

## **CONCEPCIONES ACTUALES PARA EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA PLANA A TRAVÉS DE SUCESIONES DE INDICACIONES CON CARÁCTER HEURÍSTICO**

CONCEPCIONES ACTUALES PARA EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA PLANA

AUTORES: Hipólito Eulogio Santos Loo<sup>1</sup>  
Michel Enrique Gamboa Graus<sup>2</sup>  
Naury Silva Téllez<sup>3</sup>

DIRECCIÓN PARA CORRESPONDENCIA: [kenia@ult.edu.cu](mailto:kenia@ult.edu.cu)

Fecha de recepción: 10 - 04 - 2017

Fecha de aceptación: 26 - 05 - 2017

### RESUMEN

El artículo hace referencia a una de las problemáticas que más inciden en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría plana. Tiene como objetivo la implementación de actividades didácticas centradas en el uso de una sucesión de indicaciones con carácter heurístico, las que permiten al estudiante ser protagonistas en la construcción de sus propios conocimientos. Las actividades diseñadas refieren una secuencia lógica en la aplicación de la instrucción heurística para la ejercitación de este dominio cognitivo, reflejados en la calidad del aprendizaje y en el estímulo a los estudiantes a expresar sus ideas y juicios relacionado con la motivación hacia el aprendizaje de la Geometría Plana.

PALABRAS CLAVE: geometría; heurística; aprendizaje; instrucción.

### **CURRENT CONCEPTS FOR THE LEARNING OF FLAT GEOMETRY THROUGH SEQUENCES OF INDICATIONS WITH HEURISTIC CHARACTER**

### ABSTRACT

The article refers to one of the problems that most affect the development of the teaching-learning process of flat geometry. It aims to implement didactic activities focused on the use of a sequence of indications with heuristic character, which allow the student to be protagonists in the construction of their own knowledge. The activities designed refer to a logical sequence in the application of heuristic instruction for the exercise of this cognitive domain, reflected in the quality of learning and in stimulating students to express their ideas and judgments related to the motivation towards learning the Plane geometry.

KEYWORDS: geometry; heuristics; learning; instruction.

---

<sup>1</sup> Master en Ciencias. Profesor Auxiliar del Departamento Educación Infantil de la Universidad de Las Tunas, Cuba.

<sup>2</sup> Licenciado en educación. Doctor en Ciencias Pedagógicas. Profesor Titular de la Universidad de Las Tunas, Cuba.

<sup>3</sup> Doctor en Ciencias Pedagógicas. Profesor Titular de la Universidad de Las Tunas, Cuba.

## **CURRENT CONCEPTS FOR THE LEARNING OF FLAT GEOMETRY THROUGH SEQUENCES OF INDICATIONS WITH HEURISTIC CHARACTER**

### INTRODUCCIÓN

La necesidad de desarrollar e impulsar nuevos enfoques pedagógicos que sustenten experiencias educativas más efectivas, constituye uno de los retos que deben asumir todos los comprometidos con la labor de educar las presentes y futuras generaciones.

El desarrollo acelerado de la ciencia y la técnica en nuestros tiempos y la cantidad de conocimientos acumulados por el hombre, son realidades de hoy que colocan a la educación ante un gran reto: preparar a las nuevas generaciones para que puedan vivir de acuerdo con su tiempo, en un mundo en el que el ser humano se convierte, cada vez más, en el transformador de la naturaleza, donde los conocimientos se renuevan y enriquecen, la Matemática se encuentra inmersa en estas transformaciones, dado el papel fundamental que corresponde a esta ciencia como instrumento imprescindible para el conocimiento y transformación de la realidad que identifican la acción del hombre; el aprendizaje de esta ciencia brinda la posibilidad al hombre de dar solución de problemas cotidianos y con ello a su mejor inserción en el mundo.

Uno de los aspectos que ha ocupado a los investigadores en el área del aprendizaje de la Matemática, tanto nacional como internacionalmente, es la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. En esa dirección, la Comisión Internacional de Educación Matemática (ICMI), en 1995, centró su tema de estudio en las perspectivas sobre la enseñanza de la geometría para el siglo XXI. En el documento de discusión para un estudio ICMI se destaca la necesidad de discutir sobre la identificación de los retos más importantes y las tendencias emergentes para el futuro; así como los impactos didácticos potenciales en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría a partir del aprovechamiento y la aplicación de nuevos métodos de enseñanza.

La geometría se caracteriza por la resolución de ejercicios y problemas de carácter no algorítmico, por eso el estudiante debe alcanzar una instrucción heurística que le permita resolver con éxito las tareas docentes de cálculo, construcción y demostración.

La enseñanza de la geometría tiene gran incidencia, debido a que brinda métodos, formas de trabajo que influyen directamente en el desarrollo de habilidades y capacidades generales y específicas en los estudiantes.

Se considera que el conocimiento geométrico no presupone solamente reconocer visualmente determinadas formas y saber el nombre correcto; sino implica también, explorar conscientemente el espacio, comparar los elementos observados, establecer relaciones entre ellos y expresar verbalmente tanto las acciones realizadas como las propiedades observadas, así como, descubrir propiedades de las figuras y de las transformaciones, construir modelos,

elaborar conclusiones para llegar a formular leyes generales y resolver problemas.

## DESARROLLO

Los recursos heurísticos deben contener formas de trabajo que estimulen el uso de símbolos, variables, incógnitas, expresión oral y escrita.

Se considera que procedimiento heurístico, o simplemente heurístico, es un instrumento-signo que expresa una o varias acciones, cuyo contenido es una forma de

trabajo materializada (externa, socializada) que estimula, las operaciones intelectuales y transformable en proceso mental (interna) presentes en las formas del pensamiento mediante la práctica consciente.

Los impulsos heurísticos como instrumentos muestran el modo de acción y por eso son procedimientos. Actúan externamente. Son signos porque son una estructura lingüística con un significado especial que es portador de formas del pensamiento. Esto es así porque la estructura de la psiquis humana se examina por analogía con la estructura de su actividad laboral, realizaron experimentos prácticos donde corroboraron la tesis que se basa en el presupuesto todo proceso psíquico superior se da dos veces, primero en un plano real, práctico, y luego se interioriza y se convierte en psíquico.

Según Müller (1986), mediante la impartición de un mínimo de conocimientos de los métodos heurísticos y el desarrollo de hábitos en su aplicación consecuente se puede capacitar a los estudiantes en la realización de las operaciones mentales que son necesarias para encontrar de forma independiente la idea de la solución.

El marcado interés de los matemáticos por la heurística se sustenta en la estrecha relación que hay con las formas de pensamiento de la matemática: variación de condiciones, la búsqueda de relaciones y las consideraciones de analogía.

Para la didáctica de la Matemática ha sido de mucha importancia los trabajos de Horst Müller (1986), al sistematizar el empleo de recursos heurísticos en el plano pedagógico, que han sido fuente teórica y metodológica para los trabajos de aplicación de la heurística en las situaciones típicas en la enseñanza de la matemática.

En Cuba la utilización de los recursos heurísticos en las clases de Matemática encontraron eco en las enseñanzas de los prestigiosos educadores Ballester, S (1992), Albarrán, J (2004), Torres, P (2009) a partir de la cual se habla de la instrucción heurística de la Matemática.

En el programa director de la asignatura Matemática plantea la necesidad de buscar de manera heurística soluciones a los problemas, y dentro de los objetivos básicos se plantea que los docentes conduzcan a sus estudiantes a la aplicación consciente de la inducción y la deducción de métodos y medios para

el trabajo racional y de recursos heurísticos que inspiran la búsqueda de vías de solución, no obstante, no siempre están los docentes preparados para dar cumplimiento a estas exigencias, especialmente en las condiciones actuales en se desarrolla su formación.

Una posibilidad pudiera ser la adopción de una instrucción heurística de forma explícita, lo que significa que se adopte un estilo de trabajo en el cual se apliquen estos de manera consciente, planificada y racional, porque se ha constatado que muchos docentes de probada experiencia los utilizan de forma empírica.

La instrucción heurística según S. Ballester (1992) es la enseñanza consciente y planificada de reglas generales y especiales de la heurística para la solución de problemas, para lo cual es necesario que cuando se declaren por primera vez las mismas explícitamente; se destaquen de un modo claro y firme, y se recalque su importancia en clases posteriores hasta que los estudiantes las aprendan y las utilicen independientemente de forma generalizada, por lo que debe ejercitarse su uso en numerosas y variadas tareas.

El empleo de la instrucción heurística en la clase de Matemática, contribuye a lograr:

- La integración de los nuevos conocimientos, con los ya asimilados.
- La independencia cognoscitiva de los estudiantes.
- El desarrollo de operaciones intelectuales tale como: analizar, sintetizar, comparar, clasificar y de las formas de trabajo y de pensamiento fundamentales como: búsqueda de relaciones y dependencia, variación de condiciones y consideraciones de analogía.
- La formación de capacidades mentales, tales como: la intuición, productividad, la originalidad de las soluciones y la creatividad.

El objetivo de la heurística es investigar las reglas y métodos que conducen a los descubrimientos e incluye la elaboración de principios, reglas, estrategias y programas que facilitan la búsqueda de vías de solución a tareas de carácter no algorítmico de cualquier tipo y de cualquier dominio científico o práctico.

Para la enseñanza de la heurística debemos guiarnos por las directivas dadas en el capítulo 3 de Metodología Enseñanza de la Matemática 1, página 245:

1. Familiarizar previamente a los estudiantes con los procedimientos que deben aprender.
2. Seleccionar ejemplos apropiados para introducir los procedimientos.
3. Formular concisa y cabalmente, los procedimientos que los estudiantes deben aprender.

4. Hacer conscientes a los estudiantes de las ventajas que ofrece el empleo de los procedimientos heurísticos para propiciar la generalización de su uso.
5. Capacitar a los estudiantes, mediante su participación activa, para aplicar independientemente los heurísticos.
6. Aprovechar todos los momentos de la clase para que los estudiantes practiquen la utilización de las formas de pensamiento y de trabajo de la Matemática.

Para este trabajo tuvimos en cuenta la instrucción heurística dada por Sergio Ballester (1992), que tiene vigencia por su aplicación en los diferentes dominios cognitivos de la matemática fundamentalmente en la geometría plana.

En la puesta en práctica se relaciona sucesiones de indicaciones de carácter heurístico con la implementación de nuevos recursos didácticos que contribuyan a la actualización del proceso de enseñanza-aprendizaje en función del desarrollo tecnológico existente.

De esta manera se debe potenciar la incorporación de asistentes matemáticos, entre otros recursos que hagan más atractiva el aprendizaje de la geometría plana, además de que revelen una mayor cantidad de situaciones de aprendizaje para el ejercicio de la heurística.

Es importante que al utilizar algún software que les sirva de asistente matemático contribuya al desempeño de los estudiantes en dibujar figuras de análisis, establecer relaciones de dependencias, trabajar conjeturas matemáticas.

La intención es que todos sean capaces de llegar a estos niveles en que, además de su pensamiento, utilizan herramientas acordes al desarrollo tecnológico existente para la solución de los problemas.

#### *Principales formas del trabajo heurístico*

- Procedimientos heurísticos.
- Programas heurísticos.
- Medios auxiliares heurísticos.

#### *Procedimientos heurísticos: principios, reglas y estrategias*

Principios heurísticos constituyen las sugerencias para encontrar la idea de solución principal de resolución, posibilita determinar por tanto a la vez los medios y la vía de solución.

Entre los principios heurísticos generales se encuentran:

- Búsqueda de relaciones y dependencia: establece los nexos entre los contenidos matemáticos.

- Analogía: busca elementos semejantes o parecidos en la solución de la tarea, posibilitando la transferencia del saber adquirido a un nuevo contexto.
- Reducción: aunque tiene diferentes formas se explica la más usada en la escuela primaria que es la reducción a un problema conocido, consiste en aprovechar los conocimientos y habilidades adquiridos para la solución de una nueva tarea.

Principios heurísticos especiales se encuentran:

Movilidad: se utiliza en la enseñanza de la geometría y consiste en dejar fijos algunos elementos y móviles otros, en el proceso de búsqueda de relaciones.

Medir, probar y comparar: este proceder inductivo se emplea en la búsqueda de suposiciones.

Análisis de los casos particulares y límites: consiste en la realización de la separación de las características de determinados individuos de un mismo tipo (conceptos, teoremas, construcciones)

Generalización: se llega a inferencias, regularidades y conclusiones a partir de la inducción incompleta.

Otra forma del trabajo heurístico lo constituyen los medios auxiliares heurísticos que son elementos que apoyan el trabajo con los procedimientos heurísticos.

Las figuras, esquemas y gráficos en general son de gran valor heurístico. Ayudan a sintetizar el problema, son una manera diferente de reformular el mismo y contribuyen a su comprensión. Esto se debe, en parte, a que los gráficos son sistemas que expresan relaciones. Son modelos del problema. Facilitan la búsqueda de relaciones pues las ilustran siendo así materializaciones de la operación mental más importante: la mediación.

Los gráficos permiten la visualización de conceptos y juicios que de otra forma permanecen ocultos e imperceptibles al pensamiento.

Siempre se deben buscar relaciones: no tienen que ser necesariamente teoremas. De especial valor heurístico es buscar relaciones conocidas como teoremas con premisas o tesis similares a lo dado o lo buscado.

Reglas heurísticas: tienen el carácter de impulsos generales para determinados eslabones del proceso de búsqueda o solución de un problema. Todos los impulsos no constituyen reglas heurísticas.

Los impulsos pueden ofrecerse como órdenes o en forma interrogativa.

Tipología de impulsos (J. Albarrán, 2004)

1. Impulsos de orientación: se utiliza para evitar la tendencia ejecutora en la realización del ejercicio.

2. Impulsos para la ejecución: se utiliza durante el proceso de comprensión o búsqueda de la vía de solución.
3. Impulsos para el control: se emplean para verificar que las acciones realizadas son las correctas.

Las ayudas del docente deben ser lo suficientemente exigente como para que los estudiantes tomen conciencia de que a pesar de los avances el problema (asociado a la construcción de los nuevos conocimientos) no ha sido definitivamente resuelto pero tampoco tan exigentes que se alejen considerablemente del nivel de desarrollo real (es decir, que no vayan dirigidas hacia las zonas de desarrollo próximo)

Los impulsos se corresponden con formas de trabajo, que son externas; mientras que los autoimpulsos se corresponden con formas de pensamiento que son internos, psíquicos.

Es importante dar el primer impulso en la forma generalizada. Por ejemplo: Esclarece los conceptos. Si este impulso no surte efecto, entonces el impulso puede ser: lee el problema nuevamente y precisa cuáles son los conceptos inherentes al problema. Sean estos bisectriz y paralelogramo. Nuevo impulso: ¿Qué es una bisectriz? ¿Qué es un paralelogramo? Impulso: Construye esas figuras.

Nótese que el impulso inicial debe ser general, portador de una forma de trabajo y que de ser necesario se pasa de lo general a lo particular y por último a lo específico. El impulso varía su contenido estructural de lo general a lo singular, y en su forma por la intensidad que se hace más fuerte.

No es lo mismo decir: construye una figura, un esquema; que preguntar: de qué figura se trata; o construye el triángulo equilátero de que te están hablando. Esto es importante porque nos guía durante la conversación heurística para la variación del impulso tanto en su contenido como en su forma.

Para el desarrollo de estas acciones se requiere que el docente indique al estudiante cómo proceder, para ello deberá enseñar la utilización de determinados criterios o exigencias que le permitan conocer en que se aproxima a lo esperado, efectuando los ajustes pertinentes tanto al resultado como a los procedimientos empleados.

Estrategias heurísticas: constituyen la vía principal para buscar los medios matemáticos (definiciones, teoremas, relaciones) que se necesitan para solucionar un problema.

Existen dos estrategias heurísticas:

- Trabajo hacia adelante o método sintético: se parten de las condiciones previas o elementos dados (premisas) y se realiza inferencias que permiten acercarse a lo que hay que encontrar, lo buscado (la tesis en el caso de teoremas).

- Trabajo hacia atrás o análisis creciente: se parte de lo que hay que buscar o probar (la tesis en el caso trabajo hacia adelante o método sintético de teoremas) y se realizan inferencias que permitan un acercamiento a lo dado para encontrar los medios matemáticos a utilizar.

Programas heurísticos generales: son sucesiones de indicaciones que orientan o guían el proceso de conducción y ejecución del proceso enseñanza aprendizaje, llevan implícita la utilización de principios, reglas y estrategias.

Es aplicable al proceso de formación de un concepto, a la obtención de un procedimiento, a la búsqueda de una proposición, a la demostración de un teorema, a la búsqueda de la vía para realizar una construcción, a ejercicios geométricos de cálculo y demostración, entre otros.

Programa heurístico general según müller (1986)

*Fases fundamentales. - Tareas principales*

1. Orientación hacia el problema. - Comprensión del problema.
2. Trabajo en el problema. - Búsqueda de la idea de la solución.
3. Solución del problema. -Ejecución del plan vislumbrado.
4. Evaluación de la solución y de la vía. - Comprobación de la solución.

*Reflexión sobre métodos empleados*

La sugerencia didáctica que se emplean en la resolución de ejercicios geométricos consiste en una sucesión de indicaciones con carácter heurístico que los denotamos con la letra mayúscula H y un subíndice para enumerarlos en el orden que se aplica en los ejercicios. Estos impulsos tienen carácter de sistema y poseen las características de ser generales y especiales en su implementación por parte del estudiante.

Con esta propuesta se potencian acciones, y operaciones concretas en la etapa verbal, para que los estudiantes interactúen entre ellos y puedan transitar el camino del pensamiento que les permite su entendimiento de los conceptos geométricos a las palabras que deben ofrecer para explicar los rasgos y propiedades a sus compañeros o al profesor, como uno de los factores determinantes en el desarrollo individual de cada uno de ellos, de manera que les permita internalizar el concepto y aplicarlo a lo largo de su vida personal como ser humano que enfrenta problemas cotidianos, y profesional como maestro de matemáticas en la escuela primaria.

Se condiciona en la base del aprendizaje de la Geometría plana no la simple observación o escuchar la información sobre el tema, sino que las relaciones, enlaces y procedimientos entre los elementos que componen el contenido del concepto se convierten en una condición necesaria para la acción mental.

Se garantiza un proceso didáctico que promueva el ejercicio de la comunicación, la interacción y la crítica sobre las propias soluciones, como condición necesaria para un aprendizaje desarrollador.

Facilitar el intercambio de ideas entre los estudiantes, garantizando que todos tengan la posibilidad de expresar sus ideas como vías para la atención a la diversidad.

Durante el trabajo en los ejercicios se realiza un análisis de la situación planteada para aclarar las condiciones que se dan y las exigencias que debe cumplir el procedimiento a elaborar, una vez lograda esta precisión se trabaja en la determinación de la sucesión de indicaciones con carácter heurístico para lo cual es preciso emplear los procedimientos heurísticos, en específico las reglas heurísticas que son las preguntas y sugerencias a los estudiantes que estimulan las operaciones y los procesos lógicos del pensamiento.

En este proceso los estudiantes deben comprender el contenido del procedimiento y formulen las indicaciones de manera que lo puedan ejecutar. Para el logro de los objetivos y para contribuir al desarrollo de habilidades en la resolución de ejercicios de demostración y cálculo fundamentado a través de la instrucción heurística se hizo necesario elaborar una propuesta didáctica que tiene el propósito de instruir heurísticamente a los estudiantes para la aplicación consciente de estos recursos en la resolución de ejercicios cálculo geométrico y de demostración. La preparación del estudiante se dividió en dos etapas, una primera teórico-práctica y otra práctica.

La etapa teórico-práctica se dedicó a instruir a los estudiantes sobre los recursos heurísticos, es decir, en determinar con ellos: ¿qué son los recursos heurísticos?, ¿cuáles son? y ¿Cómo utilizarlos en la búsqueda de la vía de solución de ejercicios con carácter no algorítmico?

La reactivación de los contenidos geométricos que se iban a utilizar en cada clase se hizo de una forma implícita. La misma se realizó en dos momentos: En el estudio individual de la clase anterior se orientaba estudiar por el texto el contenido geométrico y propiedades que correspondía a la clase, y en la propia clase cuando se planteaba la resolución de un ejercicio, al aplicar la sucesión con carácter heurístico se hace la reflexión sobre los medios matemáticos relacionados con lo dado (premisa) o con lo buscado (tesis).

De esta forma, en la actualización y sistematización de la geometría se conocen desde el principio los teoremas y conceptos que la conforman, estos deben ser utilizados como herramientas de trabajo para contribuir al desarrollo del pensamiento lógico y la capacidad de aplicar los conocimientos matemáticos.

#### *Sucesiones de indicaciones con carácter heurístico*

1. (H<sub>1</sub>) Dibujar una figura, un esquema que satisfagan las condiciones dadas.
2. (H<sub>2</sub>) Identificar los conceptos y sustituir los mismos por sus definiciones y propiedades, escogiendo la notación adecuada y el lenguaje apropiado.
3. (H<sub>3</sub>) Precisar lo dado y lo buscado.
4. (H<sub>4</sub>) Buscar relaciones entre lo dado y lo buscado.

5. H<sub>5</sub>) Escoger la notación adecuada y el lenguaje apropiado.
6. (H<sub>6</sub>) Experimentar (buscar un problema análogo o reducir a un problema ya resuelto, mover, medir, comparar, generalizar, hacer inducciones).
7. 7.- (H<sub>7</sub>) Representar la solución en forma lógicamente coherente.
8. 8.- (H<sub>8</sub>) Explicar, debatir la solución.

Las actividades concebidas en este trabajo presentan las características siguientes:

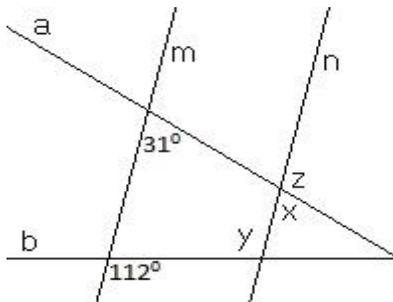
- Personalizadas: responden a las peculiaridades de los estudiantes y a sus características individuales. Se planifican a partir de sus necesidades intereses y motivos para que se conviertan en comunicadores eficientes.
- Desarrolladoras: desde posiciones reflexivas exigen la búsqueda del conocimiento, que estimulen y propician el desarrollo del pensamiento y la independencia cognoscitiva del estudiante.
- Dinámicas: son abiertas, flexibles, sujetas a la confirmación o rediseño, va indicando el proceso de su puesta en práctica sobre la base del conocimiento objetivo de la realidad pedagógica en que se incide en un acercamiento constante a la realidad para alcanzar los objetivos previstos.
- Variadas: porque se tiene en cuenta como premisa importante la formación de representaciones, ideas y puntos de vista de los estudiantes, contribuyen al enriquecimiento de estos a través de diferentes formas organizativas y la realización de actividades variadas que garantizan la motivación hacia la misma.
- Flexibles: permite atender las diferencias individuales en el tránsito del nivel logrado al que se aspira a partir del diagnóstico.
- Instructivas y educativas: de forma premeditada permiten potenciar lo educativo que se deriva de la parte cognitiva.
- Ser motivadoras: las actividades deben influir en la creatividad de los estudiantes, motivarlos e interesarlos por cada tarea que se le propone. En momentos determinados deben ser capaces de tomar decisiones, para tratar de resolver situaciones que se le presenten y lograr transformaciones de las mismas.
- Interactivas: deben propiciar el debate continuo entre todos los implicados en ella: el estudiante y el profesor y entre los propios estudiantes y otros agentes participantes.
- Sistemáticas: como forma de desarrollar hábitos, habilidades y capacidades, las actividades deben favorecer que se sistematicen los contenidos tratados, de este modo se pueden afianzar con mayor durabilidad en los estudiantes.

## Ejemplo 1: Ángulos entre rectas

Objetivo: Calcular amplitudes de ángulos en figuras planas formadas por rectas secantes y paralelas aplicando las reglas heurísticas generales.

En la figura  $m \parallel n$ ,  $a$  y  $b$  secantes.

Calcula los ángulos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .



## Sugerencias didácticas

H<sub>2</sub> Esclarecer los conceptos y sustituir los mismos por sus características.

-Identifica los conceptos que se infieren desde los datos y la figura dada.

a) Rectas paralelas ( $m$  y  $n$ )

b) Rectas secantes ( $a$  y  $b$ )

c) Pares de ángulos en rectas diferentes que se cortan en un punto.

-Pares de ángulos adyacentes.

-Pares de ángulos opuestos por el vértice.

d) Pares de ángulos entre rectas paralelas cortadas por una o más secantes. (Correspondientes, alternos y conjugados)

H<sub>3</sub> Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente.

-Teorema de los ángulos alternos, correspondientes y conjugados.

-Teoremas de los ángulos adyacentes.

-Teoremas de la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera.

H<sub>4</sub> Precisar lo dado y lo buscado.

Dado: Los ángulos de  $31^\circ$  y  $112^\circ$

Buscado: Los ángulos  $x$ ,  $y$ ,  $z$

H<sub>5</sub> Buscar relaciones entre lo dado y lo buscado y entre lo buscado.

Relación entre lo dado y buscado.

Se sugiere que:

Considere solo una secante y las paralelas dadas.

Paralelas  $m$  y  $n$ ; Secante  $a$

Fija el ángulo de  $31^\circ$  y relaciónalo con los demás que aparecen en la secante.

Se obtiene  $x = 31^\circ$  por correspondientes entre paralelas.

Se obtiene que  $31^\circ$  no tenga relación con el ángulo  $z$ .

Considere solo una secante y las paralelas dadas.

Paralelas  $m$  y  $n$ ; Secante  $b$ .

Fija el ángulo  $112^\circ$  y lo relaciona con los demás que aparecen en la secante.

$Y = 112^\circ$  por alternos entre paralelas.

$112^\circ$  y el ángulo  $z$  no tienen relación.

Relaciona los ángulos buscados.

¿Qué relación hay entre los ángulos  $y$  y  $z$ ? no hay

¿Qué relación hay entre los ángulos  $x$  y  $z$ ?

Ángulos adyacentes.

$$X + z = 180^\circ$$

$$31^\circ + z = 180^\circ$$

$$Z = 149^\circ$$

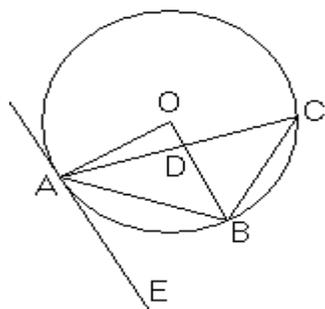
Ejemplo 2

Título: Ángulos en una circunferencia

Objetivo: Calcular amplitudes de ángulos en figuras planas aplicando las reglas heurísticas generales.

En la figura,  $\angle ABC$  está inscrito en la circunferencia de centro  $O$ ,  $\angle ACB = 35^\circ$ ,  $OB \perp AC$ ,  $AE$  tangente en  $A$ .

a) Calcular  $\angle OAD$  y  $\angle BAE$ .



Sugerencias didácticas

H<sub>2</sub> Esclarecer los conceptos y sustituir los mismos por sus características.

- Circunferencia y elementos de una circunferencia.

- Ángulo central en una circunferencia.
- Ángulo inscrito en una circunferencia.
- Ángulo seminscrito en una circunferencia.
- Recta tangente a la circunferencia.
- Rectas perpendiculares.
- Identifica y denota los ángulos inscritos, ángulos centrales y ángulos seminscritos que aparecen en la figura.

H<sub>3</sub> Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente.

Teorema relativo a la amplitud del ángulo central y su arco correspondiente, a la amplitud de un ángulo inscrito y arco correspondiente, un ángulo seminscrito y su arco correspondiente.

H<sub>4</sub> Precisar lo dado y lo buscado.

Dado:  $\angle ABC$  ángulo inscrito en la circunferencia.

$$\angle ACB = 35^{\circ}$$

$OB \perp AC$ , AE tangente en A.

Buscado:  $\angle OAD$  ángulo interior del triángulo AOD

y  $\angle BAE$  ángulo seminscrito en la circunferencia

H<sub>5</sub> Buscar relaciones entre lo dado y lo buscado y entre lo buscado.

Buscar relaciones entre lo dado y lo buscado.

$\angle ACB = 35^{\circ}$  y el  $\angle BAE$  tienen el mismo arco correspondiente ( AB) en la circunferencia

Entonces  $\angle BAE = 35^{\circ}$

El  $\angle ACB$  no tiene relación con el otro ángulo buscado  $\angle OAD$ .

Es necesario buscar ángulos auxiliares para determinar ángulo  $\angle OAD$

Si  $OB \perp AC$  entonces el triángulo OAD es rectángulo en D.

Es necesario calcular el ángulo central AOB para relacionarlo con el buscado.

Buscar relaciones entre lo buscado.

Aplicando los teoremas relativos a los ángulos centrales e inscritos en su arco correspondiente.

¿Qué relación hay entre el ángulo AOB y el ángulo ACB?

Concluir que:  $\angle AOB = 2\angle ACB$

$$\angle AOB = 2 \cdot 35^{\circ}$$

$$\angle AOB = 70^{\circ}$$

¿Qué relación existe entre los ángulos  $\angle AOB$  y  $\angle OAD$  en el triángulo rectángulo ADO?

Concluir que son complementarios

Luego el  $\angle AOB + \angle OAD = 90^\circ$

$$\angle OAD = 90^\circ - 70^\circ$$

$$\angle OAD = 20^\circ$$

Ejemplo 3

Título: Demostración con ayuda de asistentes matemáticos

Objetivo: Demostrar que las bisectrices de dos ángulos adyacentes forman un ángulo recto.

Demuestra que si dos ángulos son adyacentes, sus bisectrices son perpendiculares.

Se entrega a los estudiantes una hoja de trabajo con las siguientes actividades a desarrollar por ellos.

- Traza las bisectrices de los ángulos adyacentes en cada figura dada.
- Con ayuda del semicírculo mide la amplitud del ángulo formado por las bisectrices.
- Completa la tabla con las mediciones que realizaste.
- ¿A qué conclusión puede llegar con los datos obtenidos?
- Podemos generalizar que siempre se forma un ángulo recto.

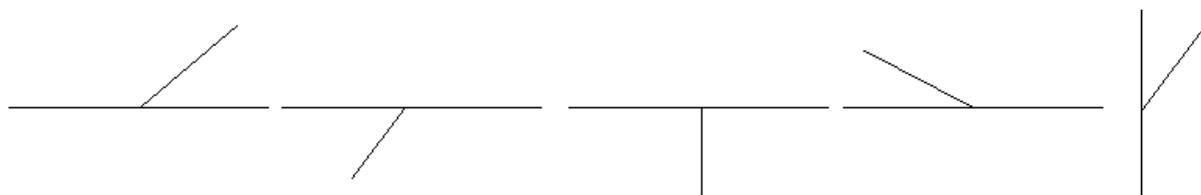


Figura	I	II	III	IV	V
--------	---	----	-----	----	---

amplitud del ángulo

A

Otra vía de solución.

H<sub>1</sub> dibujar una figura que satisfaga las condiciones dadas con el asistente matemático “El Geogebra” o “El Geómetra”.

Trazar dos ángulos adyacentes y sus bisectrices respectivamente.

Denotar los vértices y ángulos formados.

H<sub>2</sub> Esclarecer los conceptos y sustituir los mismos por sus características.

- ángulos adyacentes.
- bisectriz de un ángulo.
- ángulo recto.

H<sub>3</sub> Recordar el rema del dominio matemático correspondiente.

Teorema relativo a los ángulos adyacentes.

H<sub>4</sub> Precisar lo dado y lo buscado

Dado: ángulos adyacentes y bisectrices del ángulo.

Buscado Probar que las bisectrices forman un ángulo recto.

Buscar relaciones entre lo dado y lo buscado

A través de la movilidad llegar a la conjetura, ¿siempre que se trazan las bisectrices a dos ángulos adyacentes se obtiene un ángulo recto?

Por último se les pide a los estudiantes que lo demuestren por la vía analítica.

Si  $\alpha$  y  $\beta$  son adyacentes entonces  $\alpha + \beta = 180^\circ$

$\alpha + \beta = 180^\circ$  dividiendo por 2 resulta que

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{180^\circ}{2}$$

Luego  $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$

## CONCLUSIONES

Las actividades didácticas se diseñaron con el objetivo de contribuir a la instrucción heurística en los estudiantes centrado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática que garantiza una atención específica al desarrollo de habilidades para la resolución de ejercicios geométricos.

La puesta en práctica de las actividades didácticas permitió apreciar los resultados obtenidos, evidenciados en los cambios cualitativos valorados en los estudiantes a partir de la instrucción heurística en aras de resolver ejercicios de la geometría plana.

## BIBLIOGRAFÍA

Albarrán, J. (2004) Didáctica para enseñanza de la Matemática en la Escuela Primaria. Ed. Pueblo y Educación. La Habana.

Almeida, B. y otros. (1990). Los procedimientos heurísticos en la Enseñanza de la Matemática. Folleto. La Habana.

Ballester, S. y otros. (1992). Metodología de la Enseñanza de la Matemática. t. 1. Ed. Pueblo y Educación. La Habana.

Campistrous, L. (1991). Sobre los procedimientos lógicos del pensamiento. O. M. Grado 12°. La Habana.

Cruz, A. (2009). La instrucción heurística en la enseñanza de la geometría Tesis en opción al título de Máster en Didáctica de la Matemática. Universidad de Ciencias Pedagógicas “José de la Luz y Caballero”, Holguín.

Galperin, P. Ya. (1986). Sobre el método de formación por etapas de las acciones intelectuales. En Antología de la Psicología Pedagógica y de las edades. Ed. Pueblo y Educación. La Habana.

Martín, J. (2011). Una alternativa metodológica para la introducción de los ejercicios de nuevo tipo en la enseñanza de la Matemática. Tesis presentada en opción al Título Académico de Máster en Didáctica de la Matemática. I.S.P.E.J.V, La Habana.

Molina, M. (2001). Sobre la técnica de preguntar y la formulación de impulsos en las clases de Matemática de los preuniversitarios habaneros. Ponencia. Pedagogía Internacional. La Habana.

Müller, H. (1986) Formas de trabajo heurístico en la enseñanza de la Matemática. La Habana.

Müller, H. (1995) Los procedimientos heurísticos en la enseñanza de la Matemática. Folleto.

Santos H. (2015) Actividades didácticas para contribuir al aprendizaje de la geometría plana desde la asignatura matemática II en la formación inicial del maestro primario. Tesis presentada en opción al Título Académico de Máster en Educación, Universidad de Ciencias Pedagógicas “Pepito Tey”. Las Tunas.

Torres, P. y otros. (1998). Tendencias iberoamericanas en la educación matemática. Folleto. Departamento de Matemática y Computación. Facultad de Ciencias. ISP EJV.