-1}\{x_0\}$. Nyt koska

$$d(z, z_0) \geq M^{-1} d(x, x_0),$$

kun $z \in Z$, niin

$$\frac{d(f(h(z)), g(h(z)))}{d(z, z_0)} = \frac{d(f(x), g(x))}{d(z, z_0)} \leq \frac{d(f(x), g(x))}{M^{-1} d(x, x_0)} \to 0,$$

kun $z \to z_0$ pitkin joukkoa $Z \setminus Q$, jolloin $x \neq x_0$ ja $x \to x_0$; toisaalta

$$\frac{d(f(x), g(x))}{d(z, z_0)} = \frac{d(f(x_0), g(x_0))}{d(z, z_0)} = 0,$$

kun $z \to z_0$ pitkin joukkoa $Q \setminus \{z_0\}$, jolloin $x = x_0$. □

Lemma 1.8. *Olkoon $f, g \colon X \to Y$, $T_{x_0}(f, g)$ ja $h \colon Z \to X$ M-Lipschitz pisteessä z_0. Tällöin $T_{z_0}(f \circ h, g \circ h)$ aina, kun $h^{-1}\{x_0\} = \{z_0\}$.*

Todistus. Menetellään kuten lemman 1.7 todistuksessa, jossa $Q = \{z_0\}$. □

Lemma 1.9. *Olkoot $f, f' \colon X \to Y$ ja $g, g' \colon Y \to Z$ sekä olkoon $T_{x_0}(f, f')$ ja $T_{y_0}(g, g')$, kun $y_0 = f(x_0)$. Olkoon f Lipschitz pisteessä x_0, g jatkuva pisteessä y_0 ja g' Lipschitz. Tällöin $T_{x_0}(g \circ f, g' \circ f')$.*

Todistus. Merkitään

$$\alpha = g \circ f \; ; \quad \beta = g' \circ f \; ; \quad \gamma = g' \circ f' \; .$$

Lemman 1.6 nojalla $T_{x_0}(\beta, \gamma)$; lemmojen 1.5 ja 1.2 nojalla $g(y_0) = g'(y_0)$; lemman 1.7 nojalla $T_{x_0}(\alpha, \beta)$; ja lemman 1.1 (transitiivisuuden) nojalla $T_{x_0}(\alpha, \gamma)$. □

Lemma 1.10. *Olkoon $a\colon X \to \mathbb{R}$, $|a(x)| \leq M$ kaikilla $x \in X$ ja $f, g\colon X \to E$. Jos $T_{x_0}(f, g)$, niin $T_{x_0}(af, ag)$.*

Todistus. Normin homogeenisuuden nojalla

$$\frac{|a(x)f(x) - a(x)g(x)|}{d(x, x_0)} = \frac{|a(x)||f(x) - g(x)|}{d(x, x_0)} \leq \frac{M|f(x) - g(x)|}{d(x, x_0)} \to 0,$$

kun $x \to x_0$. □

Lemma 1.11. *Olkoot $f, f', g, g'\colon X \to E$. Jos $T_{x_0}(f, f')$ ja $T_{x_0}(g, g')$, niin*

$$T_{x_0}(f + g, f' + g').$$

Todistus. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$\frac{|(f + g)(x) - (f' + g')(x)|}{d(x, x_0)} \leq \frac{|f(x) - f'(x)| + |g(x) - g'(x)|}{d(x, x_0)} \to 0,$$

kun $x \to x_0$. □

Lemma 1.12. *Jos $L, M\colon E \to F$ ovat lineaarisia ja $T_0(L, M)$, niin $L = M$.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että $L(x) \neq M(x)$ jollakin $x \neq 0$. Nyt $ax \to 0$, kun $a \to 0$. Kuitenkin lineaarikuvauksen ja normin homogeenisuuden nojalla

$$\frac{|L(ax) - M(ax)|}{|ax|} = \frac{|a||L(x) - M(x)|}{|a||x|} = \frac{|L(x) - M(x)|}{|x|} \neq 0;$$

ristiriita. □

Lemma 1.13. *Jos $A, B\colon E \to F$ ovat affiineja, $T_{x_0}(A, B)$ ja $A(x_0) = B(x_0)$, niin $A = B$.*

Todistus. Merkitään $y_0 = A(x_0)$. Määritellään translaatiot $f\colon E \to E$, $g\colon F \to F$ kaavoin

$$f(x) = x + x_0 \; ; \quad g(y) = y - y_0 \; .$$

Asetetaan $A' = g \circ A \circ f$ ja $B' = g \circ B \circ f$. Kuvaukset A', B' ovat lineaarisia. Koska translaatiot ovat bijektiivisiä Lipschitz-kuvauksia, niin lemmojen 1.6 ja 1.8 nojalla $T_0(A', B')$. Nyt lemman 1.12 nojalla $A' = B'$. Lopulta todetaan

$$A = g^{-1} \circ A' \circ f^{-1} = g^{-1} \circ B' \circ f^{-1} = B.$$

□

1.2 Derivaatta

Sanomme, että $f\colon E \to F$ on *derivoituva pisteessä* x_0, jos

$$T_{x_0}(f - f(x_0),\ L - L(x_0))$$

jollakin lineaarisella $L\colon E \to F$. Sanomme tällöin, että L on kuvauksen f *derivaatta pisteessä* x_0.

Lause 1.1. *Jos $L, M\colon E \to F$ ovat kuvauksen $f\colon E \to F$ derivaattoja pisteessä x_0, niin $L = M$.*

Todistus. Lemman 1.1 (transitiivisuuden) nojalla

$$T_{x_0}(L - L(x_0),\ M - M(x_0)),$$

ja lemman 1.13 nojalla $L - L(x_0) = M - M(x_0)$. Siis $L = M$. □

Lauseen 1.1 perusteella kuvauksen f derivaatta L pisteessä x on yksikäsitteinen. Merkitään $Df(x) = L$.

Lemma 1.14. *Olkoot $f, g\colon E \to F$ derivoituvia pisteessä x, ja $a \in \mathbb{R}$. Nyt*

$$D(a(f+g))(x) = aDf(x) + aDg(x).$$

Todistus. Seuraa lemmoista 1.10 ja 1.11. □

Lemma 1.15. *Jos $a\colon E \to F$ on vakio, niin $Da(x) = 0$.*

Todistus. Tämä seuraa lemmasta 1.1 (refleksiivisyydestä): $T_x(a - a, 0 - 0)$. □

Lemma 1.16. *Olkoot $f\colon E \to F$ ja $g\colon F \to G$ ja*

$$L = Df(x_0)\ ; \quad M = Dg(y_0)\ ; \quad y_0 = f(x_0)\ .$$

Olkoot L, M jatkuvia. Tällöin

$$D(g \circ f)(x_0) = M \circ L.$$

Todistus. Merkitään $z_0 = g(y_0)$. Määritellään translaatiot $\ell\colon E \to E$, $m\colon F \to F$ ja $n\colon G \to G$ kaavoin

$$\ell(x) = x + x_0\ ; \quad m(y) = y + y_0\ ; \quad n(z) = z + z_0\ .$$

Asetetaan

$$\begin{aligned} A &= m \circ L \circ \ell^{-1}\ ; & B &= n \circ M \circ m^{-1}\ ; \\ f_0 &= m^{-1} \circ f \circ \ell\ ; & g_0 &= n^{-1} \circ g \circ m\ . \end{aligned}$$

Derivaatan määritelmän ja lemman 1.11 nojalla $T_{x_0}(f, A)$ ja $T_{y_0}(g, B)$.

Koska translaatiot ovat Lipschitz, niin lemmojen 1.6 ja 1.8 nojalla $T_0(f_0, L)$ ja $T_0(g_0, M)$.

Kuvaukset L, M ovat jatkuvia lineaarikuvauksia ja siis myös Lipschitz, joten lemman 1.4 nojalla on olemassa origon ympäristöt $U \subseteq E$ ja $V \subseteq F$, joilla $f_0|_U$ ja $g_0|_V$ ovat Lipschitz origossa; voidaan olettaa $U \subseteq f_0^{-1}V \cap L^{-1}V$.

Nyt lemmalla 1.9

$$T_0(g_0|_V \circ f_0|_U,\ M|_V \circ L|_U);$$

lemman 1.3 nojalla $T_0(g_0 \circ f_0,\ M \circ L)$, eli

$$T_0(\ n^{-1} \circ g \circ f \circ \ell\ , \quad n^{-1} \circ B \circ A \circ \ell\ );$$

lemmojen 1.6 ja 1.8 nojalla $T_{x_0}(g \circ f, B \circ A)$; nyt koska

$$B \circ A = M \circ L - (M \circ L)(x_0) + z_0,$$

niin lemmalla 1.11 saadaan $D(g \circ f)(x_0) = M \circ L$. □

1.3 Sovelluksia

Sanomme, että X on *Lipschitz-polkuyhtenäinen,* lyhyesti LPY, jos kaikilla $x, y \in X$ on olemassa Lipschitz $\phi\colon [0,1] \to X$, jolla $\phi(0) = x$ ja $\phi(1) = y$.

Lause 1.2. *Jos X on LPY ja jatkuvalla $f\colon X \to Y$ pätee, että kaikilla $x \in X$ on olemassa vakiokuvaus $C\colon X \to Y$, jolla $T_x(f, C)$, niin f on vakio.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että on olemassa $x, y \in X$, joilla $f(x) \neq f(y)$.

Olkoon $\phi\colon [0,1] \to X$ Lipschitz-kuvaus, jolla $\phi(0) = x$ ja $\phi(1) = y$, ja olkoon $\gamma\colon Y \to \mathbb{R}$ kuvaus, jolla

$$\gamma(z) = \frac{d(z, f(x)) - d(z, f(y))}{d(f(x), f(y))}.$$

Funktio γ on selvästi Lipschitz.

Tarkastellaan funktiota $\hat{f} = \gamma \circ f \circ \phi$. Pätee $\hat{f}(0) = -1$ ja $\hat{f}(1) = 1$. Olkoon $\alpha \in [0,1]$. Oletuksen sekä lemmojen 1.6, 1.2 ja 1.7 nojalla on olemassa vakiokuvaus $C\colon X \to Y$, jolla $\hat{f}(\alpha) = \hat{C}(\alpha)$ ja $T_\alpha(\hat{f}, \hat{C})$, kun $\hat{C} = \gamma \circ C \circ \phi$. Lemmojen 1.1 (refleksiivisyyden) ja 1.11 nojalla

$$T_\alpha(\hat{f} - \hat{f}(\alpha), \hat{C} - \hat{C}(\alpha))$$

eli

$$T_\alpha(\hat{f} - \hat{f}(\alpha), 0 - 0),$$

joten funktion $\hat{f}$ (tavallinen) derivaatta saa kohdassa α arvon nolla. Tunnetusti funktio $[0,1] \to \mathbb{R}$, jonka derivaatta on kaikkialla nolla, on vakio, eli päädytään ristiriitaan. □

2 Algebraa

Olkoon E vektoriavaruus ja $\mathcal{B}$ sen kantojen joukko.

2.1 Tensori

Määritellään (E, n)-*tensorien* —lyhyesti n-*tensorien*— avaruudet $\bigotimes_n E$, kun $n \in \mathbb{N}$, induktiolla seuraavin aksioomin:

(a) Kutsumme 0-*tensoriksi* indeksoitua perhettä $(f_B)_{B\in\mathcal{B}}$, jolla $f_B\colon \{()\} \to \mathbb{R}$ ja jolla kuvaus $\phi_f\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$,

$$\phi_f(B) = f_B(()),$$

on vakio.

(b) Kutsumme 1-*tensoriksi* indeksoitua perhettä $(f_B)_{B\in\mathcal{B}}$, jolla $f_B\colon B \to \mathbb{R}$ ja $f_B(e) \neq 0$ vain äärellisen monella e ja jolla kuvaus $\phi_f\colon \mathcal{B} \to E$,

$$\phi_f(B) = \sum_{e\in B} f_B(e)e,$$

on vakio.

(c) Jos g on m-tensori ja h on n-tensori, niin kutsumme $(m+n)$-*tensoriksi tensorituloa* $f = g \otimes h$ eli indeksoitua perhettä $(f_B)_{B\in\mathcal{B}}$, jolla $f_B\colon B^{m+n} \to \mathbb{R}$ ja

$$f_B((s,t)) = g_B(s)h_B(t)$$

kaikilla $s \in B^m$ ja $t \in B^n$.

(d) Jos g ja h ovat n-tensoreita ja $a \in \mathbb{R}$, niin kutsumme n-*tensoriksi* myös indeksoitua perhettä $f = a(g+h) = (f_B)_{B\in\mathcal{B}}$, jolla $f_B\colon B^n \to \mathbb{R}$ ja

$$f_B(t) = a(g_B(t) + h_B(t))$$

kaikilla $t \in B^n$.

(e) Kaikki n-tensorit saadaan aksioomien (a)–(d) avulla. $\square$

Samastetaan skalaari $a \in \mathbb{R}$ sen 0-tensorin f kanssa, jolla $f_B(()) = a$.

Lemma 2.1. *Jokaisella $x \in E$ on olemassa täsmälleen yksi 1-tensori f, jolla $\phi_f(B) = x$ kaikilla $B \in \mathcal{B}$.*

Todistus. Kaikilla $B \in \mathcal{B}$ on olemassa $n \in \mathbb{N}$ ja $a_i \in \mathbb{R}$ sekä $e_i \in B$, kun $i \in \{1, \dots, n\}$, joilla $e_i \neq e_j$, kun $i \neq j$, ja $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. Nyt $\phi_f(B) = x$ jos ja vain jos $f_B(e_i) = a_i$ ja $f_B(e) = 0$, kun $e \notin \{e_1, \dots, e_n\}$. $\square$

Lemman 2.1 nojalla voidaan samastaa vektori $x \in E$ sen 1-tensorin f kanssa, jolla $\phi_f(B) = x$ kaikilla $B \in \mathcal{B}$.

Lemma 2.2. *Joukko $\bigotimes_n E$ on vektoriavaruus.*

Todistus. Seuraa aksioomasta (d). $\square$

Lemma 2.3. *Tensoritulo on liitännäinen.*

Todistus. Olkoon $B \in \mathcal{B}$ ja $f_B(r) = a$, $g_B(s) = b$, $h_B(t) = c$. Nyt $(f \otimes (g \otimes h))_B((r, s, t)) = abc = ((f \otimes g) \otimes h)_B((r, s, t))$. $\square$

Lemma 2.4. *Tensoritulo on bilineaarinen.*

Todistus. Riittää osoittaa biadditiivisuus. Olkoon $B \in \mathcal{B}$ ja $f_B(s) = a$, $g_B(t) = b$, $g'_B(t) = b'$. Nyt $(f \otimes (g + g'))_B((s, t)) = a(b + b') = ab + ab' = ((f \otimes g) + (f \otimes g'))_B((s, t))$; vastaavasti $(g + g') \otimes f = g \otimes f + g' \otimes f$. $\square$

Lemma 2.5. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in E$, kun $i \in \{1, \dots, n\}$, $f = \bigotimes_{i=1}^{n} x_i$, $B \in \mathcal{B}$, $e_i \in B$, kun $i \in \{1, \dots, n\}$, ja $t = (e_1, \dots, e_n)$. Nyt $f = \bigotimes_{i=1}^{n} e_i$ jos ja vain jos $f_B = \chi_t$.*

Todistus. Edetään induktiolla. Jos $n = 0$, niin $f = 1$ jos ja vain jos $f_B = \chi_{()}$; jos $n = 1$, niin $f = e_1$ jos ja vain jos $f_B = \chi_{e_1}$.

Oletetaan siis $n > 1$. Merkitään $f' = \bigotimes_{i=1}^{n-1} x_i$ ja $x' = x_n$. Induktio-oletuksen nojalla $f' = \bigotimes_{i=1}^{n-1} e_i$ ja $x' = e_n$, jos ja vain jos $f'_B = \chi_s$ ja $x'_B = \chi_{e_n}$, kun $s = (e_1, \dots, e_{n-1})$. Tulos seuraa tensoritulon määritelmästä. $\square$

Lemma 2.6. *Jos $B \in \mathcal{B}$, niin avaruuden $E_n = \bigotimes_n E$ eräs kanta on $B_n = \{\bigotimes_{i=1}^{n} e_i \colon e_i \in B\}$.*

Todistus. Osoitetaan ensin joukon B_n lineaarinen riippumattomuus. Olkoon $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ ja $\bigotimes_{i=1}^{n} e_{j,i}$, kun $j \in \{1, \dots, m\}$, joukon B_n eri alkioita. Asetetaan

$$f = \sum_{j=1}^{m} a_j \bigotimes_{i=1}^{n} e_{j,i} \in E_n.$$

Oletetaan $f = 0$. Tällöin lemman 2.5 nojalla kaikilla $k \in \{1, \dots, m\}$ pätee $0 = f_B(e_{k,1}, \dots, e_{k,n}) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi[(e_{j,1}, \dots, e_{j,n})](e_{k,1}, \dots, e_{k,n}) = \sum_{j=1}^{m} a_j \delta_{j,k} = a_k$.

Osoitetaan sitten $\mathcal{L}B_n = E_n$. Edetään induktiolla. Jos $n = 0$, niin $\{1\}$ on kysytty kanta; jos $n = 1$, niin B.

Oletetaan siis $n > 1$ ja että $B_{n-1} = \{\bigotimes_{i=1}^{n-1} e_i \colon e_i \in B\}$ on avaruuden $E_{n-1} = \bigotimes_{n-1} E$ kanta. Liitännäisyyden ja bilineaarisuuden nojalla jokainen $f \in E_n$ voidaan lausua muodossa $\sum_{i=1}^{m} a_i e_i \otimes f_i$ joillakin $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $e_i \in B$ ja $f_i \in B_{n-1}$. $\square$

Lause 2.1. *Olkoon f, g n-tensoreja ja $B \in \mathcal{B}$. Nyt $f_B = g_B$ jos ja vain jos $f = g$.*

Todistus. Lemman 2.6 nojalla $f = g$, jos ja vain jos

$$f = g = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \bigotimes_{j=1}^{n} e_{i,j}$$

joillakin $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $e_{i,j} \in B$, eli lemman 2.5 nojalla, jos ja vain jos

$$f_B = g_B = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \chi[t_i]$$

joillakin $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ ja $t_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,n}) \in B^n$, eli jos ja vain jos $f_B = g_B$. □

2.2 Kombinatoriikkaa

Olkoon $\pi \in S_m$ ja $\rho \in S_n$. Määritellään näiden permutaatioiden *karteesinen tulo*

$$\pi \times \rho \in S_{m+n}$$

kaavoin

$$(\pi \times \rho)(i) = \begin{cases} \pi(i), & \text{kun } i \leq m, \\ \rho(i-m) + m, & \text{kun } i > m. \end{cases}$$

Lemma 2.7. *Kaikilla $m, n \in \mathbb{N}$ pätee $1_m \times 1_n = 1_{m+n}$.*

Todistus. Selvä. □

Lemma 2.8. *Kaikilla $\pi, \pi' \in S_m$ ja $\rho, \rho' \in S_n$ pätee*

$$(\pi \times \rho) \circ (\pi' \times \rho') = (\pi \circ \pi') \times (\rho \circ \rho').$$

Todistus. Kun $i \leq m$, $((\pi \times \rho) \circ (\pi' \times \rho'))(i) = (\pi \times \rho)((\pi' \times \rho')(i)) = (\pi \times \rho)(\pi'(i)) = \pi(\pi'(i)) = (\pi \circ \pi')(i) = ((\pi \circ \pi') \times (\rho \circ \rho'))(i)$.

Kun $i > m$, $((\pi \times \rho) \circ (\pi' \times \rho'))(i) = (\pi \times \rho)((\pi' \times \rho')(i)) = (\pi \times \rho)(\rho'(i - m) + m) = \rho(\rho'(i-m)) + m = (\rho \circ \rho')(i-m) + m = ((\pi \circ \pi') \times (\rho \circ \rho'))(i)$. □

Lemma 2.9. *Kaikilla $\pi \in S_m$ ja $\rho \in S_n$ pätee $(\pi \times \rho)^{-1} = \pi^{-1} \times \rho^{-1}$.*

Todistus. Seuraa lemmoista 2.7 ja 2.8. □

Lemma 2.10. *Kaikilla $\pi \in S_m$ ja $\rho \in S_n$ pätee* $\operatorname{sgn}(\pi \times \rho) = \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\rho)$.

Todistus. Selvä. □

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $t \in \mathbb{N}^n$. Merkitään $|t|_i = \sum_{j=1}^{i} t_j$, kun $0 \leq i \leq n$.

Määritellään P_t niiden permutaatioiden $\pi \in S_{|t|_n}$ joukoksi, joilla

$$\pi(|t|_i + 1) < \cdots < \pi(|t|_{i+1})$$

kaikilla $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Määritellään kuvaukset $\phi_{t,i} \colon P_t \to P_s$, jossa $s_j = t_j + \delta_{i,j}$, kaavoin

$$\phi_{t,i}(\pi)(k) = \begin{cases} \pi(k), & \text{kun } k < |t|_i + 1, \\ |t|_n + 1, & \text{kun } k = |t|_i + 1, \\ \pi(k-1), & \text{kun } k > |t|_i + 1. \end{cases}$$

Lemma 2.11. *Jos $|t|_n \geq 1$, niin jokaisella $\pi \in P_t$ on olemassa $i \in \{1, \ldots, n\}$ ja $\rho \in P_s$, joilla $\pi = \phi_{s,i}(\rho)$, kun $s_j = t_j - \delta_{i,j}$.*

Todistus. Jollakin $i \in \{1, \ldots, n\}$ on $\pi(|t|_i) = |t|_n$; nyt $\phi_{s,i}(\rho) = \pi$ jollakin yksikäsitteisellä $\rho \in P_s$. □

Lause 2.2. *Kaikilla $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ pätee $P = Q = R$, kun*

$$\begin{aligned} P &= P_{(\ell,m,n)}, \\ Q &= P_{(\ell,m+n)} \circ (P_{(\ell)} \times P_{(m,n)}), \\ R &= P_{(\ell+m,n)} \circ (P_{(\ell,m)} \times P_{(n)}). \end{aligned}$$

Todistus. Osoitetaan, että $P = Q$; väitteen $P = R$ todistus on symmetrinen. Selvästi $Q \subseteq P$; riittää osoittaa $P \subseteq Q$.

Edetään induktiolla luvun $i = \ell + m + n$ suhteen. Tulos pätee selvästi, kun $i = 0$. Oletetaan siis, että $i > 0$.

Olkoon $\pi \in P$. Lemman 2.11 ja induktio-oletuksen nojalla jollakin $j \in \{1, 2, 3\}$ pätee $\pi = \phi_{t,j}(\pi')$ jollakin

$$\pi' \in P_t \subseteq P_q \circ (P_r \times P_s),$$

kun $t = (\,\ell - \delta_{j,1},\ m - \delta_{j,2},\ n - \delta_{j,3}\,)$, $q = (t_1, t_2 + t_3)$, $r = (t_1)$ ja $s = (t_2, t_3)$.

Nyt $\pi' = \rho \circ (\sigma \times \tau)$ joillakin $\rho \in P_q$, $\sigma \in P_r$ ja $\tau \in P_s$.

Tarkastellaan lukua j.

Tapauksessa $j = 1$ asetetaan $\hat{\pi} = \phi_{q,1}(\rho) \circ (\phi_{r,1}(\sigma) \times \tau) \in Q$. Tällöin

$$\hat{\pi}(k) = \begin{cases} \phi_{q,1}(\rho)((\sigma \times \tau)(k)) = \rho((\sigma \times \tau)(k)), & \text{kun } k < \ell, \\ \phi_{q,1}(\rho)(\ell) = i, & \text{kun } k = \ell, \\ \phi_{q,1}(\rho)((\sigma \times \tau)(k-1)) = \rho((\sigma \times \tau)(k-1)), & \text{kun } k > \ell. \end{cases}$$

Tapauksessa $j = 2$ asetetaan $\hat{\pi} = \phi_{q,2}(\rho) \circ (\sigma \times \phi_{s,1}(\tau)) \in Q$. Tällöin

$$\hat{\pi}(k) = \begin{cases} \phi_{q,2}(\rho)((\sigma \times \tau)(k)) = \rho((\sigma \times \tau)(k)), & \text{kun } k < \ell + m, \\ \phi_{q,2}(\rho)(i) = i, & \text{kun } k = \ell + m, \\ \phi_{q,2}(\rho)((\sigma \times \tau)(k-1)) = \rho((\sigma \times \tau)(k-1)), & \text{kun } k > \ell + m. \end{cases}$$

Tapauksessa $j = 3$ asetetaan $\hat{\pi} = \phi_{q,2}(\rho) \circ (\sigma \times \phi_{s,2}(\tau)) \in Q$. Tällöin

$$\hat{\pi}(k) = \begin{cases} \phi_{q,2}(\rho)((\sigma \times \tau)(k)) = \rho((\sigma \times \tau)(k)), & \text{kun } k < i, \\ \phi_{q,2}(\rho)(i) = i, & \text{kun } k = i. \end{cases}$$

Kussakin tapauksessa

$$\hat{\pi}(k) = \begin{cases} \pi'(k) = \pi(k), & \text{kun } k < |t|_j + 1, \\ i = \pi(k), & \text{kun } k = |t|_j + 1, \\ \pi'(k-1) = \pi(k), & \text{kun } k > |t|_j + 1, \end{cases}$$

eli $\pi = \hat{\pi} \in Q$. □

Korollaari 2.1. *Kuvaukset*

$$f\colon P_{(\ell,m+n)} \times P_{(m,n)} \to P_{(l,m,n)}\ ; \quad f(\pi,\rho) = \pi \circ (1_\ell \times \rho)\ ,$$

ja

$$g\colon P_{(\ell+m,n)} \times P_{(\ell,m)} \to P_{(l,m,n)}\ ; \quad g(\pi,\rho) = \pi \circ (\rho \times 1_n)\ ,$$

ovat bijektioita.

Todistus. Todistetaan, että f on bijektio; kuvauksen g bijektiivisyys todistetaan samoin. Surjektiivisuus seuraa lauseesta 2.2, sillä $P_{(\ell)} = \{1_\ell\}$. Tällöin injektiivisyys seuraa siitä, että

$$|P_{(\ell,m+n)} \times P_{(m,n)}| = \frac{(\ell+m+n)!}{\ell!(m+n)!}\frac{(m+n)!}{m!n!} = \frac{(\ell+m+n)!}{\ell!m!n!} = |P_{(l,m,n)}|.$$

$\square$

2.3 Tensorin permutaatio

Olkoon X mielivaltainen joukko. Jos $t = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ ja $\pi \in S_n$, niin merkitään

$$\pi(t) = (x_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, x_{\pi^{-1}(n)}).$$

Lemma 2.12. *Kaikilla $\pi, \rho \in S_n$ ja $t \in X^n$ pätee $\rho(\pi(t)) = (\rho \circ \pi)(t)$.*

Todistus. Pätee $\rho(\pi(t))[i] = \pi(t)[\rho^{-1}(i)] = t[\pi^{-1}(\rho^{-1}(i))] = t[(\pi^{-1} \circ \rho^{-1})(i)] = t[(\rho \circ \pi)^{-1}(i)] = (\rho \circ \pi)(t)[i]$. $\square$

Lemma 2.13. *Kaikilla $\pi \in S_m$, $\rho \in S_n$ ja $s \in X^m$, $t \in X^n$ pätee $(\pi(s), \rho(t)) = (\pi \times \rho)(s,t)$.*

Todistus. Kun $i \leq m$, lemman 2.9 nojalla $(\pi(s), \rho(t))[i] = \pi(s)[i] = s[\pi^{-1}(i)] = (s,t)[\pi^{-1}(i)] = (s,t)[(\pi^{-1} \times \rho^{-1})(i)] = (s,t)[(\pi \times \rho)^{-1}(i)] = (\pi \times \rho)(s,t)[i]$.

Kun $i > m$, lemman 2.9 nojalla $(\pi(s), \rho(t))[i] = \rho(t)[i-m] = t[\rho^{-1}(i-m)] = (s,t)[\rho^{-1}(i-m)+m] = (s,t)[(\pi^{-1} \times \rho^{-1})(i)] = (s,t)[(\pi \times \rho)^{-1}(i)] = (\pi \times \rho)(s,t)[i]$. $\square$

Sanomme, että $\pi \in S_n$ on *hyvinkäyttäytyvä,* jos kaikilla $x_1, \ldots, x_n \in E$, $B \in \mathcal{B}$ ja $t \in B^n$ pätee

$$\Big(\bigotimes_{i=1}^n x_{\pi(i)}\Big)_B(t) = \Big(\bigotimes_{i=1}^n x_i\Big)_B(\pi(t)).$$

Lemma 2.14. *Jos $\pi, \rho \in S_n$ ovat hyvinkäyttäytyviä, niin myös $\rho \circ \pi$ on hyvinkäyttäytyvä.*

Todistus. Merkitään $y_i = x_{\rho(i)}$ ja $s = \pi(t)$.

Lemman 2.12 nojalla pätee $\big(\bigotimes_{i=1}^n x_{(\rho\circ\pi)(i)}\big)_B(t) = \big(\bigotimes_{i=1}^n x_{\rho(\pi(i))}\big)_B(t) = \big(\bigotimes_{i=1}^n y_{\pi(i)}\big)_B(t) = \big(\bigotimes_{i=1}^n y_i\big)_B(\pi(t)) = \big(\bigotimes_{i=1}^n y_i\big)_B(s) = \big(\bigotimes_{i=1}^n x_{\rho(i)}\big)_B(s) = \big(\bigotimes_{i=1}^n x_i\big)_B(\rho(s)) = \big(\bigotimes_{i=1}^n x_i\big)_B(\rho(\pi(t))) = \big(\bigotimes_{i=1}^n x_i\big)_B((\rho \circ \pi)(t))$. $\square$

Lemma 2.15. *Jokainen $\pi \in S_n$ on hyvinkäyttäytyvä.*

Todistus. Tunnetusti on olemassa $m \in \mathbb{N}$ ja kahden vierusalkion vaihdot

$$\pi_1, \dots, \pi_m \in S_n,$$

joilla $\pi_m \circ \dots \circ \pi_1 = \pi$. Edetään induktiolla luvun m suhteen. Tapaus $m = 0$ on selvä.

Oletetaan siis $m > 0$. Liitännäisyyden ja tensoritulon määritelmän nojalla π_m on hyvinkäyttäytyvä, ja induktio-oletuksen nojalla $\pi_{m-1} \circ \dots \circ \pi_1$ on hyvinkäyttäytyvä, mistä tulos seuraa lemman 2.14 nojalla. $\square$

Lemma 2.16. *Jos $\pi \in S_n$, niin on olemassa lineaarikuvaus $\phi_\pi \colon \bigotimes_n E \to \bigotimes_n E$, jolla $\phi_\pi(f)_B(t) = f_B(\pi^{-1}(t))$ kaikilla $f \in \bigotimes_n E$, $B \in \mathcal{B}$ ja $t \in B^n$.*

Todistus. Olkoon $B \in \mathcal{B}$, ja olkoon B_n lemman 2.6 mukainen kanta avaruudelle $E_n = \bigotimes_n E$. Tällöin kuvaus $\phi_\pi \colon B_n \to B_n$,

$$\phi_\pi\big(\bigotimes_{i=1}^n e_i\big) = \bigotimes_{i=1}^n e_{\pi^{-1}(i)},$$

$e_i \in B$, on bijektio. Nyt ϕ_π voidaan laajentaa yksikäsitteisellä tavalla lineaarikuvaukseksi $E_n \to E_n$, ja loppu seuraa lemmasta 2.15. $\square$

Määritellään lemman 2.16 avulla *n-tensorien permutoija* $\phi_\pi \in L(\bigotimes_n E, \bigotimes_n E)$, kun $\pi \in S_n$, kaavalla

$$\phi_\pi(f)_B(t) = f_B(\pi^{-1}(t)).$$

Lemma 2.17. *Olkoot $\rho, \pi \in S_n$. Nyt $\phi_\rho \circ \phi_\pi = \phi_{\rho\circ\pi}$.*

Todistus. Olkoon $f \in \bigotimes_n E$. Pitää osoittaa $(\phi_\rho \circ \phi_\pi)(f) = \phi_{\rho\circ\pi}(f)$.

Olkoon $B \in \mathcal{B}$. Kuvausten $\phi_\pi, \phi_\rho, \phi_{\rho\circ\pi}$ lineaarisuuden ja lemman 2.6 nojalla riittää tarkastella tapausta $f = \bigotimes_{i=1}^n e_i$, kun $e_1, \dots, e_n \in B$. Lauseen 2.1 nojalla riittää osoittaa $(\phi_\rho \circ \phi_\pi)(f)_B = \phi_{\rho\circ\pi}(f)_B$. Olkoon $t \in B^n$. Nyt lemman 2.12 nojalla $(\phi_\rho \circ \phi_\pi)(f)_B(t) = \phi_\rho(\phi_\pi(f))_B(t) = \phi_\pi(f)_B(\rho^{-1}(t)) = f_B(\pi^{-1}(\rho^{-1}(t))) = f_B((\pi^{-1} \circ \rho^{-1})(t)) = f_B((\rho \circ \pi)^{-1}(t)) = \phi_{\rho\circ\pi}(f)_B(t)$. $\square$

Lemma 2.18. *Olkoot $f \in \bigotimes_m E$ ja $g \in \bigotimes_n E$ sekä $\pi \in S_m$ ja $\rho \in S_n$. Nyt*

$$\phi_\pi(f) \otimes \phi_\rho(g) = \phi_{\pi\times\rho}(f \otimes g).$$

Todistus. Olkoon $B \in \mathcal{B}$, $s \in B^m$, $t \in B^n$.

Koska ϕ_σ on lineaarinen kaikilla σ, niin lemman 2.6 ja tensoritulon bilineaarisuuden nojalla riittää tarkastella tapausta

$$f = \bigotimes_{i=1}^m e_i\ ; \quad g = \bigotimes_{i=m+1}^{m+n} e_i\ ,$$

jossa $e_i \in B$.

Nyt lemmojen 2.9 ja 2.13 nojalla pätee $(\phi_\pi(f) \otimes \phi_\rho(g))_B(s,t) = \phi_\pi(f)_B(s)\phi_\rho(g)_B(t) = f_B(\pi^{-1}(s))g_B(\rho^{-1}(t)) = (f \otimes g)_B(\pi^{-1}(s), \rho^{-1}(t)) = (f \otimes g)_B((\pi \times \rho)^{-1}(s,t)) = \phi_{\pi\times\rho}(f \otimes g)_B(s,t)$, joten tulos seuraa lauseesta 2.1. $\square$

2.4 Ulkotulo

Määritellään m-tensorin f ja n-tensorin g *ulkotulo*

$$f \wedge g \in \bigotimes_{m+n} E$$

asettaen

$$f \wedge g = \sum_{\pi \in P[(m,n)]} \operatorname{sgn}(\pi)\phi_\pi(f \otimes g).$$

Lemma 2.19. *Ulkotulo on bilineaarinen.*

Todistus. Tulos seuraa tensoritulon bilineaarisuudesta ja kuvauksen ϕ_π lineaarisuudesta kaikilla $\pi \in S_{m+n}$. □

Lemma 2.20. *Ulkotulo on on liitännäinen.*

Todistus. Olkoot f, g, h vastaavasti ℓ, m, n -tensoreja.

Lemmojen 2.17 ja 2.18 nojalla

$$f \wedge (g \wedge h) = \sum_{\substack{\pi_1 \in P[(\ell, m+n)] \\ \rho_1 \in P[(m,n)]}} \operatorname{sgn}(\pi_1) \operatorname{sgn}(\rho_1) \cdot \phi[\pi_1 \circ (1_\ell \times \rho_1)](f \otimes g \otimes h) \ ;$$

$$(f \wedge g) \wedge h = \sum_{\substack{\pi_2 \in P[(\ell+m, n)] \\ \rho_2 \in P[(\ell,m)]}} \operatorname{sgn}(\pi_2) \operatorname{sgn}(\rho_2) \cdot \phi[\pi_2 \circ (\rho_2 \times 1_n)](f \otimes g \otimes h) \ .$$

Korollaarin 2.1 nojalla kaikilla π_1, ρ_1 on olemassa yksikäsitteiset π_2, ρ_2, joilla

$$\pi_1 \circ (1_\ell \times \rho_1) = \pi_2 \circ (\rho_2 \times 1_n),$$

ja päinvastoin. Nyt lemman 2.10 nojalla ja koska $\operatorname{sgn}(1_\ell) = \operatorname{sgn}(1_n) = 1$,

$$\operatorname{sgn}(\pi_1) \operatorname{sgn}(\rho_1) = \operatorname{sgn}(\pi_2) \operatorname{sgn}(\rho_2).$$

□

Merkitään $\bigwedge_n E = \mathcal{L}\{\bigwedge_{i=1}^n x_i : x_i \in E\}$.

Lemma 2.21. *Kaikilla $x, y \in E$ pätee*

$$x \wedge y = -y \wedge x.$$

Todistus. Seuraa yhtälöstä $x \wedge y = x \otimes y - y \otimes x$. □

Sanomme tätä ominaisuutta ulkotulon *antikommutatiivisuudeksi.*

Lemma 2.22. *Olkoon $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ avaruuden E kanta, $I, J \in \{1, \ldots, m\}^n$, $I = (i_1, \ldots, i_n)$, $J = (j_1, \ldots, j_n)$, $f = \bigwedge_{i \in I} e_i$, $s = (e_i)_{i \in I}$ ja $t = (e_j)_{j \in J}$. Nyt*

$$f_B(t) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\delta[\pi(s), t] \ .$$

Todistus. Edetään induktiolla luvun n suhteen. Tapauksessa $n = 0$ pätee $1_B(()) = 1 = \delta_{(),()}$. Oletetaan siis $n \geq 1$. Merkitään $I' = (i_1, \dots, i_{n-1})$, $f' = \bigwedge_{i \in I'} e_i$, $s' = (e_i)_{i \in I'}$ ja $e = e_{i_n}$. Liitännäisyyden ja induktio-oletuksen nojalla

$$
\begin{aligned}
f_B(t) &= (f' \wedge e)_B(t) \\
&= \sum_{\pi \in P_{(n-1,1)}} \operatorname{sgn}(\pi) \phi_\pi (f' \otimes e)_B(t) \\
&= \sum_{\pi \in P_{(n-1,1)}} \operatorname{sgn}(\pi)(f' \otimes e)_B(\pi^{-1}(t)) \\
&= \sum_{\pi \in P_{(n-1,1)}} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot f'_B(t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n-1)}) \cdot e_B(t_{\pi(n)}) \\
&= \sum_{\substack{\pi \in P_{(n-1,1)} \\ \rho \in S_{n-1}}} \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\rho) \ \cdot \delta[s', (t_{(\pi \circ \rho)(1)}, \dots, t_{(\pi \circ \rho)(n-1)})] \cdot \delta[e, t_{\pi(n)}] \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \delta[\pi(s), t] \ .
\end{aligned}
$$

$\square$

Lemma 2.23. *Olkoon $B = (e_1, \dots, e_m)$ avaruuden E järjestetty kanta. Nyt avaruuden $\bigwedge_n E$ eräs kanta on*

$$B' = \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} : \ i_1 < \cdots < i_n\}.$$

Todistus. Induktiolla liitännäisyydestä, bilineaarisuudesta ja antikommutatiivisuudesta seuraa $\mathcal{L}B' = \bigwedge_n E$.

Joukon B' lineaarinen riippumattomuus seuraa siitä, että jos I, J ovat jonon $(1, \dots, m)$ n-pituisia osajonoja, niin lemman 2.22 nojalla $\left(\bigwedge_{i \in I} e_i\right)_B((e_j)_{j \in J}) = \delta_{I,J}$. $\square$

Lemma 2.24. *Olkoon* $\dim E = m$. *Nyt*

$$\dim \bigwedge_n E = \binom{m}{n}.$$

Todistus. Seuraa lemmasta 2.23. $\square$

3 Tulon derivaatta

Olkoon E euklidininen.

3.1 Lineaarikuvausten sisätulo

Olkoon F euklidinen ja $\mathcal{B}_E$ avaruuden E sekä $\mathcal{B}_F$ vastaavasti avaruuden F ortonormaalien kantojen joukko.

Määritellään kuvaus

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_B \colon L(E,F) \times L(E,F) \to \mathbb{R}$$

kaavalla

$$\langle f, g \rangle_B = \sum_{e \in B} \langle f(e), g(e) \rangle,$$

kun $f, g \in L(E,F)$ ja $B \in \mathcal{B}_E$.

Lemma 3.1. *Kuvaus $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ on sisätulo.*

Todistus. Symmetrisyys, bilineaarisuus ja epänegatiivisuus ovat ilmeiset.

Olkoon siis $f \in L(E,F)$, $\langle f, f \rangle_B = 0$. Epänegatiivisuuden nojalla

$$\langle f(e), f(e) \rangle = 0$$

kaikilla $e \in B$, joten $f = 0$. □

Lemma 3.2. *Pätee $\langle x, y \rangle = \sum_{e \in B} \langle e, x \rangle \langle e, y \rangle$, kun $x, y \in E$ ja $B \in \mathcal{B}_E$.*

Todistus. Koska $x = \sum_{e \in B} \langle e, x \rangle e$ ja $y = \sum_{e \in B} \langle e, y \rangle e$, niin

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{e_1, e_2 \in B} \langle \, \langle e_1, x \rangle e_1 \, , \, \langle e_2, y \rangle e_2 \, \rangle \\ &= \sum_{e_1, e_2 \in B} \langle e_1, x \rangle \langle e_2, y \rangle \langle e_1, e_2 \rangle \, , \end{aligned}$$

jossa $\langle e_1, e_2 \rangle = \delta[e_1, e_2]$. □

Lause 3.1. *Pätee $\langle f, g \rangle_B = \langle f, g \rangle_{B'}$, kun $f, g \in L(E,F)$.*

Todistus. Koska $e' = \sum_{e \in B} \langle e', e \rangle e$, niin lineaarisuuden nojalla

$$f(e') = \sum_{e \in B} \langle e', e \rangle f(e) \; ; \quad g(e') = \sum_{e \in B} \langle e', e \rangle g(e) \; ,$$

joten

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{B'} &= \sum_{e'\in B'} \langle f(e'), g(e')\rangle \\ &= \sum_{e'\in B'} \sum_{e_1,e_2\in B} \langle \langle e',e_1\rangle f(e_1), \langle e',e_2\rangle g(e_2)\rangle \\ &= \sum_{e_1,e_2\in B} \sum_{e'\in B'} \langle e',e_1\rangle\langle e',e_2\rangle\langle f(e_1), g(e_2)\rangle,\end{aligned}$$

eli lemman 3.2 nojalla

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_{B'} &= \sum_{e_1,e_2\in B} \langle e_1,e_2\rangle\langle f(e_1), g(e_2)\rangle \\ &= \sum_{e_1,e_2\in B} \delta[e_1,e_2]\langle f(e_1), g(e_2)\rangle \\ &= \sum_{e\in B}\langle f(e), g(e)\rangle = \langle f,g\rangle_B.\end{aligned}$$

□

Lauseen 3.1 avulla voidaan avaruudelle $L(E,F)$ määritellä avaruuden E kannasta riippumaton sisätulo.

Lemma 3.3. *Joukko* $\{z \mapsto \langle x,z\rangle y \,:\, x\in B,\ y\in B'\}$ *on avaruuden* $L(E,F)$ *ortonormaali kanta, kun* $B\in\mathcal{B}_E$ *ja* $B'\in\mathcal{B}_F$.

Todistus. Selvä. □

3.2 Euklidinen tensoriavaruus

Merkitään $E_0=\mathbb{R}$, $E_{n+1}=L(E,E_n)$.

Lause 3.2. *Olkoon* B *avaruuden* E *ortonormaali kanta, ja olkoon* B_n *lemman* 2.6 *antama avaruuden* $\bigotimes_n E$ *kanta. Tällöin avaruus* $\bigotimes_n E$ *voidaan varustaa sisätulolla niin, että* $\bigotimes_n E$ *ja* E_n *ovat isometrisesti isomorfiset, ja* B_n *on ortonormaali.*

Todistus. Edetään induktiolla yli luvun n. Tapaus $n=0$ on selvä. Olkoon siis $n\geq 1$ ja $F=\bigotimes_{n-1}E$.

Induktio-oletuksen nojalla on olemassa isometrinen isomorfismi

$$L(E,F)\cong L(E,E_{n-1})=E_n\ ,$$

ja B_{n-1} on avaruuden F ortonormaali kanta.

Lemman 3.3 nojalla on olemassa bijektio $f_0\colon B_n=\{e\otimes e' : e\in B, e'\in B_{n-1}\}\to\{z\mapsto\langle e,z\rangle e' \colon e\in B,\ e'\in B_{n-1}\}\subseteq E_n$,

$$f_0(e\otimes e')=(z\mapsto\langle e,z\rangle e'),$$

avaruuden E_n ortonormaalille kannalle. Tällöin f_0 voidaan laajentaa yksikäsitteiseksi isomorfismiksi $f\colon \bigotimes_n E\to E_n$, jolloin f indusoi sisätulon avaruudelle $\bigotimes_n E$ niin, että f on isometria ja B_n on avaruuden $\bigotimes_n E$ ortonormaali kanta. □

Lemma 3.4. *Tensoritulo $\bigotimes_m E \otimes \bigotimes_n E \to \bigotimes_{m+n} E$ on jatkuva.*

Todistus. Lemman 2.6 ja bilineaarisuuden nojalla tulos palautuu reaalilukujen tulon jatkuvuuteen. $\square$

3.3 Tensoritulon derivaatta

Olkoot X sekä Y metrisiä avaruuksia ja olkoot F sekä G normiavaruuksia. Varustetaan tuloavaruudet $X \times Y$ ja $F \times G$ vastaavasti metriikoin ja normein tavalliseen tapaan.

Merkitään $E_n = \bigotimes_n E$. Määritellään kuvausten $f\colon X \to E_m$ ja $g\colon Y \to E_n$ *tensoritulo* $f \otimes g\colon X \times Y \to E_{m+n}$ kaavalla $(f \otimes g)(x, y) = f(x) \otimes g(y)$.

Lemma 3.5. *Olkoot*

$$f\colon X \to E_m\ ; \quad g, g'\colon Y \to E_n,$$

jossa f on rajoitettu ja g sekä g' jatkuvia pisteessä y_0. Jos $T_{y_0}(g, g')$, niin $T_{z_0}(f \otimes g, f \otimes g')$, kun $z_0 = (x_0, y_0)$, ja $T_{z_0'}(g \otimes f, g' \otimes f)$, kun $z_0' = (y_0, x_0)$.

Todistus. Todistetaan, että $T_{z_0}(f \otimes g, f \otimes g')$; tuloksen $T_{z_0'}(g \otimes f, g' \otimes f)$ todistus on symmetrinen.

Tensoritulon bilineaarisuuden ja lemman 1.11 nojalla voidaan olettaa, että $fX \subseteq \mathcal{L}\{e\}$, jossa $e \in E_m$; nyt koska tensoritulo vakion kanssa on Lipschitz, niin lemman 1.6 nojalla voidaan olettaa, että $m = 0$.

Kun $(x, y) \to z_0$ pitkin joukkoa $X \times (Y \setminus \{y_0\})$, niin lemman 1.10 nojalla

$$\frac{|f(x) \otimes g(y) - f(x) \otimes g'(y)|}{\max\{d(x, x_0), d(y, y_0)\}} = \frac{|f(x) \cdot (g(y) - g'(y))|}{\max\{d(x, x_0), d(y, y_0)\}} \to 0.$$

Lemman 1.2 nojalla $g(y_0) = g'(y_0)$, joten, kun $(x, y) \to z_0$ pitkin joukkoa $X \times \{y_0\}$, niin

$$\frac{|f(x) \otimes g(y) - f(x) \otimes g'(y)|}{\max\{d(x, x_0), d(y, y_0)\}} = \frac{|f(x) \cdot (g(y) - g'(y))|}{\max\{d(x, x_0), d(y, y_0)\}} = 0.$$

$\square$

Lemma 3.6. *Olkoot $f, f'\colon X \to E_m$ jatkuvia pisteessä x_0 ja $g, g'\colon Y \to E_n$ jatkuvia pisteessä y_0. Jos $T_{x_0}(f, f')$ ja $T_{y_0}(g, g')$, niin $T_{z_0}(f \otimes g, f' \otimes g')$, jossa $z_0 = (x_0, y_0)$.*

Todistus. Jatkuvuuden nojalla on olemassa pisteen x_0 ympäristö U ja pisteen y_0 ympäristö V, joilla $f|_U, f'|_U$ ja $g|_V, g'|_V$ ovat rajoitettuja. Merkitään

$$\alpha = f|_U \otimes g|_V\ ; \quad \beta = f|_U \otimes g'|_V\ ; \quad \gamma = f'|_U \otimes g'|_V\ .$$

Lemman 3.5 nojalla $T_{z_0}(\alpha, \beta)$ ja $T_{z_0}(\beta, \gamma)$; ja lemman 1.1 (transitiivisuuden) nojalla $T_{z_0}(\alpha, \gamma)$. Tulos seuraa lemmalla 1.3. $\square$

Lemma 3.7. *Jos $L\colon F \to E_m$ ja $M\colon G \to E_n$ ovat jatkuvia lineaarikuvauksia, niin*

$$T_0(L \otimes M,\ 0).$$

Todistus. Tensoritulon bilineaarisuuden ja lemman 1.11 nojalla voidaan olettaa, että $\dim LF = \dim MG = 1$; nyt koska tensoritulo vakion kanssa on Lipschitz, niin lemman 1.6 nojalla voidaan olettaa, että $m = n = 0$.

Jatkuvuuden nojalla on olemassa $a, b > 0$, joilla

$$\frac{|L(x) \otimes M(y)|}{\max\{|x|, |y|\}} = \frac{|L(x)| \cdot |M(y)|}{\max\{|x|, |y|\}} \leq \frac{a|x| \cdot b|y|}{\max\{|x|, |y|\}} \to 0,$$

kun $x, y \to 0$. □

Lemma 3.8. *Olkoon $f\colon F \to E_m$ jatkuva pisteessä x_0, $g\colon G \to E_n$ jatkuva pisteessä y_0 ja*

$$Df(x_0) = L\,; \quad Dg(y_0) = M\ ,$$

jossa L, M ovat jatkuvia. Merkitään $z_0 = (x_0, y_0)$. Nyt

$$D(f \otimes g)(z_0) = f(x_0) \otimes M + L \otimes g(y_0).$$

Todistus. Nyt

$$T_{x_0}(f - f(x_0),\ L - L(x_0)); \quad T_{y_0}(g - g(y_0),\ M - M(y_0)),$$

eli lemmalla 1.11

$$T_{x_0}(f,\ L - L(x_0) + f(x_0)); \quad T_{y_0}(g,\ M - M(y_0) + g(y_0)),$$

eli lemmalla 3.6

$$\begin{aligned} T_{z_0}(f \otimes g,\ &(L - L(x_0)) \otimes (M - M(y_0)) + (L - L(x_0)) \otimes g(y_0) + \\ &f(x_0) \otimes (M - M(y_0)) + f(x_0) \otimes g(y_0)), \end{aligned}$$

eli lemmalla 1.11

$$\begin{aligned} &T_{z_0}(f \otimes g - f(x_0) \otimes g(y_0), \\ &\qquad \phi + (L - L(x_0)) \otimes g(y_0) + f(x_0) \otimes (M - M(y_0))), \end{aligned}$$

jossa $\phi = (L - L(x_0)) \otimes (M - M(y_0))$.

Lemman 1.11 nojalla riittää enää todistaa $T_{z_0}(\phi, 0)$.

Määritellään kuvaus $\gamma\colon F \times G \to F \times G$ kaavalla

$$\gamma(x, y) = (x + x_0, y + y_0).$$

Nyt $\phi \circ \gamma = L \otimes M$, joten lemman 3.7 nojalla $T_0(\phi \circ \gamma, 0)$, josta tulos seuraa lemmalla 1.8. □

4 Determinantti

Olkoon E sisätuloavaruus.

4.1 Transvektio ja dilataatio

Sanomme, että lineaarikuvaus $\mathrm{t}(p,q) = t\colon E \to E$ on *transvektio parametrein* (p,q), jossa $p,q \in E$, $|p| = 1$ ja $p \perp q$, jos se on muotoa

$$t(x) = x + \langle x, p\rangle q$$

eli

$$t(x) = \begin{cases} x + aq, & \text{kun } x = ap, \\ x, & \text{kun } x \perp p. \end{cases}$$

Lisäksi sanomme, että lineaarikuvaus $\mathrm{d}(p,a) = d\colon E \to E$ on *dilataatio parametrein* (p,a), jossa $p \in E$, $|p| = 1$ ja $a \in \mathbb{R}$, jos se on muotoa

$$d(x) = x + (a-1)\langle x, p\rangle p$$

eli

$$d(x) = \begin{cases} ax, & \text{kun } x \parallel p, \\ x, & \text{kun } x \perp p. \end{cases}$$

Nähdään, että kaikilla transvektioilla $t = \mathrm{t}(p,q)$ on olemassa

$$t^{-1} = \mathrm{t}(p,-q),$$

ja että dilataatio $d = \mathrm{d}(p,a)$ on kääntyvä jos ja vain jos $a \neq 0$; tällöin

$$d^{-1} = \mathrm{d}(p, \frac{1}{a}).$$

4.2 Transpositio

Olkoon E euklidinen. Samastetaan lauseen 3.2 avulla avaruudet $L(E,E)$ ja $E \otimes E$.

Lemma 4.1. *Kaikilla $f \in L(E,E)$ on olemassa yksikäsitteinen $g \in L(E,E)$, jolla*

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$$

kaikilla $x, y \in E$.

Todistus. Yksikäsitteisyys on ilmeinen; riittää osoittaa olemassaolo.

Olkoon B avaruuden E ortonormaali kanta. Asetetaan

$$g(y) = \sum_{e \in B} \langle f(e), y \rangle e.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\langle x, g(y) \rangle &= \langle x, \sum_{e \in B} \langle f(e), y \rangle e \rangle = \sum_{e \in B} \langle f(e), y \rangle \langle x, e \rangle \\
&= \sum_{e \in B} \langle \langle x, e \rangle f(e), y \rangle = \langle f\big(\sum_{e \in B} \langle x, e \rangle e\big), y \rangle \\
&= \langle f(x), y \rangle.
\end{aligned}$$

$\square$

Lemman 4.1 nojalla voidaan kaikille $f \in L(E, E)$ määritellä yksikäsitteinen *transpoosi* $f^{\mathsf{T}} \in L(E, E)$, jolla $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{\mathsf{T}}(y) \rangle$.

Lemma 4.2. *Kaikilla $x, y \in E$ pätee $(x \otimes y)^{\mathsf{T}} = y \otimes x$.*

Todistus. Selvä. $\square$

Lemma 4.3. *Transpositio $f \mapsto f^{\mathsf{T}}$ on lineaarikuvaus $L(E, E) \to L(E, E)$.*

Todistus. Seuraa sisätulon bilineaarisuudesta. $\square$

Lemma 4.4. *Jos $f, g \in L(E, E)$, niin $(g \circ f)^{\mathsf{T}} = f^{\mathsf{T}} \circ g^{\mathsf{T}}$.*

Todistus. Olkoot $x, y, z \in E$. Lemman 4.2 nojalla $((y \otimes z) \circ (x \otimes y))^{\mathsf{T}} = \langle y, y \rangle (x \otimes z)^{\mathsf{T}} = \langle y, y \rangle z \otimes x = (y \otimes x) \circ (z \otimes y) = (x \otimes y)^{\mathsf{T}} \circ (y \otimes z)^{\mathsf{T}}$, josta tulos seuraa lineaarisuuden ja lemman 3.3 nojalla. $\square$

4.3 Lokaali normaalimuoto

Olkoon E euklidinen ja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sen ortonormaali kanta.

Merkitään $f_{i,j} = \langle e_i, f(e_j) \rangle$, kun $f \in L(E, E)$. Merkitään lisäksi $\mathrm{t}_{i,j}(a) = \mathrm{t}(e_i, ae_j)$, kun $i \neq j$, ja $\mathrm{d}_i(a) = \mathrm{d}(e_i, a)$.

Koska $\mathrm{t}_{i,j}(a) = \mathrm{id}_E + ae_i \otimes e_j$ ja $\mathrm{d}_i(a) = \mathrm{id}_E + (a-1)e_i \otimes e_i$, niin lemmojen 4.2 ja 4.3 nojalla

$$\mathrm{t}_{i,j}(a)^{\mathsf{T}} = \mathrm{t}_{j,i}(a)$$

ja

$$\mathrm{d}_i(a)^{\mathsf{T}} = \mathrm{d}_i(a).$$

Matriisilaskennan termein $\mathrm{t}_{i,j}$ ja d_i vastaavat operaatioita riveillä ja sarakkeilla. Jos lineaarikuvausta f ajatellaan matriisina, saadaan seuraavat vastaavuudet:

$f \circ \mathrm{t}_{i,j}(a)$	Sarake j lisätään a kertaa sarakkeeseen i.
$f \circ \mathrm{d}_i(a)$	Sarake i skaalataan kertoimella a.

Tästä saadaan lemman 4.4 nojalla seuraavat vastaavuudet:

$\mathrm{t}_{j,i}(a) \circ f$	Rivi j lisätään a kertaa riviin i.
$\mathrm{d}_i(a) \circ f$	Rivi i skaalataan kertoimella a.

Lause 4.1. *Kaikilla $f \in GL(E)$ on olemassa ympäristö $U \subseteq GL(E)$ ja sellaiset kuvaukset $\phi_i \colon U \to GL(E)$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, jollakin $m \in \mathbb{N}$, että jokainen $\phi_i(g)$ on transvektio $\mathrm{t}_{j,k}(\alpha_i(g))$ tai kääntyvä dilataatio $\mathrm{d}_j(\alpha_i(g))$, joissa $\alpha_i \colon U \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia, ja että $\phi_m(g) \circ \cdots \circ \phi_1(g) = g$ kaikilla $g \in U$.*

Todistus. Edetään induktiolla dimension n yli. Tapaus $n = 0$ on selvä; tällöin $m = 0$. Oletetaan siis $n > 0$.

Koska f on kääntyvä, niin on olemassa kuvauksen f ympäristö $V \subseteq GL(E)$ ja indeksi i, joilla $g_{1,i} \neq 0$, kun $g \in V$.

Jos $i = 1$, niin asetetaan

$$\alpha_1(g) = g_{1,1} \ ; \quad \phi_1(g) = \mathrm{d}_1(\alpha_1(g)) \ ;$$

muuten asetetaan

$$\alpha_1(g) = (g_{1,1} - 1)/g_{1,i} \ ; \quad \phi_1(g) = \mathrm{t}_{1,i}(\alpha_1(g)) \ .$$

Pätee

$$(g \circ \phi_1(g)^{-1})_{1,1} = 1.$$

Määritellään transvektiot

$$\phi_i(g) = \mathrm{t}_{i,1}(\alpha_i(g)) \ ; \quad \alpha_i(g) = h_{1,i} \ ;$$
$$\hat{\phi}_i(g) = \mathrm{t}_{1,i}(\hat{\alpha}_i(g)) \ ; \quad \hat{\alpha}_i(g) = h_{i,1} \ ,$$

kun $i \in \{2, \ldots, n\}$ ja $h = g \circ \phi_1(g)^{-1}$.

Tarkastellaan kuvauksia

$$\gamma(g) = \hat{\phi}_2(g)^{-1} \circ \cdots \circ \hat{\phi}_n(g)^{-1} \circ g \circ \phi_1(g)^{-1} \circ \cdots \circ \phi_n(g)^{-1},$$

kun $g \in V$. Pätee

$$\gamma(g)_{i,1} = \gamma(g)_{1,i} = \delta_{i,1}.$$

Merkitään $L = \mathcal{L}\{e_1\}$ ja $E' = L^{\perp}$. Nyt $\dim E' = n - 1$. Nähdään, että

$$\gamma(g)|_L = \mathrm{id}_L \ ; \quad \gamma(g)E' = E' \ .$$

Määritellään jatkuva kuvaus $\psi \colon V \to GL(E')$ kaavalla $\psi(g) = \gamma(g)|_{E'}$. Induktio-oletuksen nojalla kuvauksella $\psi(f)$ on olemassa ympäristö $U' \subseteq GL(E')$ ja kysytyn kaltaiset kuvaukset $\phi'_i \colon U' \to GL(E')$, $i \in \{1, \ldots, m'\}$, jollakin $m' \in \mathbb{N}$.

Merkitään $\ell = n + m'$. Asetetaan $U = \psi^{-1}U'$, $m = \ell + n - 1$,

$$\phi_i = (\phi'[i - n] \circ \psi) + e_1 \otimes e_1 \ ,$$

kun $n < i \leq \ell$, ja $\phi_i = \hat{\phi}[i - \ell + 1]$, kun $i > \ell$. $\square$

Sanomme tällaista perhettä ϕ *lokaaliksi normaalimuodoksi joukossa* U.

4.4 Determinantti

Olkoon E euklidinen ja $B = (e_1, \ldots, e_n)$ sen järjestetty ortonormaali kanta. Kiinnitetään *pseudoskalaari*

$$1_B^* = \bigwedge_{i=1}^{n} e_i$$

kannan B suhteen. Lemman 2.24 nojalla voidaan määritellä *determinantti kannan B suhteen* asettamalla

$$\det_B \colon GL(E) \to \mathbb{R}\ ; \quad \det_B f = a\ ,$$

kun

$$a \cdot 1_B^* = \bigwedge_{i=1}^{n} f(e_i).$$

Lemma 4.5. *Pätee* $\det_B \mathrm{id}_E = 1$.

Todistus. Selvä. □

Lemma 4.6. *Olkoon $f \in GL(E)$, $t = \mathrm{t}(e_i, ae_j)$, $i \neq j$. Nyt*

$$\det_B(f \circ t) = \det_B f.$$

Todistus. Lineaarisuuden ja antikommutatiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned}
\det_B(f \circ t) \cdot 1_B^* &= f(e_1) \wedge \cdots \wedge (f(e_i) + af(e_j)) \wedge \cdots \wedge f(e_n) \\
&= f(e_1) \wedge \cdots \wedge f(e_n) + \\
&\quad\ a \cdot f(e_1) \wedge \cdots \wedge f(e_j) \wedge \cdots \wedge f(e_j) \wedge \cdots \wedge f(e_n) \\
&= f(e_1) \wedge \cdots \wedge f(e_n) + 0 \\
&= \det_B f \cdot 1_B^*.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.7. *Olkoon $f \in GL(E)$, $d = \mathrm{d}(e_i, a)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nyt*

$$\det_B(f \circ d) = a \cdot \det_B f.$$

Todistus. Homogeenisuuden nojalla

$$\begin{aligned}
\det_B(f \circ d) \cdot 1_B^* &= f(e_1) \wedge \cdots \wedge af(e_i) \wedge \cdots \wedge f(e_n) \\
&= a \cdot \det_B f \cdot 1_B^*.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.8. *Olkoot $f, g \in GL(E)$. Nyt*

$$\det_B(f \circ g) = \det_B f \cdot \det_B g.$$

Todistus. Lauseen 4.1 nojalla f, g voidaan esittää transvektioiden $\mathrm{t}(e_i, ae_j)$ ja dilataatioiden $\mathrm{d}(e_i, a)$ yhdisteinä, joten tulos seuraa lemmoista 4.5, 4.6 ja 4.7. □

Lemma 4.9. *Kaikilla $f \in GL(E)$ pätee $\det_B f \neq 0$.*

Todistus. Seuraa lemmoista 4.5 ja 4.8. □

Lause 4.2. *Kaikilla $f \in O(E)$ ja $g \in GL(E)$ pätee*

$$\det_{fB} g = \det_B g.$$

Todistus. Nyt

$$1^*_{fB} = \bigwedge_{i=1}^{n} f(e_i) = \det_B f \cdot 1^*_B$$

ja lemmalla 4.8

$$\det_{fB} g \cdot 1^*_{fB} = \bigwedge_{i=1}^{n} (g \circ f)(e_i) = \det_B g \cdot \det_B f \cdot 1^*_B,$$

eli sijoittamalla

$$\det_B f \cdot \det_{fB} g \cdot 1^*_B = \det_B g \cdot \det_B f \cdot 1^*_B,$$

eli lemman 4.9 nojalla

$$\det_{fB} g \cdot 1^*_B = \det_B g \cdot 1^*_B,$$

josta tulos seuraa. □

Lauseen 4.2 avulla voidaan ryhmälle $GL(E)$ määritellä kannasta B riippumaton determinantti.

Kirjallisuutta

[1] Artin, Emil: *Geometric algebra.* Interscience Publishers, New York, 1957.

[2] Dieudonné, Jean: *La géométrie des groupes classiques.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, 1955.

[3] Dieudonné, Jean: *Foundations of modern analysis.* Academic Press, New York, 1969.

[4] Doran, Chris, ja Anthony Lasenby: *Geometric algebra for physicists.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[5] Howard, Ralph: *The Milnor–Rogers proof of the Brouwer fixed point theorem.* `http://people.math.sc.edu/howard/Notes/brouwer.pdf`, 2004.

[6] Väisälä, Jussi: *Topologia II.* Limes, Helsinki, 1999.

[7] Väisälä, Jussi: *Topologia I.* Limes, Helsinki, 2002.