Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas


# Estudio de la contribución de flujo elíptico $v_2$ para sistemas pequeños en colisiones de protón-protón a las energías de LHC en el modelo SPM

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Física**

por


Omar Vázquez Rueda


asesorado por


Dra. Irais Bautista Guzmán
Dr. Arturo Fernández Téllez



Puebla Pue.
17 de junio de 2015

# Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

## Facultad de Ciencias Físico Matemáticas


# Estudio de la contribución de flujo elíptico $v_2$ para sistemas pequeños en colisiones de protón-protón a las energías de LHC en el modelo SPM

Tesis presentada al

**Colegio de Física**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Licenciado en Física**

por


Omar Vázquez Rueda


asesorado por


Dra. Irais Bautista Guzmán
Dr. Arturo Fernández Téllez



Puebla Pue.
17 de junio de 2015

**Título:** Estudio de la contribución de flujo elíptico $v_2$ para sistemas pequeños en colisiones de protón-protón a las energías de LHC en el modelo SPM
**Alumno:**Omar Vázquez Rueda

COMITÉ

EEE
Presidente

BBB
Secretario

CCC
Vocal

Vocal

Dra. Irais Bautista Guzmán
Dr. Arturo Fernández Téllez
Asesor

# Índice general

# Agradecimientos

¡Muchas gracias a todos!

# Resumen

El presente manuscrito es el resultado del estudio enmarcado en la fenomenología de colisiones de iones pesados en el Modelo de Percolación de Cuerdas de Color (SPM) que estudia la interacción y los efectos colectivos que ocurren en la región de bajo momento transverso ($p_T$) e intermedio ($p_T$) en las colisiones hadrónicas ultrarrelativistas. Dado que en este modelo se describen los efectos colectivos que llevan a la multiproducción de partículas en colisiones Núcleo-Núcleo (N-N) exitosamente, en este trabajo se utiliza el modelo (SPM) para el estudio de la contribución de flujo elíptico ($v_2$) para sistemas pequeños como lo son las colisiones de protón-protón, esto en búsqueda de una posible señal del cambio de fase para los eventos de alta multiplicidad en estos sistemas pequeños es decir la posible formación del medio Quark Gluon Plasma.

# Capítulo 1

# Introducción

## 1.1. Motivación

Los experimentos de colisiones inelásticas de electrones con protones mostraron que los nucleones poseían estructura interna, y que están formados por quarks y gluones, además confirmarón que la teoría que describía estas evidencias es la Cromodinámica Cuántica (QCD). La cual llevo a la conclusión de que los quarks y gluones libres no podían ser observados en el laboratorio (el llamado vacío físico) sino que se encontraban confinados por las interacciones fuertes que los mantenía unidos entre si. Sin embargo en 1974 T. D. Lee y G. C. Wick propusieron la idea de explorar la materia en el límite de densidades muy altas de materia o energía sobre un volumen relativamente grande donde se describía la posibilidad de crear un estado donde el vacío fuese inestable respecto a otro vacío caracterizado por el valor de expectación del campo escalar, obteniendo estados metaestables de dicha materia y de esta manera restaurar temporalmente la simetrías rotas por el vacío físico y crear el estado de (quark gluon plasma) QGP [1]. Posteriormente estudios de QCD en la retícula predijeron el cambio de fase a (QGP) entre los hadrones y partones para una temperatura crítica de $\sim 170$ MeV [2].
Para explorar este nuevo régimen de la materia se crearon grandes experimentos en los que se estudian las colisiones de iones pesados a energías ultrarelativistas como SPS, RHIC y LHC.
Los resultados experimentales encontrados se explican de forma natural al considerar la formación de un medio de QCD caliente y denso fuertemente interactuante que se comporta de manera similar a un líquido perfecto el llamado Quark Gluon Plasma fuertemente interactuante (sQGP) [3].
Los procesos que se estudian en estos experimentos tienen su sección eficaz dominada por los procesos de bajo momento transveso lo que lleva a un valor de la constante de acoplamiento muy grande para aplicar la teoría de perturbaciones, y por ello se requiere de una teoría no perturbativa para estudiar estos procesos.
Existen varios modelos no perturbativos en los que se estudia la interacción y los efectos colectivos que ocurren en la region de bajo $p_T$ e intermedio $p_T$ uno de ellos es el Modelo de Percolación de Cuerdas de Color (SPM). En el Modelo SPM se describen los efectos colectivos que llevan a la multiproducción de partículas en colisiones de protón-protón (p-p), y Núcleo-Núcleo (N-N), siendo exitoso en describir las diferentes señales observadas en los datos experimentales de RHIC y LHC a diferentes energías y diferentes especies de núcleos colisionantes [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Los resultados recientes de eventos de alta multiplicidad en colisiones de sistemas pequeños como lo son p-Pb y p-p han mostrado que existen sorprendentemente efectos colectivos lo cual podría explicarse por el modelo de percolación de cuerdas de color. En este trabajo se utilizará este modelo (SPM) para describir la observable flujo elíptico la cual es una señal de la formación del QGP.

En los siguientes capítulos se introducen de manera básica los conceptos relacionados de Cromodinámica Cuántica, formación del Quark Gluoón Plasma, modelos de cuerdas en colisiones hadrónicas para llegar a una breve descripción del modelo de Percolación de cuerdas de color y posteriormente presentar los resultados del flujo elíptico obtenidos.

## 1.2. Aspectos generales del Modelo Estándar

A pesar de los argumentos que existen para creer que el Modelo Estándar de la Física de Partículas (SM) es el límite de bajas energías de una teoría más fundamental, éste ha sido probado exitosamente a un nivel impresionante de exactitud y es la teoría que en la actualidad nos provee de descripciones y entendimiento de la fenomenología de la física de partículas [**?**].

Los ingredientes principales en el modelo estándar se muestra en la Figura 1.1. Las partículas involucradas son de dos tipos; partículas materiales y partículas mediadoras de las interacciones. Las partículas materiales son los componentes fundamentales de la materia, se clasifican en dos: quarks y leptones (que en conjunto se les conoce como fermiones) que interaccionan por medio de sus mediadores denominados bosones. Ambos tipos cuentan con propiedades intrínsecas tales como, espín, masa y carga, en el caso de los bosones tienen masa cero. El contenido fermiónico (espín $= \frac{1}{2}$) se organiza en tres familias. Las familias más pesadas son inestables y decaen a otras que son estables, las cuales son las componentes fundamentales de la materia ordinaria. Los cuatro fermiones en cada familia (3 columnas de izquierda a derecha en Figura 1.1) son distinguidos por su carga frente a las interacciones fuerte y electromagnética. Dos de ellos son quarks, los cuales son afectados por la interacción fuerte y electromagnética y dos que son leptones y solamente son afectados por la interacción electromagnética. Ambos quarks poseen carga eléctrica 2/3 (quark “arriba”) y -1/3 (quark “abajo”) respectivamente y los dos leptones poseen carga -1 con excepción de los neutrinos que no poseen, en unidades en las cuales la carga del electrón es -1. Los neutrinos son un tipo peculiar de partículas: son neutros ante las interaciones fuerte y electromagnética aunque son susceptibles a la interacción débil y son al menos seis órdenes de magnitud más ligeros que cualquier otro fermión del modelo estándar. Las masas de los fermiones ocupan un rango desde los sub-eV (masa de los neutrinos) hasta órdenes de $1.7 \times 10^2$ GeV (masa de quark top).

Las interacciones descritas en el modelo estándar se asocian con el intercambio de bosones vectoriales (espín $= 1$). El fotón es el bosón que media la interacción electromagnética, de manera análoga los gluones son los mediadores de la interacción fuerte y los bosones $Z$ y $W$ bosones masivos participan en las interacciones débiles y es esta la razón por la cual las interacciones sean débiles a bajas energías (son suprimidas en el siguiente orden, $E/M_{Z,W}$, donde $E$ es la energía del proceso en cuenta). A pesar de su baja intensidad, da lugar a distintas señales por su peculiares consecuencias: violan paridad $P$, conjugación de carga $C$, su combinación $CP$, reversión temporal $T$ las cuales son simetrías de la interacción electromagnética y fuerte. En particular, el dacaimiento de familias pesadas a otra más ligeras es debido a las interacciones débiles [13].

La descripción previamente proporcionada se da a escalas relativamente bajas de energía y su conocimiento se tenía incluso antes de la invención del modelo estándar. La descripción dada por el modelo estándar es necesaria cuando los procesos considerados involucran energías más altas. La transición del régimen de baja energía y el régimen del modelo estándar toma lugar al rededor de la escala electrodébil ($\approx 173$ GeV). Por arriba de este escala, las interacciones electromagnética y débil pasan a ser indistinguibles y son unificadas en la interacción “electrodébil”.

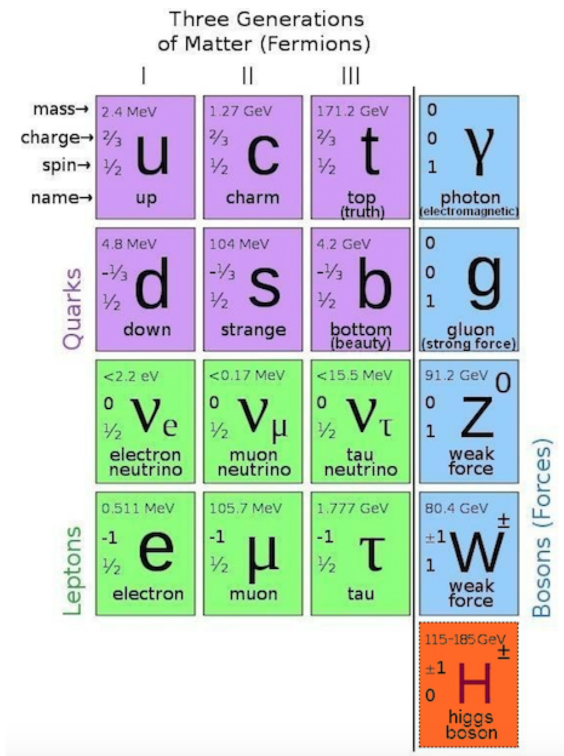



Figura 1.1: Partículas fundamentales comprendidas dentro del modelo estándar.

## 1.3. QCD

Una de las cuatro fuerzas fundamentales es la llamada interacción fuerte es el mecanismo responsable de la fuerza nuclear fuerte (Figura 1.2), la cual esta descrita por la teoría de la Cromodinámica Cuántica (QCD).

| FORCE | Mediating Particle | Range | Strength |
|---|---|---|---|
| **Gravity** | Graviton | Long (1/r$^2$) | $10^{-38}$ |
| **Weak** | W$^+$, W$^-$, Z bosons | Short (≈ 0.001 fm) | $10^{-9}$ |
| **Electromagnetism** | Photon | Long (1/r$^2$) | 1/137 |
| **Strong** | Gluon | Short (≈ 1 fm) | 1 |

Figura 1.2: Fuerzas fundamentales junto con sus respectivas partículas portadoras.

Cromodinámica Cuántica (QCD) es la teoría que explica las interacciones entre quarks y que son mediadas a través del intercambio de gluones. QCD es una teoría cuántica de campos de teoría de gauge no abelianas donde gluones (bosones) son intercambiados entre partículas de color. En contraste con QED donde la intensidad de la fuerza electromagnética es establecida por la constante de acoplamiento [14]

$$g_e = \sqrt{4\pi\alpha} \tag{1.1}$$

en unidades apropiadas, $g_e$ es la carga fundamental (la carga del positrón) en Cromodinámica la intensidad de la fuerza fuerte es establecida por la constante de acoplamiento fuerte

$$g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s} \tag{1.2}$$

la cual puede se puede ver como la unidad funfamental de color. Quarks poseen además de carga eléctrica, carga de color la cual puede ser "roja" ($r$), "azúl" ($b$) y "verde" ($g$). Así, especificar el estado de un quark en QCD requiere no sólo del espinor de Dirac $u^{(s)}(p)$ el cual lleva la información de su momento y espín si no también un vector columna $c$, que proporcione el tipo de color:

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{para rojo,} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{para azúl,} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{para verde}$$

Normalmente la carga de color asociada a un quark cambia en un vértice quark-gluón y la diferencia de color se lleva en el gluón, Cada gluón porta una unidad de color y una de anticolor,

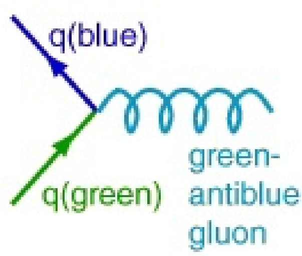



Figura 1.3: Vértice quark-gluón donde un quark verde cambia a uno azul emitiendo un gluón rojo-antiazúl.

por lo que sería consecuente suponer que deberían existir nueve especies de gluones: $r\bar{r}$, $r\bar{b}$, $r\bar{g}$, $b\bar{r}$, $b\bar{b}$, $b\bar{g}$, $g\bar{r}$, $g\bar{b}$, $g\bar{g}$ pero una teoría que incorpore nueve gluones describiría un mundo distinto en el que vivimos. En términos de la simetría de color de $SU(3)$, estos nueve estados constituyen un "octete de color"

$$\begin{aligned} |1\rangle &= (r\bar{b} + b\bar{r})/\sqrt{2} & |5\rangle &= -i(r\bar{g} - g\bar{r})/\sqrt{2} \\ |2\rangle &= -i(r\bar{b} - b\bar{r})/\sqrt{2} & |6\rangle &= (b\bar{g} + g\bar{b})/\sqrt{2} \\ |3\rangle &= (r\bar{r} - b\bar{b})/\sqrt{2} & |7\rangle &= -i(b\bar{g} - g\bar{b})/\sqrt{2} \\ |4\rangle &= (r\bar{g} + g\bar{r})/\sqrt{2} & |8\rangle &= (r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g})\sqrt{6} \end{aligned} \tag{1.3}$$

y un "singlete de color"

$$|9\rangle = (r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g})\sqrt{3} \tag{1.4}$$

Si el estado singlete existiese sería tan común y visible como el fotón. Confinamiento de quarks requiere que todas las partículas que existen en la naturaleza sean singletes de color, y esto "explicaría" porque los gluones del octete nunca aparecen como partículas libres[1]. Pero $|9\rangle$ (1.4) es un singlete de color y si existe como un mediador, debería también existir como partícula libre. Además de que podría ser intercambiado entre dos singletes de color (portón y neutrón, por ejemplo), dando lugar a un fuerza de largo alcance y de acoplamiento fuerte[2], pero en realidad se

[1]Nótese que hay un distinción entre "estados sin color" y "singlete de color". Gluones $|3\rangle$ y $|8\rangle$ son estados sin color en el sentido que el monto neto de color es cero mas no son singletes de color. La situación es análoga al caso del espín. Podemos tener un estado de $S_z = 0$ mas no garantiza que se tenga $S = 0$ (aunque ciertamente espín 0 implica $s_z = 0$, de la misma manera, un singlete de color es un estado sin color.)

[2]Debido a que los gluones no tienen masa, median una fuerza de infinito alcance. Sin embargo, el confinamiento y la ausencia de un singlete de gluón nos oculta este fenómeno. Un estados singlete (como el protón) puede solo emitir y absorber otro estado singlete (como un pión), así gluones no puede ser intercambiados entre protones y neutrones. Es por eso que la fuerza que "obersvamos" es de coroto alcance

sabe que la fuerza fuerte es de muy coroto alcance [14]

Al igual que el fotón, gluones son partículas de espín 1 y que no poseen masa; son representados por un vector de polarización , $\epsilon^\mu$, el cual es ortogonal al cuadrimomento del gluón, $p$:

$$\epsilon^\mu p_\mu = 0 \tag{1.5}$$

Se adopta la norma de Coulomb:

$$\epsilon^0 = 0, \qquad \text{tal que} \qquad \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{p} = 0 \tag{1.6}$$

Para describir el estado de color de un gluón, requerimos de un un vector columna adicional, $a$:

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{para} |1\rangle, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{para} |7\rangle, ... \tag{1.7}$$

[Los elementos de $a$ con superíndices griegos ($a^\alpha$); $\alpha, \beta, \gamma, ...$ toman valores de 1 al 8 sobre los estados de color de los gluones] Debido a que los gluones por sí mismo poseen color (a diferencia del fotón que son eléctricamente neutro), se pueden acoplar directamente con otros gluones. De hecho existen vértices donde se acoplan 3 o cuatro gluones:

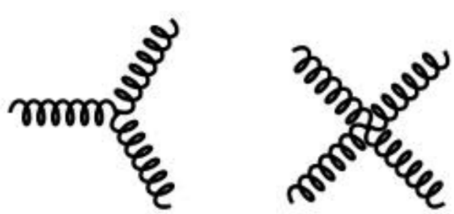


Figura 1.4: Acoplamiento directo entre 3 gluones (izquierdo) y 4 gluones (derecho).

Introduzcamos las matrices de Gell - Mann "matrices - $\lambda$ " las cuales son los generados del grupo $SU(3)$ (grupo unitario especial en tres dimensiones, cuyos elementos son el conjunto de matrices unitarias $3 \times 3$ con determinante igual a la unidad) y forman una base para el álgebra de Lie asociada, $\boldsymbol{su(3)}$, de manera análoga a como lo hacen las matrices de Pauli para el caso de $SU(2)$. Estas matrices puede operar entre ellas (representando combinaciones de sucesivas transformaciones de gauge) y sobre conjuntos de trivectores, los cuales representan a quarks en el espacio de color. Estas ocho matrices puede ser vistas como representaciones de los gluones en el espacio de color (más precisamente, como transformaciones de gauge llevadas acabo por gluones). En este espacio de color matricial hay un total ocho direcciones independientes que corresponden a los ocho diferentes generadores de $SU(3)$ en comparación con el único de QED.

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda^8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

El "paréntesis de Lie" el cual está definido en álgebra de Lie de $\boldsymbol{su(3)}$ corresponde simplemeten a la operación *conmutador* entre las matrices $\boldsymbol{su(3)}$, esta operación definen las "constates de estructura" ($f^{\alpha\beta\gamma}$) del grupo $SU(3)$:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c \tag{1.9}$$

Suma sobre $c$ de 1 a 8 se implica mediante la repetición de índice.

### 1.3.1. Lagrangiano de QCD

La densidad lagrangiana de QCD clásica la cual describe las interacciones entre quarks con espín de masa $m$ con gluones de masa igual a cero está dada por

$$\mathcal{L} = \bar{q}^\alpha(i(\gamma^\mu D_\mu)_{\alpha\beta} - m\delta_{\alpha\beta})q^\beta - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a \tag{1.10}$$

Los campos de los quarks (gluones) $q^\alpha$ ($A^a_\mu$) pertenecen a los tripletes (octetes) de SU(3). Por tanto, los índices $\alpha$ y $a$ toman valores en el intervalo 1 a 3 y 1 a 8 respectivamente. A lo largo de esta sección asumimos la notación de Einstein de suma sobre índices repetidos.

Se define la derivada covariante $D_\mu$ que actua sobre los tripletes de color (quarks):

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\lambda^a A^a_\mu \tag{1.11}$$

Donde $g$ representa la contstante de acoplamiento fuerte (ver Sección 1.3.2). Las matrices $\lambda^a$ definen la representación fundamental del grupo SU(3) (ver Ecuación 1.9)

Se define también la derivada covariante que actua sobre octetes de color:

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + ig\Lambda^a A^a_\mu \tag{1.12}$$

Donde las matrices $\Lambda^a$ es la representación adjunta del grupo SU(3). Las matrices $\Lambda?a$ son matrices hermíticas de traza igual a cero de dimensión $8\times8$.

El tensor de esfuerzos del campo del gluón $F^a_{\mu\nu}$ se define como:

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial^a_\nu A^a_\mu - gf_{abc}A^b_\mu A^c_\mu \tag{1.13}$$

En la ecuación (1.13), el tercer término del lado derecho de la expresión es lo que distingue a QCD, una teoría no abeliana de QED y que da lugar a autointeracciones de los gluones.

Un ejemplo del flujo de color para una interacción quark-gluón en el espacio de color se muestra en la Figura 1.2. Normalmente sumamos sobre todos los índices de color, así que este ejemplo es una representación píctorica de lo que puede ser un término particular (distinto de cero) en la suma de color.

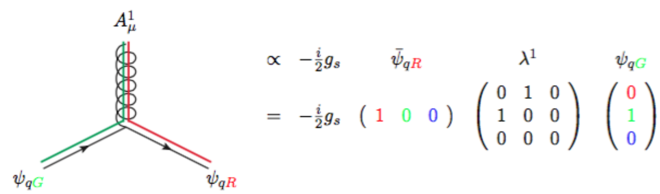



Figura 1.5: Ilustración de un vértice $qqg$ en QCD, antes de promediar sobre los colores: un gluón en el estado representado por $\lambda^1$ interactua con dos quarks en el estado $\psi_{qR}$ y $\psi_{qG}$.

## 1.3.2. Libertad asintótica

Una de las peculiaridades que diferencia a la teoría de las interacciones fuertes (QCD) de la teoría de las interacciones electromagnéticas (QED) es la "constate" que determina la intensidad con la que se dan las interacciones. En la teoría de QCD la constante de acoplamiento $\alpha_s$ responde de manera diferente con respecto a variaciones que se pueden dar en sistema formados por quarks (ver Figura 1.6).

En la escala de altas energías, la consante de acoplamiento entre quarks se hace pequeña y por tanto la interacción entre quarks y gluones es débil, mientras que en la región de baja energía la constante de acoplamiento incrementa y por tanto las interacciones son fuertes y por tanto conduce al acoplamiento de partículas de color.

Observamos de la equación 1.12 el termino $ig\Lambda^a A^a_\mu$ corresponde a la emisión del gluon por un quark, similar a la emisión de un fotón por una partícula cargada en el caso de QED, se tiene de acuerdo al último termino de la ecuación (1.1) la emisión de un gluon por un gluon, y el acoplamiento de dos gluones a dos gluones. Lo que tiene como consecuencia la libertad asimptótica a altas energías y la interacción fuerte a bajas energías contrario a lo que ocurre en QED.

La ecuación del grupo de renormalización nos señala que una cantidad física no depende de la escala a la cual es renormalizada $\Gamma_B(s, \alpha_0, \Lambda^2)$, donde $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ es la constante de acoplamiento en términos de $g_s$, y $\Lambda$ es el límite de regularización ultravioleta para regularizar la cantidad no-renormalizada. La constante de renormalización $\Gamma$ se define a la escala $\mu^2$, con la constante de acoplamiento $\alpha(\mu)$ y la escala de normalización $Z$ tal que

$$\Gamma(s, \alpha(\mu), \mu^2) = Z(\mu^2)\Gamma_B(s, \alpha_0, \Lambda^2), \tag{1.14}$$

Dado que $\Gamma_B$ es independiente de la escala $\mu^2$, por lo que $\frac{d\Gamma_B}{d\mu^s} = 0$, esto es

$$\mu^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu^2} + \mu^2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu^2}\frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} - \mu^2 \frac{\Gamma}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \mu^2} = 0 \tag{1.15}$$

donde $\beta(\alpha) = \mu^2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mu^2}$, y $\gamma(\alpha) = -\mu^2 \frac{\Gamma}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \mu^2}$ De la definición de $\beta(\alpha)$ se obtiene

$$ln(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}) = \int_{\alpha(\mu_0^2)}^{\alpha(\mu^2)} \frac{d\alpha}{\beta(\alpha)} \tag{1.16}$$

En QCD, se puede calcular de manera perturbativa $\beta(\alpha) = -b_0\alpha_s^2 - b1\alpha_s^3 + O(\alpha_s^4)$ con $b_0$ y $b_1$ funciones del numero activo de sabores.

Reteniendo el primer termino en 1.6 y $\beta(\alpha)$ se tiene

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{1 + \alpha_s(\mu_0^2)b_0 ln(\mu^2/\mu_0^2)} \tag{1.17}$$

Donde se observa que para $\mu^2$ grande o distancias pequeñas $r^2 \sim 1/\mu^2$, se obtiene la libertad asimptótica, $\alpha_s(\mu^2) \to 0$. Esto es opuesto al efecto de apantallamiento en QED.

La expresión 1.7 se deriva de

$$\Lambda^2 = \mu^2 exp(-\int^{\alpha_s(\mu^2)} \frac{dx}{\beta(x)}) \tag{1.18}$$

tomando $\beta(x)$ a primer orden, se puede considerar $\Lambda$ como la escala a la que QCD se vuelve no perturbativa.

### 1.3.3. Confinamiento

En QCD las partículas asociadas a los campos no son estados asimptóticamente libres como en otras teorías de campo. Los quarks y gluones están confinados dentro de hadrones, este fenómeno no se entiende analíticamente sino que solo puede obtenerse por aproximaciones, para este fin existen simulaciones numéricas de QCD en la retícula (LQCD) que reproducen algunas de las consecuencias del confinamiento, como la masa de los diferentes hadrones, cuyo 95 % es generado por la interacción fuerte y solo alrededor del 5 % por masa de los quarks. En QCD el vacío puede ser considerado como un condensado de gluon y quark -antiquark, como un dieléctrico perfecto es decir de constante dieléctrica de color ($\chi = 0$) análogamente a los pares de electrones en un superconductor en el caso de QED. Donde el análogo al campo magnético en QED es el campo de cromoeléctrico en QCD, y similar al superconductor en QED se tiene el vacío en QCD, y el vacío en QED $\mu = 1$ es el interior del hadron en QCD ($\chi = 1$). Así de la misma manera que el campo magnético se expulsa desde el superconductor el campo cromoeléctrico se expulsa de el vacío de QCD que lo empuja hacia dentro del hadron llevando al confinamiento de color.

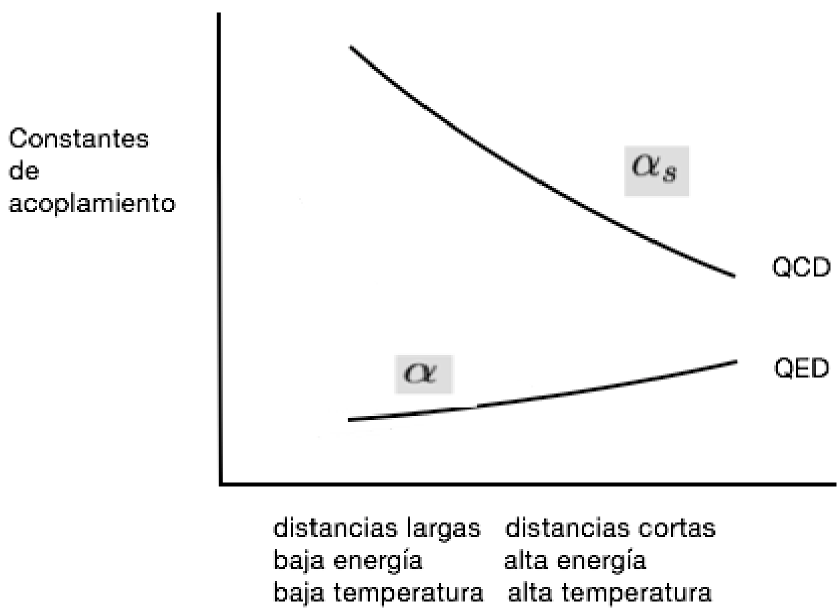



Figura 1.6: Respuesta de las constantes de acomplamiento $\alpha_s$ y $\alpha$ de QCD y QED respectivamente con respecto a variaciones en las escales de distancia, energía y temperatura.

# Capítulo 2

# Plasma de Quarks y Gluones

Se cree que poco después de la creación del universo en el Big Bang toda la materia se encontraba en un estado deconfinado de quarks y gluones, el llamado, Plasma de Quarks y Gluones (QGP, por sus siglas en inglés). Debido a la rápida expansión del universo, este estado de la materia pasó por distintas transiciones de fase que concluyeron en la formación de hadrones – mayoritariamente nucleones – lo que constituye básicamente los bloques de la materia nuclear que hoy en día conocemos. El estudio de la evolución,comportamiento y propiedades del QGP son de gran importancia para entender el universo temprano en condiciones extremas.

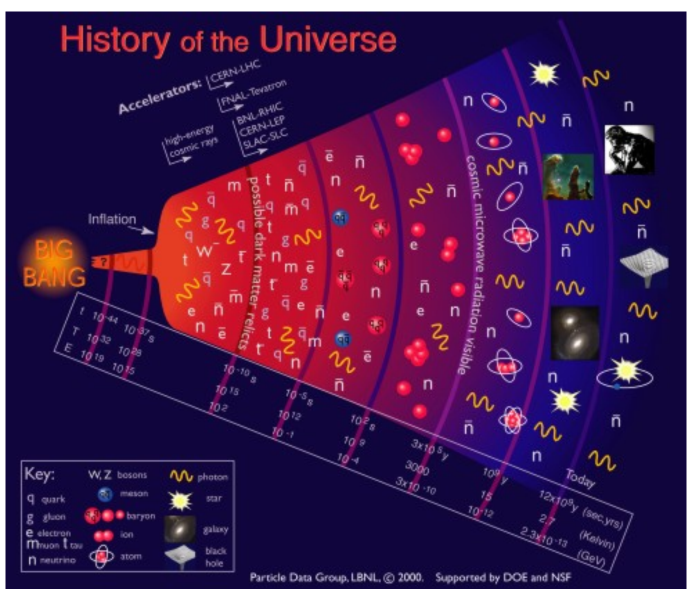



Figura 2.1: Linea de tiempo de la historia del universo y evolución de la materia a partir del Big Bang al presente.

## 2.1. Diagrama de fase nuclear

Es sabido que a través de la variación de cantidades tales como la densidad bariónica neta[1] y/o la temperatura de la materia nuclear tiene como consecuencias el tránsito por una serie de transformaciones de fase (Figura 2.2). Incluso, tiempo antes del descubrimiento de los quarks, Pomeranchuk pensaba que por encima de una densidad crítica, los hadrones perderían su identidad. De hecho, cuando la temperatura y/o densidad de un gas de hadrones se incrementa, los quarks de un hadrón estarían más próximos a los quarks de otro hadrón que a sus mismos compañeros y por encima de esta cantidad crítica los hadrones perderían por completo su identidad resultado en un estado deconfinado de materia de quarks y antiquarks [15]. En condiciones usuales donde los núcleos se encuentran en su estado base (estado más bajo de energía) la densidad predominante es la que aporta los protones y neutrones. Sin embargo incrementar la temperatura conllevaría modificaciones a la denisdad bariónica neta debido a la creación de pares partícula-antipartícula en el momento que la energía térmica materialice y por tanto en este caso es importante diferenciar entre densidad bariónica y densidad bariónica neta.

En la Figura 2.2 se muestra un diagrama de fase nuclear donde en el eje horizontal está representada la densidad bariónica neta. La escala es establecida por la densidad bariónica de la materia nuclear. Como se mencionó arriba, en condiciones usuales, la densidad de materia nuclear la comprende puramente materia bariónica, para diferentes átomos es de alrededor de 0.17 nucleones/fm$^3$. Este estado de la materia nuclear está representado por el punto negro en la esquina inferior izquierda en la misma figura. Los intervalos de temperatura y de densidad bariónica neta comprendidos por el sombreado claro corresponden aún para núcleos ordinarios, es decir, aquellos donde los protones y neutrones que los conforman conservan una estructura bien definida como entes compuestos por quarks.

Sabemos que modificar la temperatura o la densidad bariónica neta de la materia nuclear conlleva transformaciones de fase. Se cree que el deconfinamiento por medio del incremento en la densidad es un fenómeno que sucede en el interior de estrellas de neutrones, donde la materia nuclear es comprimida por su mismo peso hasta 10 veces la densidad ordinaria nuclear [16]. El estado de deconfinamiento que se alcanza incrementando la temperatura se consigue sólo a través de colisiones ultraenergéticas entre nucleos como las que se pueden llevar a cabo en RHIC y el LHC. Este cambio de fase de la materia nuclear se representa por la flecha roja en la Figura 2.2. Laboratorios como RHIC Y LHC son capaces de alcanzar temperaturas superiores a los 4 trillones de grados centígrados, al rededor de 250000 veces más caliente que la temperatura en el núcleo solar. A estas temperatura el confinamiento de los quarks se rompe dando lugar a un estado deconfinado donde quarks y antiquarks se encuentran en un estado libre, éste estado de la materia el cual pose características muy similares a las de un líquido perfecto altamente interactuante por las partículas que lo componen se lo conoces como el plasma de quarks y gluones (sQGP).Esta fase de la materia se representa por la región sombreada en color naranja.

## 2.2. Colisiones Protón-Protón (p-p)

Las colisiones que se llavan a cabo en aceleradores como RHIC y el LHC se clasifican en dos tipos: colisiones elásticas y colisiones inelásticas. Las colisiones inelásticas a su vés se dividen en no difractivas, difractivas o doblemente difractivas.

El estudio de colisiones entre protones requiere conocimiento de las funciones de distribución partónica de protones (PDFs). Las funciones de densidad partónica $f_i(x, Q^2)$ nos dan información acerca de la probabilidad de tener dentro del prorón un partón de sabor $i$ (quark or gluon) cargando una fracción $x$ del momento total del protón que colisiona, $Q$ es la escala de energía de la interacción fuerte. Debido a que QCD no aporta información acerca del contenido partónico dentro

[1]La densidad bariónica neta se define como: la densidad de protones y neutrones (ambos bariones) menos la densidad de antibariones

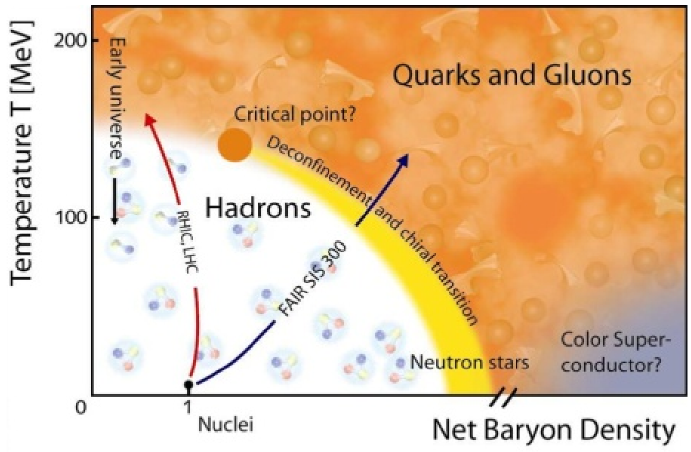



Figura 2.2: Diagrama de fase nuclear.

del protón, las PDFs se determinan a través de ajustes a los datos de observables experimentales en varios procesos, usando la ecuación de evolución de DGLAP [17]. La mayoría de las PDFs para el protón se conocen a través de procesos de disperción inelástica profunda de datos de HERA, TEVATRON, experimentos de blanco fijo y ahora con experimentos con un gran potencial como el LHC, nuevas mejoras y constricciones se pueden obtener para una mejor definición de las PDFs.

Las colisiones p-p son consideradas como una base para el estudio de la producción y la sección eficaz de las colisiones núcleo-núcleo, esto e[illegible]egan un papel fundamental en el modelamiento de la multiproducción de partículas por colisiones binarias entre los nucleones participantes del núcleo colisionante.

Recientes resultados del LHC basados en estudios de alta multipicidad han dislumbrado inesperadas propiedades del sQGP pero [illegible]ás interesante es formación de este medio a partir de colisiones p-p y p-Pb. La formación de este sQGP en este tipo de sistemas no era algo que se esperase debido a las dimensiones pequeñas de tales sistemas en comparación con el que se crea a partir de colisiones entre núcleos de alto número bari[illegible]. Como se mencionó en la motivación, el principal estudio que se hace en esta tesis es la pred[illegible]on de valores para la observable de flujo elíptico ($V_2$) a las energías del LHC ($\sqrt{s}$ = 900 GeV, 2.6 y 7 TeV[illegible]

## 2.3. Colisiones Núcleo-Núcleo (N-N)

[illegible]ones de elementos pesados, tales como oro y plomo están constituidos por un gran número de nucleones. Desde otro panorama, esta colisión se puede ver como un gran número de colisiones entre los diferentes nucleones, sin embargo este tipo de colisiones son más complejas debido a la interacción entre los m[illegible]s. Así un nucleón puede colisionar con los distintos nucleones que se encuentren en el otro nu[illegible], perdiendo a su v[illegible]ergía por cada colisión que realiza. Al fenómeno en el cual un nucleón pierde energía tratando de pasar a través de un nucleo ajeno se le conoce como "deten[illegible] nuclear". Dependiendo de las densidades de energía alcanzadas en la regíon de colisió[illegible]pueden ser lo suficientemente altas para la formación del QGP el cual prevalezerá por un corto periodo de tiempo mientras el sistema se expande y termaliza. Esta energía depositada en este medio cuenta para la producción de partículas mediante procesos de hadronización (que se pretende explicar con más detalle en términos d[illegible]gmentación de cuerdas).

## 2.4. Evidencias del QGP

La formación de un medio altamente interactuante (sQGP) a partir de colisiones protón-protón y núcleo-núcleo rápdidamente se enfria y hadroniza, esto conlleva a que la información que se sabe de este medio en sus primeras etapas de formación se obtenga de manera indirectamente de los hadrones finales que es la fuente más abandunte. A partir de estudios de la multiplicidad de partículas, espectros de energía y distribuciones de momento es de donde se obtiene dicha información. Diferentes señales son las que nos indican la formación del QGP, tales como:

- Producción de dileptones (Mecanismo de Drell-Yan)

  La creación de dileptones via fotones virtuales ($\gamma*$) se puede dar por medio de interacciones primarias entre los partones de los núcleos que colisionan. El mecanismo de Drell-Yan del cual se tiene un buen tratamiento perturvatio describe la producción de dileptones via fotones virtuales. Es por ello que el estudio del mecanismo Drell-Yan en procesos conocidos debe tratarse como una referencia a emplearse donde haya emisión de dileptones en colisiones protón-protón y núcleo-núcleo.

- Supresión de J/Ψ [19]

  La partícula $J/\Psi$ es un estado ligado entre un $c$ y un $\bar{c}$. Matsui y Satz (1986) propusieron que un indicio a la existencia de QGP es através de la supresión de $J/\Psi$ debido a que el potencial de acoplamiento se vuelve de corto alcance. Desde un punto observacional, los siguientes puntos deben considerarse:

  - Debido al alto valor en la masa de la partícula $J/\Psi$ ($m_{J/\Psi} = 3.096$ GeV/c). La producción de $c\bar{c}$ en momentos posteriores a la colisión es suprimida. Por ejemplo, $exp(-2m_c/T) \approx 10^{-5}$ a $T \approx 300MeV$.
  - El hecho de que la masa de la partícula $J\Psi$ sea grande puede ser una causa de supresión de este tipo de partícula en el especto de dileptónes ($e^+e^-$ y $\mu^+\mu^-$). Debido a $m_{J/\Psi} \gg T$, el background de dileptones térmimos es suprimido a menos que la temperatura del QGP sea demasiado alta. De no ser así, el mecanismo de Drell-Yan se espera que domine sobre los dileptones térmicos al rededor del pico de J/Ψ.

- Efecto Hanbury - Brown - Twiss

  Este método basado en la interferometría es usado para medir el tamaño de estrellas [18]. El mismo efecto se usa para medir el volumen de reacción en una colisión. En colisiones de iones, intesidad en la interferometría de piones es usada [20]. Piones son los mesones más ligeros y son producidos en abundancia en colisiones de iones pesados. El momento de un pión es correlacionado con el momento de otro idéntico si son emitidos de una fuente parcialmente caótica. Esta correlación de momento, de dos piones idénticos detectados en coincidencia es relacionada con la transformada de Fourier de una función que describe la distribución de espacio-fase de la fuente. De esta manera, se puede conocer información de la distribución de materia en el momento de la emisión de piones. Análisis del HBT puede también proporcionar una estimación del tiempo de vida promedio del sistema. Así del volumen del sistema, la densidad de energía en el mismo se puede conocer.

- Flujo Colectivo

  La geometría del sistema formado en colisiones de iones pesados también se puede estudiar a partir de las distribuciones de momento de las partículas emitidas. Si el sistema se encuentra en equilibrio térmico, la presión asociada origina que las partículas disparadas lo hagan de manera colectiva, un flujo colectivo el cual causa que la evolución del sistema lo haga apegado a ciertras geométrias, e.g. circulares, elípticas, tríangulares, es decir, la evolución del sistema es una combinación de expansión radial,elíptica, triangular, etc. Para flujos anisotrópicos, la contribución dominante es la de un flujo elíptico.

# Capítulo 3

# Flujo Colectivo

## 3.1. Caracterización de eventos

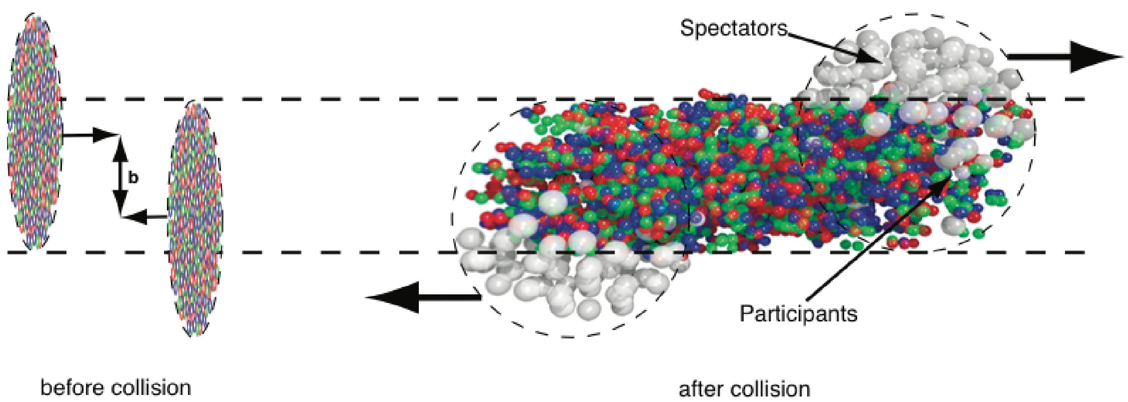



Figura 3.1: Izquierda: Dos iones pesados antes de colisionar con parámetro de impacto **b**. Derecha: Los espectadores continua su trayectoria sin ser afectados, mientras que en la zona de aprticipación, la producción de partículas se lleva acabo.

En colisiones ultrarelativistas entre iones pesados, desde un sistema de referencia en el laboratorio, los iones que colisionan son vistos como objetos extendidos muy parecidos a discos debido a la contracción de Lorentz (ver Figura 3.1). Las colisiones frontales dan cavidad a la formación de sistemas diferentes a los que se formarían en una colisión periférica o ultraperiféricas. Para estudiar las propiedades del sistema creado, las colisiones son por tanto categorizadas por la centralidad con la que suceden. Teóricamente, la centralidad está definida en función de la magnitud del vector de parámetro de impacto **b** (Figura 3.1), el cual se define como el vector perpendicular al eje que une los centros de las partículas que colisionan, por tanto, la magintud del vector de parámetro impacto representa la distancia que existe de centro a centro. Los sistemas que estudiamos son aquellos donde $0 \leq b \leq 2R$, donde $R$ es el radio de los núcleos. Sin embargo, la magnitud del parámetro impacto no puede ser medido diréctamente. Experimentalmente, la centralidad es inferida a partir de las distribuciones de multiplicidad, donde se asume que la multiplicidad es una función monoatómica de **b**.

Además de definir la centralidad en función del parámetro de impacto, es común caracterizarla por el número de nucleones participantes o por el número de colisiones binarias. Fenomenológi-

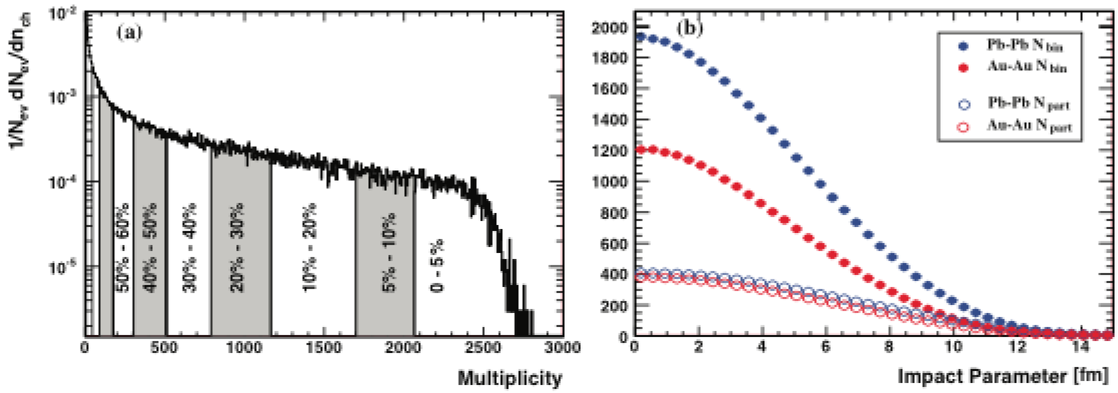



Figura 3.2: (a) Distribución de partículas cargadas producto de una colisión Pb-Pb a $\sqrt{s_{NN}} = 2.6$ TeV medidas en ALICE que muestra una clasificación de la misma en porcentajes de centralidad. (b) Número de nucleones participantes $N_{part}$ y colisiones binarias $N_{bin}$ en función del parámetro de impacto para colisiones Pb-Pb y Au-Au a $\sqrt{s_{NN}} = 2.6$ TeV y 0.2 TeV respectivamente.

camente se ha encontrado que la producción total de partículas incrementa conforme el número de nucleones participantes también incrementa mientras que en procesos duros el sucede pero con respecto al número de colisiones binarias. Estas mediciones se pueden relacionar con el parámetro de impacto **b** usando un descripción realística de la geometría nuclea en un cálculo de Glauber [44] como se muestra en la Figura 3.1(b). La misma Figura 3.2 también muestra que colisiones de Pb-Pb a $\sqrt{s_{NN}} = 2.6$ TeV y Au-Au a $\sqrt{s_{NN}} = 0.2$ TeV tienen una distribución similiar para los nucleones participantes. El número de colisiones binarias incrementa en un 50 % en colisiones Au-Au y Pb-Pb porque la sección eficáz elástica para nucleón-nucleón incrementa en ese monto en las respectivas energías en el centro de masa de 0.2 a 2.6 TeV.

## 3.2. Flujo

Como se mencionó en el Capítulo 2, el único medio posible de obtener materia nuclear en condiciones extremas, esto es, a temperaturas muy altas es a través de colisiones ultraenergéticas entre protones y núcleos. Estas colisiones se caracterizan dependiendo de la centralidad con la que courren, un concepto muy relacionado con el parámetro de imparcto (ver Sección 3.1). Dependiendo de la centralidad con la sucede una colisión se tiene una evolución particular del medio creado, variaciones en la multiplicidad y también variaciones en las distribuciones de momento de las partúclas que se crean. Una de las observables físicas que dan indicios de la formación de QGD es el llamado *flujo*, la cual es una cantidad que describe los patrones geométricos que siguen la evolución del sistema que se crea así como información de la ecuación de estado para el mismo.

Físicamente, el Flujo nos indica la presencia de múltiples interacciones entre los contituyentes dentro del volumen de reacción que se crea (ver Figura 3.3). Las herramientas teóricas con las que se cuentan para describir el flujo son tomadas de teorías de hidrodinámica o modelos de transporte microscópico. Por ejemplo, cuando el camino medio libre, $l$, entre las partículas constituyentes es demasiadamente pequeño en comparación con las escalas de longitud caracteristicas del sistem, $L$ (es decir, $l/L \ll 1$), hidrodinámica relativista prove de buenas aproximaciones para describir la evolución del sistema además de que la descripción se puede dar en términos de cantidades macroscópicas [53, 55].

El flujo se puede caracterizar en dos tipos: isotrópico o anisotrópico.

## 3.3. Flujo isotrópico

El primero se da cuando la colisiones son totalmente centrales, es decir, cuando el parámetro de impacto, $b = 0$ (ver Sección 3.1), en este caso perfil de densidad es totalmente isotrópico. Desde el punto de visto hidrodinámico , el gradiente de presión, $\nabla P$, ejercerá la misma presión en todas las direcciones y será perpendicular al área sobre la que actua. En el caso de colisiones centrales, el gradiente de presión generará un flujo colectivo isotrópico en cualquier dirección, es decir, el patrón geométrico sobre un plano transverso es circular (ver la Figura 3.5 de la extrema izquierda).

## 3.4. Flujo anisotrópico

Consideremos la Figura 3.3 donde asumimos una colisión no central ($b \neq 0$) y la cual da lugar a que el volumen de reacción tenga un perfíl anisotrópico muy parecido al de una almendra. En este tipo de sistemas al igual que los creados en colisiones centrales, vistos desde el marco de estudio de la hidrodinámica relativista, el gradiente de presión ejercerá una presión radial en todas las direcciones hacia el exterior sobre las paredes del volumen de reacción. Es de esperarse que el flujo sea mayor en la dirección a lo largo del plano de reacción que cualquier otra dirección debido a que las partículas que salen disparadas en la primera dirección son menos probables de interactuar con otras por la menor cantidad de materia que hay en su camino a diferencia de las que saldrían dispardas al rededor del eje perpendicular al plano de reacción donde hay una mayor concentración de materia y por tanto un mayor número de interacciones entre las partículas que intentan escapar, en otras palabras la producción de partículas tendrá una distribución elíptica con el ángulo azimutal (ver Figura 3.4)

Experimentalmente, las evidencias más directas que se tienen de flujo son de tipo anisotrópico, el cual se ve reflejado en la anisotropía en la producción de partículas con respecto al ángulo azimutalo (ver Figura 3.4), puesto de otra manera, anisotropías en las distribuciones de momento correlacionadas con el plano de reacción (ver Figura 3.3) [39, 40, 41, 42, 43]. La formación de flujo anisotrópico requiere de dos ingredientes básicos: primero, la formación de un volumen de reacción cuya geometría sea asimetría, segundo, la existencia de múltiples interacciones entre las partículas dentro del volumen las cuales darán formación al flujo anisotrópico.

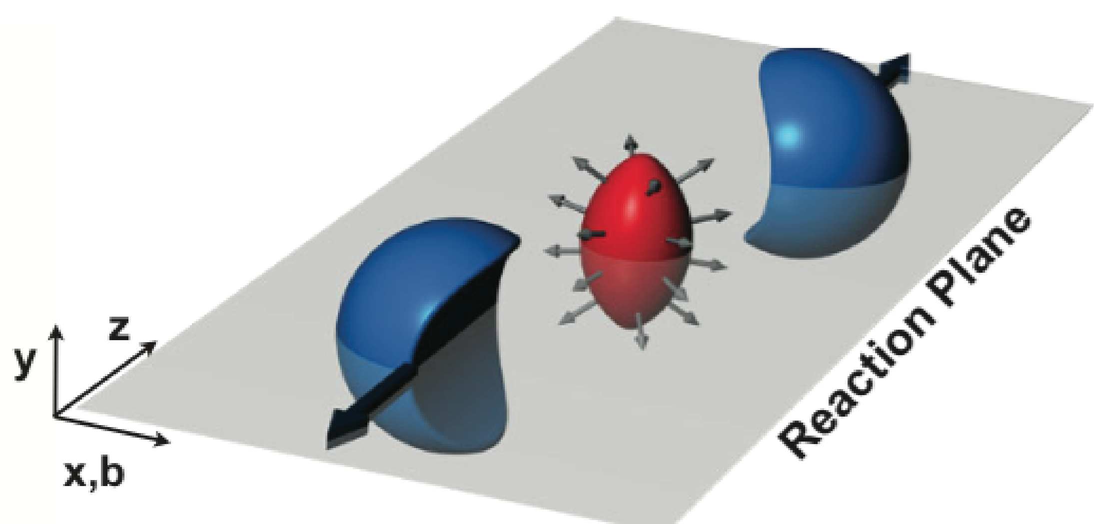



Figura 3.3: Volumen de reacción creado posterior a una colisión no central entre dos núcleos de forma muy parecida a la de una almendra.

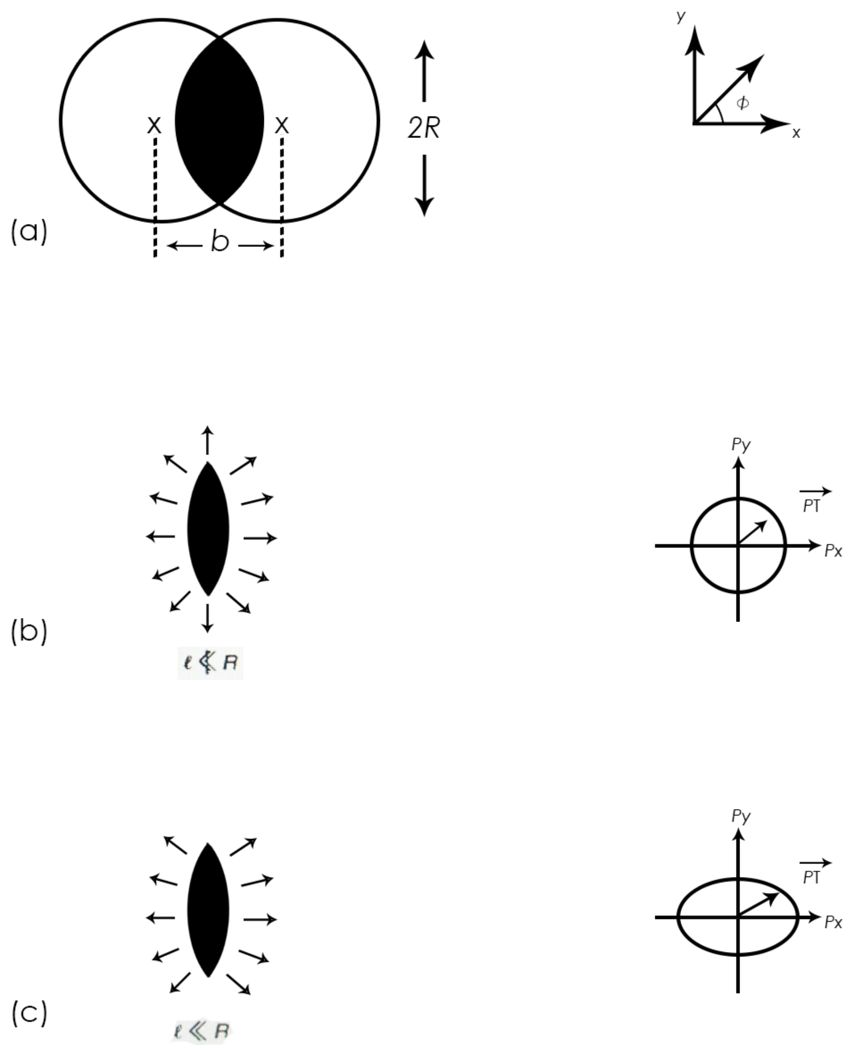



Figura 3.4: (a) Colisión no central ($b \neq 0$) vista en el plano transverso. (b) El volumen de reacción (zona sombreada) produce las condiciones para un flujo de tipo isotrópico porque, esto es, las distribuciones de momento transverso correlacionadas con el ángulo azimutal es honogénea a cualquier ángulo. (c) el flujo es de tipo anisotrópico debido a que los valores de momento transverso tienen una tendencia de distribución elíptica. .

Una manera de caracterizar los diferentes patrones que flujo (isotrópico y anisotrópico) se consigue a través de una expansión en serie de Fourier de la distribución azimutal de la emisión de partículas con respecto al plano de reacción $\Psi_R$ como se muestra en la expresión 3.1

$$E\frac{d^3N}{d^3\boldsymbol{p}} = \frac{1}{2\pi}\frac{d^2N}{p_t dp_t dy}\Big(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} v_n cos(n(\varphi - \Psi_R))\Big) \tag{3.1}$$

donde $E$ es la energía de la partícula, $\boldsymbol{p}$ el momento, $p_t$ su componente transversa, $\varphi$ el ángulo azimutal, $y$ la rapidéz y $\Psi_R$ el ángulo azimutal del plano de reacción con respecto al sistema de laboratorio. Los términos seno en la serie se omiten debido a la simetría con respecto al plano de reacción. Los coeficientes de Fourier se pueden calcular de la siguiente manera,

$$v_n(p_t, y) =< cos[n(\varphi - \Psi_{RP})] > \tag{3.2}$$

Los paréntesis cuadrados denotan un promedio sobre todas las partículas producidas en un evento. Nótese que $v_n$ por ser el promedio de la función coseno es siempre menor que 1. Cuando el parámetro de impacto es igual a cero, es decir, en una colisión central, el volumen de reacción es completamente esférico lo cual resulta en una distribución azimutal uniforme de partículas y todos armónicos $v_n$ para $n > 1$ serán idénticamente cero. Por otro lado cuando el parámetro de impacto es distinto de cero el volumen de reacción es anisotrópico y por tanto $v_n$ para $n > 1$ serán distintos de cero. Los cuatro primeros coeficientes están ilustrados en la Figura 3.5. El primer coeficiente $v_1$ que representa un flujo radial uniforme se le conoce como *flujo directo*. El segundo coeficiente $v_2$ representa un flujo anisotrópic oelíptico y se le conoce como *flujo elíptico*. Sin embargo en la región de baja rapidéz ($y \approx 0$) y que es la región en la cual basamos nuestros estudios de flujo elíptico es la dominante.

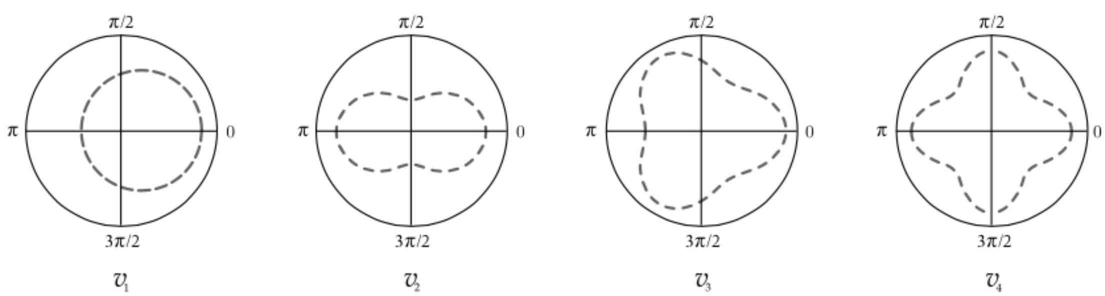



Figura 3.5: Ilustración de los primeros cuatro coeficientes de Fourier en el plano transverso.

## 3.5. Dependencia de $v_2$ con la centralidad y del tipo de partícula

Resultados del experimento ALICE confirman una clara dependencia del flujo elíptico con respecto a la centralidad del evento (ver Figura 3.6). Valores pequeños de flujo elíptico son predominantes en colisiones con un alto valor en el parámetro de impacto, es decir, muy poco centrales y va en aumento hasta alcanzar un valor máximo al rededor del 40 %-50 % en la centralidad para posteriormente registrarse una baja en colisiones con centralidad del 50 %-60 %.

Además de la dependencia con respecto a la centralidad del evento (Figura 3.6), los resultados de ALICE muestran también una clara dependencia de flujo elíptico con la masa de las partículas producidas. En colisiones Pb-Pb a energías de 2.76 TeV es claro el contraste que existe de la magnitud de flujo medido con respecto al tipo de partícula, por ejemplo, en el caso de protones y piones dentro de un rango de $p_t$<2 GeV (Figura 3.7). Este comportamiento con respecto a la masa se debe a la presencia de flujo radial que les provee de un empujón a todas las partículas que se crean pero para aquellas que son más pesadas adquieren momento de manera más lenta que aquellas que son más ligeras [49].

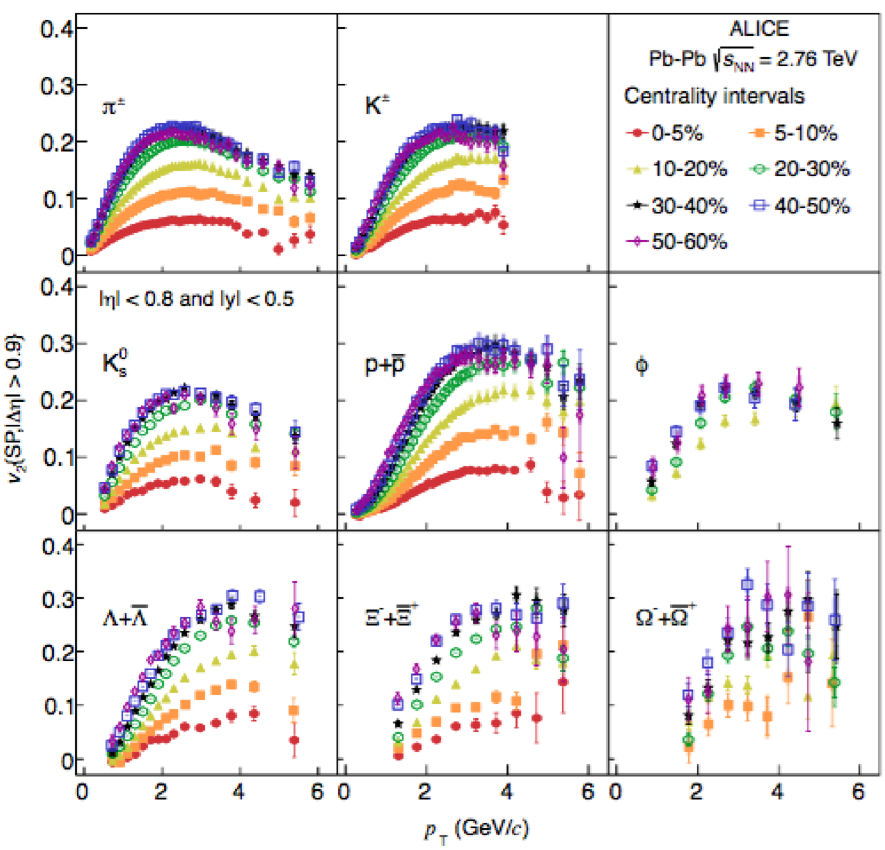



Figura 3.6: Flujo elíptico en función de la centralidad para colisiones Au-Au a energías 200 GeV en el rango de $p_t$<2.0 GeV/c [46].

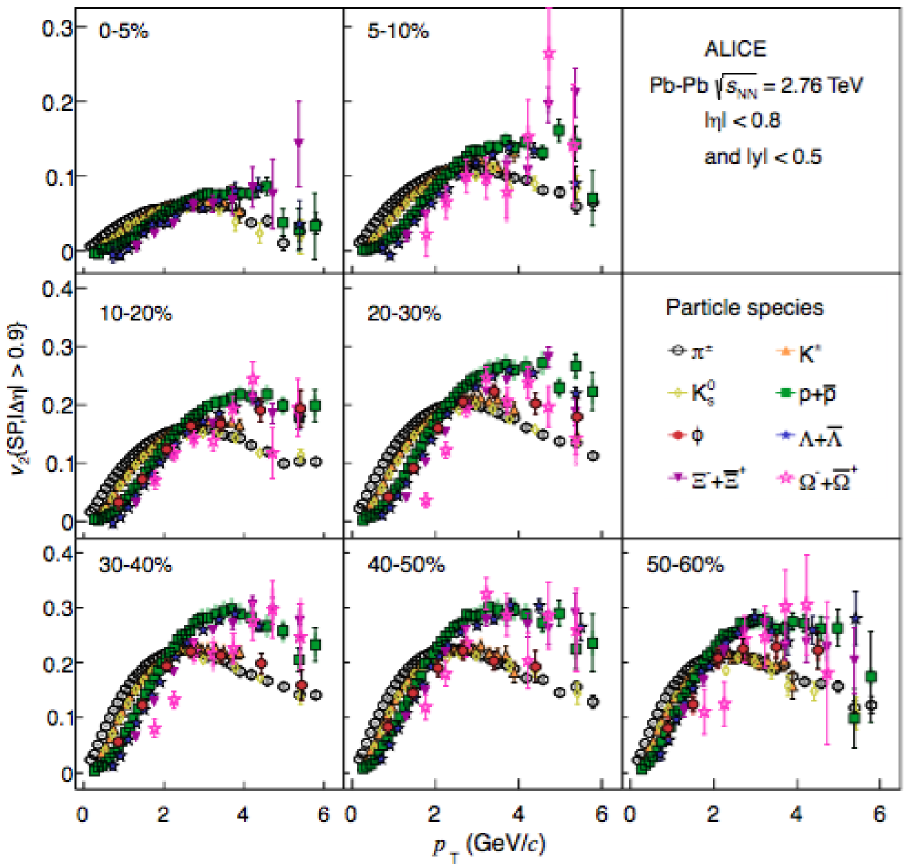



Figura 3.7: Flujo elíptico en función de la centralidad para colisiones Au-Au a energías 200 GeV en el rango de $p_t$<2.0 GeV/c [46].

## 3.6. Dependencia en la energía

En la Figura 3.8 se muestra un incremento en la intensidad del flujo elíptico en el rango de $p_t$<0.2GeV/c en centralidades del 20 %-30 % para diferentes experimentos a las energías de RHIC y LHC [46]. En contraste con las mediciones de $v_2$ en colisiones Au-Au a $\sqrt{s_{NN}}$=200 GeV hechas en RHIC(Figura **??**), observamos un incremento en la intesidad de $v_2$ de al rededor del 30 % comparado con las mediciones a las energías de $\sqrt{s_{NN}}$ = 2.76 TeV del LHC en el mismo rango de centralidad. A bajas energías, por debajo de 100 MeV, la interacción de colisión es dominada por el campo nuclear de atracción. A energías mayores, las colisiones individuales entre los nucleones empiezan a ser dominantes. Debido a la contracción de Lorentz de los nucleos que colisionan, los espectadores (Figura 3.1) también son contraidos. Los espectadores dejan atrás la región de interacción después de un tiempo del orden de$2R/\gamma$, donde $R$ es el radio nuclear y $\gamma$ el factor de contracción de Loretz. Cuando los espectadores abandonan la región de interacción, las partículas son libres de moverse en cualquier direcciónsobre el plano transverso. El gradiente de presión, el cual tiene su valor más grande dentro del plano transverso, empuja a las partículas produciendo flujo elíptico dentro del plano. Una transición de flujo fuera del plano $\langle\ \cos(2\varphi)\ \rangle$<0, a una transición dentro del plano, $\langle\ \cos(2\varphi)\ \rangle$>0, ocurrecuando el factor de Lorenzt es sinificativo y esto es a través de incremento de la energía en centro de masa de la colisión. A energías ultrarelativistas, los nucleos son casi discos que colisionan y la mayoría de la energía se queda a lo largo de la dirección del haz. Esto conlleva a que el momento transverso de las partículas que se producen es del orden de unos cuantos cientos de MeV mientas que el momento longitudinal (en la dirección del haz)sea del orden de unos cuantos GeV. A tales energías, la dependencia del flujo elíptico en el momento transverso está dada aproximadamente por,

$$\frac{dv_2(p_t)}{dp_t} \approx \frac{v_2}{\langle p_t \rangle} \tag{3.3}$$

Entre los experimentos STAR y ALICE, no se registra un incremento en $v_2(p_t)$ [51], lo cual significa que el incremento del 30 % en $v_2$ entre ambos experimentos es causado por un incremento del promedio de momento transverso $\langle p_t \rangle$ de las partículas producidas. El valor promedio de $p_t$ incrementa conforme a un incremento del flujo radialque se produce incrementando a su vés la energía de colisión.

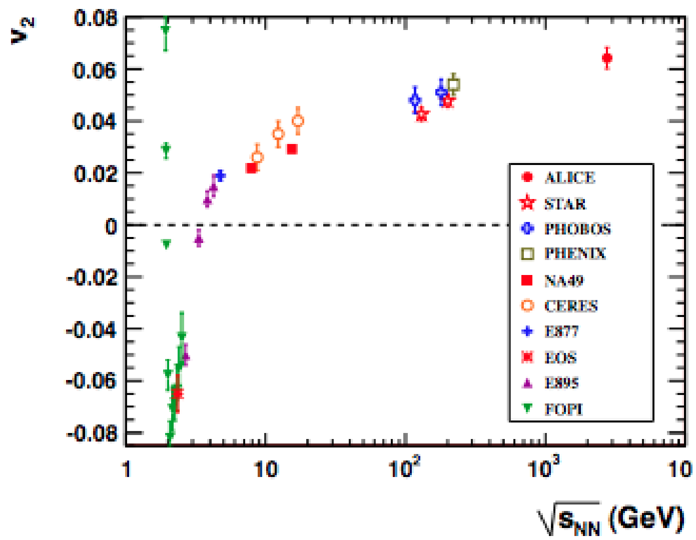



Figura 3.8: Flujo elíptico integrado a energías de 2.76 TeV in colisiones Pb-Pb en un rango de 20 %-30 % en centralidad comparado con resultados a bajas energías en el mismo rango de centralidad. [50].

## 3.7. Flujo elíptico en colisiones protón-protón

Como se ha mencionado, las espectativas de la creación de un medio de QGP en sistemas pequeños como los crean en colisiones entre protones eran muy bajas. Sin embargo la densidad de material partónico dentro de protones se incrementa con la energía de tal manera que a las energías de colisión en el LHC los protones puede ser vistos como objetos muy densos y las implicaciones de colisionar sistemas estos puede ser comparadas con las implicaciones entre núcleos ligeros a bajas energías. Esto motiva a cuestionarnos la existencia de un flujo colectivo en sistemas pequeños.

A altas energías como las que se pueden alncanzar en el LHC, las distintas distribuciones de multiplicidad en colisiones protón-protón son equiparables con las que se obtienen en colisiones de núcleos ligeros a bajas energías donde comportamiento colectivo puede ser observado. Esto motiva a cuestionarnos la existencia de un comportamiento colectivo en sistemas formados en colisiones protón-protón. Al igual que en sistemas formados en colisiones de tipo núcleo-núcleo, la formación de flujo anisotrópico requiere la formación de un volumen de reacción no isométrico así como también de múltiples interacciones entre las partículas. El sistema creado en la colisión puede entonces estudiarse a partir de modelos de hidrodinámica relativista o modelos de percolación de cuerdas de color. Distintos autores [52, 53, 54, 55] en estos marcos de trabajo asumen que la dependencia de flujo elíptico en sistemas pequeños está íntimamente relacionado de la excentricidad de la colisión y la energía a la cual se colisiona.

# Capítulo 4

# Modelo de percolación de cuerdas de color (SPM)

## 4.1. Percolación

Consideremos percolación continua en dos dimensiones, concepto que será ampliamente usado en el Modelo de Percolación de Cuerdas (SPM) del capítulo 3. Pensemos en una distribución aleatoria de discos de área $\pi r_0^2$ a lo largo de una superficie, permitiendo el translape. A medida que el número de discos translapados crece, la formación de clusters toma lugar. Dado $N$ discos dsibtribuidos en una superficie $S$, la densidad de discos está dad por $\rho = N/S$. El tamaño promedio del cluster crece conforme lo hace la densidad. A una densidad crítica, $\rho_c$ en la cual los clusters se conforman por grandes números de cuerdas se van asociando para que en conjunto formen una sóla entidad, y es en este punto cuando decimos que el sistema "percola", permeando toda la superficie disponible, Figura 4.1 [29].

Se ha estudiado percolación en distintos sistemas usando simulación numérica MonteCarlo de la cual se obtiene un densidad crítica de,

$$\rho_c = \frac{1{,}13}{\pi r_0^2} \tag{4.1}$$

En el límite termodinámico ($N \to \infty$), manteniendo $\rho$ constante, la distribución en número de discos que se translapan se comporta conforme a una distribución de tipo Poisson con valor promedio igual a $\xi = \rho\pi r_0^2$,

$$P_n = \frac{\xi}{n!} e^{-\xi} \tag{4.2}$$

Así, la fracción total cuvierta es de 1 - $e^{-\xi}$. Para el valor de 1.13, el área cubierta es al rededor de $2/3$, estos números son obtenidos considerando sólo el caso en el cual la superficie es homogénea.

La teoría de percolación en tres dimensiones es aplicada al estudio de fases en las que se podría encontrar a la materia a altas densidades. Incluso antes del descubrimiento de los quarks, Pomeranchuk [15] pensaba que por encima de una cierta densidad, los hadrones perderían su identidad. En efecto, cuando la densidad de un gas de hadrones es incrementada ya sea aumentando su temperatura o la densidad, alguno de los quarks en un hadrón estaría tan cerca de otro quark ó antiquark de otro hadrón que el primero perdería a sus compañeros originales. De esta manera, la matería hadrónica perdería su identidad transformándose a un estada deconfinado de quarks y antiquarks.

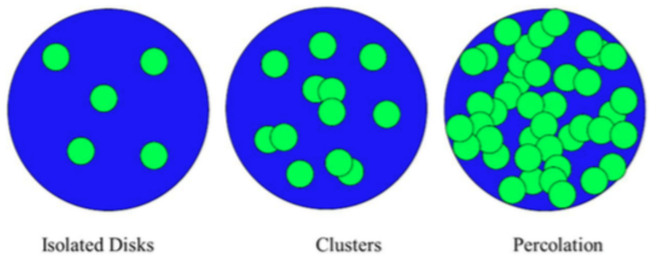



Figura 4.1: (Izquierda) Distribución aleatória de discos sobre una superficie S. (Centro) Formación de clusters. (Derecha) Se alcanza una densidad crítica, $\rho_c$ a la cual el sistema percola.

## 4.2. Modelos de cuerdas

La fenomenología de percolación de cuerdas toma como su ingrediente básico a las cuerdas. A pesar de esto, la mayoría de los presentes modelos difícilmente coinciden en sus postulados básicos como; número de cuerdas y su dependencia con la energía y centralidad. Los modelos de cuerdas se dividen en dos, aquellos en lo que hay intercambio de color entre el proyectil y el blanco como el Modelo de Partones Duales (DPM) [23, 24, 25], Modelo de Cuerdas Quark-Gluon (QGSM) [?], VENUS [25], EPOS [27], DPMJET [28] y modelos en lo que no hay intercambio de color y la interacciones entre el proyectil y el blanco exitan a los partones de ambos produciendo así cuerdas. Nos dedocaremos al estudio de lo modelos en los cuales hay intercambio de color.

En los modelos DPM y QGSM, la multiplicidad $dN/dy$ en colisiones p-p se describe por la formación y fragmentación de $2k$ cuerdas [23] como se muestra en Figura 4.2 (a)

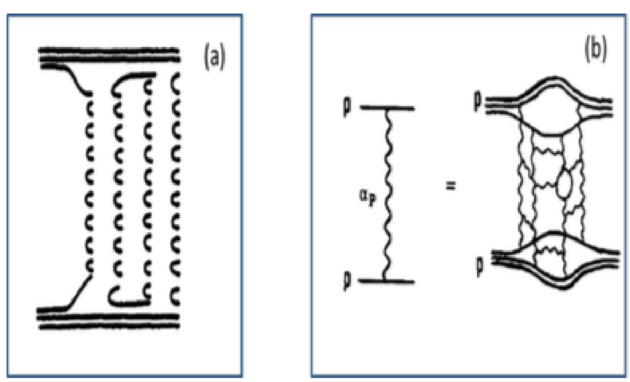



Figura 4.2: (a):Diagrama de Pomeron con dos cortes (cuatro cadenas) para colisiones p-p.

$$\frac{dN^{pp}}{dy} = \frac{1}{\sigma} \sum \sigma_k [N_k^{qq-q}(s,y) + N_k^{q-qq}(s,y) + (2k-2) N_k^{q-\bar{q}}(s,y)], \tag{4.3}$$

donde $N_k^{q-qq}$ y $N_k^{qq-q}$ corresponden al espectro total de hadrones producidos por las cuerdas que se estrechan entre un diquark de valencia en el proyectil (blanco) y un quark en el blanco (proyectil) y $N_k^{q-\bar{q}}$ corresponde al espectro total de hadrones que producen las cuerdas entre un quark y un antiquark. La distribución de partículas producidas solamente por una cuerda se obtiene doblando las distribuciones de momento de los partos ubicados al final de la cuerda con la función de fragmentación de la cuerda

$$N_1^{q-qq}(s,y) = \int_0^1 \int_0^1 dx_1 dx_2 \rho_k(x_1)\rho_k(x_2)\frac{dN^{qq-q}}{dy}(y-\bar{\Delta}, s_s), \tag{4.4}$$

donde $\sqrt{s_s}$ es la masa invariante de la cuerda, $s_s = sx_1x_2$ y $x_1$, $x_2$ son las fracciones de momento en el cono de luz de los constituyentes al final de las cuerda. $\bar{\Delta}$ es el cambio necesario en la rapidéz para ir del sistema de referencia en el centro de masa (CM) de p-p al sistema en el centro de masa (CM) de la cuerda,

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{2}log(\frac{x_1}{x_2}) \tag{4.5}$$

Las distribuciones de momento usadas para los quarks de valencia, quarks del mar o antiquarks, diquarks de valencia son $x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{-1}$ y $x^{\frac{3}{2}}$ respectivamente. En general, la distribución de $2k$ partones en el protón está dada por

$$\rho_k(x_1,x_2,x_3,...,x_{2k}) = C_k^{\rho} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{-1}\cdots x_{2k-1}^{-1} x_{2k}^{\frac{3}{2}}\delta(1-\sum_1^{2k} x_i) \tag{4.6}$$

donde $C_k^{\rho}$ puede encontrarse normalizando $\rho_k$ a la unidad.

Con la distribucione partónica (Eq. 4.6), las cuerdas creadas por $qq-q$ y $q-qq$ medidas en el marco de referencia con centro en el CM son en general largas (debido a los términos $x^{\frac{3}{2}}$ y $x^{-\frac{1}{2}}$)comparadas con las cuerdas creadas por $q-q$ que también son medidas con respecto en un marco de referencia con centro en el CM (debido al término $x^{-1}$). Respecto a las funciones de fragmentación, en el modelo de percolación de cuerdas (SPM), el mecanismo de Schwinger y el modelo de gragmentaciónd e Lund son comunmente usados. En Eq.(4.3), $\sigma_k$ es la sección eficaz para la producción de $2k$ cuerdas del corte de $k$ Pomerones.

La generalización de procesos núcleo-núcleo dentro de SPM se obtiene de la siguiente manera. Consideremos la colisión de un núcleo A con un núcleo B en una configuación tal que tenemos $N_A$ nucleones en $A$ y $N_B$ nucleones en $B$ (asumamos que $N_A \leq N_B$) y un número $N_c$ total de colisiones inelásticas. En esta configuración, los hadrones son producidas por $2N_c$ (2 cuerdas por cada colisión inelástica). De estas $2N_A$ se estiran entre quarks de valencia y diquarks ($q_v^A - qq_v^B$ y $qq_v^A - q_v^B$). El remanente $N_B$ - $N_A$ de quarks y diquarks en $B$ no tienen parejas de valencia (quarks ó diquarks ) en el núcleo de $A$ y por tanto se forman $2N_B$ - $2N_A$ cuerdas con los quarks del mar y antiquarks de $A$ ($q_s^A - qq_v^B$ y $\bar{q}_s^A - q_v^B$). Por tanto $2N_c$ - $2N_B$ son cuerdas formadas entre los quarks del mar y antiquarks de $A$ y $B$ ($q_s$ - $\bar{q}_s$)

$$\begin{aligned} \frac{dN^{AB}}{dy} = \frac{1}{\sigma_{AB}} \sum_{N_A,N_B,N_c} [\sigma^{AB}_{N_A,N_B,N_c}(N_B-N_A)(N^{qq_v^A-q_v^B}(y) + N^{q_v^A-qq_v^B}(y))+ \\ (N_B-N_A)(N^{\bar{q}_s^A-q_s^B}(y) + N^{q_s^A-qq_v^B}(y))+ \\ (N_c-N_B)(N^{q_s^A-\bar{q}_s^B}(y) + N^{\bar{q}_s^A-q_s^B}(y)) + sym(N_A \leftrightarrow N_B)], \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde $\sigma^{AB}_{N_A,N_B,N_c}$ es la sección eficáz para $N_c$ colisiones inelásticas nucleon-nucleon entre $N_A$ nucleones de $A$ y $N_B$ nucleones de $B$. En el caso en el que A=B se tiene una multiplicada aproximada

$$\frac{dN^{AA}}{dy} \approx < N_A > (2N^{qq-q_v}(y) + (2 < k > -2)N^{q_s-\bar{q}_s}(y)) + \\ 2(< N_c > - < N_A >) < k > N^{q_s-\bar{q}_s}(y), \quad (4.8)$$

donde además se ha incluido la posibilidad de $k$ múltiples procesos de dispersión entre los nucleones que interaccionan. Nótese además en el término que es proporcional al número de colisiones que no se ha especificado el tipo de colisión (suave o dura). En efecto, se incluyen muchas colisiones suebes en ese término. Suele cometerse el error que el mismo término contiene sólo colisiones duras. Observamos que en la región de rapidéz central, se tienen $2Nk$ cuerdas, lo cual cuando se trata de colisiones muy energéticas y núcleos pesados contribuye con un gran número de cuerdas (más de 1500). Debido a tal densidad de cuerdas se espera además interacciones entre ellas y por tanto no se fragmentarían independientemente.

## 4.3. Producción de partículas en el SPM

Como se ha mencionado previamente, la multiproducción de partíciulas puede explicarse usando el concepto de cuerdas de color, las cuales se estiran entre los partones del proyectil y los partones del blanco [24, 25, 26, 31, 32, 33]. La hadronización de éstas conlleva a la producción de hadrones que son las partículas que finalmente detectamos. Una característica particular del modelo de Percolación de Cuerdas de Color, (SPM), es que las cuerdas estás restringidas a ocupar un área finita en el espacio transverso. En términos del campo de color, pueden ser consideradas como tubos de flujo de color que unen a los partones colisionantes, los cuales en el espacio transverso están delimitados por un disco de radio finito y esto es así porque los partones están confinados dentro de los nucleones.

Así, la creación de partículas se hace vía emisión de pares $q\bar{q}$ provenientes del campo de la cuerda (más apropiadamente, del campo de color confinado dentro del área de la cuerda). El mecanismo es parecido al que describe el modelo de Schwinger para la producción de pares $e^+e^-$ en un campo eléctrico constante. Es importante mencionar que la dimensión de la cuerda es una propiedad independiente de la forma de las distribuciones de partones producidos (por ejemplo, distribuciones en el espacio de momento), en contraste a lo que uno podría imaginar si consideramos estas cuerdas como una distribución de partones (gluones). En otras palabras, no es una consecuencia que los partones producidos con alto momento transverso provengan solamente de cuerdas de grandes dimensiones. De manera similiar que en QED, en el modelo de cuerdas de color, la magnitud promedio de momento transveso de los partones emitidos tienen está determinado por la magnitud del campo cromoeléctrico.

Realizar colisiones en el régimen de bajas energías entre hadrones y nucleos de bajo número atómico no trasciende a tener diferencia en los resultados. De hecho, las pocas cuerdas (debido a los pocos nucleones y por tanto pocos partones), que a su vés podemos ver como discos están separdas por grandes distancias unas de las otras que la hadronización de unas no se verá influenciada por la presencia de otras. Sin embargo, cuando incrementamos la energía y/o el número atómico, el número de cuerdas crece. A medida que el número de cuerdas crece comienzan a translaparse formando clusters de manera parecida a los que se forman en la teoría de percolación en dos dimensiones (ver sección 4.1). En particular, a un valor de densidad crítica de cuerdas, un cluster de dimensiones macroscópicas aparece, lo cual marca una transición de fase [35, 36, 37].

El estudio de las observables implicadas debe introducir un análisis de la dinámica de interacción entre cuerdas, es decir, el comportamiento de un cluster. Se puede hacer una aproximación a este estudio considerando que un cluster se comporta como una sola cuerda, la cuela es resultado de la fusión de todas aquellas que inicialmente conformaron al cluster y con un respectivo campo de color más grande ( “cuerda de color” [33]). Este escenario de fusión ha sido implementado en algoritmos de Monte-Carlo el cual predice un decremento en las multiplicidades, correlaciones delatera-trasera (FBC) y también un aumento de la extraneza bariónica, todas éstas de acuerdo con las tendencias experimentales.

En una situación típica donde las cuerdas parcialmente se translapan no puede esperarse que se fusionen y formen un sola cuerda especialemente si el área de translape es pequeña. El área ocupada por un cluster se divide en un número de áreas de diferentes dimensiones, esto también puede verse como la división de un cluster en varios distintos con diferentes números de cuerdas incluso puede haber aquellos en los cuales ni existe translape de cuerdas. En tales “subclusters”, el campo de color total será la suma de los campos que inducen cada una de las cuerdas independientemente. Como resultado de este proceso uno puede asumir que la emisión de pares $q\bar{q}$ se da de manera independiente, governado por la magnitud del campo de color en cada uno de los subclusters. Bajo este tratamiento, el agrupamiento de cuerdas conlleva a la proleferación de clusters mas que a un proceso de fusión de cuerdas dado que un conjunto de cuerdas que se translpan es considerado como una cuerda distinta. Como se mecionado dentro de una de las carracterístcas importantes de la cuerda, no solamente difieren en el campo de color que se les asocia si no también en su tamaño (área transversa). Considere el ejemplo de donde cuerdas que se translapan parcialmente (Figura 4.3) [38].

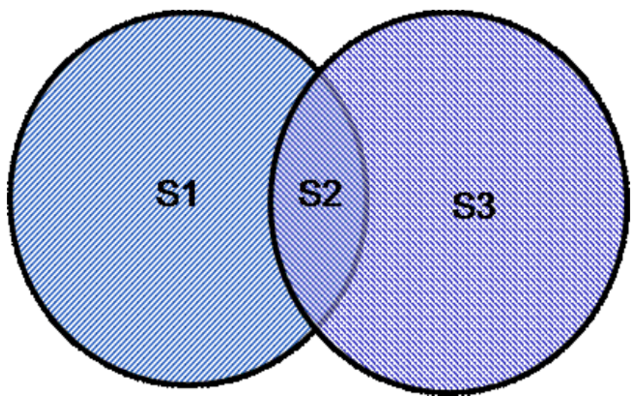



Figura 4.3: Proyección de dos cuerdas que se translapan en el plano transverso [38].

Se pueden distinguir tres regiones: regiones 1 y 3 no se presenta un translape y el campo de color es el mismo al de las cuerdas originales, en la región 2 se presenta translape de dos cuerdas, ambos campos de color se suman lo cual resulta en un nuevo campo de color para ésta región. En esta aproximación, la producción de partículas sucederá de manera independiente de las tres áreas, de las tres diferentes “cuerdas” que corresponden a las área 1,2 y 3. En este sentido, la interacción de dos cuerdas se hizo a través de la partición de dos cuerdas en tres de diferente color, área y forma.

Hacemos énfasis en que la dinámica asumida arriba es independiente de la forma geométrica que puede adoptar el cluster. Sin embargo la transición de fase (percolación) está crucialmente ligada con la dinámica de interacción entre las cuerdas. Sin interacción alguna entre cuerdas, la formación de clusters no afecta las observables físicas y por ende una transición de fase no será percibida. Cuando existe interacción entre las cuerdas que conforman los clusters y por ende percolación, las implicaciones físicas quedab bien remarcadas en las observables. En la subsecuente sección revisaremos las implicaciones importantes en las observables; multiplicidades y distribuciones de momento transverso de las partículas producidas.

## 4.4. Multiplicidades y distribuciones de momento transverso

Como se mencionó, la dinámica de interés es aquella en la que existe interacción entre cuerdas y que repercute en ciertas observables. Consideremos una cuerda que se estira entre un quark y un antiquark con área transversa $S_1$. Emite partones con una distribución de momento transverso

$$I_0(y,p) \equiv \frac{4\pi d\sigma}{dyd^2p} = Ce^{-\frac{m_\perp^2(p)}{t_1}} \tag{4.9}$$

donde $t_1$ representa la tensión de la cuerda, $m_\perp^2 = m^2 + p^2$ con $m$ y $p$ son la masa y momento transverso del partón emitido. En lo siguiente consideraremos piones como las partículas emitidas donde tomamos $m = 0$. De acuerdo con el mecanismo de Schwinger, $t_1$ es proporcional a la tensión del campo responsable de la emisión de partículas y por tanto a la carga de color en los extremos de la cuerda [33, 34]. Para una cuerda que se estira entre un quark y un antiquark, $t_1$ es proporcional a la carga de color del quark al cuadrado $Q_0^2$. Conforme a la ecuación **??**, el momento transverso cuadrado promedio está asociado con $t_1$; $< p_t^2 >= t_1^2$ y es por tanto proporcional a $Q_0$. Denotamos a la multiplicidad de partículas producidas por unidad de rapidéz como $\mu_1$ el cual también es proporcional a la carga de color [33, 34].

Consideremos ahora dos cuerdas de área transversa $S_1$ cada una, parcialmente sobrepuestas en el área $S^{(2}$ (región dos de Figura 4.3), así $S^{(1} = S_1$ - $S^{(2}$ es el área de cada cuerda que no se translapa con la otra. Una manera simple de asociar densidad de color a una cuerda es $q = Q_0/S_1$. Para cuerdas que se translapan parcialmente, la carga de color en cada una de las área que no se translapan será

$$Q_1 = qS^{(1)} = Q_0(S^{(1)}/S_1) \tag{4.10}$$

En el área de translape, la carga de color es

$$\bar{Q}_2 = qS^{(2)} = Q_0(S^{(2)}/S_1) \tag{4.11}$$

La carga de color total en el área de translape $Q_2$ cprresponde a la suma vectorial de los dos colores que se translapan $qS_2$. Esta suma de carga de color al cuadrado debe conservarse [33]. Así $Q_2^2 = (\boldsymbol{Q_{ov}} + \boldsymbol{Q'_{ov}})$ donde $\boldsymbol{Q_{ov}}$ y $\boldsymbol{Q'_{ov}}$ son los dos colores vectoriales en el área de translape. Dado que los dos colores en general pueden estar orientados de manera arbitraria, el promedio de $\boldsymbol{Q_{ov}Q'_{ov}}$ es cero. Por tanto $Q_2^2 = ({Q_{ov}}^2 + {Q'_{ov}}^2)$ y por tanto tenemos

$$Q_2 = \sqrt{2}qS^{(2)} = \sqrt{2}Q_0(S^{(2)}/S_1) \tag{4.12}$$

Nótese que debido a la naturaleza vectorial, la carga de color en la región de translape es menor que la suma de los dos colores que se translapan.

Como hemos meniconado, las más simples observables, la multiplicidad $\mu$ y el momento transverso cuadrado promedio $< p_t^2 >$, están crucialmente relacionadas con la intensidad del campo en la cuerda y por ende con la magnitud de la carga de color. Justamente, ambas observables son proporcional al color [33, 34] . Si asumimos emisión independiente por parte de las tres regiones, 1, 2 y 3 (Figura 4.3) tenemos para la multiplicidad

$$\frac{\mu}{\mu_1} = 2(S^{(1)}/S_1) + \sqrt{2}S^{(2)}/S_1, \tag{4.13}$$

donde $\mu_1$ es la multiplicidad de una simple cuerda. Para hallar $< p_t^2 >$ uno tiene que dividir la suma de momento transverso cuadrado promedio de todas las partículas observadas por la multiplicidad total. De esta manera para el cluster de dos cuerdas tenemos

$$\begin{aligned}\frac{< p_t^2 >}{< p_t^2 >_1} &= \frac{2(S^{(1)}/S_1) + \sqrt{2}\sqrt{2}(S^{(2)}/S_1)}{2(S^{(1)}/S_1) + \sqrt{2}(S^{(2)}/S_1})\\ &= \frac{2}{2(S^{(1)}/S_1) + \sqrt{2}(S^{(2)}/S_1)}\end{aligned} \tag{4.14}$$

donde $< p_t^2 >_1$ es el promedio de momento transverso cuadrado para un sola cuerda.

La generalización para cualquier número $N$ de cuerdas que se translapan, se obtiene

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \sum_i \sqrt{n_i}\Big(\frac{S^{(i)}}{S_1}\Big), \tag{4.15}$$

donde la suma es sobre cada cluster $i$ que contiene $n_i$ cuerdas de áreas $S^{(i)}/S_1$. Similarmente para $< p_t^2 >$ tenemos

$$\frac{< p_t^2 >}{< p_t^2 >_1} = \frac{\sum_i n_i(S^{(i)}/S_1)}{\sum_i \sqrt{n_i}(S^{(i)}/S_1)} = \frac{N}{\sum_i \sqrt{n_i}(S^{(i)}/S_1)} \tag{4.16}$$

En la segunda igualdad hemos usado la identidad $\sum_i n_i S^i = NS_1$. Nótese que a partir de las expresiones 4.15 y 4.16 se deduce una simple relación de conservación entre el número total de cuerdas con la multiplicidad y momento transverso total.

$$\frac{\mu}{\mu_1}\frac{< p_t^2 >}{< p_t^2 >_1} = N, \tag{4.17}$$

la cual se le atribuye un significado de conservación del momento transverso total producido.

Las ecuaciones 4.15 y 4.16 no son tan simples de aplicar. Para calcular las sumas sobre $i$, pareciera que debemos identificar cada uno de los traslapes individuales para cualquier número de cuerdas además de sus respectivas áreas de traslape. Sin embargo identificar cada uno de los traslapes individuales y sus áreas puede no ser tan necesario. Se puede combinar a todos los términos que contengan un cierto número de cuerdas que se traslapan $n_i = n$ en un solo término, el cual suma todos esos traslapes en un área total $S_n^{tot}$. Así tenemos una nueva forma para las ecuaciones 4.15 y 4.16

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{n}\Big(\frac{S_n^{tot}}{S_1}\Big), \tag{4.18}$$

y

$$\frac{< p_t^2 >}{< p_t^2 >_1} = \frac{N}{\sum_{n=1}^{N} \sqrt{n}\Big(\frac{S_n^{tot}}{S_1}\Big)} \tag{4.19}$$

Consideremos ahora las proyecciones de las cuerdas sobre el espacio transverso la cuales se distribuyen uniformemente en una área total $S$ con una densidad $\rho$ . Introduzcamos el siguiente parámetro adimensional (“parámetro de percolación”)

$$\xi = \rho S_1 = \frac{NS_1}{S} \tag{4.20}$$

De la ecuación 4.18 vemos que la multiplicidad es atenuada

$$F(\xi) = \frac{\mu}{N\mu_1} = \frac{< \sqrt{n} >}{\xi} \tag{4.21}$$

donde el promedio es tomado usando la distribución de Poisson (Ecuación 4.2)

El comportamiento de $F(\xi)$ se muestra en la Figura 4.4(a). Suavemente disminuye empezando en uno en $\xi = 0$ a valores cercanos a 0.5 en $\xi = 4$ hasta decayer de forma $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$ para valores grandes de $\xi$. Conforme a la Ecuación 4.19, el comportamiento de $< p_t^2 >$ es de manera creciente en función de $\xi$.

Nos podemos dar una idea de del factor de refucción $F(\xi)$ a partir de la reducción en el área debido al traslapamiento de las cuerdas. La fracción de área ocupada por las cuerdas está dado por (Ecuación 4.2)

$$\sum_{n=1} p_n = 1 - e^{-\xi} \tag{4.22}$$

Así la compresión está dada por la Ecuación 4.22 dividida por $\xi$. Por tanto el factor de reducción de la multiplicidad está dado por la raíz cuadrada de la compresión

$$F(\xi) = \sqrt{\frac{1 - e^{-\xi}}{\xi}} \tag{4.23}$$

Nótese como el factor que redu

La ecuación 4.23 se ajusta muy bien al resultado exacto, como se muestra en la Figura 4.4 por la linea punteada.

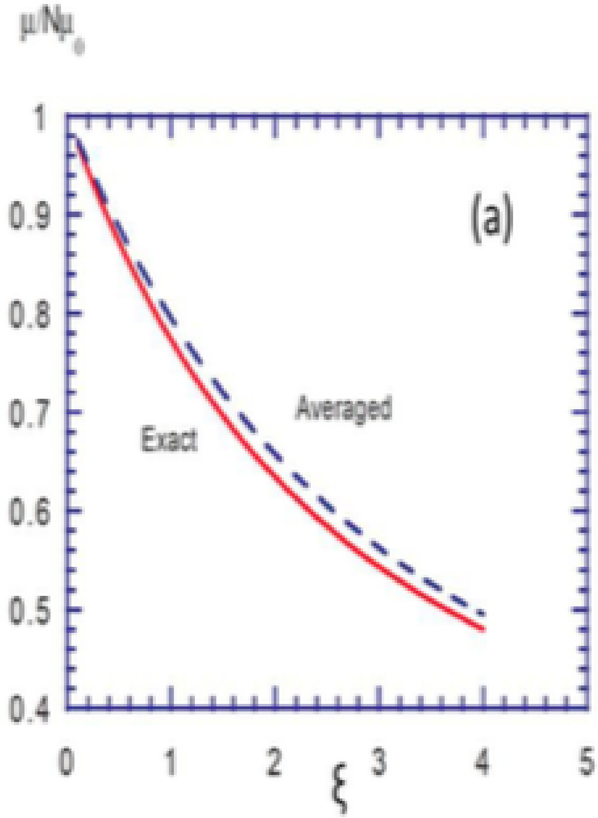



Figura 4.4: Reducción de la multiplicidad en función de $\xi$

## 4.5. $v_2$ en el modelo de percolación de cuerdas (SPM)

El Modelo de Percolación de Cuerdas (SPM) tiene como ingrediente básico cuerdas de color que se translapan y forman clusters (Sección **??**). La asimetría acimutal tiene su origen en la desviación del centro de ambos círculos cuando se translapan, esta desciación está descrita por el parámetro de impacto $b$ (Figura 3.1), para colisiones no centrales, $b > 0$. Realizar mediciones de producción en una región comprendida entre dos ángulos acimutales, es necesario conocer la densidad direccional, esto es, un densidad del medio en función de $R_\varphi$ (Figura 5.7). Por simplicidad hacemos la siguiente suposición

$$\frac{\pi R^2}{4} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R_\varphi^2 d\varphi \tag{4.24}$$

donde $R$ correspondeal radio de un círculo y $R_\varphi$ está dado por

$$R_\varphi^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + R_A^2 - bR_A\left[\sqrt{1-\left(\frac{bsen(\varphi)}{2R_a}\right)^2} cos(\varphi) + \frac{b}{2R_A} sen(\varphi)^2\right] \tag{4.25}$$

o

$$\langle R_\varphi^2\rangle = R^2 \tag{4.26}$$

Como el número de fuentes de color es el mismo dentro del cículo y dentro del elipsiode y como densidad direccional está relacionada con la densidad promedio por la expresión

$$\rho_\varphi = \rho\left(\frac{R}{R_\varphi}\right)^2 \tag{4.27}$$

uno espera que $\langle p_T^2$ y $\mu$ sean mayores en el plano de reacción, $\varphi = 0$.

Consideremos un modelo más simple que (**??**), el cual es el modelo de Schwinger con percolación

$$\frac{2}{\pi}\frac{dN}{dp_T^2} \sim e^{-F(\rho)\frac{p_T^2}{\langle p_T^2\rangle}} \tag{4.28}$$

para la sección transversal integrada y

$$\frac{dN}{dp_T^2 d\varphi} \sim e^{-F(\rho_\varphi)\frac{p_T^2}{\langle p_T^2\rangle}} \tag{4.29}$$

en una dirección $\varphi$. A partir de (4.28) y (4.29) tenemos la siguiente relación

$$\frac{\langle p_T^2\rangle_\varphi}{\langle p_T^2\rangle} = \frac{F(\rho)}{F(\rho_\varphi)} \tag{4.30}$$

El factor direccional relevante es el factor $F(\rho)p_T^2$ o $F(\rho_\varphi)p_T^2$. Definimos para una ventralidad dada las siguientes cantidades

$$\left.\frac{dN}{dydp_T^2}\right|_{y=0} \equiv f(F(\rho), p_T^2) \tag{4.31}$$

y

$$\left.\frac{dN}{dydp_T^2 d\varphi}\right|_{y=0} \equiv f(F(\rho_\varphi), p_T^2) \tag{4.32}$$

Tatamos a la distribución acimutal como una perturbación al rededor de la distribución isotrópica. Tal aproximación se puede expresar de la siguiente manera

$$f(F(\rho_\varphi), p_T^2) \approx \frac{2}{\pi} f(F(\rho), p_T^2)\left[1 + \frac{\partial ln f(F(\rho), p_T^2)}{\partial R^2}(R_\varphi^2 - R^2)\right] \tag{4.33}$$

Nótese que (**??**), debido a la condición (4.26) se satisface

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(F(\rho_\varphi), p_T^2) d\varphi = f(F(\rho), p_T^2) \tag{4.34}$$

Es de suponer que un decremento en $R^2$ ocasionaría un incremento en la densidad de la fuente y consecuentemente un incremento en la producción de partículas, así que en (4.34)

$$\frac{df(F(\rho),p_T^2)}{dR^2} < 0 \tag{4.35}$$

siendo a su vés consecuente de la expresión (4.33), que se obtiene la máxima producción de partículas para $\varphi \sim 0$.

Escribimos ahora la expresión para la observable de nuestro interés de estudio en esta tesis, es decir, la expresión que describe al flujo elíptico ($v_2$). En la sección **??** se presentó una manera de escribir la multiplicidad de las partículas producidas en una colisión, es decir, mediante una expansión en serie de Fourier de la misma (3.1). El segundo coeficiente de Fourier el cual es de nuestro interés porque describe el patrón de flujo elíptico ($v_2$) está dado por

$$v_2(p_T^2) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi cos(2\varphi)\left[1 + \frac{\partial lnf(F(\rho),p_T^2)}{\partial R^2}(R_\varphi^2 - R^2)\right] \tag{4.36}$$

usando la expresión (**??**) tenemos finalmente que

$$v_2 = A\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi cos(2\varphi)\left(\frac{R_\varphi}{R}\right)^2 \tag{4.37}$$

con

$$A = \frac{1}{\pi}\frac{e^{-\rho} - F(\rho)^2}{F(\rho)^2}\frac{\frac{F(\rho)p_T^2}{\langle p_T^2\rangle_1}}{1 + \frac{F(\rho)p_T^2}{k\langle p_T^2\rangle_1}} \tag{4.38}$$

y $R_\varphi$ dado por la expresión (4.25).

La expresión que se obtuvo para el flujo elíptico es una aproximación general, esto quiere decir que describe el flujo anisotrópico para cualquier tipo de colisión, ya sea entre núcleos o protones. Cabe mencionar que debido a las energías con las cuales colisiona el LHC, la expresión (4.37) debe de dar un buena aproximación de los datos que se pueden tener en colisiones protón-protón.

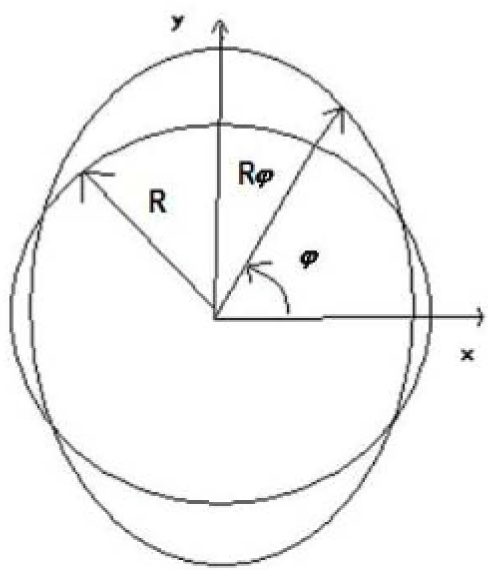



Figura 4.5: asd.

# Capítulo 5

# Resultados

## 5.1. Cálculo de la contribución al flujo elíptico $v_2$ en SPM para los eventos de alta multiplicidad

Como se observo el el catítulo 3 el Modelo de Percolación de Cuerdas de Color esta principalmente caracterizado por la densidad de cuerdas del sistema, en términos de esta densidad de energía $\xi$ y de la tensión característica de la cuerda se puede describir la multiproducción de partículas en las colisiones $p-p$ como [?, ]

$$\frac{dN}{d\eta} = kF(\xi)N^s \tag{5.1}$$

con $k \sim ,63$ un factor de normalización y $F(\xi)$ el factor de reducción de color que como se mencionó en el capítulo 3 disminuye la tasa de incremento de la multiplicidad conforme aumenta a densidad de cuerdas del sistema, por debajo de 200 GeV $\xi$ es pequeña por lo que $F(\xi) \simeq 1$.

El número de cuerdas para las colisiones p-p esta dado como

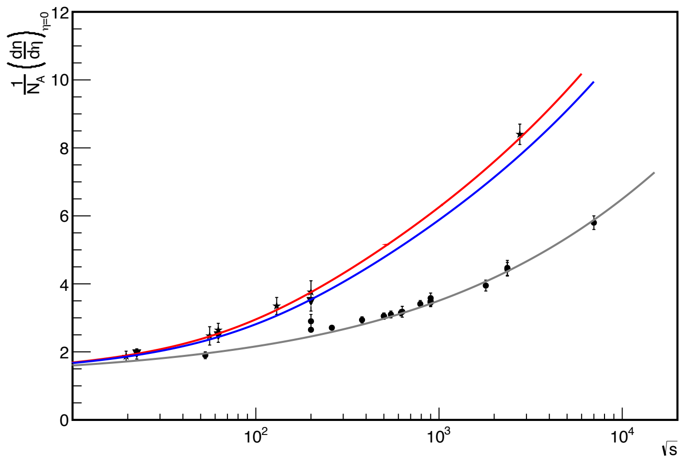
$$N^s_{pp} = 2 + 4(\frac{r_0}{R})^2(\frac{\sqrt{s}}{m_p})^{2\lambda}, \tag{5.2}$$

con $m_p$ la masa del proton y $\lambda$ un parámetro constante [?, ] La expresión 5.1 ha sido ajustada para diferentes energías en p-p como muestra la figura acontinuación siendo que esta misma expresión describe como una ley de potencias a la producción de partículas cargadas en colisiones N-N, con los parámeros $\lambda$ y $k$ comunes a ambas descripciones.

Recientemente las mediciones del experimento CMS en el LHC han medido el espectro de momento transverso $p_T$ de las partículas cargadas [] para las colisiones p-p a energías $\sqrt{s} = ,9, 2{,}76, 7$ TeV en una region de rapidez $|y| < 1$ para diferentes clases de eventos dependiendo en el número medio de partículas cargadas, $\langle N_{ch} \rangle$ en el intervalo de pseudorapidez $|\eta| < 2{,}4$. Estas mediciones hacen posible un estudio en colisiones p-p para un analogó en centralidad. Para estos eventos se determino la densidad de cuerdas correspondiente al Modelo de percolación de cuerdas de Color, mediante los ajustes a el espectro de la distribución de momento transverso para partículas cargadas [?, ?, ] para diferentes clases de eventos de alta multiplicidad dado que el espectro momento transverso invariante en el Modelo de SPM esta dado por una la ley de potencias:

$$\frac{d^2N}{dp_T^2} = \frac{a}{[p_0 + p_T]^\alpha} \tag{5.3}$$

donde $p_0$ y $\alpha$ son pará metros dependientes de la energía, esto no lleva a una descripción de la




distribución de momento transverso para los eventos de alta multiplicidad

$$\frac{d^2N}{dp_T^2} = \frac{a'}{[p_0\sqrt{\frac{F(\xi)}{F(\xi_{HM})}} + p_T]^\alpha} \tag{5.4}$$

Aquí $\xi_{HM}$ es usada para la densidad de cuerdas en los eventos de alta de multiplicidad. Lo que nos lleva a la expresión

$$\frac{1}{N}\frac{d^2N}{d\eta dp_T} = \frac{a(p_0\frac{F(\zeta_{pp})}{F(\zeta_{HM})})^{\alpha-2}}{[p_0\sqrt{\frac{F(\zeta_{pp})}{F(\zeta_{HM})}} + p_T]^{\alpha-1}} \tag{5.5}$$

La cual es usada para obtener las densidades correspondientes a las diferentes clases de multiplicidad [?] obteniendo los valores correspondientes a diferentes energías de $\xi_{HM}$ y su correspondiente centralidad o sección eficaz determinada por $R$ en la expresión 5,2

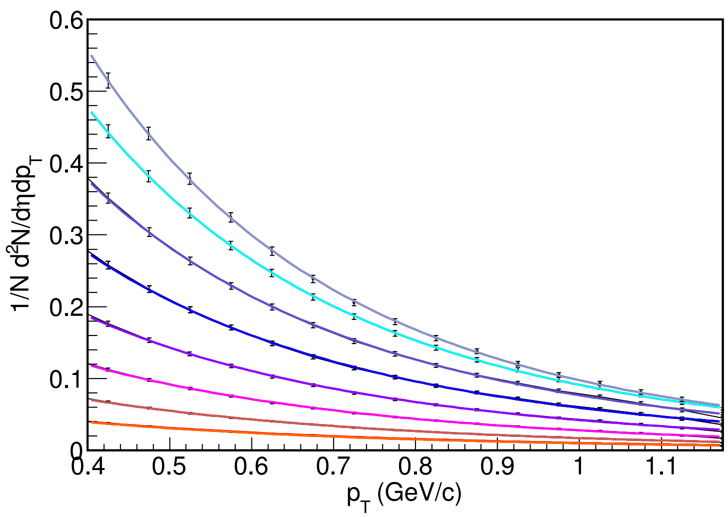



Figura 5.1: Distribución de momento transverso a $\sqrt{s} = 7$ TeV

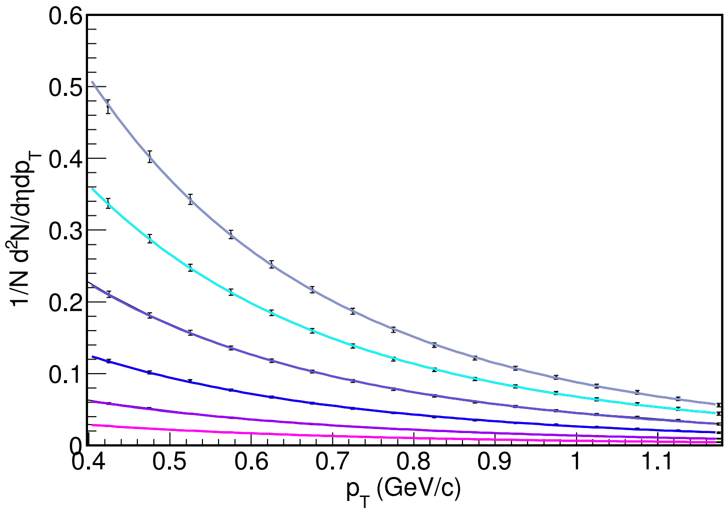



Figura 5.2: Distribución de momento transverso a $\sqrt{s} = 2760$ GeV

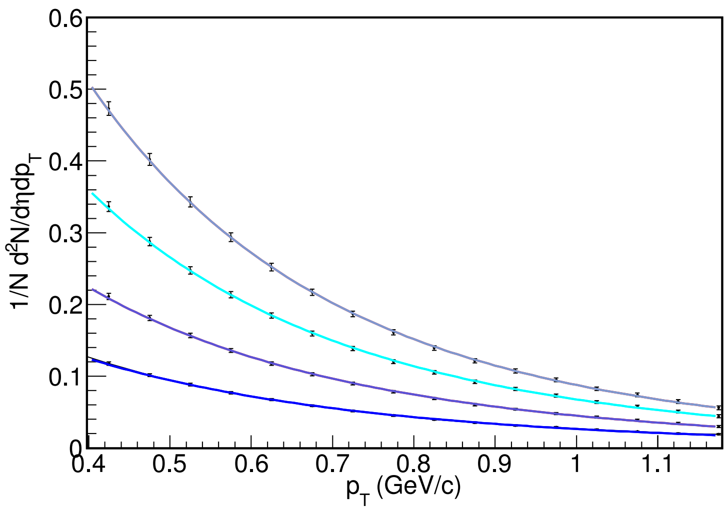



Figura 5.3: Distribución de momento transverso a $\sqrt{s} = 900$ GeV

| $\sqrt{s}$ | 7 (TeV) | | 2.76 (TeV) | | 900 (GeV) | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $dN/d\eta$ | $\zeta_{HM}$ | $R$ | $\zeta_{MH}$ | $R$ | $\zeta_{MH}$ | $R$ |
| 13.33 | 0.77 ± .13 | 0.62 ± .010 | 1.30 ± .15 | 0.48 ± .008 | 1.75 ± .15 | 0.37 ± .005 |
| 17.33 | 1.42 ± .15 | 0.50 ± .008 | 2.09 ± .18 | 0.39 ± .006 | 2.49 ± .19 | 0.30 ± .005 |
| 21.0 | 1.98 ± .18 | 0.43 ± .007 | 2.78 ± .21 | 0.33 ± .006 | 3.13 ± .23 | 0.26 ± .004 |
| 25 | 2.53 ± .21 | 0.37 ± .006 | 3.52 ± .27 | 0.29 ± .005 | 3.55 ± .28 | 0.23 ± .004 |
| 28.67 | 3.02 ± .23 | 0.34 ± .006 | 4.03 ± .31 | 0.26 ± .005 | | |
| 32.67 | 3.42 ± .26 | 0.31 ± .005 | 4.33 ± .36 | 0.24 ± .005 | | |
| 36.33 | 3.89 ± .30 | 0.28 ± .005 | | | | |
| 40. | 4.40 ± .36 | 0.26 ± .005 | | | | |
| 43.67 | 4.98 ± .40 | 0.24 ± .005 | | | | |

Tabla 5.1: Valores de $dN/d\eta$, $\zeta_{HM}$, y $R$ para $\langle N_{track} \rangle$ en colisiones p-p para las clases de alta multiplicidad

Utilizando el $N_{track} = 120$ con el valor de $\xi_{HM}$ y $R$ realizamos un fit de la formula de flujo elíptico 4.17 a los datos obtenidos en el estudio de la referencia [59] para tener una normalización equivalente a los datos medidos de ALICE obtenemos un parámetro de $a = 0{,}394 \pm 0{,}011$, que nos da un valor consistente de $v_2$ con los predichos en las referencias [**?**, ]][].

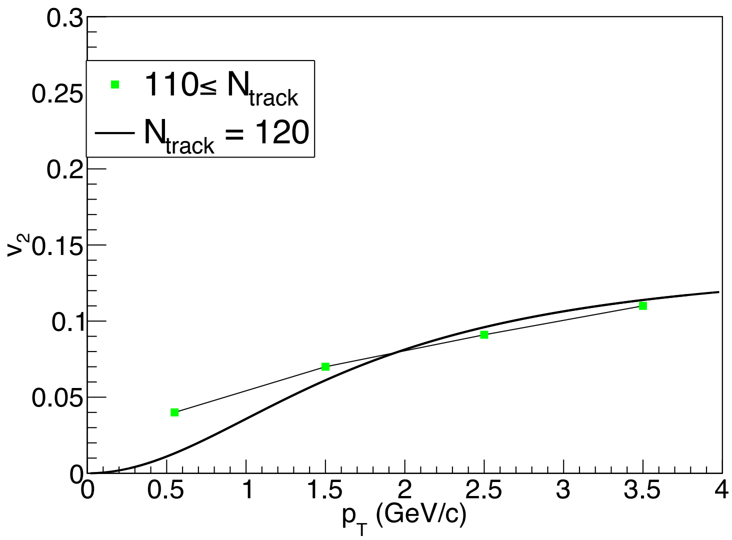



Figura 5.4: Fit para $N_{tract} = 120$ correspondiente a un valor de $dN/\eta = 40$ Tabla 5.1

Con el valor de normalización obtenido $a$, los valores de la Tabla 5.1 y la formula para el flujo elíptico en SPM dada por la ecuación 4.17 obtenemos los siguientes resultados para las diferentes clases de multiplicidad a las energías de 900 GeV, 2.76 TeV y 7 TeV los resultados se muestran acontinuación en las Figuras 5.4 a 5.6.

Las Figuras 5.4, 5.5 y 5.6 muestran un incremento en la contribución de $v_2$ con la energía de la colisión.

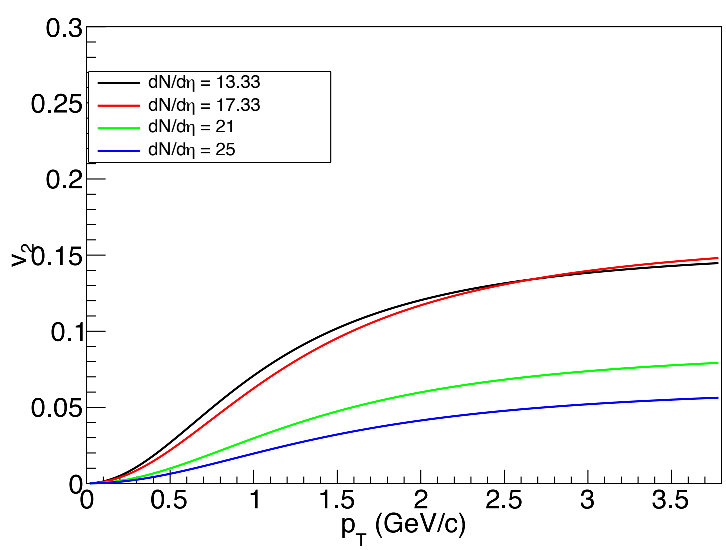



Figura 5.5: Contribución de Flujo elíptico para colisiones p-p a $\sqrt{s} = 900$ GeV

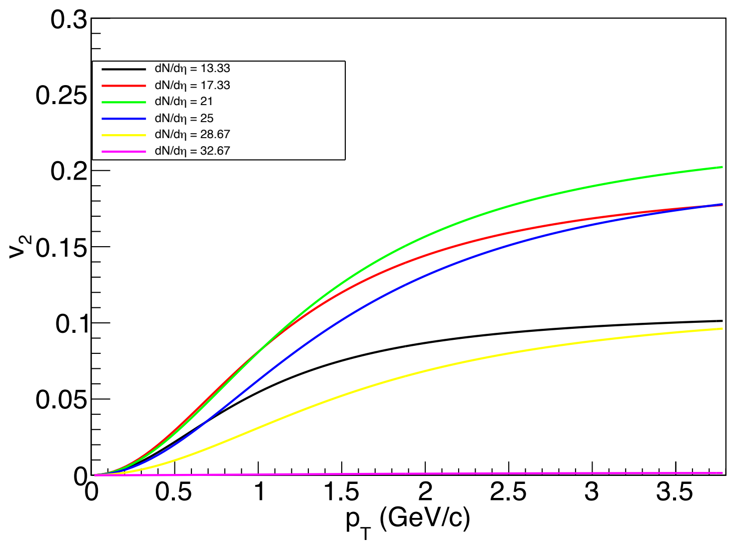



Figura 5.6: Contribución de Flujo elíptico para colisiones p-p a $\sqrt{s} = 2760$ GeV

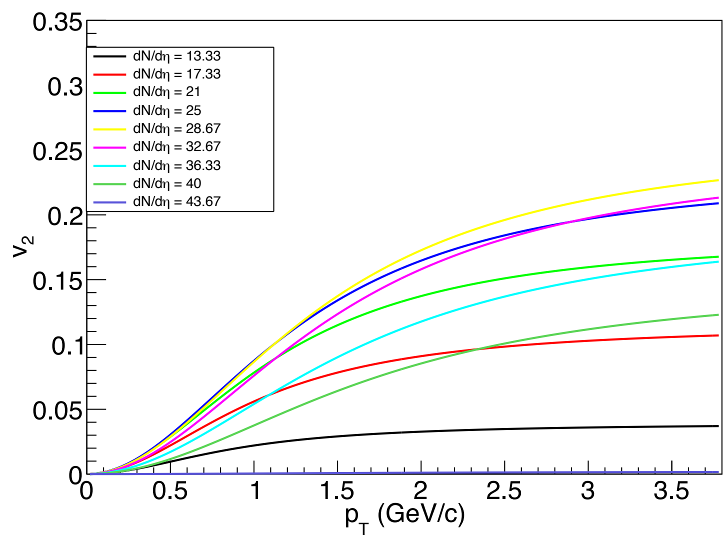



Figura 5.7: Contribución de Flujo elíptico para colisiones p-p a $\sqrt{s} = 7$ TeV

# Capítulo 6

# Conclusiones

El el presente manuscrito se presentáron las predicciones para la medida de fluidez (flujo elíptico) del medio creado en los eventos de alta multiplicidad de sistemas pequeños este es el caso de la colisiones de p-p a las energías del LHC. Se observo que la contribución a el flujo elíptico $v_2$ es diferente de cero y que su magnitud esta dominada principalmente por la sección eficaz dependiente de $R$ que se incremente conforme se incrementa la energía en el centro de masas de la colisión. Se observa un incremento con la centralidad hasta una centralidad media y una supresión para centralidades mucho mayores como ocurre en el caso de las colisiones Núcleo -Núcleo. Esto es que para los eventos de alta multiplicidad se en las colisiones p-p se presenta un flujo elíptico no nulo generado por la colectividad del medio y la transicición geomĺetrica de estado a un sistema colectivo en el Modelo de percolación de cuerdas de color.

# Bibliografía


[1] T. D. Lee, *Conf Proc C*,741017 (1974) 65

[2] F. Karsch, E. Laerman y A. Peikert, Phys. B 605 (2001) 579.

[3] The Phenix Collaboration, Nucl. Phys. A757, 184-283, 2005.

[4] M. A. Braun, J. D. de Deus, et al., arXiv:1501.01524 [nucl-th] (2015).

[5] I. Bautista, C. Pajares, J. G. Milhano y J. Dias de Deus, Phys. Rev. C 86 (2012) 034909

[6] I. Bautista, C. Pajares, J. G. Milhano y J. Dias de Deus,Phys. Lett. B 715 (2012) 230.

[7] I. Bautista, C. Pajares y J. Dias de Deus, Nucl. Phys. A **882** (2012) 44.

[8] I. Bautista, C. Pajares y J. Dias de Deus, Eur. Phys. J. C 72 (2012) 2038.

[9] I. Bautista y C. Pajares, Phys. Rev. C 82 (2010) 034912.

[10] I. Bautista, C. Pajares, L.Cunqueiro y J. D. de Deus, Phys. G 37 (2010) 015103. 11.

[11] The CMS Collaboration The CMS Collaboration, JHEP 1009, 091, 2010.

[12] I. Bautista y J. Dias de Deus,Phys. Lett. B 718 (2013) 1571.

[13] A. Romanino, Lecture notes "The Standard Model of Particle Physics"SLAC-STANFORD

[14] D. Griffiths, Ïntroduction to Elementary Particles", Jhon Wiley and Songs, Inc. 1987.

[15] I. Y. Pomeranchuk *Quantum chromodynamics and the pomeron*, Sov. Phys. JETP 3 (1956) 306.

[16] arXiv:1408.0079v1

[17] V.N. Gribov, L.N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. 15, 438, 675 (1972). L.N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. 20, 94 (1975), G. Altarelli, G. Parisi, Nucl. Phys. B126, 298 (1977). Yu. L. Dokshitzer, Sov. Phys. JETP 46, 641 (1977). G. Curci, W. Furmanski, and R. Petronzio, Nucl.Phys. B175, 27 (1980). S. Moch, J. Vermaseren, and A. Vogt, Nucl.Phys. B688, 101 (2004) [arXiv:hep-ph/0403192], A. Vogt, S. Moch, and J. Vermaseren, Nucl.Phys. B691, 129 (2004) [arXiv:hep-ph/0404111].

[18] R. Hanbury Brown y R. Q. Twiss, *A test of a New Type of Stellar Interferometer on Sirius*, Nature, 178: 1046-1048 (1956)

[19] K. Yagi, T. Hetsuda and Y. Miake. y U. Wiedemann, *Quark-Gluon Plasma. From the big bang to little bang.*,Cambridge University press (2005).

[20] M. A. LISA, S. PRATT, R. SOLTZ y U. WIEDEMANN, *Femtoscopy in relativistic heavy ion collisions:Two Decades of Progress*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 55: 357–402 (2005).

[21] BO ANDERSSON, *The Lund Model*, Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology.

[22] G. BALI y K. SCHILLING, *Static quark - anti-quark potential: Scaling behavior and finite size effects in SU(3) lattice gauge theory*, Phys.Rev. D46 (1992) 2636–2646.

[23] A. CAPELLA, U. SUKHATME, C.-I.TAN y J. TRAN THANH VAN, *Dual Parton Model*, Phys. Rep. 236 (1994) 225.

[24] A. CAPELLA, U. SUKHATME, C.-I.TAN y J. TRAN THANH VAN, *Jets in small $p_T$ hadronic collsions, universality of quark fragmentation, and rising rapidity plateaus* , Phys. Lett. B 81 (1979) 68.

[25] K. WERNER, *Strings, pomerons and the VENUS model of hadronic in- teractions at ultra-relativistic energies*, Phys. Rep. 232 (1993) 87.

[26] A. B. KAIDALOV, y K. A. TER-MARTIROSYAN, *Pomeron as quark-gluon strings and multiple hadron production at SPS-collider energies*, Phys. Lett. B 117 (1982) 247.

[27] K. WERNER ET AL., *Gribov-Regge theory, partons, remnants, strings-and the EPOS model for hadronic interactions*, Nucl. Phys. B Proc. suppl. 196 (2009) 36.

[28] F. W. BOPP, J. RANFT, R. ENGEL , y S. ROESLER, *Learning from RHIC data with DPMJET-III*, Acta. Phys. Polon. B 35 (2004) 303.

[29] ,H. SATZ,*Extreme states of matter in strong interaction physics*, Lecture Notes in Physics 841, Springer 2012.

[30] ,I. Y. POMERANCHUL,*Quantum chromodynamics and the pomeron*, Sov. Phys. JETP 3 (1956) 306.

[31] ,B. ANDERSSON, G. GUSTAFSON, B. NILSSON-ALMQVIST,*A model for low $p_t$ hadronic reactions with generalizations to hadron-nucleus and nucleus-nucleus collisions*, Nucl. Phys. B 281 (1987) 289.

[32] ,M. GYULASSY, CERN preprint CERN -TH 4794, 1987.

[33] ,T. S. BIRO, H. B. NIELSEN, J. KNOLL, *Color rope model for extreme relativistic heavy ion collisions* Nucl. Phys. B 245 (1984) 449.

[34] ,A. BIALAS, W. CZYZ, *Conversion of color field into qq matter in the central region of high-energy heavy ion collisions* Nucl. Phys. B 267 (1986) 242.

[35] ,N. ARMESTO, M. A. BRAUN, E. G. FERREIRO, C. PAJARES, *Percolation approach to Quark-Gluon Plasma and J/Ψ suppression* Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 3736.

[36] ,M. NARDI, H. SATZ, *String clustering and J/Psi suppression in nuclear collisions* Phys. Lett. B 442 (1998) 14.

[37] ,M. A. BRAUN, C. PAJARES, J. RANFT, *Fusion of strings vs. percolation and the transition to the Quark-Gluon Plasma* Int. J. Mod. Phys. A 14 (17) (1999) 2689.

[38] ,M. A. BRAUN, C. PAJARES, *Implications of color-string percolation on multiplicities, correlations, and the transverse momentum* IEur. Phys. J. C 16 (2000) 349.

[39] ,J. Y. OLLITRAULT, Phys. Rev. D 46, 229 (1992).

[40] ,S. A. Voloshin, A. M. Poskanzer and R. Snellings, in Landolt-Boernstein,*Relativistic Heavy Ion Physics*,Vol. 1/23 (Springer-Verlag, 2010), p 5-54. arXiv:0809.2949 [nucl-ex].

[41] ,U. W. Heinz,arXiv:0901.4355 [nucl-th].

[42] ,P. Huovinen, P. V. Ruuskanen,Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 56, 163 (2006).

[43] ,D. A. Teaney,arXiv:0905.2433 [nucl-th].

[44] ,M. L. Miller, K. Reygers, S. J. Sanders et al., Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 57, 205-243 (2007).

[45] ,STAR collaboration,*Centrality dependence of charged hadron and strange hadron elliptic flow from* $\sqrt{s_{NN}} = 200$ *GeV Au + Au collisions*, Phys. Rev. C., 77: 054901 (2008).

[46] ,ALICE collaboration,*Elliptic flow of charged particles in Pb-Pb collisions at* $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ *TeV*

[47] ,ALICE collaboration,*Elliptic flow of identified hadrons in Pb-Pb collisions at* $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ *TeV*

[48] ,R. Snellings,*Anisotropic flow from RHIC to the LHC*, Eur. Phys. J. C, 49: 87–90 (2007).

[49] ,J.-P. Blaizot, *Theoretical conference summary*, Nucl. Phys. A., 698: 360–371 (2002).

[50] ,ALICE collaboration, *Elliptic Flow of Charged Particles in Pb-Pb Collisions at 2.76 TeV*, Phys. Rev. Lett., 105: 252302 (2010).

[51] ,H. H. Gutbrod et al.,*A new component of the collective flow in relativistic heavy-ion collisions*, Phys. Lett. B, 216: 267–271 (1989).

[52] ,D. d'Enterria et al.,*Estimates of hadron azimuthal anisotropy from multiparton interactions in proton-proton collisions at 14 TeV*, Eur. Phys. J. C, 66: 173–185 (2010).

[53] ,S. K. Prasad, V. Roy, S. Chattopadhyay, and A. K. Chaudhuri,*Elliptic flow (v2) in pp collisions at energies available at the CERN Large Hadron Collider: A hydrodynamical approach*, Phys. Rev. C., 82: 024909 (2010).

[54] ,G. Ortona, G. S. Denicol, P. Mota, and T. Kodama,*Elliptic flow in high multiplicity proton-proton collisions at ps = 14 TeV as a signature of deconfinement and quantum energy density fluctuations* (2009), arXiv:0911.5158 [hep-ph].

[55] ,M. Luzum and P. Romatschke,*Viscous Hydrodynamic Predictions for Nuclear Collisions at the LHC*Phys. Rev. Lett., 103: 262302 (2009).

[56] ,J. Casalderrey-Solana and U. A. Wiedemann,*Eccentricity Fluctuations Make Flow Measurable in High Multiplicity p-p Collisions*Phys. Rev. Lett., 104: 102301 (2010).

[57] ,A. K. Chaudhuri,*Large elliptic flow in low multiplicity pp collisions at LHC energy s = 14 TeV*(2009), arXiv:0912.2578 [nucl-th].

[58] ,L. Cunqueiro, J. Dias de Deus, and C. Pajares, *Nuclear-like effects in proton-proton collisions at high energy*Eur. Phys. J. C, 65: 423–426 (2010).

[59] P. Bo?ek and W. Broniowski, Nucl. Phys. A **931** (2014) 883 [arXiv:1407.6478 [nucl-th]].