HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Logaritmin opetus ja sen kehittäminen

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Pro gradu -tutkielma
Matematiikan aineenopettajalinja
Toukokuu 2015
Vesa Koivunen

Ohjaaja: Juha Oikkonen

Esipuhe

Viimeisen kalenterivuoden ajan olen nähnyt maailman logaritmisena. Olen viihdyttänyt itseäni ajatusleikein, jossa arvioin logaritmien arvoja päässä. Lisäksi olen matkannut läpi matematiikan kolmen maailman etsien vastauksia logaritmin opetukseen. Tämän matkan aikana olen oppinut paljon ja toivon mukaan myös siirtänyt oppimaani eteenpäin.

Haluan kiittää perhettäni, joka on mahdollistanut koulutukseni etenemisen tähän vaiheeseen. Myös niitä opettajia, jotka ovat omalla esimerkillään vaikuttaneet kiinnostukseeni matematiikkaa ja luonnontieteitä kohtaan sekä Matematiikan opiskelijaryhmä Matrix ry:n tarjoamaa opiskelun ja vapaa-ajan tukea. Erityisesti niitä opiskelutovereita, joista on muodostunut opintojen aikana toinen perhe. Ja lopuksi ohjaajaani Juha Oikkosta, joka fuksivuodestani lähtien jaksoi kannustaa opinnoissani.

Vesa Koivunen

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto Fakultet/Sektion – Faculty	Laitos/Institution– Department
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä/Författare – Author

Vesa Koivunen

Työn nimi / Arbetets titel – Title

Logaritmin opetus ja sen kehittäminen

Oppiaine /Läroämne – Subject

Matematiikka

Työn laji/Arbetets art – Level	Aika/Datum – Month and year	Sivumäärä/ Sidoantal – Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Toukokuu 2015	45 sivua + 7 liitesivua

Tiivistelmä/Referat – Abstract

Logaritmin käsite on muuttunut sen löytymisen jälkeen huomattavasti. Lähinnä laskennalliseen hyötyyn luodusta apuvälineestä on tullut keskeinen matemaattisen analyysin työkalu. Myös lukuisat sovellukset usealla eri tieteenalalla hyödyntävät logaritmin ominaisuuksia. Tästä syystä se on edelleen oleellinen aihekokonaisuus lukiomatematiikassa.

Tutkimuksen tavoitteena on selvittää millä tavoin logaritmi opetetaan koulumatematiikassa. Teoreettisen taustan pohjalta arvioidaan opetuksen nykytilaa ja pohditaan miten sitä voitaisiin kehittää. Tutkielmassa käydään läpi logaritmin opetuksesta tehtyjä tutkimuksia sekä tarkastellaan Helsingin Yliopiston matematiikan aineenopettajaksi opiskelun aloittaneiden ymmärrystä logaritmista. Lisäksi esitellään yhden oppitunnin mittainen opetuskokeilu, jossa hyödynnetään tutkielmassa esiteltyjä keinoja.

Tutkimuksen teoreettisena viitekehyksenä toimii David Tallin matematiikan kolme maailmaa. Oleellisessa osassa on proseptin käsite. Proseptuaalisen tiedon tasolla yksilö kykenee ajattelemaan joustavasti proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon välillä. Tallin luoma käsite ”met-before” kuvastaa oppilaan aiemmin kohtaamaa tietoa. Tämä on oleellista opetuksen suunnittelussa, jolloin tulee tarkastella mitkä oppilaan aikaisemmat tiedot toimivat uuden tukena ja mitkä problematisoivat sitä. Logaritmin yhteydessä tarkastelu on erityisen tärkeää, sillä käsitteen historiallinen muodostuminen poikkeaa sen nykyisestä esitysmuodosta. Historiallista kehitystä, oppilaan aiemmin kohtaama tiedoa ja logaritmin käsitteen jäsentämistä pyritään helpottamaan ottamalla käyttöön käsitekartta.

Tutkimuksessa esitellään logaritmin historiallinen käsitteenmuodostus Antiikin Kreikasta aina John Napierin vuonna 1614 kehittämään käsitteeseen. Tämän lisäksi tarkastellaan logaritmin nykyistä esitysmuotoa ja sen sovelluksia.

Logaritmin esiintymistä koulumatematiikassa tutkitaan opetussuunnitelmien ja oppikirjojen perusteella. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet antavat pohjaa niille tiedoille, jotka lukio-oppilas on aiemmin kohdannut. Lukion opetussuunnitelman perusteita tarkastellaan sen nykyisessä muodossa. Lisäksi huomioidaan tulevan opetussuunnitelman perusteiden luonnos.

Tutkimuksessa käydään läpi viimeisen vuosisadan läpi kestänyttä pedagogista keskustelua logaritmien opetuksesta. Tämän lisäksi tehdään katsaus opetuskokeiluihin, joita logaritmin opetuksesta on tehty. Helsingin Yliopiston Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen uusilla matematiikan aineenopettajaksi opiskeleville tehdyn kyselyn perusteella arvioidaan yliopisto-opinnot aloittavan opiskelijan tasoa logaritmi- ja eksponenttifunktioissa. Tulosten perusteella opiskelijoiden ymmärrys logaritmin suhteen on vahvasti proseduraalisen tiedon tasolla. Sen sijaan eksponenttifuktioissa näkyy konseptuaalisen tiedon tasoa.

Lopuksi esitellään yhden oppitunnin mittainen opetuskokeilu logaritmeista. Pyrkimyksenä on esittää kokonaisuus siten, että se on tutkimukseen perehtyneen toteutettavissa. Tässä yhteydessä käydään myös läpi oppitunnista saatua palautetta ja pohditaan muun muassa tutkimuksen linkkejä opetukseen ja mahdollisia jatkotutkimuskohteita.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords

Logaritmi, eksponentti, matematiikan opetus, matematiikan kolme maailmaa, prosepti, matematiikan historia

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisältö

Liitteet

Taulukot

Kuvat

Luku 1

Johdanto

1.1 Johdanto

Logaritmin käsite ilmestyi ensi kerran vuonna 1614 John Napierin toimesta (Cajori, 1991). Vuosien saatossa sen luonne on muuttunut erityisesti tähtitieteesssä tehokkaasta työkalusta koululaisten apuvälineeksi ja edelleen usean eri tieteenalan käyttöön. Lähes jokainen 1900-luvun alkupuolen insinöörityö on syntynyt logaritmien avittamana. Laskinten ja tietokoneiden myötä etenkin logaritmien laskennallinen hyöty on vähentynyt, mutta matemaattisten ominaisuuksien tärkeys säilyy edelleen. Tämä näkyy muun muassa tietoliikenteen salausmenetelmissä, fraktaalidimensioissa ja informaatioteoriassa.

Oma kiinnostukseni aiheeseen heräsi opetusharjoittelun yhteydessä, jolloin pidin lukion matematiikan tuntia aiheesta logaritmi- ja eksponenttifunktion derivaatta. Opetuksen aikana kävi ilmi, että kyseiset käsitteet olivat oppilailla hyvin heikossa hallinnassa. Etenkin logaritmin ominaisuuksissa oli perusteellisia puutteita. Tämä siirsi ongelmia luonnollisesti derivaatan yhteyteen. Kun tähän lisätään, että kyseinen harjoittelukoulu on ylioppilaskokeella mitattuna yksi Suomen menestyneimpiä, ei tämä voi kertoa kovin hyvästä osaamisesta valtakunnallisella tasollakaan. Tämän jälkeen pohdin omaa suhtautumistani logaritmin käsitteeseen ja jouduin myöntämään, ettei se itsellenikään ollut avautunut ennen kuin yliopisto-opinnoissa. Keskusteltuani logaritmeista matematiikan yleisen linjan- sekä matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden kanssa, kävi ilmi, että myös tässä joukossa on monia, joille logaritmin käsite on yhä ongelmallinen. Myös käymäni pedagoginen keskustelu matematiikan opettajien kanssa johti konsensukseen siitä, ettei logaritmejä keretä lukio-oppimäärässä käymään läpi tarvittavaa määrää.

Logaritmin opettamisesta on käyty pedagogista keskustelua pitkään (McClenon, 1919; Frumveller, 1920; Gamble, 2005) ja vaikka sen luonne on vuosisadan aikana muuttunut huomattavasti, on logaritmit edelleen yksi vaikeimmista lukion oppimäärään kuuluvista käsitteistä. Aalto-yliopiston perustaitotestin perusteella aloittavilla korkeakouluopiskelijoilla on puutteelliset taidot logaritmien suhteen (Rasila, 2011). Logaritmi-aiheisissa tehtävissä menestys oli kauttaaltaan huonointa. Kansainvälisesti vastaavia huomioita on tehty monia. Muun muassa Kenney ja Kastberg (2013) raportoivat huonosta osaamisessa yliopistokursseilla Yhdysvalloissa.

Logaritmin käsite on historiallisesti syntynyt geometrisen ja aritmeettisen lukujonon yhteydestä. Modernimpi määritelmä on peräisin Eulerilta, joka esittää logaritmin oleellisesti eksponenttifunktion käänteisfunktiona. Eroa nykyaikaisen määritelmän ja historiallisen käsitteenmuodostuksen välillä on pohdittava pedagogisesti. Se herättää kysymyksen siitä, millaiset aikasemmat tiedot vaikuttavat oppilaan muodostamaan käsitykseen logaritmista ja onko niillä enemmän yhteyksiä historiallisen, vai modernin esityksen välillä. Tähän liittyen on myös syytä tarkastella millä tavoin oppikirjat esittelevät logaritmin käsitteen.

Oppilaan aiemman kohtaaman tiedon vaikutusta uuden asian oppimiseen on tutkittu David Tallin matematiikan kolmen maailman viitekehyksessä (Tall, 2013). Tätä näkökulmaa on käytetty hyväksi ainakin lineaaristen (Lima ja Tall, 2008) ja toiseen asteen yhtälöiden (Lima ja Tall, 2014) oppimisen tutkimiseen. Viitekehys tarjoaa myös tavan selittää yksilön matemaattisen ajattelun kehitystä läpi elämän.

Tutkielmassa käydään läpi logaritmin opetuksesta tehtyjä tutkimuksia sekä tarkastellaan Helsingin Yliopiston matematiikan aineenopettajaksi opiskelun aloittaneiden ymmärrystä logaritmista. Esitän myös yhden oppitunnin mittaisen opetuskokeilun, jonka tarkoituksena on johdattaa oppilas logaritmin käsitteeseen. Pyrin tutkielman aikana käymään läpi kaiken oleellisen, jotta kukin aiheesta kiinnostunut voi sen pohjalta rakentaa omaan käyttöönsä mielekkään opintokokonaisuuden logaritmien opetukseen. Lisäksi pyrin ottamaan osaa keskusteluun voimaan tulevista lukion opetussuunnitelman perusteista.

Luku 2

Teoria

Tässä luvussa esitellään tutkimuksen teoreettinen viitekehys. Ensiksi käydään läpi proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto, joiden pohjalta esitellään proseptin käsite. Viitekehyksessä oleellisena osana on David Tallin matematiikan kolme maailmaa. Tämän pohjalta esitellään myös met-beforen käsite. Lisäksi käydään läpi logaritmin käsitteenmuodostuksellinen näkökulma aiempien tutkimusten valossa.

2.1 Prosepti

2.1.1 Proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto

Proseduraalinen tieto tarkoittaa tiettyjen sääntöjen ja algoritmien dynaamista ja onnistunutta hyödyntämistä olennaisissa esitysmuodoissa. Tällöin edellytetään esitysmuotojen ymmärtämistä, muttei välttämättä niiden tietoista ajattelemista. Vastaavasti konseptuaalinen tieto tarkoittaa laajemman tietoverkon omaamista ja siinä liikkumista. Tässä verkossa elementteinä on muun muassa proseduureja, sääntöjä ja ongelmia erilaisissa esitysmuodoissa. Yksilö ymmärtää ja tiedostaa toimintansa perustan ja logiikan sen takana. Proseduraalinen tieto on näistä kahdesta automatisoituneempaa. Vastaavasti konseptuaalinen tieto vaatii tiedostettua ajattelua. (Haapasalo, 2000.)

Opittaessa uusia asioita ei aina ole itsestään selvää kannattaako lähteä proseduraalisesta tiedosta, vai konseptuaalisesta tiedosta. Proseduraalisen tiedon kautta oppimisen alku on tietyllä tapaa helpompaa ja vähemmän työlästä, kun taas konseptuaalisesen tiedon kautta alku on työläämpi, mutta se tarjoaa paremman pohjan aiheen edetessä. Haapasalo (2003) käyttää tästä maailman ympäri purjehtimisen metaforaa. Mikäli aloittaa myötätuuleen, joutuu jossain vaiheessa kohtaamaan vastatuulen. Vastaavasti tekemällä taustatyö hyvästä lähtösatamasta saattaa johtaa verkkaiseen alkuun, mutta luo jatkolle paremman pohjan. On mahdotonta kertoa muutaman päivän tai viikon perusteella kumpi strategia on voittoisa.

Etenkin nuoremmilla lapsilla proseduraalinen lähtökohta on luonnollisempi. Lapsi usein valitsee oikeat keinot osaamatta selittää miksi. Lisäksi luonnollinen tapa selittää asioita matematiikan ulkopuolella on niiden käyttötarkoituksen, ei määritelmän mukaan. Tuoli on ”esine jolla istutaan”, ei ”huonekalu luokassa”. Myös matemaattinen ajattelu on historiallisesti kehittynyt proseduraalisen tiedon kautta. Toisaalta koulun tarjoamassa ympäristössä eteneminen konseptuaalisesta tiedosta luo mahdollisuudet oppimisen jatkumolle, eikä työ vastatuuliosuuksilla jää seuraavan opettajan vastuulle (Haapasalo, 2000 ja 2003).

Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto eivät kuitenkaan ole toisistaan riippumattomia, eikä tehtäviä voida välttämättä jakaa jompaankumpaan kategoriaan.

2.1.2 Prosepti

Fieldsin mitalisti William Thurston muistaa lapsuudestaan hetken, jolloin hämmästyneenä ymmärsi, että jaettaessa luku 134 luvulla 29 saadaan vastaukseksi 134/29. Aikaisemmin ”134 jaettuna 29:lla” oli tarkoittanut pitkäveteistä laskutoimitusta ja 134/29 murtolukua, johon ei liittynyt työtä. Nyt kaksi eri merkitystä oli muodostunut yhdeksi. Tämä on osoitus siitä, miten samalla symbolilla on kaksi eri merkitystä: jakolaskun prosessi ja murtoluvun käsite. Tästä ajatuksesta on kehittynyt *proseptin* käsite. Siinä yhdistyvät termin *proseduuri* alkuosa ja termin *konsepti* loppuosa.

Proseduurissa yksilö kykenee muokkaamaan esitysmuotoja esimerkiksi murtoluvun ja jakolaskun välillä ilman tietoista ajattelua. Kun tällaiset proseduurit sulautuvat yhteen tarjoten joustavia ratkaisumenetelmiä, voidaan puhua prosessista. Proseptuaalisessa ajattelussa siirrytään abstraktimmalle tasolle, jossa prosessit ovat kasautuneet *symboleiksi*. Symbolit toimivat proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon välillä. (Haapasalo, 2004.)

Aritmetiikan ja algebran symbolit erittelevät tiettyjä operaatioita, joita voidaan suorittaa askelittain. Ne voivat toimia myös ajatuksen kokonaisuuksina, joita pystytään käsittelemään. Kielellisesti ajateltuna tämä antaa symboleille useita eri tarkoituksia. Aritmeettinen lauseke $3 + 4$ toimii ohjeena suorittaa laskutoimitus ”lisää lukuun kolme luku neljä”. Yhtälailla lauseketta voidaan ajatella summana, joka on seitsemän. Symboli $3+4$ toimii siis sekä yhteenlaskun prosessina että summan konseptina. Joustavasti käsiteltynä tämä kasautuu proseptiksi. Proseptin määritelmäksi annetaan ”mielen objekti, jossa yhdistyy prosessi, sen tuottama konsepti ja symboli jota voidaan käyttää tarkoittamaan jompaakumpaa, tai molempia.” (Tall ja Gray, 1993).

Logaritmin tutkimiseen proseptin ajatus on hyödyllinen. Voimme ajatella esimerkiksi lauseketta $\lg 100$ prosessina ”mihin potenssiin luku kymmenen tulee korottaa, jotta saadaan luku sata”, mutta yhtälailla se esittää lukua kaksi. Lisäksi voidaan tutkia myös symbolin $\log(x)$ roolia yhtälössä $\log(x) + \log(x - 9) = 1$. Nyt symboli edustaa objektia, jota voidaan logaritmin laskusääntöjen mukaisesti muokata. Silti sillä on edelleen myös prosessin merkitys eksponenttina (Kenney, 2005). Prosepti on oleellinen käsite tarkastellessa David Tallin matematiikan kolmen maailman viitekehystä.

2.2 Matematiikan kolme maailmaa

David Tallin (2013) mukaan ihmisen matemaattinen ymmärrys kehittyy koko elämän ajan käyden läpi kolme tasoa. Viitekehys perustuu voimakkaasti aiempiin teorioihin, kuten APOS-teoriaan ja SOLO-taksonomiaan. Se pyrkii selittämään matematiikan oppimista ja ajattelua sen sijaan, että keskittyisi niinkään kuvaamaan matematiikan luonnetta oppiaineena. Kolmen maailman mallissa tieto rakentuu aiemman tiedon päälle, mutta se eroaa esimerkiksi konstruktivismista siinä, että aiemmin opittu tieto voi olla sekä oppimista tukevaa että sitä problematisoivaa. Esimerkiksi kokonaislukujen peruslaskutoimitukset laajenevat luontevasti murtolukuihin ja desimaalilukuihin, mutta samalla ruokkivat virhekäsitystä, jossa kerrottaessa luku kasvaa.

Matemaattiseen ajatteluun kuuluu matemaattisten struktuurien tiivistäminen ajatusmalleiksi, jotka johtavat aina hienostuneisimpiin konsepteihin. Ajatusmallien kehitys lähtee konkreettisista havainnoista, joissa matematiikka ruumiillistuu, kehittyen objektien symboliseen käsittelyyn ja aina kohti formaalia matematiikkaa. David Tallin matematiikan kolme maailmaa ovat

1. konseptuaalis-ruumillinen (conceptual embodiment),
2. proseptuaalis-symbolinen (proceptual symbolic) ja
3. aksiomaattis-formaali (axiomatic formalism).

Ensimmäinen maailma (konseptuaalis-ruumiillinen) rakentuu ihmisen havaintojen ja tekojen pohjalta kehittyviin ajatusmalleihin. Ruumiillistumaa ajatellaan matematiikan mielessä siten, että jollekin abstraktille matemaattiselle konseptille annetaan fyysinen vastine. Tämä on varhaisin matemaattisen ajattelun vaihe ja alkaa kehittyä jo lapsena, vaikkapa leikittäessä erimuotoisilla esineillä. Esimerkiksi yhtälöitä käsitellessä ruumiillistamisena voidaan nähdä vaakamalli, jossa yhtälön molemmat puolet täytyy saada tasapainoon. Tasapainoehdon pohjalta voidaan ratkaista muuttujan arvo.

Siirryttäessä ruumiillistamisesta kohti toimintaa inhimilliset teot kehittyvät symbolisiksi laskutoimituksiksi ja joustavaksi operatiiviseksi ajatteluksi. Lapsi voi esimerkiksi edelleen käsitellä samoja muotoja kuin aikaisemmin, mutta hänen huomionsa on siirtynyt kappaleiden lukumäärään. Lukumäärästä hän kehittää luvun käsitteen.

Matematiikan toinen maailma on lukiomatematiikan kannalta oleellisin, joskin se kehittyy osin rinnakkain ensimmäisen maailman kanssa. Siinä fyysiset toiminnot kehittyvät matemaattisiksi proseduureiksi ja kohti joustavaa symbolista ajattelua. Proseptin käsite tässä yhteydessä kuvaa ihanteellista ajattelun tasoa, mutta matematiikan toisen maailman piiriin lasketaan myös kaikki operatiivinen toiminta aritmetiikan ja algebran parissa. Siirryttäessä kohti abstraktimpaa ajattelua täytyy oppilaan kyetä irrottautumaan reaalimaailman vastineista, jotka eivät välttämättä vastaa symbolista ongelmanratkaisua.

Logaritmin suhteen kyky ajatella matematiikan toisen maailman tasolla on kriittinen. Käsitteeseen siirryttäessä täytyy oppilaan kyetä ymmärtämään esimerkiksi mitä tarkoittaa luku korotettuna potenssiin, joka ei ole kokonaisluku. On mahdotonta antaa käytännön merkitystä ajatukselle, jossa luku kaksi kerrotaan itsellään 5/4 kertaa, joten oppilaan täytyy pystyä ajattelemaan hienostuneemmin. Proseduraalisessa mielessä tehtävien ratkaiseminen on mahdollista, mutta konseptuaalisessa mielessä ymmärrys jää vaillinaiseksi.

Algebrallisista puutteista periytyy helposti ongelmia logaritmien yhteyteen. Jo aritmetiikasta voi periytyä epäselvyys lausekkeen molempien puolien yhtäsuuruudesta. Tällöin algebrallisten lausekkeiden käsittely problematisoituu. Mikäli yhtäsuuruusmerkin merkitys lausekkeen puolien tasapainon säilyttäjänä on epäselvä, aiheuttaa se ongelmia logaritmilausekkeiden tulkintaan. On tärkeää, että esimerkiksi lausekkeessa $\log_3 9 = 2$ ymmärretään, että kryptinen merkintätapa $\log_3 9$ on täsmälleen sama asia, kuin luku kaksi. Merkintätapa saattaa muulloin aiheuttaa ajatuksen jonkinlaisesta funktiosta, mikä vaikeuttaa ajatusta käsitteestä (Kenney, 2005).

Myös logaritmifunktion rooli on ongelmallinen. Oppilas kykenee konseptuaalis-ruumillisessa mielessä ajattelemaan funktion $f(x) = 2x + 3$ tarkoittavan, että syötettävä luku kerrotaan kahdella ja siihen lisätään kolme. Tällöin pelkkä lausekkeen $2x + 3$ käsittely objektina tai prosessina riittää. Vastaava selkeä ajatusmalli puuttuu logaritmifunktiolta $f(x) = \log_a(x)$. (Kenney ja Kastberg, 2013.)

Matematiikan kolmas maailma (aksiomaattis-formaali) vaatii edelleen hienostuneempaa ajatusrakennetta. Kontekstilla ei ole merkitystä ja tieto pohjautuu aksioomiin. Esimerkiksi "$x+y = y+x$" pitää paikkansa aksiomaattisesti ja on toisarvoista tietää miten kyseinen prosessi suoritetaan. Tämä maailma ei logaritmeihin tutustuessa ole tärkeä, mutta lähestyessä käsitettä eksponenttifunktion käänteisfunktion näkökulmasta tullaan lähelle aksiomaattis-formaalia maailmaa.

Matematiikan kolme maailmaa eivät ole erillisiä ja sisältyvät moneen matematiikan osa-alueeseen yhtäaikaisesti. Lisäksi kukin alue kehittyy kohti hienostuneempaa ajatusmallia. Esimerkiksi matemaattisia todistuksia voidaan tehdä kaikilla näillä kolmella tasolla. Euklidinen geometrinen todistus on vahvasti konseptuaalis-ruumiillinen. Sama voidaan esittää algebrallisesti proseptuaalis-symbolisen maailman näkökulmasta. Yhtälailla tulokseen voi päästä aksioomista johtamalla tuloksen formaalia päättelyä käyttäen. Koulumaailmassa erityisesti ruumiillinen ja symbolinen maailma kehittyvät rinnakkain siten, että fyysiset teot antavat merkityksen symbolisille operaatioille.

2.3 Met-Before

Jokaisen uuden aihekokonaisuuden kohdalla täytyy ottaa huomioon se, mitä oppilas on aikaisemmissa opinnoissaan kohdannut. Tall (2013) kuvaa aiemmin opitun sisällön vaikutusta nykyiseen oppimiseen met-beforen käsitteellä. Käsite on syntynyt leikkimielisestä sanaleikistä metaforan kautta. Metaforalla uusia kokemuksia kuvaillaan aiempien kokemusten perusteella. Met-beforen määritelmänä toimii: ”struktuuri aivoissamme nyt, aiempien kohtaamiemme kokemusten seurauksena”. Aiemmin kohdatulla tiedolla voi olla yhtälailla tukeva tai problematisoiva vaikutus opittavaan asiaan. Esimerkkinä tästä on peruslaskutoimitukset luonnollisilla luvuilla. Lapsi saa kokemuksen siitä, että kertolaskussa luku kasvaa ja jakolaskussa luku pienenee. Tämä ongelmallistaa jatkossa operoimista murtoluvuilla, jolloin nämä säännöt eivät enää päde.

Rosana De Lima ja Tall ovat tutkineet aiemmin kohdattujen kokemusten näkökulmasta lineaaristen (Lima ja Tall, 2010) ja toisen asteen yhtälöiden oppimista (Lima ja Tall, 2014). Tässä erityisesti aikaisempien virheellisten käsitysten periytyminen aritmetiikasta algebraan osoittautui voimakkaaksi. Kävi myös ilmi, että vaikka opettaja pyrkisi opetuksessaan korostamaan yhtälöiden molempien puolien yhtäsuuruutta, oppilaat kehittävät muistikeinoja asian oppimiseksi.

Vastaavasta näkökulmasta on mielenkiintoista ajatella muita matematiikan käsitteitä. Logaritmi- ja eksponenttifunktioiden tapauksessa tuleekin miettiä millaiset aiemmin kohdatut tiedot voivat vaikuttaa käsitteen oppimiseen niin positiivisessa, kuin negatiivisessa valossa. Esimerkiksi virheellinen laskusääntö $\log_a(x+y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ voi tuntua järkevältä, kun oppilas ajattelee entuudestaan tutun osittelulain kautta (Hurwitz, 1999). Tieto täytyy pystyä muokkaamaan ja siirtämänään uuteen kontekstiin. Tällöin esimerkiksi lausekkeiden $x + x + x$ ja $\log_2(x) + \log_2(x) + \log_2(x)$ tarkastelu ja sievennys voi yksinkertaisessa mielessä valottaa uuden systeemin eroja vanhaan tietoon. (Kenney ja Kastberg, 2013). Logaritmien laskusääntöihin voi hakea konkretiaa käyttämällä laskutikkua opetuksen apuna. Laskutikulla nähdään, miten kertolasku muutetaan yhteenlaskuksi käyttämällä tikulla kuljettua matkaa havainnollistamaan tehtyä prosessia.

2.4 Logaritmin käsite

Joustava ajattelu proseptuaalisessa mielessä on oleellista matemaattisen ajattelun kehittyessä. Proseduraalisen tiedon näkökulmasta lähdetään liikenteeseen suoraviivaisten, nopeasti automatisoituvien tehtävien pohjalta. Mikäli lähestymistapaa halutaan viedä kohti konseptuaalista tietoa, täytyy ottaa huomioon mihin muihin matematiikan osa-alueisiin käsite on yhteydessä ja mihin sen toiminta perustuu. (Tall, 2013.)

Vagliardo (2006) kokosi käsitekartat opettajien ja oppilaiden käsityksistä logaritmia kohtaan. Opettajat kuvasivat logaritmia termein ”luku”, ”symboli”, ”notaatio”, ”funktio” ja ”eksponentti”. He eivät kiinnittäneet juurikaan huomiota käsitteen ominaisuuksille. Erityisesti linkki aritmeettisten ja geometristen lukujonojen välillä jai vaille huomiota. Suurin paino opettajilla keskittyi logaritmin ilmenemiseen eksponenttina. Tämä heijastuu opetukseen, jossa alleviivautuu logaritmi synonyymina eksponentille. Tällöin logaritmin konseptuaalinen luonne, johon kuuluu yhteydet käytännön ja teorian sovelluksiiin sekä muihin oppiaineisiin jää esittelemättä.

Oppilaiden haastattelussa vastaukset painottuivat enemmän logaritmin laskusääntöihin ja sen rooliin ratkaisuna eksponenttiyhtälöissä. Tässä heijastuu proseduraalinen osaaminen, mutta logaritmin käsitettä ei selvästi ymmärretä edes eksponentin valossa. Haastatteluissa oppilaat osasivat mainita logaritmin ilmenemisen kemiassa ja fysiikassa.

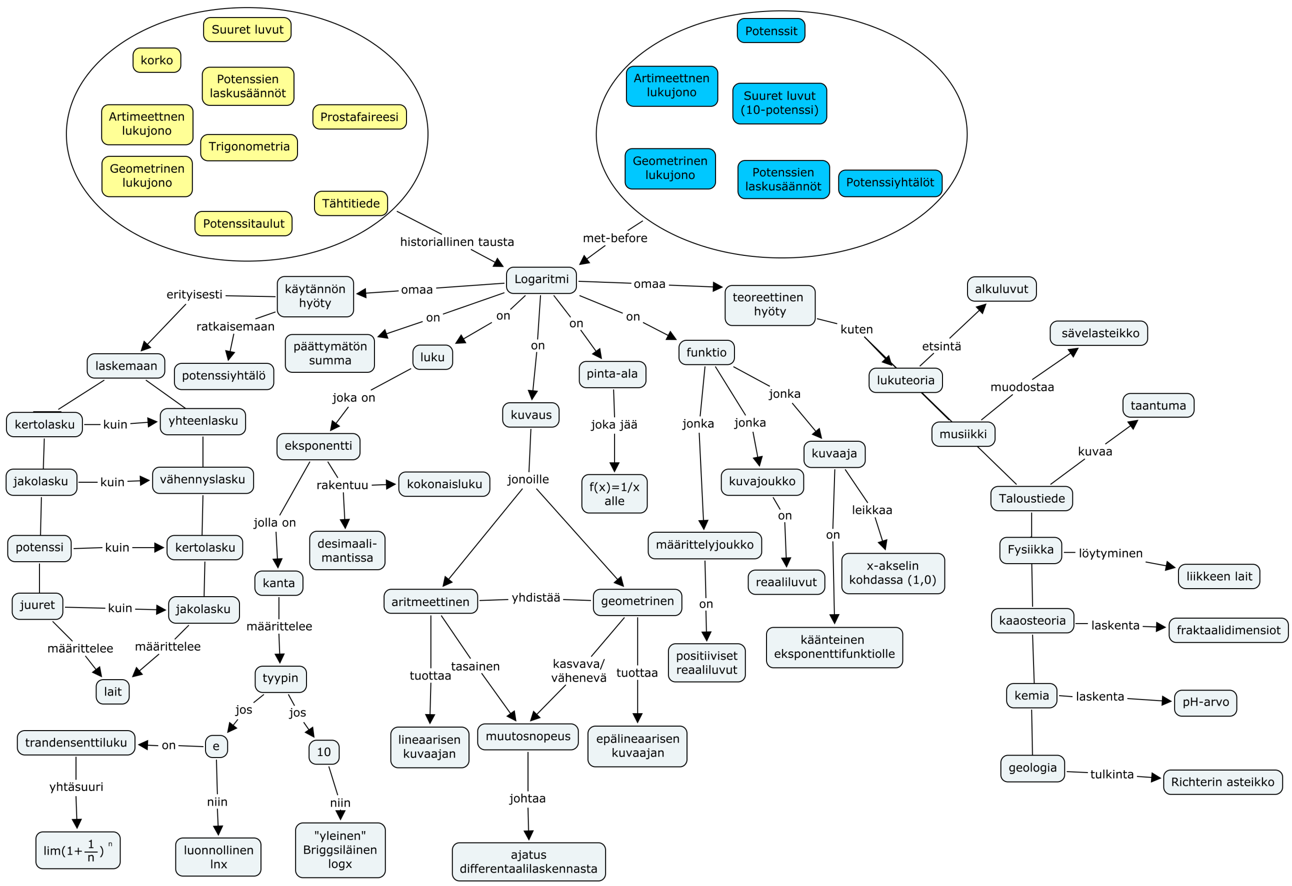
Usein oppilaat näkevät logaritmin asiana, joka täytyy tehdä tai muuntaa (Kenney, Rachael, ja Kastberg, 2013). Tällöin logaritmifunktion ajattelu eksponenttifunktion käänteisfunktiona ei toimi ja oppilaiden käsitykset esimerkiksi määrittelyjoukosta jää hataraksi. Notaation hankaluudesta osoittaa 56 oppilaan ryhmälle esitetty kysymys (Kenney, 2005):

Ovatko seuraavat lausekkeet yhtäpitäviä

$$\log_3(x) + \log_3(x+1) \text{ ja } \log_5(x) + \log_5(x+1).$$

Tähän kysymykseen 16 vastasi yhtälöiden olevan yhtäpitäviä, sillä logaritmit supistuvat pois. Tutkimuksen johtopäätösten mukaan tämä osoittaa ettei oppilailla ollut proseptuaalista ymmärrystä logaritmin käsitteeseen.

Vagliardo (2006) uskoo selkeämmän konseptuaalisen tiedon antavan paremmat lähtökohdat logaritmin ymmärtämiseen ja soveltamiseen eri tieteen aloilla. Kokoamassaan käsitekartassa



Kuva 2.1: Käsitekartta: Logaritmi

hän jaottelee logaritmin historiallisen kehityksen struktuurin sekä teoreettiset ja käytännön yhteydet. Olen Vagliardon alkuperäisen käsitekartan sekä tämän tutkielman teoreettisen viitekehyksen nojalla muodostanut käsitekartan (2.1), jossa tarkastellaan logaritmin käsitteen muodostumista historiallisesta näkökulmasta, siitä mitä oppilas on kohdannut aiemmin ja mihin logaritmilla on matematiikan sisällä kytköksiä. Huomioitavaa on ettei eksponentteja tunnetta logaritmin käsitettä luodessa. Kartan vasen puoli käsittää logaritmin proseduraalisen merkityksen ja oikea puoli konseptuaalisen merkityksen. Jako ei kuitenkaan ole absoluuttinen. Lisäksi mukaan on otettu joitain sovelluksia, joissa logaritmia käytetään hyväksi.

Käsitekartta toimii opetuksessa monella tavalla. Ennakkoon se voi toimia jäsentäjänä, joka orientoi ja edistää mielekästä oppimista (Koskinen, 2005). Käsitekartta toimii myös vaihtoehtoisena tapana mitata oppilaan osaamista (Hannula, 2013). Se on työkalu, jonka avulla voidaan luoda konseptuaalisia linkkejä matematiikan eri osa-alueiden välille (Vagliardo, 2009).

Logaritmi-käsitekarttaan on otettu opetussuunnitelmassa mainittavat aihekokonaisuudet, jotka esitellään ennen logaritmeja ja jotka oleellisella tavalla liittyvät sen käsitteeseen. Opetussuunnitelmaa tarkastellaan tarkemmin luvussa 4.1. Lisäksi kartassa on historialliset käsitteet, jotka johtivat logaritmin käsitteen syntyyn. Historiallista kehitystä tarkastellaan luvussa 3.

2.5 Yhteenveto

Matematiikan kolme maailmaa antaa viitekehyksen matematiikan oppimiselle läpi elämän. Proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto kulkevat jossain määrin lomittain, eikä aina ole itsestään selvää kumman kautta aihekokonaisuutta tulisi lähestyä. Jommankumman sivuuttaminen kokonaan luo ongelmia jatkossa. Logaritmin käsitteen suhteen erityisesti matematiikan toisessa maailmassa liikkuminen ja ajattelun vieminen kohti proseptuaalista tietoa on tärkeää. Opetettaessa uusia aihekokonaisuuksia tulee tarkastella sitä, mitä oppilas on aiemmissa opinnoissaan kohdannut. On arvioitava miten ne tukevat tai problematisoivat uuden asian oppimista. Käsitteen oppimisen kannalta on tärkeää huomioida myös sen historiallinen muodostuminen. Oppimisen jäsentämistä voidaan helpottaa ottamalla avuksi käsitekartta.

Luku 3

Logaritmin historia

Tässä luvussa esitellään logaritmin kehitys niiden alkuperäiseen löytymiseen ja edelleen nykyiseen muotoon asti. Luku pohjautuu Cajorin (1991), Fauvelin (1995) sekä Katzin (1995) kirjoituksiin. Matematiikan historian käyttö opetuksessa toimii motivointina aiheeseen. Opettajalle käsitteen historiallinen muodostus voi avata ovia ymmärtämään aiheeseen liittyviä oppimisvaikeuksia ja tarjota mielekkäitä käsitteeseen johtavia tehtäviä (Avital, 1995). Logaritmit ovat matematiikan historian näkökulmasta erityisen mielenkiintoinen ja opettavainen aihe, sillä se osoittaa miten käsite muuttaa muotoaan matemaattisten ajatusten kehittyessä. Se on myös ensimmäinen esimerkki menetelmästä, jossa vaikeampaan tehtävään haetaan ratkaisua siirtämällä ongelma yksinkertaisempaan muotoon. Tällaista keinoa käytetään myöhemmin esimerkiksi Lagrange ja Fourier -muunnoksissa.

3.1 Logaritmin juuret

Vanhoista babylonialaisista tauluista on löydettävissä taulukoituna tiettyjen lukujen peräkkäisiä potensseja. Lukujen valinnasta on päätelty niiden olevan ratkaisukeinoja tiettyihin ongelmiin sen sijaan, että niissä taulukoitaisiin logaritmitauluja vastaavasti yleisesti laskutoimituksessa hyödyksi käytettäviä arvoja. Eräässä ajalta säilyneessä tekstissä pohditaan ongelmaa ”kuinka kauan kestää, että rahan määrä tuplaantuu, kun vuosittainen korko on 20 %”. Se osoittaa babylonialaisten käyttäneen lineaarista interpolaatiota taulukon ulkopuolisten arvojen laskemiseen (Boyer and Merzbach, 2011).

Antiikin Kreikassa tehtiin selkeä erotus rutiinisen laskennan ja teoreettisen, lukujen ominaisuuksiin keskittyvän opin välillä. Arkhimedes Syrakusalainen (n.287 eaa. - 212 eaa.) teki aiemmin mainitun (logistic) kohdalla merkittävän kontribuution teoksessaan Hiekanjyvien laskija (The Sand-Reckoner, Psammites). Arkhimedes pyrki osoittamaan, että pystyisi kirjoittamaan suuremman luvun, kuin mikä määrä hiekan jyviä mahtuu universumiin. Universumin koossa hän viittasi Aristarkhos Samoslaisen heliosentriseen aurinkokuntaan. Arkhimedeen aikaan käytössä olleessa notaatiossa suurin luku oli 10 000 (myriad) ja näin ollen suurin kuvailtava luku oli 100 000 000 (myriad-myriads). Jälkimmäistä lukua Arkhimedes kutsui toisen järjestyksen (order) ensimmäiseksi luvuksi. Vastaavasti kun järjestyksissä päästään notaation sallimien lukujen päähän, kutsui Arkhimedes tätä lukujoukkoa ensimmäiseksi periodiksi. Tällöin suurin Arkhimedeen luvuista oli $10^8 \cdot 10^{64}$. Näitä suuria lukuja käsitellessään Arkhimedes osoitti , että järjestysten (order) yhteenlasku vastaa lukujen tuloa. Toisin sanoen hän osoitti samankantaisten potenssien tulon laskusäännön $a^m a^n = a^{m+n}$. Tarvittavien hiekanjyvien määrään Arkhimedeelle riitti luku 10^{63}.

Luku	Indeksi	Luku	Indeksi	Luku	Indeksi
1	0	128	7	16384	14
2	1	256	8	32768	15
4	2	512	9	65536	16
8	3	1024	10	131072	17
16	4	2048	11	262144	18
32	5	4096	12	524288	19
64	6	8192	13	1048576	20

Taulukko 3.1: Luku kaksi Nicholas Chuquetin indeksöimänä

Vuonna 1484 ranskalainen Nicholas Chuquet (1445-1488) julkaisi kirjoituksen *Triparty en la science des nombres*. Sen kolmannessa osassa esitellään notaatio muuttujan potenssille, mikä muistuttaa huomattavasti nykyistä merkintätapaa. Notaatio auttoi paljastamaan potenssien laskusääntöjä. Notaatio oli myöhemmin pohjana Descartesin kehittämälle nykyiselle potenssimerkinnälle. Lisäksi julkaisussa Chuquet listasi luvun kaksi potensseja 3.1, siten että indeksien yhteenlasku vastaa lukujen tuloa. Chuquet selitti taulukon idean seuraavasti:

"Whoever multiplies 2^0 by 2^2, it comes to 4 which is a second number. Thus the multiplication amounts to 4^2. For 2 multiplied by 2 makes 4 and adding the denominations, that is, it comes to second terms. Likewise whoever multiplies 2^1 by 4^2, it comes to 8^3. For 2 multiplied by 4 and 1 added with 2 makes 8^3. And thus whoever multiplies first terms by second terms, it comes to third terms. Also, whoever multiplies 4^2 by 4^2, it comes to 16 which is a fourth number and for this reason whoever multiplies second terms by second terms, it comes to fourth terms. Likewise..."

Lukujen suuret välit huomioimatta tämä on eräänlainen minimaalinen taulukko kaksikantaisen luvun logaritmeista. Vastaavia huomioita tehtiin useaan otteeseen seuraavan vuosisadan aikana ja ne olivat epäilemättä osana logaritmin käsitteen löytymisessä.

Suurien lukujen käsittely muodostui tärkeäksi erityisesti tähtitieteen parissa. Tyko Brahe (1546-1601) käytti prostafaireesia (Prosthaphaeresis), trigonometriaa suurten lukujen kertolaskussa hyödyntävää tekniikkaa, hyväkseen kumotessaan Kopernikuksen teoriaa planeettojen liikkeistä. Tekniikassa hyödynnetään trigonometristen yhtälöiden taulukkoja ja identiteettejä:

$$
\begin{aligned}
2\cos A\cos B &= \cos A - B + \cos A + B, \\
2\sin A\sin B &= \cos A - B - \cos A + B, \\
2\sin A\cos B &= \sin A + B + \sin A - B \qquad \text{ja} \\
2\cos A\sin B &= \sin A + B - \sin A - B.
\end{aligned}
$$

Esimerkiksi ratkaistaessa kertolaskua $2250 \cdot 1219$ käytetään ensimmäistä identiteettiä seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\cos A\cos B &= \cos(A - B) + \cos{(A + B)}/2 \qquad \text{, jossa} \\
\cos A &= 0.2250 \qquad \text{ja} \\
\cos B &= 0.1219 (A \sim 77^\circ, B \sim 83^\circ).
\end{aligned}
$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
0.2250 \cdot 0.1219 &\sim \cos(77^\circ - 83^\circ) + \cos(77^\circ + 83^\circ)/2 \\
&= \cos(-6) + \cos(160)/2 \\
&= -0.9397 + 0.9945/2 \\
&= 0.0274
\end{aligned}
$$

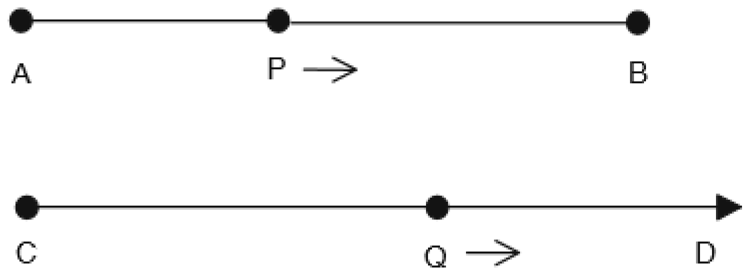
Korvattaessa desimaalit saadaan arvioitua $2250 \cdot 1219 \sim 2740000$.

On todennäköistä, että tästä menetelmästä oli tietoinen myös logaritmien kehittäjä John Napier, joka toi keksintönsä aikansa tähtitieteilijöiden, kuten Keplerin käytettäväksi. Tämä oli keksintö, joka Pierre-Simon Laplacen mukaan ”tuplasi astronomin eliniän”.

3.2 Napierin Logaritmi

John Napierin (1550-1617) kehittäessä logaritmit ei Descartesin joustavaa eksponenttimerkintapa ollut vielä käytössä. Napierin lähtökohta olikin aivan toinen ja yhteys eksponenttiin huomattiin vasta myöhemmin. Ajatuksena oli yhdistää aritmeettinen ja geometrinen liike. Geometrisen jonon jäsenten suhde oli tässä vaiheessa jo tiedossa saksalaisen Michael Stiefelin ansiosta. Tässä yhteydessä tulee mainita myös Joost Bürgi (1552-1632), joka kehitti samaan aikaan Napierin kanssa omaa versiotaan logaritmista, mutta myöhemmän julkaisunsa takia on jäänyt matematiikan historiassa merkittömämpään rooliin. Napier julkaisi työnsä vuonna 1614 teoksessa *Mirifici logarithmorum canonis descriptio.*

Olkoon yhtä pitkät janat AB ja CD, joilla on pisteet P ja Q (3.1). Pisteet lähtevät saman aikaisesti janan alkupisteestä samalla lähtönopeudella. Piste Q janalla CD kulkee tasaisella nopeudella ja piste P janalla AB kulkee nopeudella, joka on suhteessa pisteen Q kulkemaan matkaan.



Kuva 3.1: Napierin kuvaama pisteiden liike

Ensimmäisen pisteen liikkuttua matkan AP, on jälkimmäinen piste on liikkunut matkan CQ. Tällöin jälkimmäisen pisteen nopeus on sama kuin lähdössä ja ensimmäisen pisteen nopeus QD/CD.

Janan AB pituudeksi Napier valitsi 10^7, sillä hän pyrki löytämään logaritmit sinin arvoille. Nyt PB on kulman sini ja QD sen logaritmi. Siis nolla on luvun 10^7 logaritmi ja yksi on luvun 9 999 999 logaritmi. Havaitaan, että pituus QD kasvaa aritmeettisesti, kun pituus AP kasvaa geometrisesti. Napier taulukoi arvot kulmaminuutin välein. Nimen logaritmi hän muodosti sanoista logos ja arithmos, tarkoittaen suhdetta ja lukua. Ajattelu pisteiden liikkeestä oli askel kohti differentiaalilaskennan ajatusta.

"My lord I have undertaken this long journey purposely to see your person, and to know by what engine of wit or ingenuity you came first to think of this most excellent help in astronomy,

viz. the logarithms; but, my lord, being by you found out, I wonder nobody found it out before when now known it is so easy." Henry Briggs (1556-1631)

Briggs ehdotti Napierille, että luvun yksi logaritmin tulisi olla nolla. Näin kehittyi laskennallisesti kätevämpi kymmenkantainen logaritmi tai "Briggsin logaritmi". Briggs myös työsti taulukot kymmenkantaiselle logaritmille ja edisti näin osaltaan huomattavasti logaritmin käytön yleistymistä.

Lähes välittömästi logaritmin löytymisen jälkeen se osoitti voimakkuutensa myös teoreettisena työkaluna. Johannes Kepler kehitti kolmannen planeettojen liikkeiden lakinsa huomatessaan kiertoaikojen ja kiertoradan isoakselin puolikkaan kymmenkantaisten logaritmien lineaarisen yhteyden. Logaritmista tuli voimakas työkalu muun muassa navigoinnissa, jossa hankalissa olosuhteissa täytyi tehdä monimutkaisia laskutoimituksia. Insinöörin ammatin kehittyessä siitä tuli modernin teknologian työkalu.

3.3 Moderni logaritmi

Matemaattisen analyysiin logaritmit - etenkin luonnollinen logaritmi - löysi tiensä Leonhard Eulerin kautta. On huomioitavaa, että Neperin luku e on vasta Eulerin löytämä, vaikka sillä yhteys alkuperäiseen logaritmin määritelmään onkin. Euler myös osoitti eksponentti- ja logaritmifunktion yhteyden.

Logaritmen laskusääntöihin perustuva laskutikku kehitettiin ensimmäisen kerran William Oughtredin toimesta vuonna 1622. Se yleistyi kuitenkin vasta 1800-luvun alussa. Laskutikku mahdollisti logaritmin hyödyntämisen ilman taulukoiden mukana kantamista. Insinöörin ammatin kasvaessa se levisi massakäyttöön. 1900-luvun puolessa välissä siitä oli tullut insinööriyden ikoni. Sen avulla rakennettiin muun muassa Empire State Building ja Boeing 707 lentokone. (Stoll, 2006.)

Logaritmin alkuperäinen merkitys - niiden laskennallinen hyöty - on laskinten ja tietokoneiden myötä poistunut. Vielä 1960-luvulla logaritmit mahdollisivat Apollo-lentojen myötä ihmisen lähettämisen kuuhun. Logaritmit ovat edelleen malliesimerkki matemaattisesta objektista, joka on muuttanut luonnettaan ja löytänyt tiensä moniin sovelluksiin ja puhtaan matematiikan ytimeen. Tästä hyvänä esimerkkinä on diskreetti logaritmi, joka on oleellisena osana tietoliikenteen salausmenetelmissä.

Sovelluksia löytyy esimerkiksi lukuteoriasta, fraktaalidimensioista ja entropiasta. Fysiikan ja tähtitieteen puolelta logaritmista skaalaa hyödynnetään esimerkiksi äänenvoimakkuuden ja

-taajuuden sekä tähtien kirkkauden vertailussa. Esimerkiksi alkulukuteoreema, Stirlingin kaava ja kryptografia ovat helposti sovellettavissa lukiotasoiseen opetukseen ja näistä voi saada mielenkiintoisia opetuskokonaisuuksia. Lisäksi logaritmin kautta avautuu mahdollisuus erilaisiin poikkitieteellisiin projekteihin, sillä yhteyksiä löytyy ainakin psykologiaan, tilastotieteeseen, tietojenkäsittelytieteisiin, geologiaan, seismologiaan, kemiaan ja biologiaan. Taulukossa 3.3 on listattu sellaisia logaritmin sovelluksia, joita voi hyödyntää lukio-opetuksessa. Lista on laajennettu Vagliardon (2006) vastaavasta.

Taulukko 3.2: Lista aihepiireistä, joissa sovelletaan logaritmeja ja joita voi hyödyntää opetuksessa:

- Gaussin alkulukuteoreema: Arvio ennen lukua N esiintyvistä alkuluvuista ($N/\log N$).
- Hyperbelin ja sen asymptootin väliin jäävä pinta-ala.
- Mercatorin sarja
- Diskreetti logaritmi ja kryptografia (Diffie -Hellman avainjärjestelmä)
- Fraktaalidimensiot
- Stirling approksimaatio
- Entropia (Informaatioteoria, fysiikka)
- Korkoa korolle kasvava rahamäärä
- Keplerin kolmas laki
- Äänenvoimakkuus
- Sävelasteikko ja intervallit
- Newtonin jäähtymislaki
- Puoliintumisaika
- Radiohiiliajoitus
- Tsiolkovskin laki

- Beerin ja Lambertin laki
- Tähtien kirkkaus
- pH:n lasku
- Richterin asteikko ($R = \log(i/i0)$)
- Valon aistiminen, Weber-Fechnerin laki
- Syöpätutkimus ja syöpäsolujen kasvu

Luku 4

Logaritmi koulumaailmassa

Tässä luvussa käydään läpi millä tavoin logaritmin käsitteen kannalta oleelliset aihekokonaisuudet esiintyvät opetussuunnitelman perusteissa. Lisäksi tarkastellaan millä tavalla nämä asiat käsitellään oppikirjoissa.

4.1 Opetussuunnitelma

Opetussuunnitelman perusteet laaditaan perusopetuslain ja -asetuksen sekä tavoitteet ja tuntijaon määrittävän valtioneuvoston asetuksen pohjalta. Sen perusteella valmistellaan paikallinen opetussuunnitelma. Opetussuunnitelman perusteiden tehtävänä on tukea ja ohjata opetuksen järjestämistä ja koulutyötä sekä edistää yhtenäisen perusopetuksen yhdenvertaista toteutumista (POPS 2014). Vastaavasti lukion opetussuunnitelman perusteissa päätetään lukion opetus- ja kasvatustyöstä, jonka pohjalta lukio laatii suunnitelman opetuksen käytännön järjestämisestä (LOPS -luonnos 2015). Tarkastelen seuraavassa logaritmin käsitteen kannalta oleellisten matematiikan osa-alueiden ilmenemistä perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa sekä lukion opetussuunnitelman perusteissa. Tarkastelussa on sekä voimassa olevat opetussuunnitelman perusteet että niitä seuraavat asiakirjat.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteista saa jonkinlaisen käsityksen asiakokonaisuuksista, joita lukion aloittavan opiskelijan tulisi osata tai johon tämä on ainakin jollain tasolla aikaisemmissa opinnoissa törmännyt. Logaritmin käsitteen muodostumisen kannalta oleellisia kokonaisuuksia ovat potenssien laskusäännöt sekä aritmeettisen ja geometrien lukujonon muodostaminen ja tunnistaminen. (POPS 2004, POPS 2014).

Eksponenttiyhtälöihin opiskelija tutustuu lukion pitkässä oppimäärässä ensimmäisellä kurssilla ja lyhyessä oppimäärässä kolmannella kurssilla (LOPS 2003, LOPS -luonnos 2015). Tulevassa opetussuunnitelmassa lukion ensimmäinen matematiikan kurssi on kaikille yhteinen, joten kaikki oppilaat kohtaavat eksponenttiyhtälöt tässä vaiheessa. Toistaiseksi pitkän oppimäärän opiskelijat ovat kohdanneet logaritmit ensimmäisen kerran kurssilla kahdeksan, kun lyhyen oppimäärän opiskelijoille aihe on tullut yhdessä eksponenttiyhtälöiden kanssa. Huhtikuussa 2015 julkastuissa lukion opetussuunnitelman perusteiden luonnoksissa logaritmi on otettu osaksi yhteisen ensimmäisen kurssin sisältöjä.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa (LOPS 2003) todetaan: ”Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä, tieteessä ja tekniikassa.” Logaritmin käsitteen kehitys on yksi parhaista esimerkeistä siitä, miten käsite on helpottanut tieteen ja tekniikan kehitystä ja vastaavasti muokkautunut puhtaasti laskennollisesta apukeinosta teoreettiseksi työkaluksi. Käsitteen esiintyminen lukuisilla eri tieteenaloilla osoittaa matematiikan laajasta käytöstä.

Kurssien sisältöjen osalta pitkässä oppimäärässä logaritmiyhtälöt ja -funktiot käsitellään saman kurssin alussa, jossa myöhemmin siirrytään näiden funktioiden derivoimiseen. Tällöin oppilaalle ei jää juurikaan aikaa sisäistää itse käsitettä ennen kuin hänen tulisi pystyä ymmärtämään sen ominaisuuksia derivoinnin yhteydessä. Lyhyessä oppimäärässä logaritmin käsite tulee loogisesti eksponenttiyhtälöiden jälkeen reaalimaailman esimerkkien ratkaisuvälineenä. Oppilas ”näkee reaalimaailman ilmiöissä säännönmukaisuuksia ja riippuvuuksia ja kuvaa niitä matemaattisilla malleilla.” (LOPS 2003). Mikäli logaritmi sisällytetään ensimmäiseen kurssiin, jää oppilaalle enemmän aikaa kypsyttää käsitettä ennen kuin hän lähtee tutkimaan sen varsinaisia matemaattisia ominaisuuksia.

Puhtaasti käsitteellisestä näkökulmasta lyhyen oppimäärän opetus tarjoaa tällä hetkellä paremmat mahdollisuudet logaritmin oppimiselle kuin pitkä oppimäärä. Tätä tukee myös kevyempi oppimistahti. Toisaalta pitkässä oppimäärässä opiskelijoiden taitotaso ja motivaatio ovat usein korkeampia. Logaritmin käymistä lukion ensimmäisellä matematiikan kurssilla puoltaa se, että esimerkiksi fysiikassa logaritmeja käsitellään ensimmäisen kerran jo kurssilla kolme.

Lukion opetussuunitelman muuttuessa vuonna 2016 täytyy katsoa myös eteenpäin. Tällä hetkellä luonnoksessa painotetaan voimakkaasti ilmiöhin perustuvia ongelmia ja niitä mallintavaa opetusta (LOPS -luonnos 2015). Näihin teemoihin logaritmi on erinomainen aihe, josta löytyy lukuisia sovellusmahdollisuuksia (3.3). Myös teknisten apuvälineiden käyttöä korostetaan tulevassa opetussuunnitelmassa. Tietokoneiden käyttöä logaritmin ilmiöpohjaisessa opetuksessa ovat tutkineet ainakin Budlinski ja Takaci (2013) positiivisin tuloksin.

4.2 Logaritmi oppikirjoissa

Siinä missä opetussuunnitelman perusteet antavat raamit opetuksen sisällölle, kurssilla käytettävä oppikirja sanelee usein voimakkaasti missä järjestyksessä kurssin sisällöt käsitellään ja mitä osa-alueita painotetaan. Se on oppilaan kannalta oleellinen opiskeluväline etenkin itsenäisessä opiskelussa. Tässä luvussa on tarkasteltu lukion oppikirjasarjojen Calculus, Pyramidi, Matematiikan taito, Lyhyt matikka sekä Summa tapaa käydä läpi logaritmi- ja eksponenttifunkioita. Oppikirjat ovat voimassa olevan opetussuunnitelman mukaisia.

Eksponenttifunktio esitellään lukiomatematiikan pitkän oppimäärän ensimmäisessä kurssissa. Calculus-sarjassa eksponenttifunktio määritellään: *Eksponenttifunktioksi sanotaan funktiota, jonka lauseke on vakiokantainen potenssi ja muuttujana sen eksponentti. Eksponenttifunktion määrittelee yhtälö $f(x) = a^x$. Jos x on kokonaisluku, potenssi a^x on määritelty aina, kun $a \neq 0$. Jos taas x on murtoluku, tulee olla $a > 0$.* Määritelmää ei avata tai selitä tätä enempää. Tämän jälkeen kuitenkin kerrotaan irrationaalipotenssin olevan mahdollinen. Muiden kuin kokonaislukupotenssien yhteydessä vaaditaan konspetuaalinen loikkaus abstraktimmalle tasolle, joka jää kirjasarjassa huomioimatta. Logaritmeja ei tässä yhteydessä myöskään mainita.

Kirjan tehtäväsarjoissa on tehtäviä, kuten:

$$\begin{array}{l} \text{Määritä luvun kolmidesimaalinen likiarvo.} \\ a)2^{\frac{1}{4}} \qquad b)2^{\frac{2}{3}} \qquad c)2^{2,2} \\ d)2^{\sqrt{5}} \qquad e)2^{-2,2} \qquad f)2^{-\pi}. \end{array}$$

Tässä yhteydessä tuntuisi luontevalta esitellä myös logaritmin käsite. Vaihtoehtoisesti vastaavat tehtävät olisivat hyvä lähtökohta, kun eksponentti- ja logaritmifunktioihin palataan kurssilla kahdeksan.

Kirjasarjoissa käydään läpi potenssitaulukkoja, jotka ovat historiallisesti olleet merkittävä askel kohti logaritmin käsitettä. Tässä kohtaa olisi luonnollinen kohta tuoda esille ajatus aritmeettisen jonon ja geometrisen jonon yhteydestä. Myös kertolaskun siirtäminen yhteenlaskuksi yksinkertaisilla esimerkeillä olisi luontevaa. Lisäksi kurssilla käsitellään murtopotenssi, jossa törmätään vastaavaan ajattelun laajentamiseen kuin logaritmien yhteydessä.

Eksponenttifunktioihin tutustuttaessa käydään läpi funktion ominaisuuksia, mutta logaritmin käsitettä ei tuoda esille. Myöskään ratkaisumenetelmänä tätä ei esitetä, vaan ainoaksi ratkaisu tavaksi annetaan kokeilu. Tämä kokeilu on kuitenkin juuri se tapa, jolla logaritmin käsitettä olisi helppo ja luonteva lähestyä. Tehtävissä, joissa kysytään ”mihin potenssiin luku pitää korottaa, jotta saadaan toinen luku", käytetään hyväksi Eulerin logaritmikäsitteen määritelmää.

Juuri- ja logaritmifunktiot kurssia lähestytään oppikirjoissa kahdesta suunnasta. Kurssilla voidaan edetä eksponenttifunktioista logaritmifunktioihin ja niiden derivointiin. Tällöin käänteisfunktion käsittely jää kurssin loppuosaan. Toinen lähestymistapa on esitellä ensin käänteisfunktio, josta siirrytään muihin kurssin teemoihin. Käsitteenmuodostuksellisesta näkökulmasta käänteisfunktion esitteleminen on kriittistä, mikäli logaritmit esitellään eksponenttifunktion kautta. Käänteisfunktio on kuitenkin itsessään hankala käsite ja sen läpikäyminen jää usein kurssilla pinnalliseksi.

Eksponenttifunktion esittely vastaa kirjasarjoissa hyvin pitkälle toisiaan ja perusmääritelmä on sama, joka on annettu jo lukion ensimmäisen kurssin aikana. Tämän lisäksi syvennetään tietoa tutkimalla funktion ominaisuuksia, kuten määrittely- ja arvojoukkoa. Myös Neperin luku esitellään tässä kohtaa.

Matematiikan taito ja Pyramidi - sarjat käsittelevät käänteisfunktion ensin ja logaritmi jää viimeiseksi. Funktio esitetään eksponenttiyhtälöiden ja kymmenkantaisen logaritmin määrittelyn kautta. Tämän jälkeen yleinen k-kantainen logaritmi määritellään:

> Olkoon $k > 0$, $k \neq 1$. Positiivisen luvun y k-kantainen *logaritmi* $\log_k y$ on se eksponentti, johon kantaluku k on korotettava, jotta tulokseksi saadaan y. Siis
>
> $$\log_k y = x \Leftrightarrow y = k^x.$$
>
> Toisin sanoen
>
> $$y = k^{\log_k y} \quad \text{ja} \quad \log_k k^x = x.$$

Pyramidi -sarjassa korostetaan määritelmän jälkeen laskusääntöjä ja jopa todistetaan eksponentin siirtosääntö $\log_a x^r = r \log_a x$, sekä tulon logaritmi $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. Myöhemmin funktion ominaisuuksia käydään läpi vastaavaan tapaan kuin eksponenttifunktiota.

Laskuharjoitukset koostuvat perustehtävistä, jotka ovat lähinnä logaritmin numeerista laskemista. Pyramidi-sarjassa on erikseen merkitty ilman laskinta laskettavat tehtävät. Soveltaviin tehtäviin kuuluu muun muassa Newtonin jäähtymislain ja Richterin asteikon tulkintaa. Calculus-sarjassa kirjan lopusta löytyy myös tutkimustehtäviä sisältäen logaritmitaulukot, negatiivisten lukujen logaritmit ja laskutikun.

Lyhyen matematiikan oppikirjoissa määritelmät ovat vähemmän matemaattisia ja erityisesti logaritmin yhteydessä merkintätapaa vältetään aluksi. Kirjoissa on myös huomattavasti enemmän vaihtelua mitä pitkän matematiikan oppikirjoissa. Vertaillessa kahta kirjasarjaa havaitaan, että toisessa annettiin paljon historiallista taustaa, käytännön sovelluksia ja ilmiöpohjaista tutkimista (Lyhyt matematiikka). Tehtävien yhteydessä ilmiöiden, kuten Richterin asteikon, radioaktiivisen hajoamisen ja radiohiiliajoituksen periaatteet on selitetty tarkemmin kuin pitkän oppimäärän kirjoissa. Sen sijaan toisessa (Summa 3) asiat esitetään matemaattisesti heikosti ja oheistietoa on sisällytetty vain vähän. Yhteistä on se, että määrittelyehtoihin ei kiinnitetä kovinkaan paljon huomiota.

Luku 5

Tutkimukset

Tässä luvussa esitellään tutkimuksia, joita logaritmin opetuksesta on tehty. Etenkin Weberin (2002) tekemä pilottitutkimus on oleellisessa osassa, sillä siinä on yhtäläisyyksiä tämän tutkimuksen kanssa. Tämän jälkeen käydään läpi helmikuussa 2015 tehty tutkimus Helsingin Yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen matematiikan aineenopettajaopinnot keväällä aloittaneiden käsityksiä logaritmista.

5.1 Katsaus tutkimuksiin

Logaritmin opettamisesta on käyty pedagogista keskustelua pitkään. Christofferson (1924) esittää suurimmiksi hankaluudeksi uusien termien määrän. Myös Gamble (2005) pyrkii karsimaan uusien termien määrää esittelemällä logaritmin kymmenpotenssin kautta. Vasta tämän jälkeen esitellään logaritmin notaatio ja käsite. Merkintätavan hankaluutta korostaa myös Hurwitz (1999), joka toteaa oppilaiden sekoittavan logaritmilausekkeen funktioon. Hopkins (1959) kiinnittää huomiota päättymättömien desimaalien vaikeuteen logaritmilausekkeissa, muttei anna tähän suoranaista ratkaisuehdoitusta.

Historiallinen lähestymistapa Napierin alkuperäisellä idealla on yksi eniten esitellyistä. Jo liki sata vuotta sitten (McClenon, 1919) Napierin lähestymistapaa pidettiin varteenotettavana lähtökohtana logaritmin opetukseen. Yhtälailla historiallista lähtökohtaa on kritisoitu siitä, että se vaatii osakseen taidokkaan ja innostavan opettajan (Frumveller, 1920). Katz (1995) on adaptoinut logaritmin historiallisen kehityksen nykypäivän luokkahuoneeseen ja Panagiotou (2011) laajentaa tätä ajatusta pidemmälle. Erityisesti Fauvel (1995) korostaa näkökulman didaktista hyötyä. Historiallisessa opetustavassa suuri paino on nimenomaan aritmeettisen ja geometrisen lukujonon yhdistämisellä sekä liikkeen (3.1) tarkastelulla. Moni nostaa myös prostafaireesin tutkimisen oleelliseen rooliin (Katz, 1995).

Siinä missä erilaisia opetusideoita on paljon, selkeitä opetuskokeiluja logaritmin suhteen on kuitenkin vähän (Bundy, 2010). Nämä myös rajoittuvat vahvasti yhteen aihepiiriin. Bundy (2010) käyttää kokeilussaan hyväksi runoja. Kokeilussa runoja hyväksi käyttänyt ryhmä oppi kontrolliryhmää paremmin. Vaikka runojen käyttäminen ei välttämättä ole kovin luontevaa kaikille opettajille, on tutkimuksen ajatus konseptuaaliseen ajatteluun keskittymisestä oleellista.

Sekä runojen kautta oppiminen että ehdotetut historiallista käsitteenmuodostusta tukevat kokonaisuudet eivät sellaisenaan sovellu suomalaiseen opetussuunnitelmaan. Nämä ovat suunniteltu Yhdysvaltojen college-opintoja vastaaviksi, jolloin logaritmeja käsitellään esicalculus-kursseilla. Mikäli tämän hetkinen opetussuunnitelma luonnos (LOPS -luonnos 2015) tulee lukion ensimmäisen kurssin osalta voimaan, ei logaritmeille silti jää niin paljon aikaa mitä kokeiluissa on käytetty.

Tietokoneiden käytöstä logaritmin opiskelussa tarjoaa mielenkiintoisen näkökulman Budinskin ja Takacin (2013) tutkimus, jossa lähestymistapana pyritään käyttämään ilmiöpohjaisuutta. Pyrkimyksenä on lähestyä etenkin logaritmisen asteikon tulkintaa ja mallinnusta reaalimaailman tapauksissa. Kyseiseen tutkimukseen on valittu maanjäristysten magnitudin tarkastelu. Datan tulkinnassa alustana käytetään GeoGebraa. Tämä on etenkin tulevan opetussuunnitelman kannalta keskeinen menetelmä, sillä siinä korostuu teknisten apuvälineiden ja ilmiölähtöisten ongelmien käyttöä opetuksessa.

Tämän tutkimuksen vastaavuuden kannalta lähin tutkimus on Keith Weberin pilottitutkimus vuodelta 2002.

5.2 Weberin pilottitutkimus

Tutkimuksessa tarkasteltiin kahta college-tason ryhmää, joista toiselle opetettiin eksponentteja ja logaritmeja perinteisellä tavalla. Toiselle pyrittiin luomaan konseptuaalisempaa käsitystä aiheesta. Molemmille ryhmille käytettiin kutakuinkin sama määrä aikaa aiheiden opetukseen. Kontrolliryhmää opetti eri opettaja. Tämäkin tutkimus eroaa suomalaisesta opetussuunnitelmasta siinä, että aihe opetetaan esicalculus vaiheessa. Tällöin pitkän matematiikan opiskelijat eivät ole vastaavassa asemassa.

Konseptuaalinen lähestyminen aloitettiin antamalla oppilaille ohjelma, joka suorittaa kertolaskua toistuvana yhteenlaskuna. Oppilaat saivat tehtäväkseen kirjoittaa graafiselle laskimellaan vastaava ohjelma, joka suorittaa potenssiinkorotusta toistuvana kertolaskuna. Tämän tarkoituksena oli selventää eksponentin käsitettä. Kehittääkseen eksponentin ja logaritmin yhteyttä suoritettiin seuraavaksi rutiinilaskuja, joissa eksponentti- ja logaritmilausekkeita oli määrä kuvata matemaattisina objekteina. Lisäksi tehtävillä pyrittiin selventämään merkintöjen rakennetta. Tyypillinen tehtävä ja siihen toivottu vastaus oli:

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = \text{ the number that is the product of 3 factors of 4}$$
$$b^x = b \cdot b \cdot b \cdot \dots (x \text{ times }) = \text{ the number that is the product of x factors of b.}$$

Kolme viikkoa opetuksen jälkeen ryhmät vastasivat kysymyksiin, joissa pyrittiin selvittämään oppilaiden osaamista peruslaskutoimituksissa, laskusäännöissä ja konseptuaalisissa tehtävissä. Aikaväli valittiin pitkäksi, jotta nähtäisiin miten aiheet pystytään palauttamaan muistista. Erityisen opetuksen saaneet olivat jokaisella osa-alueella kontrolliryhmää parempia. Molemmat ryhmät osoittivat vahvaa proseduraalista osaamista, mutta erityisesti konseptuaalisissa tehtävissä pilottiryhmän tulokset olivat paremmat. Tutkimuksen suppeudesta ja ulkopuolisista tekijöistä, kuten oppilaiden ennakkotiedoista ja opettajan motivaatiosta johtuneista syistä ei siitä voida kuitenkaan vetää suoria johtopäätöksiä. Tulokset olivat kuitenkin linjassa teoreettisen analyysin kanssa.

5.3 Kysely matematiikan aineenopettajalinjalle suoravalituille

Teetin helmikuussa 2015 Helsingin Yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen uusilla matematiikan aineenopettajaksi opiskeleville kyselyn logaritmi- ja eksponenttifunktioista (liite 1). Kyselyn tarkoituksena oli selvittää matematiikassa hyvin pärjänneiden oppilaiden ymmärrystä logaritmeista ja sitä, ovatko vastaavat asiat hankalampia logaritmin kuin eksponentin kontekstissa.

Kysymyksissä pyritään hahmottamaan opiskelijoiden ymmärryksen tasoa proseduraalisessa ja konseptuaalisessa mielessä. Lisäksi kyselyssä on tavallisesti logaritmien yhteydessä hankalaksi todettuja aihepiirejä (Panagiotou, 2011). Tutkimuksen ensimmäinen hypoteesi on, että opiskelijoiden tieto on voimakkaasti proseduraalista ja vastaavasti konseptuaalinen tieto on vähäistä. Toinen hypoteesi on, että logaritmi on oppilaille haastavampi aihepiiri kuin eksponentit.

Ensimmäisen kysymyksen (Mikä on logaritmi ja mihin sitä käytetään?) tarkoituksena on kartoittaa käsitteen yleistä ymmärrystä ja saada selville miten logaritmin käsite nähdään kokonaisuudessa. Tämän kysymyksen kohdalla olisi myös mielenkiintoista saada vastauksia, joissa käy ilmi missä muussa kuin matematiikassa logaritmit ovat hyödyksi.

Tehtävät kaksi, kolme ja neljä ovat hieman muokattuna Weberin (2002) tutkimuksen kysymyksistä. Tämä mahdollistaa tutkimusten tulosten paremman vertailun. Toisen tehtävän (Miten selittäisit funktion $f(x) = a^x$ henkilölle, joka ei opiskele matematiikkaa?) tarkoituksena on ensimmäistä tehtävää vastaavalla tavalla selvittää vastaajan ymmärrystä eksponenttifunktion suhteen.

Kolmas tehtävä (Onko $f(x) = (1/2)^x$ kasvava vai vähenevä funktio?) on lähinnä opiskelijan konseptuaalista ymmärrystä mittaava. Mikäli opiskelija osaa toisen tehtävän, on oletettavaa että hän osaa myös kolmannen. Jos ymmärrys on puutteellinen, niin tämä tehtävä paljastaa heikon osaamisen. Weber käytti samaa kysymystä konseptuaalisen tiedon mittaamiseen.

Tehtävä neljä (Miten lasket $\log_5 78125$ käyttämättä laskinta?) on tyypiltään avoin. Tehtävässä on oleellisempaa opiskelijoiden ratkaisustrategiat, kuin oikean ratkaisun löytäminen. Logaritmin käsitteen ymmärryksen kannalta loogisimmat ratkaisustrategiat ovat joko luvun jakaminen tai kertominen viidellä. Myös tämä kysymys oli osana Weberin konseptuaalisen osaamisen kartoitusta.

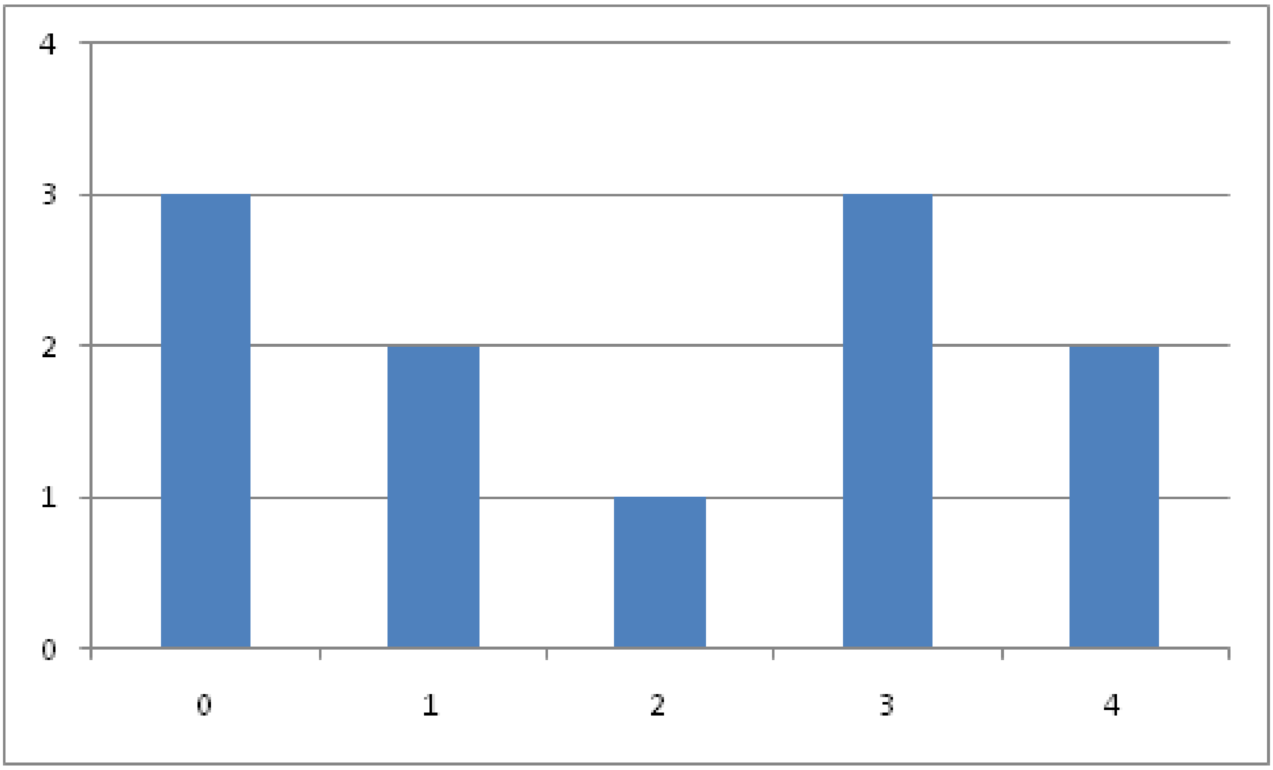
Viidennessä tehtävässä (Sievennä: a. e^2e^3, b. $\log_a a^2$, c. $\log_3 2+\log_3 6-\log_3 4$) keskitytään logaritmin ja potenssin laskusääntöihin. Tehtävässä on tarkoituksena nähdä, onko näiden välillä eroa samantyyppisissä ongelmissa. Potenssien laskusäännöt käydään läpi jo yläasteen matematiikassa, kun taas logaritmien laskusäännöt käsitellään pitkän matematiikan kahdeksannella kurssilla. Jos opiskelija ymmärtää näiden yhteyden, ei jälkimmäisen oppimisessa kuitenkaan pitäisi olla hankaluuksia. Tehtävissä voi pärjätä myös puhtaasti proseduraalisella tiedolla. Viimeinen tehtävä (Miksi $\ln -1$ ei ole määritelty?) vastaavasti mittaa teoreettisempaa osaamista ja logaritmin käsitteen ymmärrystä.

5.3.1 Aineisto

Kyselyyn osallistui seitsemän matematiikan aineenopettajaksi suoravalittua opiskelijaa. Kaikki ovat kirjoittaneet pitkän matematiikan vuoden 2010 jälkeen ja suurin osa vuonna 2014. Lukiooppimäärä on siis melko tuoreessa muistissa ja nykyisen opetussuunnitelman sisältöjä vastaava. Opiskelupaikan vuoksi otosta voidaan perustellusti luonnehtia lahjakkaampana ja aineesta kiinnostuneempana kuin keskivertolukiolaista. Vastaukset kerättiin osana uusien oppilaiden ohjaajatuutorointitapaamista.

5.3.2 Analysointi

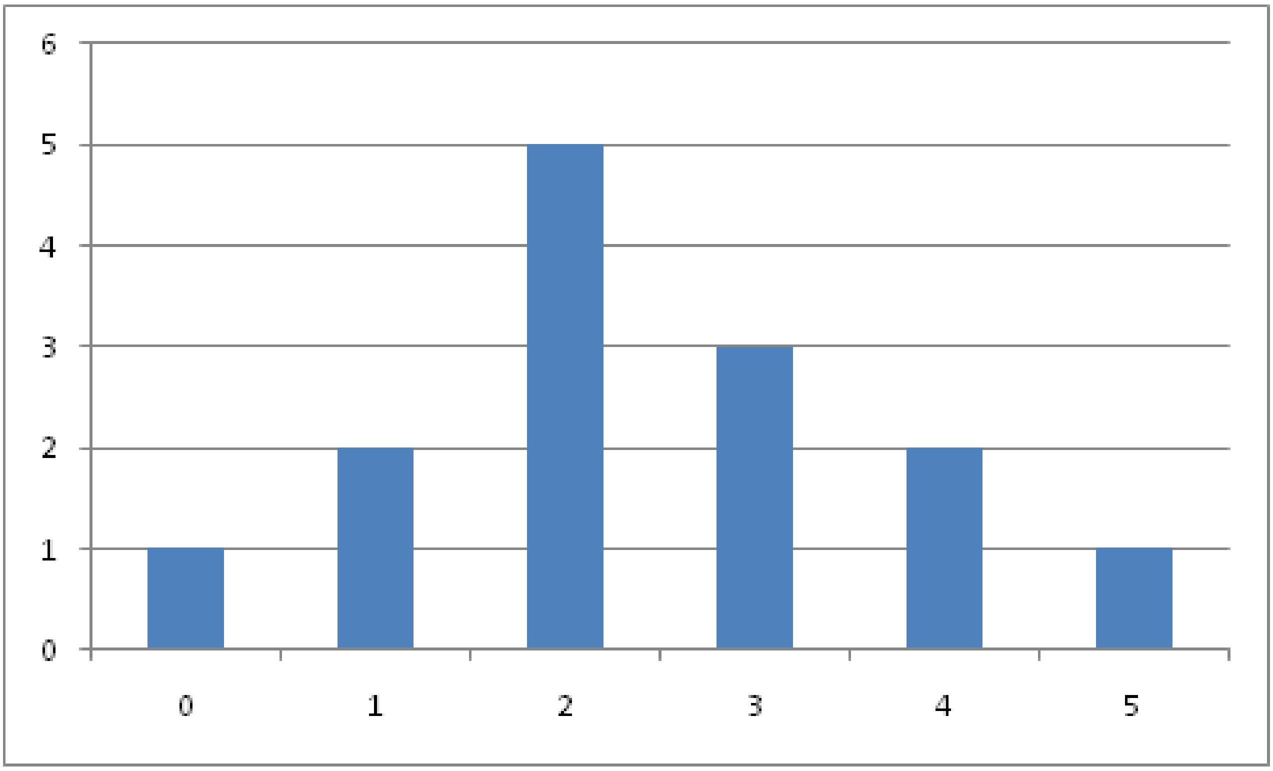
Pienestä otannasta johtuen vastauksia on käsitelty laadullisesti. Kustakin vastauksesta on poimittu tehtävän kannalta oleellisia ominaisuuksia sekä otettu huomioon mikäli vastaus on jätetty antamatta tai on väärin.



Taulukko 5.1: Vastausten jakauma T1: Mikä on logaritmi ja mihin sitä käytetään?

Ensimmäisen tehtävän vastaukset (5.1) on jaoteltu viiteen kategoriaan, joihin on poimittu vastauksista löytyneitä eri kuvauksia logaritmille. Kunkin kategorian esiintymiskerrat on kuvattu palkin korkeudella. Kategoria 0 sisältää vastaukset, joissa ei ole annettu minkäänlaista määritelmää logaritmille tai sen käyttötarkoituksille. Kategoria 1 sisältää vastaukset, joissa logaritmia on kuvattu funktiona. Kategoria 2 sisältää vastaukset, joissa logaritmi on määritelty eksponenttifunktion käänteisfunktiona. Kategoriassa 3 on vastaukset, joissa logaritmi esitetään vastauksena kysymykseen ”mihin potenssiin luku on korotettava, jotta saadaan toinen luku” ja kategoria 4 ne vastaukset, joissa viitataan hyötyyn muilla tieteenaloilla.

Vastaukset ovat vahvasti samassa linjassa, kuin Vagliardon (2006) saamissa vastauksissa. Vastaukset painottuvat ratkaisumenetelmään ja linkkeihin lähinnä fysiikan mallinnukseen.



Taulukko 5.2: Vastausten jakauma T2: Miten selittäisit funktion $f(x) = ax$ henkilölle, joka ei opiskele matematiikkaa?

Vagliardon tutkimuksesta poiketen myös funktion käsite tuli esille, joskin vain yksi vastaajista huomioi suhteen eksponenttifunktioon. Myöskään laskusäännöistä ei tämän vastauksen yhteydessä puhuttu mitään. Myöhemmissä tehtävissä niiden hallinta käy kuitenkin ilmi. Suurten lukujen kanssa toimimisesta ja kertolaskun muuttamisesta yhteenlaskuksi ei vastauksissa mainita mitään. Täysin vailla sisältöä olleiden vastausten määrä on myös huolestuttava.

Toisen tehtävän vastaukset (5.2) on jaoteltu kuuteen kategoriaan, joihin on poimittu vastauksista löytyneitä kuvauksia eksponenttifunktiolle. Kategoria 0 sisältää vastaukset, joissa ei ole annettu selitystä funktiolle. Kategoria 1 sisältää vastaukset, joissa sisältyy ajatus ”a kerrotaan itsellään x kertaa”. Kategoria 2 sisältää vastaukset, joissa mainitaan a:n olevan vakio ja x:n muuttuja. Kategoriassa 3 on vastaukset, joissa on mainittu lukujen sijoitus tai on testattu eri luvuilla sijoitusta funktioon. Kategoriassa 4 on vastaukset, joihin on joko piirretty kuvaaja tai joissa mainitaan kuvaajat. Kategorian 5 vastauksiin on sisältynyt käytännön esimerkki, jossa funktio esiintyy.

Pelkästään tarkastelemalla vastauksista löytyneiden tietojen määrää voidaan tehdä havainto, että eksponenttifunktio näyttäisi olevan paremmin hallinnassa kuin logaritmi. Vastauksista poimittavan datan määrä lähes kaksinkertastui edelliseen tehtävään nähden. Silti on huomattava, että vain kahdessa vastauksessa tuodaan ilmi luvun kertominen itsellään. Tämä on oleellinen huomio, mikä saattaa hyvin vaikuttaa myös logaritmin osaamiseen. Mikäli logaritmi opetetaan eksponenttifunktion kautta, mutta oppilas ei ymmärrä mitä eksponenttifunktio tarkoittaa, on logaritmifunktiotakaan mahdotonta ymmärtää.

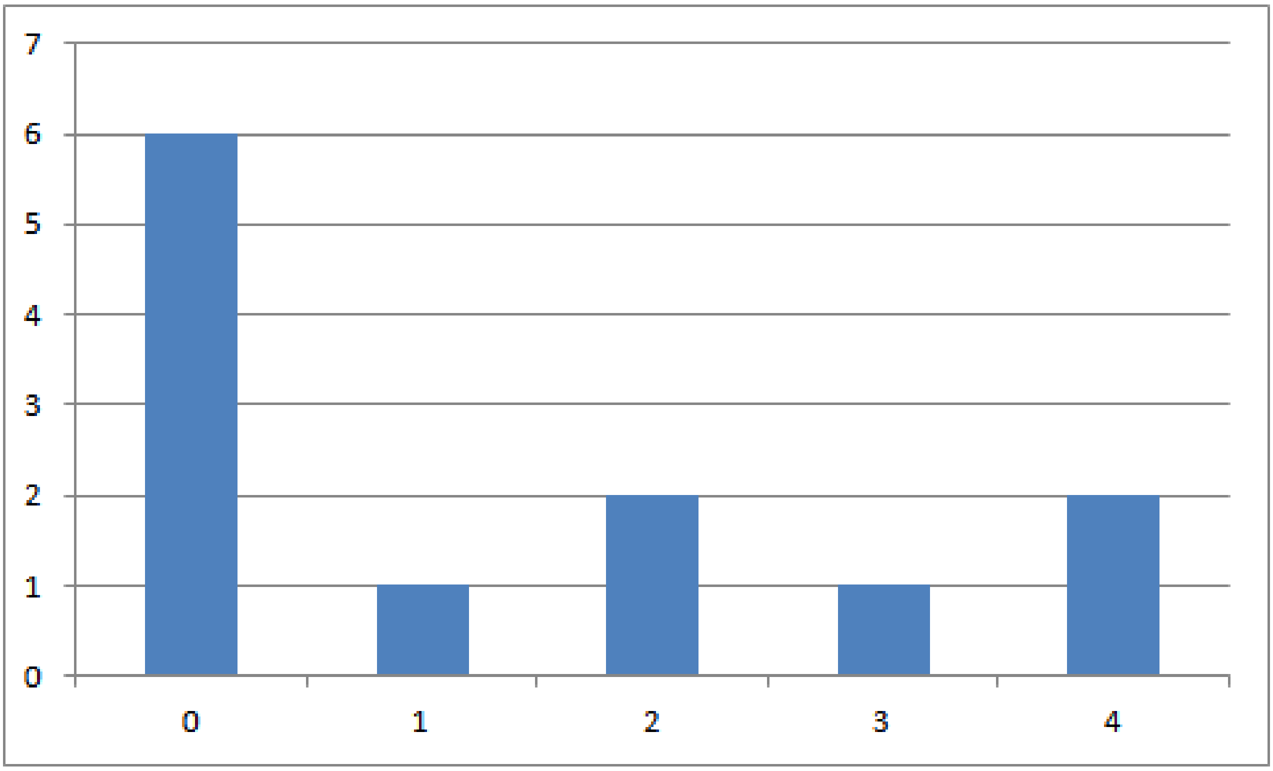
Erot siinä, että toisessa tehtävässä kuvataan muuttujan ja vakion merkitystä voivat johtua tehtävän asettelusta. Mikäli ensimmäisen tehtävän annossa olisi annettu logaritmifunktio, voisi kuvitella siihen tulleen vastaavanlaisia selityksiä. Kuitenkaan esimerkiksi kuvaajan piirtoa ei ensimmäisessä tehtävässä esiintynyt niissäkään vastauksissa, joissa logaritmia kuvattiin funktiona. Eksponenttifunktion luonne tuntuu siis olevan paremmin hallussa.

Mielenkiintoista on se, että ainoa oikean maailman esimerkki eksponenttifunktion suhteen löytyi vastauksesta, jossa ei osattu selittää itse funktiota. Opiskelija osasi mainita bakteerikantojen kasvun, muttei ymmärtänyt mitä funktio tarkoittaa. Itse funktion selitykseen opiskelija kirjoitti: ”Kunpa joku selittäisi mulle”. Vaikka eksponenttifunktio matemaattisesti tuntuisi olevan paremmin hallussa, kuin logaritmifunktio, sen yhteydet käytäntöön ei välttämättä ole yhtä hyvin selvillä.

Kahden ensimmäisen tehtävän vastauksista näkyy tyypillinen matematiikan toisen maailman taso opiskelijoiden ymmärryksessä. Siinä ei kuitenkaan olla ylletty proseptuaaliselle tasolle. Suurin osa lähestyy kysymyksiä proseduraalisen tiedon näkökulmasta. Tarkemmat määritelmät vastaavat oppikirjamäärittelyjä, mutta niitä ei välttämättä osata yhdistää eri osa-alueisiin, vaikka niiden välillä tietäisi olevan yhteyden.

Kolmannen tehtävän vastaukset (5.3) on jaoteltu viiteen kategoriaan. Kategoria 0 sisältää vastaukset, joissa on annettu oikea ratkaisu tehtävään. Kategoria 1 sisältää vastaukset, joissa on tarkasteltu funktion kantalukua. Kategoria 2 sisältää vastaukset, joissa on tarkasteltu funktion saamia arvoja eri muuttujia sijoittamalla. Kategoriassa 3 on vastaukset, joissa on käytetty hyödyksi kuvaajaa ja kategoriassa 4 ne vastaukset, joissa on perusteltu virheellisesti.

Tämän tehtävän kohdalla vastausten jakauma oli selkeä. Yhtä vastausta lukuun ottamatta kaikki olivat tavalla tai toisella päätelleet oikean vastauksen. Tämä kertoo hyvästä konseptuaalisesta osaamisesta eksponenttifunktioiden suhteen. Suurin osa myös perusteli jollain tapaa ratkaisuaan ja näistä yleisin tapa oli funktion saamien arvojen tutkiminen. Yksi vastaajista mainitsi myös derivaatan tutkimisen. Derivaatan tutkiminen ei tehtävän kannalta ollut oleellista.

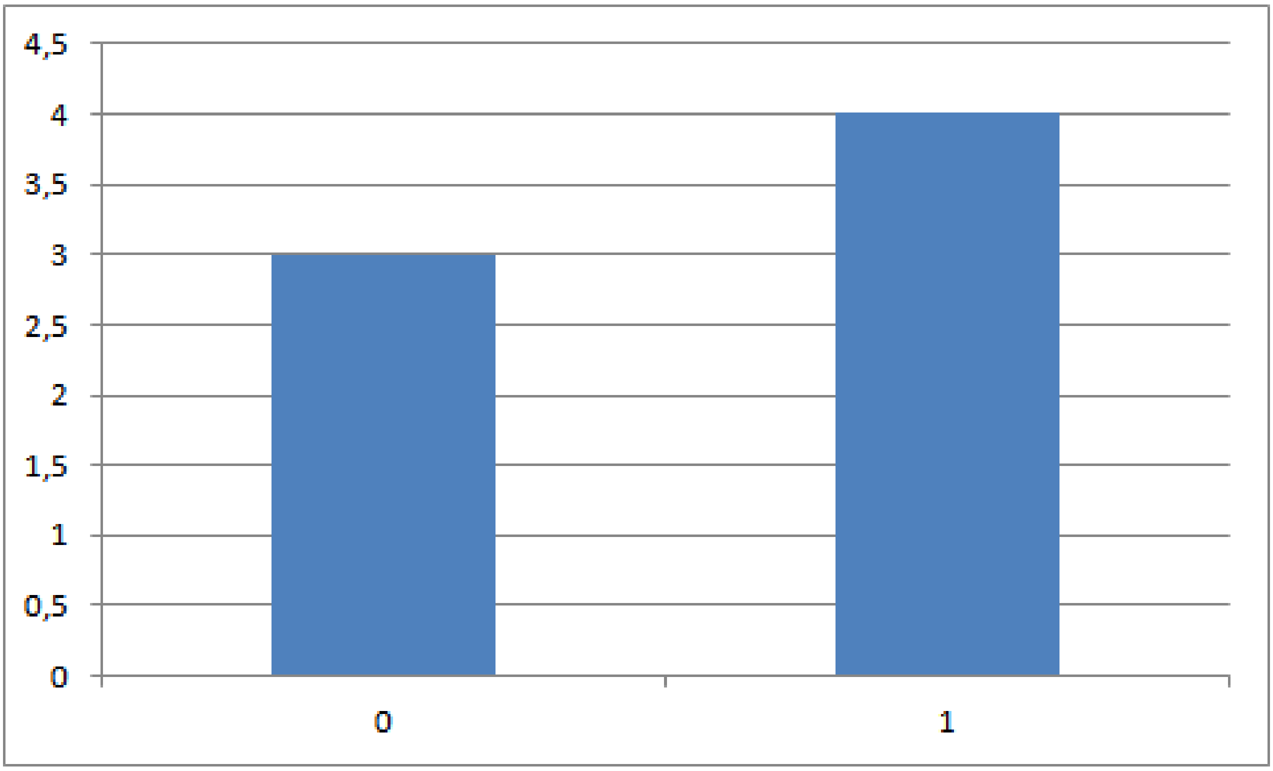


Taulukko 5.3: Vastausten jakauma T3: Onko $f(x) = (1/2)^x$ kasvava vai vähenevä funktio?

Lisäksi tarkempi tutkiminen olisi ollut erittäin työläs tehtävä. Tehtävän annossa ei suoranaisesti pyydetty perusteluja, mikä vaikuttanee kokonaisuutena niiden vähyyteen.

Tehtävä neljä polarisoi vastaajia selvästi aikaisempaa selvemmin. Taulukossa 5.4 on jaoteltu vastaukset kahteen kategoriaan. Kategoriassa 0 on ratkaisustrategiat, joissa joko jaetaan tai kerrotaan luvulla viisi. Kategoriassa 1 on virheelliset tai tyhjät vastaukset. Mikäli opiskelija ymmärtää mitä logaritmi tarkoittaa, on loogista lähteä jakamaan lukua 78125 luvulla viisi, kunnes saavuttaa tai ylittää luvun viisi. Vastaava strategia olisi kertoa lukua viisi itsellään, kunnes pääsee lukuun 78125. Vain kolmessa vastauksessa ratkaisua haettiin tällä tavalla. Muut ratkaisutavat sisälsivät muun muassa logaritmilausekkeen virheellistä algebrallista tulkintaa. Tämä kertoo, että opiskelijoilla on vaikeuksia logaritmin käsitteen suhteen. Tässä tehtävässä oli myös eniten täysin tyhjiä vastauksia. Osa selittäjänä tehtävän huonoon suorittamiseen saattaa olla tehtävätyypin erikoisuus.

Verrattaessa tehtävien kaksi, kolme ja neljä vastauksia Weberin (2002) tutkimukseen, voi-

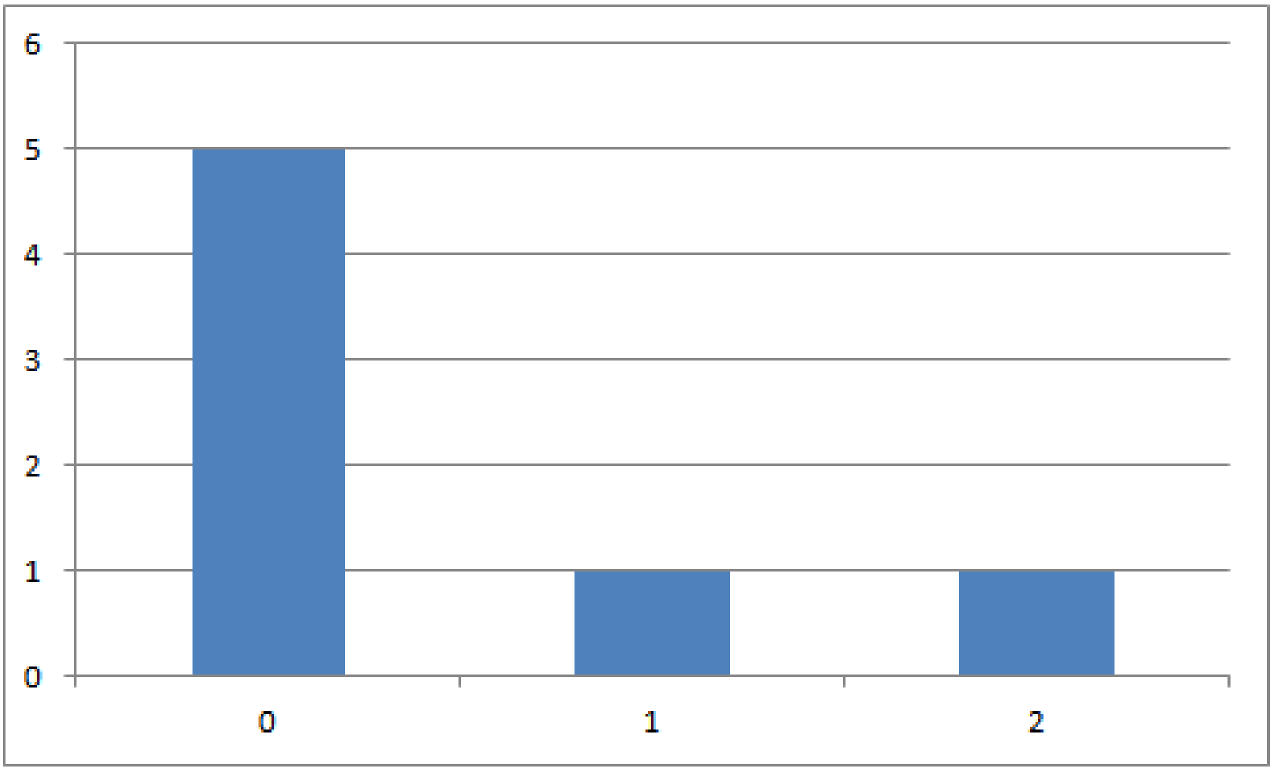


Taulukko 5.4: Vastausten jakauma T4: Miten lasket $\log_5 78125$ käyttämättä laskinta?

daan nähdä yhtymäkohtia. Toisessa tehtävässä itsellään kertomista esiintyy jonkin verran, mutta suurin osa keskittyy nimeämään funktiosta vakion ja muuttujan tai sijoittamaan muuttujan paikalle lukuarvoja. Kolmannessa tehtävässä opiskelijat pärjäsivät hyvin, kuten Weberin tutkimuksessakin. Tehtävä neljä toi eniten eroja Weberin kontrolliryhmän ja pilottiryhmän välille. Yksikään kontrolliryhmästä ei keksinyt ratkaisustrategiaa, kun pilottiryhmästä puolet osasi ratkaista tehtävän. Aineenopettajaksi opiskelevilla on havaittavissa vastaavia vaikeuksia.

Viidennen tehtävän vastaukset (5.5) on jaoteltu kolmeen kategoriaan. Kategoria 0 sisältää ne vastaukset, joissa kaikki kolme tehtävää on ratkaistu oikein. Kategoria 1 sisältää vastaukset, joissa osa tehtävistä on ratkaistu oikein ja kategoria 2 sisältää virheelliset vastaukset.

Tehtävässä viisi näkyi edelliseen tehtävään verrattuna huomattavasti parempaa osaamista. Suurin osa ratkaisi kaikki kolme tehtävää täysin oikein. Kaikki vastasivat oikein ensimmäiseen tehtävään, jossa tehtävä koski samankantaisten potenssien laskusääntöä. Yhtä lukuun ottamatta kaikki vastasivat oikein toiseen ja kahta lukuun ottamatta kaikki kolmanteen tehtävään.



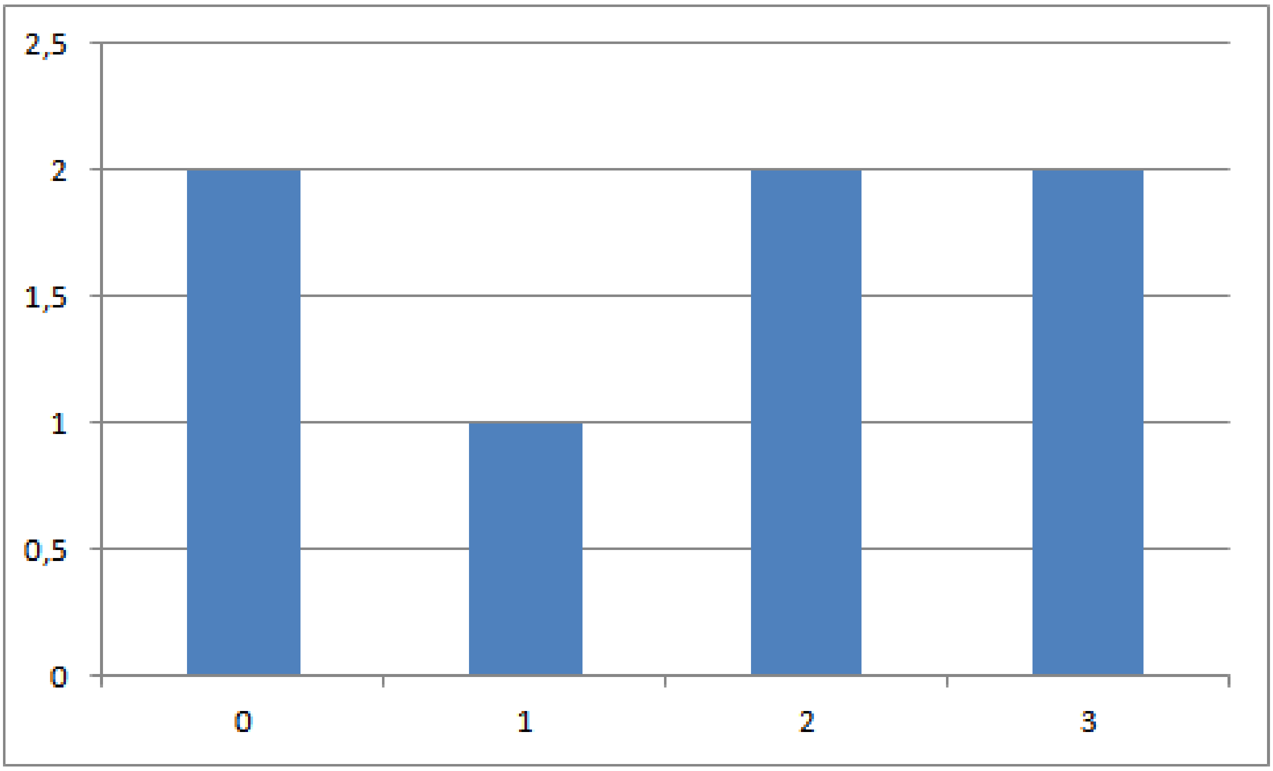
Taulukko 5.5: Vastausten jakauma T5: Sievennä: a.e^2e^3, b. $\log_a a^2$, c. $\log_3 2 + \log_3 6 - \log_3 4$

Pientä eroa voidaan siis havaita osaamisessa potenssien ja logaritmien laskusääntöihin perustuvassa osaamisessa.

Vastauksista voi päätellä, että vastaajien proseduraalinen tieto logaritmien suhteen on hyvä ja laskusäännöt ovat muistissa. Mielenkiintoista on, että vaikka opiskelija osaa hyödyntää logaritmin laskusääntöjä, ei se taannut ensimmäisessä tehtävässä käsitteellistä osaamista. Myös harvoista virheistä käy ilmi puutteellisuus käsitteellisessä ymmärryksessä. Tehtävässä 5c ratkaisuehdotukseksi tarjotaan $\log_3 2 + \log_3 6 - \log_3 4 = 3^2 + 3^6 - 3^4$, jolloin logaritmin käsite on selvästi ymmärretty väärin.

Viimeisessä tehtävän vastaukset (5.6) on jaoteltu neljään kategoriaan. Kategoria 0 sisältää vastaukset, joissa on annettu oikea ratkaisu tehtävään. Kategoriassa 1 lähes oikeat ratkaisut, kategoriassa 2 virheelliset ratkaisut ja kategoriassa 3 tyhjäksi jätetyt ratkaisut.

Tehtävässä kuusi vain kaksi vastaajista perusteli vastauksessaan, ettei $f(x) = e^x$ voi saada



Taulukko 5.6: Vastausten jakauma T6: Miksi $\ln -1$ ei ole määritelty?

negatiivisia arvoja. Näistä toinen viittasi myös tehtävään kaksi vastaten, ettei lukua e kerrottaessa itsellään voida päätyä negatiiviseen lukuun. Näiden kahden lisäksi yhdessä vastauksessa oli taustalla oikea ajatus, mutta sen formalisointi oli virheellinen. Vastaaja kirjoitti "Koska ei ole lukua x, jolle $a^x = -1, \quad a \in \mathbb{R}$". Tämä ei kuitenkaan päde yleisesti, sillä $-1^1 = -1$.

Virheellisissä vastauksissa perusteltiin määrittelemättömyyttä esimerkiksi sillä, ettei logaritmifunktio anna epänegatiivisia arvoja. Tämä ei kuitenkaan pidä paikkaansa, eikä ole sitä mitä tehtävässä kysyttiin. Vastaus on siinä mielessä mielenkiintoinen, että se tukee ajatusta siitä, että logaritmin merkintätapa sekoittaa opiskelijan ajattelemaan jonkinlaista funktiotoimenpidettä luvun sijaan. Loput vastauksista oli joko tyhjiä, tai sisällöltään epäinformatiivisia.

5.3.3 Yhteenveto

Kaiken kaikkiaan vastaukset tukevat sitä käsitystä, joka aikaisempien tutkimusten pohjalta on muodostunut. Logaritmit osataan proseduraalisella tasolla ja ne ymmärretään lähinnä laskusääntöinä ja eksponenttiyhtälöiden ratkaisuna. Ottaen huomioon, että vastaajat ovat käsitelleet logaritmien yhteydessä myös derivointia ja integrointia, heidän käsitteellinen ymmärrys on silti hyvin matala. Eksponenttien yhteydessä vastaavat ominaisuudet ovat paremmin hallinnassa. Voidaan siis sanoa, että molemmat hypoteesit pitivät paikkaansa.

Verrattaessa tuloksia Weberin (2002) tutkimukseen, voidaan nähdä vastaavuuksia. Tähän kyselyyn vastanneet eivät olleet saaneet erityistä opetusta ja aiheen käsittelystä saattoi osalla olla pitkäkin aika. Tähän nojaten voi vastaajien osaamisen todeta olleen hyvää. Siitä huolimatta vastaajat eivät suoriutuneet kovinkaan hyvin konseptuaalista tietoa mittaavissa tehtävissä.

5.3.4 Luotettavuus

Opiskelijat, jotka suorittivat tehtävät olivat kaiken kaikkiaan motivoituneita tekemään ne hyvin. Otanta oli pieni, mikä jossain määrin heikentää tulosten luotettavuutta. Kyselyn tehneet opiskelijat voidaan kuitenkin olettaa keskiverto lukio-opiskelijaa paremmiksi matematiikassa, sillä he ovat valikoituneet matematiikan aineenopettajan koulutukseen. Kysymyksien asettelu voi vaikuttaa monessa kohtaa vastauksiin ja kaikki tehtävätyypit eivät välttämättä olleet vastaajille entuudestaan tuttuja. Vastausten laadullinen tulkinta ja tutkijan omat taustakäsitykset voivat heikentää tutkimuksen luotettavuutta. Vastaavuudet aikaisempiin tutkimustuloksiin ja teoreettiseen taustaan voidaan pitää luotettavuutta parantavana tekijänä.

Luku 6

Opetuskokeilu logaritmin opetuksessa

Tässä luvussa esitellään logaritmin opetukseen suunniteltu yhden oppitunninmittainen opintokokonaisuus, jonka tarkoituksena on johdattaa opiskelija logaritmin käsitteen pariin. Lisäksi luvussa kerrotaan kyseisen opintokokonaisuuden pohjalta suoritetun opetuskokeilun saamasta vastaanotosta. Kokonaisuutta yritetään kuvailla sillä tavoin, että tutkimuksen lukija voi sen pohjalta luoda itselleen mielekkään oppitunnin. Lopuksi pohditaan tämän tutkielman pohjalta linkkejä opetukseen ja jatkotutkimuskohteita.

6.1 Opetuskokeilu

Suoritin huhtikuussa 2015 opetuskokeilun helsinkiläisen lukion opiskelijoille. Opetuskokeiluun osallistui neljä ryhmää, joista kaksi oli lyhyen ja kaksi pitkän matematiikan ryhmiä. Yhteensä opetuskokeiluun osallistui noin 80 oppilasta. Oppilaat olivat ensimmäisen vuoden opiskelijoita, joten suurimmalle osalle logaritmit eivät olleet entuudestaan tuttu aihe. Toinen lyhyen matematiikan ryhmistä suoritti samanaikaisesti kurssia MAB3, mutta kurssilla ei oltu vielä edetty logaritmeihin asti. Yhden opetustilaisuuden kesto oli 75 minuuttia, eli tyypillisen oppitunnin pituus.

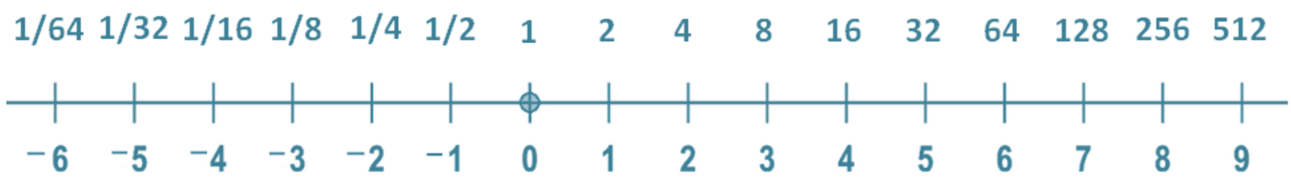
6.1.1 Luento-osuus

Opetustunti jakautui kahteen pääosaan. Alkuosa koostui luento-osuudesta, jonka yhteydessä käytiin lyhyesti läpi logaritmin käsitteen kehitys historiallisesta näkökulmasta. Luento-osuuteen käytettiin noin 25 minuuttia tunnista.

Koska suurimmalle osalle oppilaista logaritmi ei ollut entuudestaan tuttu, aloitettiin tunti herättelemällä ajatuksia siitä, miksi suurten lukujen käsittely on ongelmallista. Mikäli esimerkiksi katsotaan pelkkää lukuarvoa etäisyydelle Maasta Plutoon metreissä, ei saada minkäänlaista käsitystä kuinka suuresta matkasta on kyse. Nähdään vain, että luku on erittäin suuri. Myös luvun vertaaminen, esimerkiksi keskiverto ihmisen pituuteen on järjetöntä. Kun luvuista otetaan kymmenkantainen logaritmi, nähdään suuruusluokka heti.

Matematiikan historiasta oleellisesti esiin tuotiin Arkhimedeksen ongelma lukusanojen puutteesta, jota kautta siirryttiin potenssien laskusääntöihin. Kymmenpotenssit toimivat helppona esimerkkinä potenssien laskusäännöistä, sillä kymmenpotenssien toiminta on monelle jo ala-asteelta tulleen muistisäännön, jossa "lasketaan nollat", kautta tuttu. Potenssien laskusäännöistä annettiinkin esimerkit juuri kymmenpotenssien avulla. Näin pyrittiin lähestymään aihetta oppilaiden aiemmin kohtaaman kautta.

Napierin alkuperäistä logaritmin kehitystä ei ajan puutteesta johtuen käyty läpi, eikä kirjoittaja kokenut sen olevan oleellinen asian oppimisen kannalta. Idea esiteltiin, mutta varsinainen johdatus suoritettiin tarkastelemalla luvun kaksi potensseja ja niiden kertolaskua. Oppilaille esitettiin taulukko (3.1) luvun kaksi potensseista ja heitä pyydettiin tunnistamaan mistä luvuista listassa on kyse. Kun lukujen ja vieressä olevien indeksien yhteys selvisi, siirryttiin ratkaisemaan kertolaskua $32 \cdot 16384$. Taulukko oli koko ajan näkyvillä ja tehtävän edetessä sieltä korostettiin laskun kannalta oleelliset luvut ja indeksit. Taulukosta tehtiin huomio, että molemmat luvut on kirjoitettavissa luvun kaksi potenssina. Nyt kertolasku voitiin kirjoittaa muotoon $2^5 \cdot 2^{14}$. Tällöin saatettiin käyttää hyödyksi samankantaisten potenssien yhteenlaskusääntöä ja saatiin vastaukseksi 2^{19}. Myös tämä luku löytyy taulukosta, jossa indeksiä 19 vastaa luku 524288. Vastaavasti käytiin läpi jakolasku 131072/4096.



Kuva 6.1: Aritmeettisen ja geometrisen lukujonon vertailu

Potenssien laskusääntöjen lisäksi myös lukujonot ovat oppilaan aiemmin kohtaamaa tietoa. Looginen tarkastelunäkökulma luvun kaksi potenssien jälkeen on tarkastella aritmeettista lukujonoa, johon kuuluu kokonaisluvut ja geometrista lukujonoa, johon kuuluu vastaavat luvun kaksi potenssit. Opetuskokeilussa nämä esitettiin sekä lukujonoina että kuvauksena koordinaatistossa. Kuvaus on siis todellisuudessa $f(x) = \log_2 x$. Se esitettiin kuitenkin aluksi diskreettinä pistesarjana, jossa $f(x)$ käy läpi kokonaisluvut. Kun oppilas on ymmärtänyt aiemmat esimerkit kertolaskun ja jakolaskun muuttamisesta yhteenlaskuksi, kun potenssina on kokonaisluku, tehdään kriittinen ajattelun askel, jossa ikään kuin ”täytetään välit”. Sen sijaan, että voidaan esittää vain kokonaislukupotenssit ja niiden kertolaskut, voidaan kukin luku kirjoittaa eri kantalukujen potenssina.

Napierin ja Briggsin työ logaritmitaulukoiden luomisessa esiteltiin antaakseen perspektiiviä sille työmäärälle jonka nämä herrat näkivät. Pedagogisesta tavoitteena on inhimillistää matematiikan luonnetta. Kymmenkantaista logaritmia hyväksi käyttäen tutkittiin kertolasku suurilla luvuilla. Luvut voi valita mielivaltaisesti vaikka oppilaiden toimesta, jolloin logaritmitaulukon sijaan laskinta voidaan käyttää arvon selvittämiseen. Tehtiin myös huomio, ettei lukujen listauksessa tarvitse huomioida kuin luvut nollan ja ykkösen välillä, sillä kokonaislukupotenssit voidaan aina ottaa erilliseksi kertoimeksi. Lisäksi huomattiin, että $4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 4 = 2 \cdot 2$. Toisin sanoen havaittiin, että neliöjuuri voidaan kirjoittaa murtopotenssina.

Laskuesimerkkien jälkeen korostettiin ajatusta, että vaikea tehtävä voidaan tehdä helpommaksi lähestyttäessä sitä yksinkertaisemmasta näkökulmasta. Tämä idea on oleellinen monessa matematiikan osa-alueessa. Lisäksi mainittiin joitain tieteenaloja, joissa logaritmin sovelluksia saattaa kohdata. Näillä pyrittiin motivoimaan oppilaat aihepiirin pariin.

Kävin lopuksi läpi logaritmin merkintätavan, sillä se ei suurimmalle osalle oppilaista ollut entuudestaan tuttu ja lopputunnin aikana he tulisivat sen kohtaamaan. Pyrin korostamaan merkinnän tarkoittavan sitä, että esimerkiksi luku kolme on sellainen luku, johon luku kaksi täytyy korottaa, jotta saadaan luku kahdeksan. Ensimmäistä kertaa aiheeseen mentäessä merkintätavan käyttöä tulisi harkita, sillä käsitteellisen ymmärryksen kannalta se voi olla alkuun oppimista problematisoiva. Vaihtoehtoisesti tehtävät olisi voinut esittää käyttämättä logaritmimerkintää.

6.1.2 Tehtäväosuus

Opetustunnin toinen pääosio oli pienryhmissä tehtävät ilmiöpohjaiset tehtävät. Oppilaat jaettiin viiteen ryhmään, jotka kiersivät tehtävien parissa. Tehtävien pääpainona oli tutustua muutamaan sovellukseen, jossa logaritmit ovat oleellisessa osassa. Osan tehtävistä oli tarkoituksena lähestyä logaritmia käsitteellisestä näkökulmasta, jotta oppilaille tarjoutuisi mahdollisuus muodostaa pohjaa logaritmin proseptille. Tehtävissä käsiteltiin paljon kuvaajia sekä dataa jossa näkyy aritmeettisen ja geometrisen lukujonon vertailu. Vastaavia tehtäväaiheita on useita (3.3), mutta nämä ovat valikoituneet kirjoittajan kannalta sopivasta näkökulmasta. Tunnin pitäjän rooli tässä vaiheessa muuttuu luennoitsijasta ohjaajaksi. Oppilaat aloittivat satunnaisesta tehtävästä ja niiden suoritusjärjestys ei ollut oleellinen. Tehtävien määrä oli valittu, jotta oppilaat pääsisivät työskentelemään sopivan kokoisissa ryhmissä. Ei välttämättä siten, että kaikki kerkeisivät tekemään kunkin tehtävän. Ryhmien koko vaihteli kolmesta oppilaasta viiteen ja ryhmät kerkesivät suorittaa kolmesta neljään tehtävää.

Ensimmäinen tehtävä (liite 2) perustuu Keplerin kolmannen lain löytöön. Se on ensimmäinen tieteen sovellus, jossa logaritmeja hyödynnettiin ja näyttää logaritmisen datan analysoinnin kannalta tärkeän näkökulman. Oppilaille on entuudestaan tuttua, mitä suora kertoo arvojen suhteesta. Kun tavallisesti y-akselin arvon kasvaessa x-akselin arvo kasvaa tai vähenee aina samassa suhteessa, nyt oppilaan tulee ymmärtää logaritmin siirtävän vaikutuksen eksponenttiin. Siis y-akselin arvon korottuessa tiettyyn potenssiin x-akselin arvo korotetaan tiettyyn potenssiin. Lisäksi tehtävää on laajennettu puhtaasti laskennallisella tehtävällä. Tehtävien ratkaisu vaatii logaritmin käsitteen ymmärrystä, mutta myös proseduraalista tietoa.

Toisessa tehtävässä (liite 3) tutustuttiin laskutikkuun ja sen toimintaperiaatteeseen. Tässä syvennetään tunnin alkupuoliskon keinoja potenssin laskusäännöistä. Pyrkimyksenä on laajentaa ymmärrystä siitä, miten logaritmi helpotti arkea muun muassa tekniikan maailmassa. Kun laskutikun periaatteen ymmärtää, on siitä hyötyä konseptuaalisen tiedon kehityksessä. On konkreettisesti havaittavissa, kuinka kertolasku muuttuu yhteenlaskuksi ja jakolasku vähennyslaskuksi, jolloin päästään niin lähelle linkkiä matematiikan ensimmäiseen maailmaan, kun logaritmien yhteydessä voi toivoa.

Kolmas tehtävä (liite 4) keskittyi musiikkiin ja sävelasteikkoon. Tässä kohtaa yhteys eksponenttifunktioon on oleellisessa roolissa. Tällaisten asteikoiden tulkinta ja ymmärrys on yleissivistävästä näkökulmasta oleellista. Vastaavia asteikoita on esimerkiksi Richterin asteikko. Ohjaajan rooli tämän tehtävän suhteen on tärkeä ja varsinainen tehtävän johdatus tapahtui ohjaajan toimesta. Tässä käytettiin myös hyödyksi instrumenttia, jolla soittamalla ja kuuntelemalla syvennettiin teemaa. Tehtävän tarkoituksena on kehittää ajattelua eksponentiaalisesti kasvavien termien suhteen. Sävelasteikkoa ja taajuuden kasvua pohtimalla pääsee kiinni koron korko-ajatukseen. Tehtävässä tutkittiin myös aiemmin tarkasteltua luvun kaksi potenssien taulukkoa 3.1. Tämän pohjalta tehtiin arvio ihmisen kuulemista oktaaveista. Ideana on ymmärtää, että tulkittaessa luvun kaksi potenssit hertseinä, nähdään vastaavat oktaavit suoraan.

Tehtävässä neljä (liite 5) tutustuttiin Gaussin havaintoon alkulukujen esiintymisestä. Logaritmin kannalta oleellisin on geometrisen ja aritmeettisen lukujonon vertaaminen. Pyrkimyksenä olisi, että oppilaat tunnistaisivat tällaisen yhteyden katsomalla arvoja ja osaisivat yhdistää sen logaritmiin. Tehtävän vaikeutta lisää konteksti, joka ei ole entuudestaan tuttu. Mikäli idean ymmärtää vastauksen voi kuitenkin nähdä suoraan. Alkuluvut ovat myös kiehtova aihepiiri, joka on motivoinut matemaatikoita kautta historian. Tehtävässä tarjottiin myös kevennyksenä mahdollisuus tarkistaa onko oma puhelinnumero alkuluku.

Viides tehtävä (Vihart: How I feel about logarithms) oli tarkoitettu keventäväksi. Videossa esitellään yksinkertainen ajattelumalli logaritmeihin, mikä rakennetaan lukusuora-ajattelun kautta. Kun ajatellaan lukusuoraa joka ei kasva aritmeettisesti, vaan geometriseksi, voidaan logaritmit ajatella askelina, joita tarvitsee ottaa päästäkseen haluttuun lukuun. Tämä voi tarjota oppilaalle toimivan ajatusmallin logaritmeihin ja potensseihin. Myös logaritmin merkintää käsitellään.

6.2 Palaute

Opettajilta saamani palaute oli kannustavaa ja olimme samaa mieltä siitä, että logaritmeja tulisi käydä etenkin pitkän matematiikan sisällössä aikaisemmin. Jo ensimmäiseen kurssiin sisällyttäminen tukisi muun muassa fysiikan ja kemian kursseja, joilla käsite tulee esille varhaisessa vaiheessa. Lisäksi kahdeksas kurssi on niin täynnä asiaa, ettei siellä kerkeä käsittelemään logaritmeja perusteellisesti. Tässä vaiheessa uutta luonnosta lukion opetussuunnitelman perusteista ei oltu vielä julkaistu. Opetuskokeilun sisällöistä opettajat kehuivat erityisesti musiikin yhdistämistä matematiikkaan ja laskutikun hyödyntämistä. Myös luento-osuutta pidettiin mielenkiintoisena.

Keräsin opetuskokeiluun osallistuneilta palautetta tunnista. Palaute kerättiin google formsin kautta anonyymisti (liite 6). Palaute oli vapaaehtoinen. Tarkoituksena oli lähinnä kartoittaa tunnin onnistuneisuutta. Esitin myös aikaisemmin aineenopettajalinjalle suoravalituille esittämäni kysymyksen: "Mikä on logaritmi ja mihin sitä käytetään?"

Opetuskokeiluun osallistuneet opiskelijat kertoivat logaritmin liittyvän eksponentteihin ja lukujonoihin. Myös käänteisfunktio tuli esille, vaikka tätä ei suoraan opetuskokeilussa mainittu. Yleisesti tuntia kuvattiin mielenkiintoiseksi. Luento-osuuden historian käsittely sai moitetta tylsyydestä, mutta tehtäväosuus oli hyvä. Tehtävien vaikeustaso oli kuitenkin korkea, mikä mainittiin osassa vastauksia. Yleisesti vaikeustao jakoi mielipiteitä, sillä osa piti potenssin laskusääntöjen kertausta turhana, kun taas osa koki lähtötietojensa olleen puutteelliset. Tähän voi vaikuttaa se, että mukana oli pitkän ja lyhyen oppimäärän lukijoita.

Vastaajat kertoivat oppineensa logaritmien historiasta ja sen sovelluksista sekä laskutikun käytöstä. Teoria jäi kuitenkin ainakin osin epäselväksi. Tehtävistä laskutikun todettiin toimivan hyvin. Myös Keplerin kolmas laki koettiin hyödylliseksi. Sävelasteikko jakoi mielipiteitä eniten. Osa koki sen toimivaksi ja osa liian vaikeaksi.

Luento-osuuden selkeys koettiin hyväksi. Osa vastanneista koki oppineensa paremmin tällä tunnilla, kuin tavallisella matematiikan tunnilla. Eniten oppimista koettiin tehtävissä kaksi (Laskutikku), kolme (Logaritmi musiikissa) ja viisi (Vihart: How I feel about logarithms). Vastaavasti vähiten oppimista koettiin tehtävässä neljä (Alkulukuja etsimässä).

6.3 Pohdintaa

Opetuskokeilu oli kaikessa muodossa onnistunut. Se ei missään tapauksessa ollut täydellinen, josta kertoo se, että jopa päivien välillä tein siihen pieniä muutoksia. Mikäli vetäisin kokeilun uudestaan, keksisin varmasti yhä kehitettävää. On myös huomioitava, että vaikka aiemmilla opetuskokeiluilla ja ideoilla oli vaikutusta tunnin muokkautumiseen, jäi moni näistä käyttämättä. Esimerkiksi Napierin alkuperäisen idean tarkempi tarkastelu ja prostafaireesi vaatisivat huomattavasti enemmän aikaa, mutta kiinnostunut opettaja kykenee varmasti hyödyntämään näitä mielekkääseen kokonaisuuteen. Jo nyt tuntui, että asiaa oli paljon. Mikäli käytössäni olisi esimerkiksi kaksi oppituntia, painottaisin toisen niistä luento-osuuden asioille ja mekaaniselle laskemiselle. Vasta toisen tunneista hyödyntäisin ilmiöpohjaiselle tutkimiselle. Tällöin myös tietotekniikan hyödyntäminen tehtävissä olisi helpompaa.

6.3.1 Linkit opetukseen

Etenkin lukion pitkä oppimäärä on matematiikassa hyvin kiireinen. Siksi on vaikea oikeuttaa yhdelle aihealueelle lisätilaa. Nykyinen opetussuunnitelmakeskustelu on kuitenkin osoittanut, että logaritmien kohdalla tämä on tarpeellista. On mielenkiintoista nähdä, millainen vaikutus mahdollisilla muutoksilla on esimerkiksi Aalto-yliopiston lähtötasotesteihin.

Uskon, että minkä tahansa aihekokonaisuuden opetuksen yhteydessä opettajan oma motivaatio aiheeseen on suuri vaikuttaja. Tiedän, että tehtyäni itse tätä tutkimusta olen muodostanut eksperttiyden sekä aineenhallinnan että pedagogisen sisältötiedon suhteen. Vastaavasti opettaja, joka on kiinnostunut kehittämään opetustaan ja näkee vaivaa tehdä taustatyötä yksittäisten käsitteiden suhteen pystyy saavuttamaan samanlaisen asiantuntijuuden. Tähän tutkimukseen tutustumalla uskon tarjoavani kiinnostuneelle opettajalle mahdollisuuden saavuttaa tarvittava proseptuaalinen ymmärrys logaritmien aihekokonaisuuteen. Kyse ei tässä tapauksessa ole puutteista ajattelussa, vaan puutteista ajassa ja motivaatiossa.

6.3.2 Jatkotutkimuskohteet

Pelkkä lisätila opetussuunnitelmassa ei takaa oppilaiden konseptuaalisen tiedon kehittymistä logaritmien suhteen. Koen, että usealla opettajaksi opiskelevalla on hyvin pelkistynyt käsitys logaritmista ja tällöin se luonnollisesti heijastuu myöhemmin opetuksessa. Ensimmäisen vuoden yliopistokursseilla logaritmi- ja eksponenttifunktio on oleellisena osana matemaattista analyysia, mutta tämä ei silti takaa konseptuaalista osaamista. Lisäksi esimerkiksi käsitteen historiallinen kehittyminen ja sen tuomat edut opetukseen jäävät helposti väliin. Opettajaksi opiskelevien käsitys logaritmista on mielenkiintoinen jatkotutkimuskohde.

Tutkimuksen työstämisen aikana julkaistiin luonnos tulevista lukion opetussuunnitelman perusteista. Tämä muutti tutkimuksen luonnetta siinä mielessä, ettei sen tavoite enää ollut vaikuttaa opetussuunnitelman sisältöön sitä muokkaavana, vaan sitä tukevana. Logaritmien opetus lukion ensimmäisellä matematiikan kurssilla tarjoaa myös erinomaisen jatkotutkimuskohteen logaritmien opetukseen. Se mahdollistaa Weberin (2002) kaltaisen kokeilun, jossa verrataan kontrolliryhmän ja tutkimusryhmän välistä osaamista. Nykyisellään kurssin kahdeksan yhteydessä se ei ole mahdollista, sillä kurssin luonteen vuoksi logaritmeja käsitellään hyvin nopeasti differentiaalilaskennan näkökulmasta. Tällöin huomio väkisinkin keskittyy näihin ominaisuuksiin.

Tutkimuksessa pyrittiin ottamaan huomioon oppilaan aiemmin kohtaama tieto (met-before). Varsinaista tutkimusta sen suhteen, millainen aikaisempi tieto tukee ja mikä problematisoi logaritmien oppimista ei kuitenkaan tehty. Tässä on kuitenkin mielenkiintoinen jatkotutkimuksen mahdollisuus.

6.3.3 Lopuksi

On mahdoton määritellä yhtä oikeaa tapaa opettaa mitään matematiikan osa-aluetta. Sekä opettajan henkilökohtainen tyyli ja opetusmenetelmät että opetettavat yksilöt vaikuttavat siihen millä tavoin aihekokonaisuus tulisi esittää. Rohkaisen kuitenkin jokaista kokeilemaan erilaisia menetelmiä, jotta niistä voi löytää itselleen sopivimman ja mahdollistaa oman pedagogiikansa kehittämisen. Tärkeintä on motivoitua aiheesta itse, jotta voi siirtää sen motivaation ja innostuksen opetettaville.

Luku 7

Lähteet

[1] Aalto, A., Kangasaho, J, Kylliäinen, O. ja Tahvanainen, J.: Lyhyt matikka 3 Matemaattisia malleja I. - Helsinki: Sanoma Pro. (2013)

[2] Avital, S.: ”History of mathematics can help improve instruction and learning.” Learn from the masters - The Mathematical Association of America. (1995) 3-12.

[3] Boyer, C. B. ja Merzbach, U. C.: A History of Mathematics, 3rd Edition. - John Wiley and Sons, Inc. 2011

[4] Budinski, N. ja Takaci, D.: ”Using Computers and Context in the Modeling-Based Teaching of Logarithms.” - Computers in the Schools 30.1-2 (2013): 30-47

[5] Bundy, J. P.: ”Using Poems to Teach Exponential and Logarithmic Functions.” - Diss. California State University. Chanel Islands (2010).

[6] Cajori, F.: A History of Mathematics. - American Mathematical Soc., 1991.

[7] Christofferson, H.C.: ”The Teaching of Logarithms” - The Mathematics Teacher vol 17 nro 3 (1924)

[8] De Lima, R. N. ja Tall, D.: ”Procedural embodiment and magic in linear equations.” - Educational Studies in Mathematics 67.1 (2008): 3-18.

[9] Etelämäki, H., Hellsten, A., Hirvonen, K., Hirvonen, K., Pösö, J.:). Summa 3: Matemaattisia malleja I. - Helsinki: Edita Prima Oy. (2008)

[10] Fauvel, J.: ”Revisiting The History of Logaritms”, Learn From The Masters. - The Mathematical Association of America. 1995 p.39-47

[11] Frumveller, A.F. : ”Discussions: Concerning the Teaching of Logarithms” - The American Mathematical Monthly, Vol. 27, No. 4 (1920), pp. 167-169

[12] Gamble, M.: ”Teaching Logarithms: Day One” - The Mathematics Teacher vol. 99, no. 1 (2005), pp. 66-67.

[13] Gray, E., and Tall, D.: ”Success and failure in mathematics: the flexible meaning of symbols as process and concept.” - Mathematics teaching 14 (1993): 6-10.

[14] Haapasalo, L. ja Kadijevich, D.: ”Two types of mathematical knowledge and their relation.” - Journal für Mathematik-Didaktik 21.2 (2000): 139-157.

[15] Haapasalo, L.: ”The conflict between conceptual and procedural knowledge: Should we need to understand in order to be able to do, or vice versa.” - Proceedings on the IXX Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association, University of Joensuu, Bulletins of the Faculty of Education. Vol. 86. (2003).

[16] Haapasalo, L.: ”Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää”, Matematiikka: näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen - Niilo Mäki Instituutti, Jyväskylä 2004.

[17] Halmetoja, M., Merikoski, J., Pippola, L. ja Silfverberg, H.: Matematiikan taito: Juuri- ja Logaritmifunktiot. - WSOY/Sanoma Pro. (2006)

[18] Hannula, M.S.: Matematiikan ainedidaktiikan luennot - Helsingin yliopisto, kasvatustieteen laiton. Syksy 2013.

[19] Hopkins, E.J.: ”The Teaching of Logarithms” - The Mathematical Gazette vol 43 nro 346 (1959)

[20] Hurwitz, M.: ”We have liftoff! Introducing the logarithmic function.” - The Mathematics Teacher vol 92. (1999) pp. 344-345

[21] Jäppinen, P., Kupiainen, A. ja Räsänen, M.: Lukion Calculus 1: Funktiot ja yhtälöt. - Keuruu: Otava. (2006)

[22] Jäppinen, P., Kupiainen, A. ja Räsänen, M.: Lukion Calculus 4: Derivaatta, Juuri- ja logaritmifunktiot. - Keuruu: Otava. (2006)

[23] Katz, V.J.: ”Napier’s Logarithms Adapted for Today’s Classroom”, Learn From The Masters. - The Mathematical Association of America. 1995 p.49-55

[24] Kenney, R.: ”Students understanding of logarithmic function notation.” - Proceedings of the Annual Meeting of the 27’h North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2005.

[25] Kenney, R. ja Kastberg, S. E.: ”Links in learning logarithms.” - Australian Senior Mathematics Journal 27.1 (2013): 12.

[26] Kontkanen, P., Lehtonen, J., Luosto, K. ja Savolainen, S.: Pyramidi 9: Juuri- ja logaritmifunktiot. - Tammi. (2011)

[27] Koskinen, R.: ”Orientaatiokäsite Pjotr Galperinin oppimisen teoriassa ja sen merkitys matematiikan opetuksessa.” - Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Oulussa 25.?26.11. 2004 (2005): 111.

[28] LOPS (2003). Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003. Luettu 13.12.2014. `http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf`

[29] LOPS (2015). Luonnos lukion opetussuunnitelman perusteille 2016. Luettu 17.4.2015. `http://oph.fi/download/166556_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015_luonnos_14042015.pdf`

[30] McClenon, R.B. : ”Discussions: On The Teaching Logarithms” - The American Mathematical Monthly, Vol. 26, No. 7 (1919), pp. 297-298

[31] Panagiotou, E. N.: ”Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms.” - Science & education 20.1 (2011): 1-35.

[32] Pierce, R.C.: A Brief History of Logarithms. - The Two-Year College Mathematics Journal, Vol. 8, No. 1 (Jan., 1977), pp. 22-26

[33] POPS (2004). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Luettu 13.12.2014. `http://www02.oph.fi/ops/perusopetus/pops_web.pdf`

[34] POPS (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Luettu 13.12.2014. `http://http://oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf`

[35] Rasila, A. et al.: ”Matematiikan perusopetuksen kehittämistoimia ja tulosten arviointia.” - Tietojenkäsittelytiede 33 (2011): 43-54.

[36] Stoll, C.: ”When slide rules ruled.” - Scientific American 294.5 (2006): 80-87.

[37] Tall, D.: How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics. - Cambridge University Press, 2013.

[38] Tall, D., De Lima, R. N. ja Healy, L. ”Evolving a three-world framework for solving algebraic equations in the light of what a student has met before.” - The Journal of Mathematical Behavior 34 (2014): 1-13.

[39] Vagliardo, J. J. : ”Substantive knowledge and mindful use of logarithms: A conceptual analysis for mathematics educators.” - Focus on Learning Problems in Mathematics 28.3-4 (2006): 90.

[40] Vagliardo, J. J. : ”Curricular Implications of Concept Mapping in Secondary Mathematics Education.”- Concept Mapping in Mathematics. Springer US (2009) 171-188.

[41] Vihart (18.11.2013). How I Feel About Logarithms. [Videotiedosto]. Haettu 18.3.2015 osoitteesta https://www.youtube.com/watch?v=N-7tcTIrers

[42] Weber, K.: ”Students' Understanding of Exponential and Logarithmic Functions.” - Murray State University. (2002)

LIITE 1: Kysely Aineeopettajaksi suoravalituille

Ylioppilaaksi valmistumisvuosi:_____	Lyhyt matematiikka □	Pitkä matematiikka □
Aineenopettajaksi suoravalittu:	Kyllä □	Ei □

1. Mikä on logaritmi ja mihin sitä käytetään?

2. Miten selittäisit funktion $f(x)=a^x$ henkilölle, joka ei opiskele matematiikkaa?

3. Onko $f(x)=(1/2)^x$ kasvava vai vähenevä funktio?

4. Miten lasket $\log_5 78125$ käyttämättä laskinta?

5. Sievennä:

a) e^2e^3

b) $\log_a a^2$

c) $\log_3 2 + \log_3 6 - \log_3 4$

6. Miksi ln -1 ei ole määritelty?

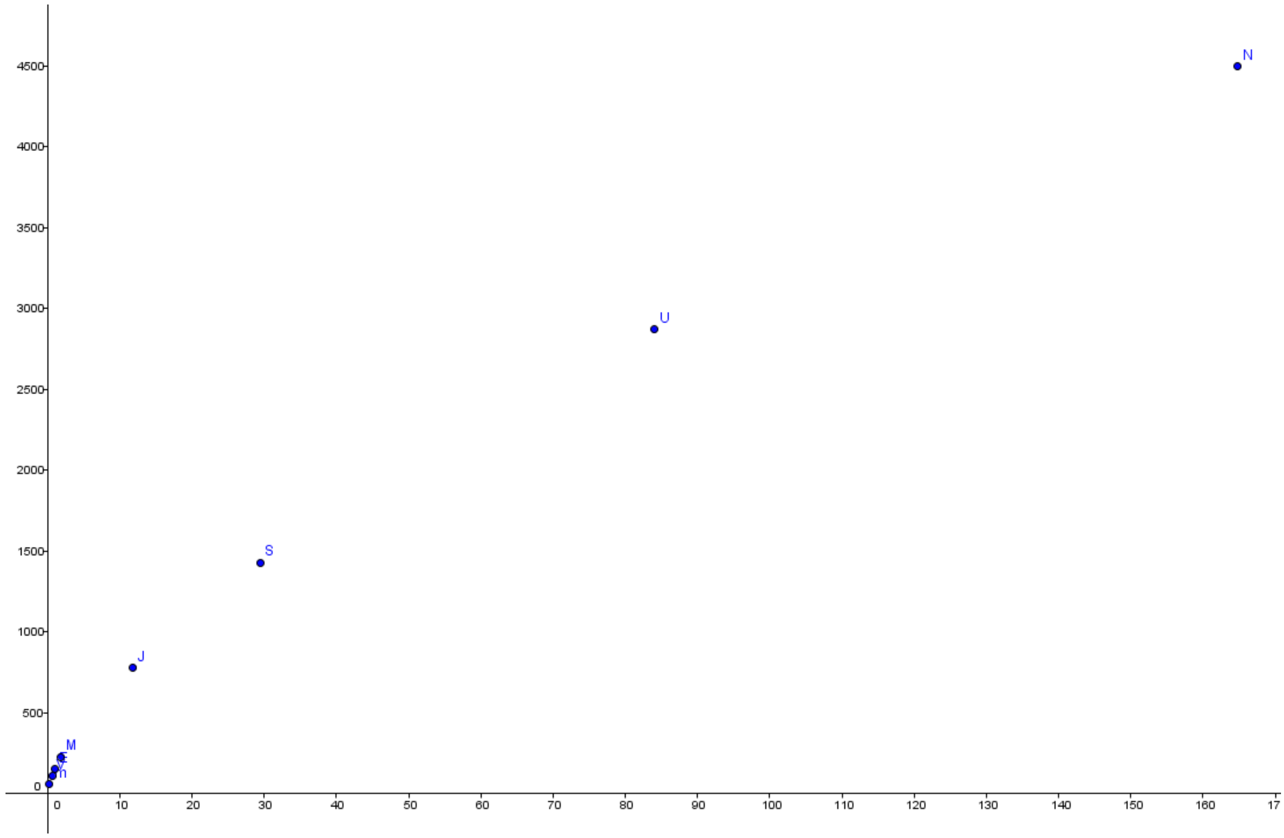
LIITE 2: Keplerin III laki

Johannes Kepler julkaisi kaksi ensimmäistä planetaaristen liikkeiden lakiaan vuonna 1609 tutkittuaan Tycho Brahen tekemiä havaintoja. Lait ovat:

Kepler I: Kiertäessään tähteä planeetta liikkuu pitkin ellipsin muotoista rataa, jonka toisessa polttopisteessä tähti on.

Kepler II: Tähdestä kappaleeseen piirretty jana jättää jälkeensä yhtä pitkinä ajanjaksoina pinta-alaltaan yhtä suuren alueen.

Tutkiessaan planeettojen kiertoaikoja ja etäisyyttä auringosta Kepler jäi kuitenkin vaille ratkaisua. Kiertoajat kuitenkin kasvavat etäisyyden kasvaessa, joten Kepler uskoi yhteyden olevan.



Kuvaaja 1: T (kiertoaika vuosina) / R(keskietäisyys auringosta (10^6km)

Kepler oli ensimmäisiä, joka hyödynsi logaritmien keksimistä. Hän otti sekä planeettojen kiertoajoista, että niiden keskietäisyydestä aurinkoon kymmenkantaisen logaritmin.

Planeetta	T (/vuosia)	R (10^6 km)	$\log_{10}(T)$	$\log_{10}(R)$
Merkurius (m)	0,24	57,91	-0,618	1,763
Venus (V)	0,62	108,21	-0,211	2,034
Maa (E)	1,0	149,6	0,0	2,175
Mars (M)	1,88	227,94	0,274	2,358
Jupiter (J)	11,86	778,34	1,074	2,891
Saturnus (S)	29,45	1426,71	1,469	3,154
Uranus* (U)	84,02	2870,63	1,924	3,458
Neptunus* (N)	164,79	4498,39	2,217	3,653

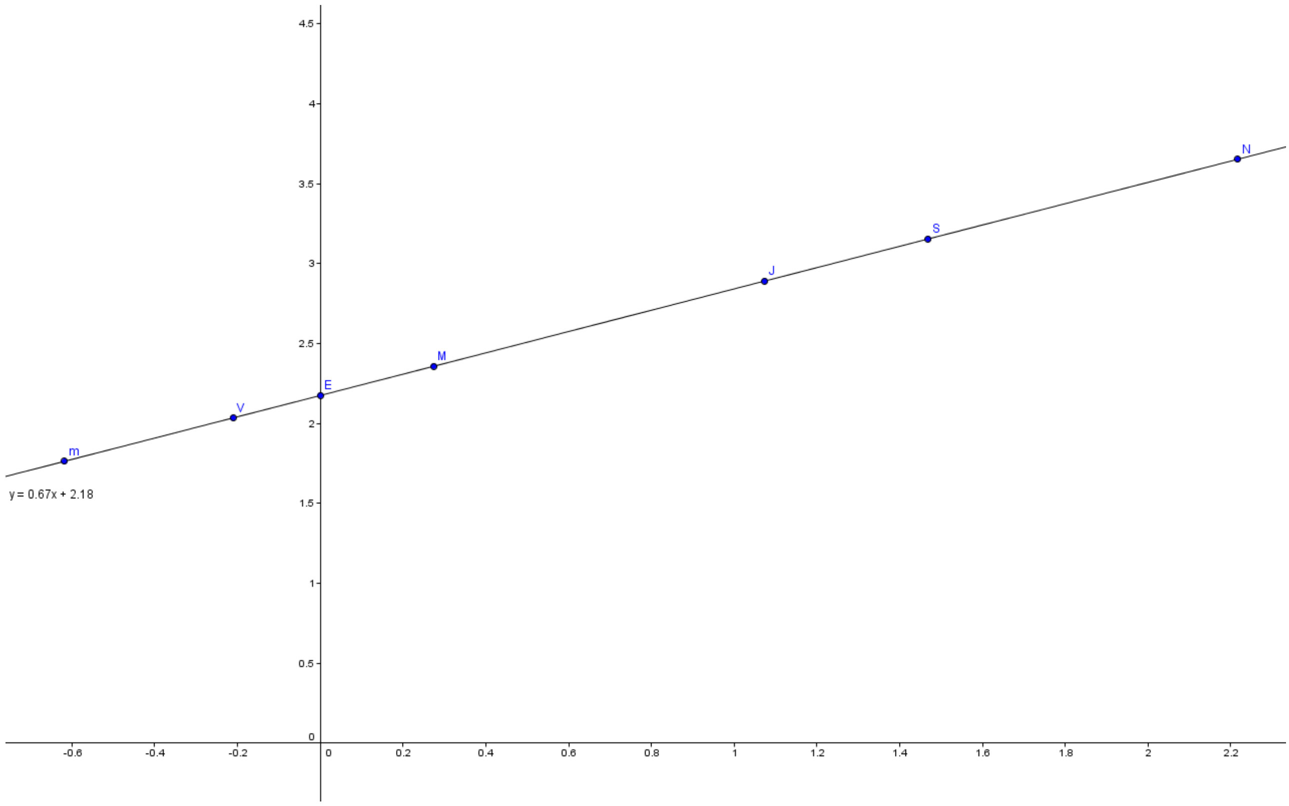
Planeettojen kiertoajat ja etäisyydet, sekä niiden logaritmit. Uranus ja Neptunus löydettiin vasta Keplerin jälkeen, mutta ne noudattivat myös lakia.

Esim. Marsin kiertoaika (maan vuosina)

$10^x = 1.88$ siis $\log_{10}(1.88) = x$

$x = 0.274$

Nyt arvojen välille oli nähtävissä lineaarinen yhteys! (Kun toinen luku kasvaa, toinen kasvaa aina samassa suhteessa). Suurien lukujen logaritmeja on myös huomattavasti helpompi käsitellä. Kun piirretään suoranyhtälö, saadaan $y = 0.67x + 2.18$.



Kuvaaja 2: $\log_{10}(T)$ / $\log_{10}(R)$.

1. Suoran kulmakerroin on n. 2/3 (0.67). Mitä voidaan siis päätellä kiertoajan ja keskietäisyyden suhteesta? (Keplerin kolmas laki)

2. Asteroidivyöhyke sijaitsee Marsin ja Jupiterin välissä keskietäisyydellä 413,79 10^6 km auringosta.

Paljonko on asteroidivyöhykkeellä sijaitsevan kääpiöplaneetan Cereksen kieroaika?

LIITE 3: Laskutikku

Laskutikku perustuu logaritmin laskusääntöihin, eli muutetaan kertolasku yhteenlaskuksi ja jakolasku vähennyslaskuksi. log(a·b) = log(a) + log(b) ja log(a/b) = log(a) – log(b).

Laskutikku keksittiin englannissa hyvin pian Napierin julkaistua logaritmeista. Vasta 1800-luvun puolessa välissä ne yleistyivät, kun insinööriala alkoi syntyä. Laskutikku olikin läpi 1900-luvun insinöörien tunnus ja sitä kantoivat mm. Apollo-lentojen astronautit.

1. Miten lasket laskutikulla 2·3? Entä 8/4?

Virtuaalilaskutikku:

http://www.antiquark.com/sliderule/sim/virtual-slide-rule.html

Ratkaisu: Vasemmassa reunassa kirjainten C ja D perässä on vastaavat luvut 1-9. Luvut on jaettu kymmenkantaisten logaritmien (merkintä lg=$\log_{10)}$) mukaan:

lg(1) = 0, lg(2)=0,301..., lg(3)=0,477... jne.

Siis luku 3 on noin puolessa välissä tikkua.

Liikuta C-asteikon luku 1 D-asteikon luvun 2 kohdalle. Nyt ollaan liikuttu tikulla pisteeseen lg(2). Nyt edetään asteikolla C lukuun 3, jolloin ollaan suoritettu lasku lg(2) + lg(3). Luvun kolme alta asteikolla D löytyy ratkaisu laskuun 2·3. Sen sijaan, että tehtiin kertolasku, laskettiin sama lasku logaritmeilla ja muutettiin se yhteenlaskuksi, sillä lg(2) + lg(3) = lg 2·3 =lg 6.

2. Laske laskutikulla 1,7· π.

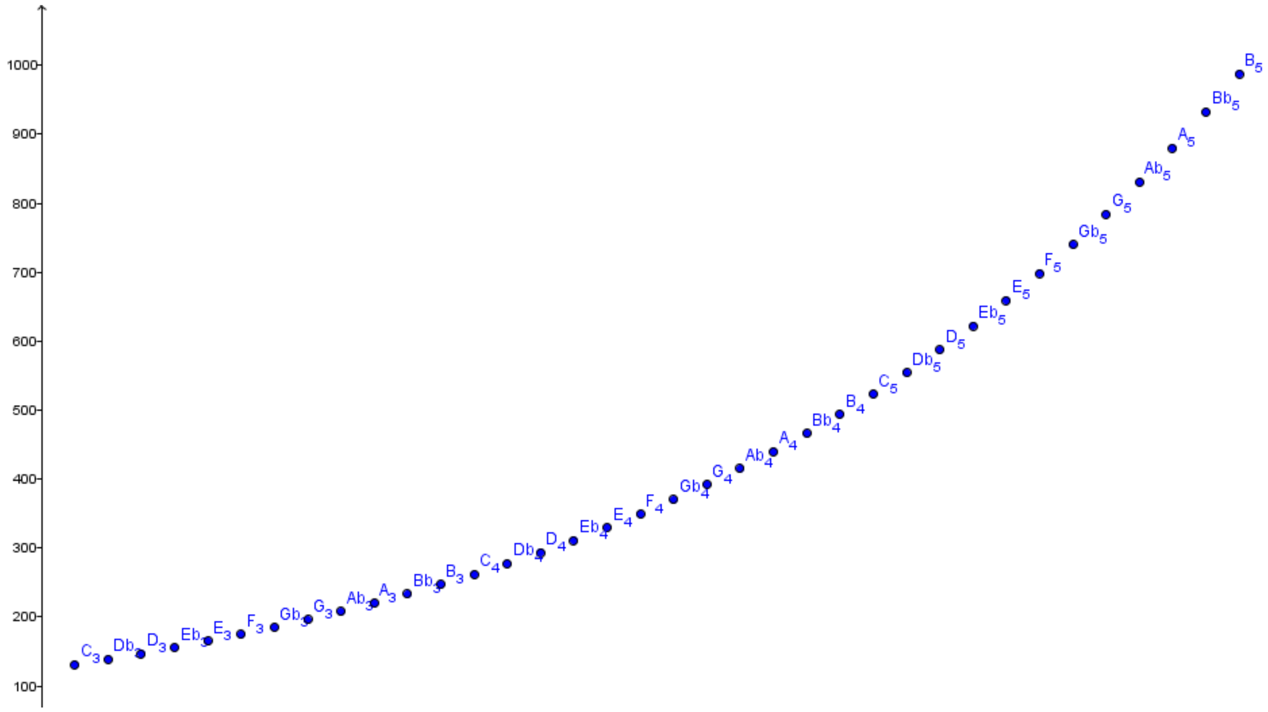
Tehkää päässälaskukilpailu, jossa:

1. **yksi ryhmästä esittää kerto- tai jakolaskun, jonka muut laskevat**
2. **yksi ryhmästä vuorollaan saa käyttää avukseen laskutikkua**
3. **kysyjä tarkistaa vastauksen laskimella. Vastaus 1 desimaalin tarkkuudella.**

LIITE 4: Logaritmi musiikissa

"Music is the pleasure that the human mind experiences from counting without being aware that it is counting.“

-Leibniz



Nuotit taajuuden mukaan.

Sävelasteikko koostuu kahdentoista sävelen sykleistä. Sama sävel toistuu asteikossa, kun sitä vastaava taajuus kaksinkertaistuu. Jos haluamme selvittää kahden taajuuden välisen eron oktaaveissa, se saadaan suhteena $\log_2 (f_2/f_1)$.

Esim. A_4=440Hz ja A_5=880Hz, jolloin $\log_2 (880/440)=\log_2 2=1$. Siis sävelien suhde on yksi oktaavi.

1. Ns. tasavireisessä asteikossa jokaisen sävelen suhde on sama. Kun oktaaviin mahtuu 12 säveltä, mikä on tällöin kahden sävelen välinen suhde?

2. Ihminen kykenee kuulemaan taajuusalueella 20Hz – 20 000 Hz. Käyttäen hyväksi listaa luvun 2 potensseista, arvioi kuinka monta oktaavia ihminen kykenee kuulemaan.

Luku	Indeksi	Luku	Indeksi	Luku	Indeksi
1	0	128	7	16384	14
2	1	256	8	32768	15
4	2	512	9	65536	16
8	3	1024	10	131072	17
16	4	2048	11	262144	18
32	5	4096	12	524288	19
64	6	8192	13	1048576	20

LIITE 5: Alkulukuja etsimässä

Alkuluku tarkoittaa lukua, joka on jaollinen vain itsellään ja luvulla 1. Esim. 2,3,5,7,11... Luku 9 ei ole alkuluku, koska se voidaan kirjoittaa $9 = 3 \cdot 3$. Alkuluvut ovat aina olleet matemaatikoille mysteeri. Antiikin kreikassa osattiin todistaa, että niitä on rajattoman paljon, mutta kukaan ei osannut ennustaa koska seuraava alkuluku tulee vastaan. Esimerkiksi 881 ja 883 ovat peräkkäisiä alkulukuja, mutta 887 ja 907 välistä ei löydy yhtään alkulukua.

Viisitoistavuotiaalle Carl Friedrich Gaussille (1777-1855) oli annettu lahjaksi kirja, joka sisälsi luettelon alkuluvuista. Samassa kirjassa oli myös tyypillinen logaritmitaulukko. Logaritmit ovat hyvin ennustettavissa, toisin kuin alkuluvut.

Gauss ymmärsi kysyä uuden kysymyksen. Sen sijaan, että yrittäisi ennustaa seuraavan alkuluvun tarkan sijainnin, hän pyrki ennustamaan kuinka monta alkulukua esiintyy ensimmäisessä 100 luvussa, ensimmäisessä 1000 luvussa jne. Gauss havaitsi lukujen esiintymistiheydessä säännöllisyyden.

N	A: Alkulukujen määrä välillä 1-N	(N/A): Keskiarvo kuinka monen luvun päässä seuraava alkuluku
10	4	2,5
100	25	4,0
1 000	168	6,0
10 000	1 229	8,1
100 000	9 592	10,4
1 000 000	78 498	12,7
10 000 000	664 579	15,0
100 000 000	5 761 455	17,4
1 000 000 000	50 847 534	19,7
10 000 000 000	455 052 511	22,0

Modernilla laskulla saadut arvot alkulukujen esiintymiselle

Gauss huomasi, että luku N kasvaa geometrisesta suhteessa lukuun (N/A), joka kasvaa noin 2,3 jokaista kymmenpotenssia kohden. Gauss oli löytänyt linkin logaritmeihin. Hän formuloi ennusteensa

$$f(N)= \text{———}.$$

Gaussi itse tarkensi ennustetta myöhemmin, kuten teki muut hänen jälkeensä. Seuraavan alkuluvun ennustaminen pysyy edelleen mysteerinä matemaatikoille...

1. Kuinka todennäköistä on, että seitsemän luvun mittainen puhelinnumerosi (ilman operaattoritunnusta) on alkuluku? Laske Gaussin alkulukuteoriaa käyttäen kuinka monta alkulukua esiintyy ennen puhelinnumeroasi.

Onko puhelinnumeroni alkuluku? Tarkista:

LIITE 6: Palautelomake opetuskokeiluun osallistuneille

Vastauksiani saa lainata (anonyymisti) pro gradu –tutkielmassa:

Kyllä □

Mikäli vastausta käytetään, siihen viitataan anonyymisti. Koulua, opiskelijaa tai muuta tietoa ei liitetä.

Mikä on logaritmi ja mihin sitä käytetään?

Yleinen palaute tunnista

Kerro mitä pidit tunnin sisällöstä ja sen esitystavasta.

Mitä opit? Mitä et?

Kerro mitä tunnista jäi päälimmäisenä mieleen ja mitä uutta opit. Jäikö jotain epäselväksi?

Mikä tehtävä toimi parhaiten ja mikä heikoiten? Miksi?

Luento-osuus: Esitystä oli helppo seurata

Puhujan selkeys/ulosanti/materiaali

	1	2	3	4	5	
Eri mieltä	□	□	□	□	□	Samaa mieltä

Opin tunnilla paremmin, kuin tavallisella matematiikan tunnilla.

	1	2	3	4	5	
Eri mieltä	□	□	□	□	□	Samaa mieltä

Mielestäni opin tehtävästä.

Valitse tehtävät, joissa mielestäsi koit oppimista.

- □ Luento-osuus
- □ Kepler III laki
- □ Laskutikku
- □ Logaritmi musiikissa
- □ Alkulukuja etsimässä
- □ Vihart: How I feel about logarithms

Vapaa sana

Kommentoi vapaasti tunnin sisältöä/vetäjän toimintaa.