



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"INTERACCIÓN DE ONDAS
ELECTROMAGNÉTICAS EN UN SISTEMA DE
PELÍCULAS DELGADAS FRACTAL TIPO
CANTOR-GENERALIZADO"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA:

JESÚS MADRIGAL MELCHOR

ASESOR(ES):

DR. PETER HALEVI

ENERO 2015

RESUMEN

En este trabajo se estudian las propiedades de reflexión y transmisión en un sistema multicapa fractal tipo Cantor. Los coeficientes de reflexión y transmisión son obtenidos para incidencia normal de ondas planas y se calculan para distintas dimensiones fractales y etapas de subdivisión. Estos algoritmos se basan en las propiedades de auto-similaridad del sistema. Los algoritmos obtenidos en este trabajo son una generalización de los presentado por X. Sun y D.L. Jaggard¹.

Observamos que los espectros son periódicos y simétricos. Encontramos que al disminuir la dimensión fractal de los sistema los espectros aumentan su período. Consideramos además la asimetría del sistema, tratandola como parámetro independiente de la dimensión fractal del sistema. La importancia de este parámetro se manifiesta fuertemente en la región de pequeñas frecuencias. Escribimos un índice de refracción efectivo a bajas frecuencias en función de las razones de subdivisión, de la etapa fractal, de los índices de refracción de los diferentes medios del sistema. Se obtiene la dimensión fractal del sistema observando el cambio de la razón entre el perímetro y el área del la curva espectral para diferentes etapas.

¹J. Appl. Phys., 70, 2500, (91)

Indice

Introducción	3
1 Conceptos de Fractales	6
1.1 Introducción	6
1.2 Dimensión fractal	6
1.2.1 Fractales que no pueden ser caracterizados mediante un solo patrón	21
1.2.2 La medida y la dimensión Haussdorf -Besicovitch	24
1.3 Auto-Similaridad y Auto-Afinidad	26
1.4 Conjuntos de Cantor	30
1.4.1 Conjuntos simétricos triádicos de Cantor	30
1.4.2 Conjuntos de Cantor asimétricos con tres razones de escalamiento.	32
1.4.3 Conjuntos de Cantor asimétricos con cinco razones de escalamiento.	34
1.5 Fractales en la Física :ejemplo	36
2 ARREGLO FRACTAL DE PELÍCULAS DELGADAS:caso I	38
2.1 Introducción	38
2.1.1 Cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión de un sistema multicapas.	38
2.1.2 Arreglo fractal de películas delgadas en un medio huesped	40
2.2 Coeficientes de reflexión y transmisión : caso Triádico	40
2.3 Coeficientes de Reflexión y Transmisión: $N = 5$	47
3 Cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión para el caso donde se tiene tres medios distintos(n_0, n_1, n_2).	51
3.1 Algoritmo Recursivo para los Coeficiente de Reflexión y Transmisión para tres razones de subdivisión (r_1, r_2, r_3).	52
3.2 Algoritmo Recursivo para los Coeficientes de Reflexión y Transmisión para cinco razones de subdivisión (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)	61
4 Descusión y Resultados	69
4.1 Análisis del sistema de películas delgadas con tres divisiones iniciales y medio huesped, caso asimétrico.	72

4.2	Análisis del sistema de películas delgadas con cinco divisiones iniciales y medio huesped, caso simétrico.	78
4.3	Análisis del sistema de películas delgadas con cinco divisiones iniciales y medio huesped, caso no simétrico.	81
4.4	Análisis del sistema de películas delgadas con tres divisiones iniciales y $n_2 \neq n_0$, caso asimétrico.	87
5	Conclusiones	94
A	Deducción de los coeficientes de reflexión y transmisión de interface efectivos.	96
B	Deducción del período y simetría dentro de este, para curvas de reflexión, de un sistema fractal de películas delgadas.	99
B.1	Deducción del período	99
B.1.1	Sistema fractal	101
B.2	Simetría de los espectros de reflexión dentro de un período.	102

Introducción

Para describir en forma completa ciertas irregularidades y patrones fragmentados de las formas que aparecen en la naturaleza tales como líneas costeras, nubes, montañas, etc., en 1977, B.B. Mandelbrot generó una nueva geometría. Introdujo el término *Fractal* para identificar la familia de formas descritas por esta geometría. Fenómenos físicos como difusión, movimiento browniano, etc., también muestran un comportamiento fractal. También, mediante algoritmos pueden generarse distintas formas geométricas con estructura fractal.

El estudio de las propiedades físicas constituye una parte importante en el análisis de sistemas con estructura fractal. Los primeros trabajos sobre propiedades ópticas en fractales datan de mediados de la década de los 80's. Estos trabajos tienen como objetivo relacionar la respuesta óptica del sistema con los parámetros característicos del fractal o caracterizar su estructura fractal mediante la ayuda de espectroscopía óptica. El objetivo de esta tesis es estudiar las propiedades ópticas de un sistema de películas delgadas con una distribución fractal en sus espesores generada mediante una estructura de Cantor generalizada.

F. Claro y R. Fuchs [1] analizaron los modos colectivos de superficie para cluster fractales. Ellos construyeron los cluster fractales con esferas y usan un algoritmo recursivo. Sus resultados muestran que el espectro de los modos colectivos de superficie tienen un comportamiento aproximadamente auto-similar. Por otro lado, V. A. Markel y colaboradores [2] estudian como la propiedad de auto-similaridad del cluster fractal es transferida a las excitaciones dipolares y a su polarizabilidad óptica. En un estudio de dispersión resonante de luz por cluster fractales, V. M. Shalaev, R. Botet y J. Julien [3] determinan la dimensión espectral óptica del sistema.

En 1984, H.D. Bale y P.W. Schmidt [4] analizaron la dispersión de rayos-x a ángulos pequeños en medios con porosidades submicroscópicas los cuales presentan propiedades fractales. Encuentran que la intensidad de dispersión es proporcional a $k^{-(6-D)}$, donde D es la dimensión fractal y k el vector de onda. La dispersión de ondas electromagnéticas por pantallas de fase aleatorias Gaussianas con estructura fractal fueron estudiadas por Eric Jakeman [5]. D.L. Jaggard y Y.Kim [6], X. Sun y D.L. Jaggard [7] a través de la dispersión de ondas electromagnéticas por superficies rugosas fractales, encuentran la relación de la distribución angular y de la cantidad de energía dispersada especularmente con las características fractales de la superficie.

Existen trabajos donde la característica fractal del sistema se manifiesta en la función dieléctrica del medio material. V.V. Konotop, O.I. Yordanov y I.V. Yurkevitch [8] consideraron la transmisión de ondas planas a través de un medio unidimensional caracterizado por una función dieléctrica tipo Cantor. Para generar este medio se inicia con una función dieléctrica constante $\epsilon(x) = \epsilon_0$, a continuación se divide el medio en tres partes iguales y se remueve el tercio central; posteriormente en los segmentos restantes se incrementa su función dieléctrica por un factor de $3/2$. Se continua de esta manera hasta una etapa deseada, aplicando el algoritmo solo a los medios con función dieléctrica diferente de uno. Debido a que el sistema es auto-similar, el coeficiente de transmisión se obtiene como solución de una relación recursiva infinita. Para una capa fractal con función dieléctrica unidimensional dada por la función de Weierstrass, V.V. Konotop [9] encuentra que en regiones de longitud de onda suficientemente pequeñas el coeficiente de transmisión tiene dos componentes; una componente considera la dispersión de las fronteras y describe efectos de resonancia, la otra da la dispersión interna por las estructuras fractales. En un trabajo posterior, V.V. Konotop y S.A. Bulgakov [10] generalizaron los trabajos anteriores al uso de funciones dieléctricas singulares.

X. Sun y D.L. Jaggard [11] realizaron un estudio de la interacción de las ondas electromagnéticas con un sistema multicapa fractal tipo barras de Cantor generalizadas. La construcción del sistema se da de la siguiente forma: en el inicio (etapa $s = 0$) tienen una barra de espesor Δ e índice de refracción n_1 inmersa en vacío ($n_0 = 1$). Posteriormente dividen la barra en N segmentos iguales y remueven N_m segmentos centrales. Los espacios dejados por los N_m segmentos lo reemplazan por un medio con índice de refracción $n_0 (=1)$. Este procedimiento lo continúan hasta un etapa s deseada, aplicandolo unicamente a los medios con índice n_1 . Como resultado de esto obtienen un sistema simétrico de películas delgadas con estructura fractal tipo Cantor. Debido a la auto-similaridad que presenta el sistema, obtienen relaciones de recursividad para los coeficientes de reflexión y transmisión en función de N , N_m , s , n_0 , y n_1 . La dimensión fractal la expresan en función de N , N_m , y en el límite de bajas frecuencias encuentran el índice de refracción efectivo en términos de N , N_m , s , n_0 , y n_1 .

Una diferencia importante del trabajo de Konotop y et. al. [11] y el realizado por Sun y Jaggard [11], es que en el primer trabajo la fractalidad del sistema se realiza al ir modificando la función dieléctrica del medio en cada etapa siguiendo el algoritmo de Cantor, mientras que en el segundo la aplicación del algoritmo de Cantor se aplica

a la distribución de los espesores.

El objetivo de esta tesis es dar una generalización del trabajo realizado por X. Sun y D.L. Jaggard [11]. La generalización consiste en tener una estructura final no simétrica. La construcción del conjunto de Cantor es de la siguiente manera: se inicia con una barra de espesor Δ e índice de refracción n_1 inmersa en vacío n_0 ($=1$), posteriormente se subdivide el sistema en tres partes con razones de subdivisión diferentes r_1 , r_2 y r_3 ($\sum_i r_i = 1$). Se retira la parte con espesor $r_2\Delta$ y se sustituye por un medio del mismo espesor pero con índice de refracción n_2 (caso particular $n_2 = n_0$). Se prosigue con la aplicación de este algoritmo, hasta una etapa s deseada, aplicándolo únicamente a los medios con índice de refracción n_1 . Obtenemos relaciones recursivas para los coeficientes de transmisión y reflexión en función de r_i , n_i y s , la dimensión fractal D en función de r_1 y r_3 . Estos resultados son extendidos para $N = 5$ divisiones con distintas razones de subdivisión r_1 , r_2 , r_3 , r_4 y r_5 ($\sum_i r_i = 1$). Aquí los medios removidos son $r_2\Delta$ y $r_4\Delta$, los cuales son reemplazados por medios con índice de refracción n_2 . La estructura particular del sistema analizado por Sun y Jaggard [11] se recupera, en nuestro caso $N = 3$, al hacer $r_1 = r_3 = \frac{N-N_m}{2N}$, $r_2 = \frac{N_m}{N}$ y $n_2 = n_0$.

El contenido de esta tesis se distribuyó en cinco capítulos. En el capítulo número uno se describen conceptos fundamentales en la teoría de fractales, como son, su dimensión fractal, concepto de auto-similaridad, conjuntos de Cantor, etc... En el capítulo dos se obtienen las relaciones recursivas para los coeficientes de reflexión y transmisión en el caso donde un medio con índice de refracción n_1 se distribuye en un medio huésped ($n_2 = 1$). Estas relaciones se obtienen tanto para $N = 3$ como $N = 5$, donde N es el número de subdivisiones en el conjunto de Cantor. En el capítulo tres se obtienen relaciones recursivas similares para el caso donde $n_2 \neq 1$, esto es, el sistema se distribuye de la siguiente forma $n_0 - n_1 - n_2 - n_1 \cdots n_2 - n_1 - n_0$. En el cuarto capítulo se muestran los resultados obtenidos y en el capítulo quinto y final se dan las conclusiones.

Capítulo 1

Conceptos de Fractales

1.1 Introducción

“Sostengo que muchos patrones de la naturaleza son tan irregulares y fragmentados, que comparados con *Euclides*, -término usado para denotar la geometría estandar- la naturaleza exhibe un alto grado así como distintos niveles de complejidad...”

“ Respondiendo a esto, he concebido y desarrollado una nueva geometría de la naturaleza e implementado su uso en un número diverso de campos. Esta nueva geometría describe muchas de la irregularidades y patrones fragmentados de las formas de la naturaleza, y conduce a teorías completas, identificando una familia de formas, las que he llamado *FRACTALES*. Los fractales más útiles involucran formas o cuestiones *azarosas* y tanto sus regularidades e irregularidades son estadísticas. Además, las formas descritas aquí tienden a tener propiedades de escalamiento, implicando que el grado de irregularidad y/o fragmentación es idéntico en todas las escalas”.

Benoit B. Mandelbrot [12]

B.B. Mandelbrot creó la palabra *fractal* del adjetivo Latín *fractus*, la cual proviene del verbo Latín correspondiente *frangere*, el cual significa “romperse”, para crear segmentos irregulares. *FRACTUS* también podría significar “irregular”. Definió además, en forma rigurosa el término *conjunto fractal* a diferencia de como lo hizo con el término *fractal natural*, el cual utiliza para describir vagamente un patrón natural (fractal) y el que representará finalmente por un conjunto fractal. Por ejemplo, las curvas brownianas son curvas fractales, a diferencia del movimiento físico browniano el cual es un fractal natural [12, 13].

En la siguiente sección se estudiará la dimensión fractal para sistemas que solo necesitan un patrón de medición. Esto se hará usando una generalización del concepto de longitud topológica (longitud ordinaria).

1.2 Dimensión fractal

El concepto de dimensión produce ciertas ambigüedades dado que existen conjuntos a los cuales se les puede asignar diferentes dimensiones, como resultado del proceso de medida. Durante el período de tiempo 1875 – 1925 los matemáticos reconocieron que un entendimiento adecuado de irregularidad o fragmentación no puede ser satisfecho

cuando se define a la dimensión como número de coordenadas. Mandelbrot [12] menciona, que cualquier matemático que escribe un libro sobre la teoría de la dimensión, dice que su teoría es la única. Mandelbrot piensa que esta ambigüedad conduce a perder la noción de lo que es dimensión, ya que no sólo son distintas conceptualmente sino también numéricamente.

Antes de discutir el concepto de dimensión fractal, demos las descripciones de lo que es un fractal geométrico y fractal natural.

- **Fractal Geométrico.**— Este tipo de fractales no existen generalmente en forma natural, sino que se crean con la aplicación de un algoritmo particular. A cada una de las aplicaciones del algoritmo al subsistema se le llama etapa de subdivisión o etapa de generación s . A la forma inicial se le llama *iniciador* (etapa $s = 0$) y a las reglas geométricas del algoritmo se les llama *generador*. En general, el conjunto resultante es la unión de subconjuntos con la forma obtenida al aplicar el generador a cada una de sus partes. El tamaño del generador es diferente para cada una de las etapas de subdivisión. El generador puede estar formado por componentes más elementales. En los conjuntos a estudiar en esta sección los elementos básicos tienen el mismo tamaño.
- **Fractales Físicos (o naturales).**— Son aquellos fractales que se encuentran en la naturaleza; son ejemplos líneas costeras, fenómenos de difusión, nubes, montañas, etc...

Una dimensión

Veamos como se puede obtener la longitud de una línea costera, figura 1.1a. Para poder realizar la medición es necesario cubrir completamente la costera con un patrón adecuado. El patrón puede ser un segmento lineal del longitud δ , un cuadrado cuyos lados sean de longitud δ , o cualquier otra forma geométrica que cubran de la manera más eficiente posible el conjunto. En este caso particular se elige cubrir la costera con un patrón cuadrado de lado δ . Esto es debido a que es necesario cubrir las islas que acompañan a la costera. Si utilizáramos un patrón lineal sería muy problemático cubrir completamente la costera. Un patrón lineal es adecuado cuando tenemos una curva fractal continua, por ejemplo, la curva de Koch, que se verá más adelante. Para encontrar la longitud de la costera es necesario contar el número N de veces que el patrón se acomoda en la costera. Entonces, por definición, la longitud asociada a la costera es igual a la *longitud del patrón cuadrado* multiplicada por el número de veces que este se utilizó, esto es

$$L = N \cdot \delta . \quad (1.1)$$

Como se observa de la figura 1.1, en sus distintos incisos, el número de veces que se utiliza el patrón δ , $N(\delta) = N[\delta(s)]$, va aumentando conforme el valor del patrón va disminuyendo, por lo que el valor de la longitud $L(\delta) = L[\delta(s)]$ asociado con la costera es incrementado también. Este procedimiento se sigue indefinidamente, y en el límite $\delta \rightarrow 0$ el valor de la longitud $L = L(\delta) \rightarrow \infty$. Así

$$L(\delta) = N(\delta) \cdot \delta . \quad (1.2)$$

Experimentalmente, figura 1.2, se muestra que la relación $\ln L(\delta)$ versus $\ln \delta$ es de la forma

$$\ln L(\delta) = (1 - D) \ln \delta + \ln a . \quad (1.3)$$

Aquí δ y L se expresan en Kms., D se determina de la pendiente de la recta de mejor ajuste y a de la intersección de la recta con el eje vertical. Se observa que $D > 1$; además se nota que es relativamente pequeño (≈ 1) para costas lisas y relativamente grande (≈ 2) para costas desarrolladas. De la ecuación (1.3)

$$L(\delta) = a \delta^{1-D} . \quad (1.4)$$

Podemos dar una interpretación simplificada de la ecuación anterior de la siguiente manera. Usando un patrón δ_0 inicialmente, siendo la longitud asociada con la costera L_0 , de las ecuaciones (1.2) y (1.4)

$$\frac{L(\delta_0)}{\delta_0} \equiv N(\delta_0) = \frac{a}{\delta_0^D} . \quad (1.5)$$

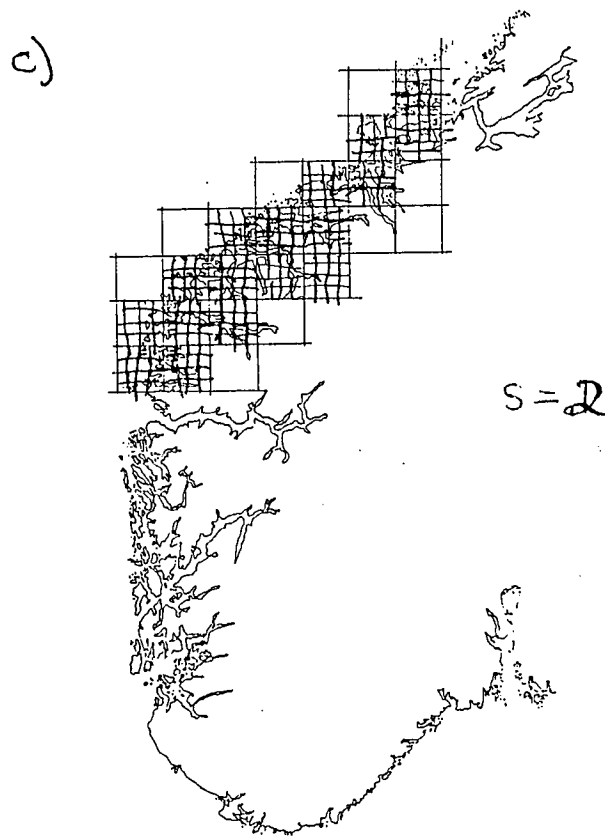
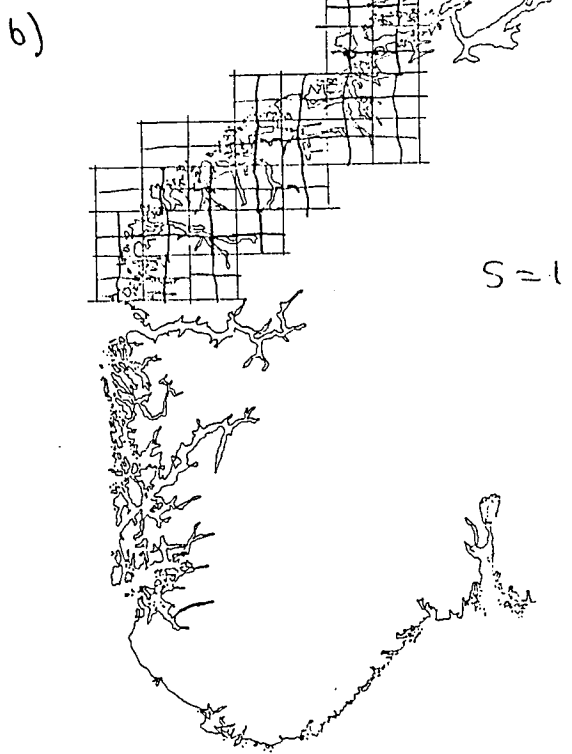
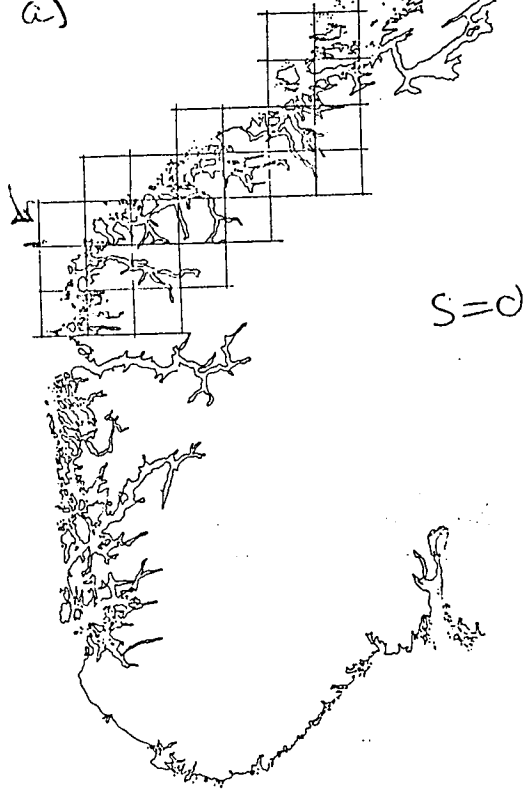


Figura 1.1: Costera de Noruega

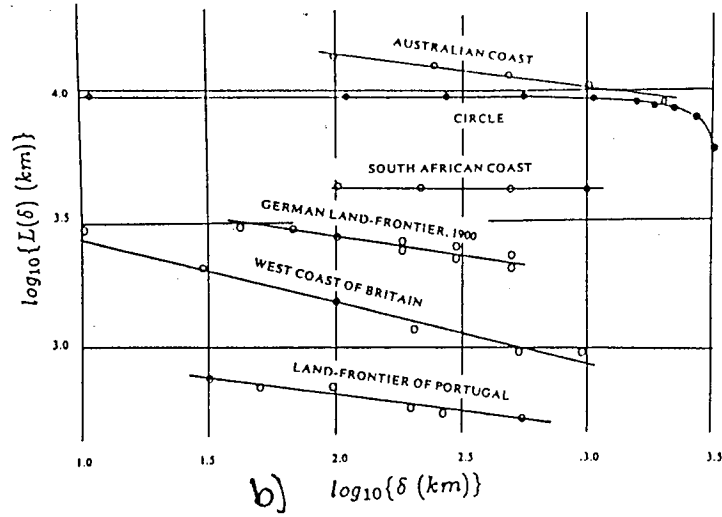


Figura 1.2: Curvas experimentales para diferentes líneas costeras, $\ln L$ versus δ

De la ecuación (1.4) obtenemos

$$\frac{L(\delta)}{L(\delta_0)} = \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{1-D} \quad (1.6)$$

Si acordamos normalizar a δ con δ_0 y a $L(\delta)$ con $L(\delta_0)$, entonces

$$L(\delta) = \delta^{1-D} \quad (1.7)$$

Por otro lado, de las ecuaciones (1.2), (1.5) y (1.6)

$$\begin{aligned} \frac{N(\delta)}{N(\delta_0)} &= \frac{L(\delta)}{\delta} \frac{\delta_0}{L(\delta_0)} \\ &= \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{1-D} \frac{\delta_0}{\delta} \\ &= \left(\frac{\delta_0}{\delta}\right)^{-D} \end{aligned}$$

con lo cual podemos normalizar a $N(\delta)$ con $N(\delta_0)$ para obtener

$$N(\delta) = \delta^{-D} = \frac{1}{\delta} \quad (1.8)$$

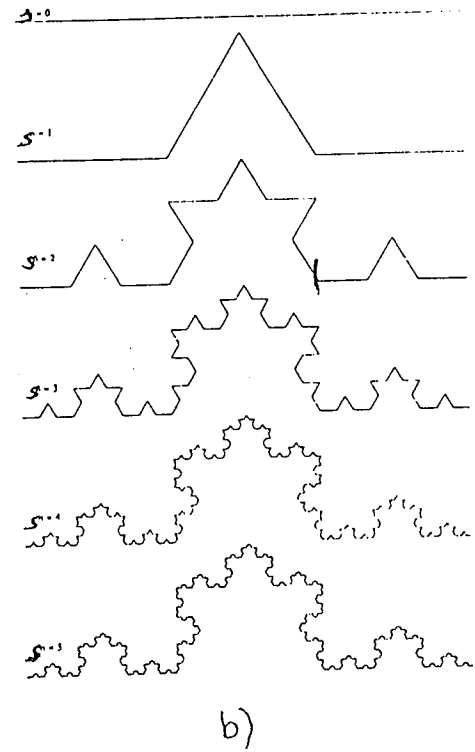
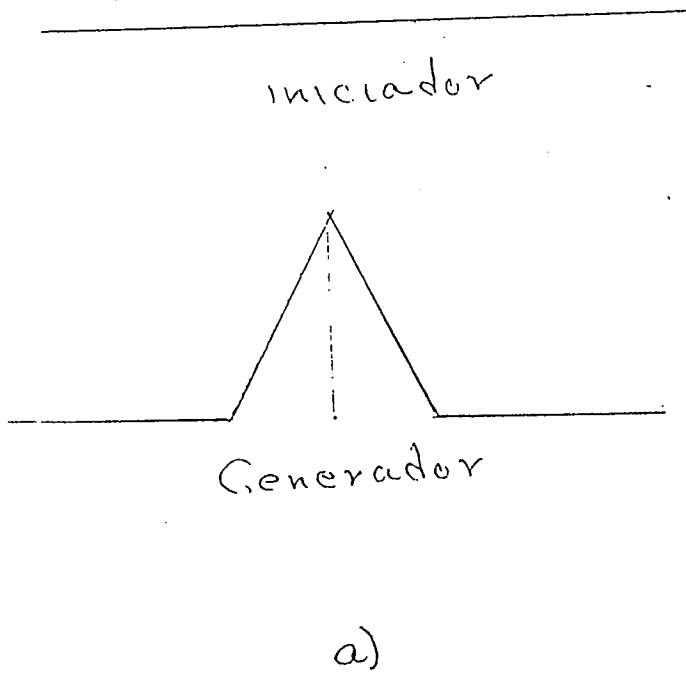


Figura 1.3: Curva triádica de Koch

Esta posibilidad de normalizar nos permite trabajar con δ y L sin dimensiones.

En el caso anterior se obtuvo la longitud asociada con un fractal físico. Veamos ahora como obtener la longitud en un fractal geométrico, asociada en una de sus etapas prefractales [13]. Usaremos como ejemplo la curva de Koch triádica, la cual se construye de la siguiente manera:

Iniciador.- Segmento lineal de longitud topológica $L_T = 1$.

Generador.- Se divide el segmento lineal en tres partes iguales; se reemplaza el segmento central por dos segmentos de igual longitud y se acomodan a un ángulo de 120° de los segmentos restantes, como se muestra en la figura 1.3a. Por lo tanto la razón de subdivisión es 3 y la fracción de subdivisión es $r = 1/3$.

En primer lugar elijamos el patrón δ que usaremos en la etapa $s = 0$. En esta etapa $\delta(s = 0) = 1$ y por lo tanto

$$L(1) = N \cdot \delta = 1.$$

posteriormente se elige $\delta = \delta(s = 1) = 1/3$ y el número de veces que se utiliza el patrón es $N = 4$, por lo tanto

$$L_T(\delta = 1/3) = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Para la etapa $s = 2$ el patrón se elige como $\delta(s = 2) = 1/9 = (1/3)^2$ y el número de veces que se acomoda en el sistema es $N[\delta(s = 2)] = 16 = 4^2$, por lo tanto la longitud de la curva en la etapa $s = 2$ es:

$$L_T[\delta(s=2)] = 16 \cdot \frac{1}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

y así sucesivamente. En la s -ésima generación prefractal tenemos que $\delta(s) = (1/3)^s$ y $N[\delta(s)] = 4^s$, por lo que

$$L_T(\delta) = \left(\frac{4}{3}\right)^s = \left(\frac{4}{3}\right)^{-\frac{\ln \delta}{\ln 3}} \quad (1.9)$$

Tomemos el logaritmo de la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \ln L_T(\delta) &= -\frac{\ln \delta}{\ln 3} (\ln 4 - \ln 3) \\ \ln L_T(\delta) &= \left(1 - \frac{\ln 4}{\ln 3}\right) \cdot \ln \delta. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Si consideramos que el proceso de medición realizado en la curva de Koch es equivalente al utilizado en el proceso de cuntificación de la longitud de la costera, ecuación (1.7), obtenemos

$$\ln L = (1 - D) \ln \delta. \quad (1.11)$$

Comparando esta dos últimas expresiones, tenemos

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3}, \quad (1.12)$$

que es la dimensión fractal de la curva triádica de Koch.

Se puede observar que tanto para la costera (fractal físico), así como para la curva triádica de Koch se hizo uso únicamente un patrón δ de medición en cada una de las etapas. Estos sistemas fractales son caracterizados por

$$\frac{L(\delta)}{\delta} \equiv N(\delta) \propto \frac{1}{\delta^D}, \quad (1.13)$$

donde D es la "dimensión fractal" del sistema, la cual tiene un valor específico para cada conjunto fractal; esta dimensión es definida estrictamente en la sección 1.2.2. Escribiendo la ecuación (1.13) en forma de igualdad tenemos

$$\frac{L(\delta)}{\delta} \equiv N(\delta) = a\delta^{-D}. \quad (1.14)$$

Con referencia a la ecuación (1.4) podemos inferir que la ecuación (1.14) es válida para ambos fractales geométricos y estadísticos. Lo anterior puede ser entendido del hecho que el proceso de medida fué desarrollado de la misma manera. El concepto de medida se explicará con más detalle en la sección 1.2.2.

En el caso de fractales geométricos la etapa $s = 0$ frecuentemente consiste simplemente de una recta de longitud L_0 . En esta etapa podemos escoger, sin limitación de generalidad, un patrón del mismo tamaño, o sea, $\delta_0 = L_0$. De la ecuación (1.14) tenemos

$$\frac{L_0}{\delta_0} = 1 = \frac{a}{L_0^D} \Rightarrow a = L_0^D. \quad (1.15)$$

Si acordamos normalizar a $L(\delta)$ y a δ con L_0 entonces la ecuación (1.14) se reduce a

$$\left. \begin{aligned} L(\delta) &= \delta^{1-D}, \\ N(\delta) &= \delta^{-D}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Aclaremos el tipo de conjuntos que satisfacen la ecuación (1.13) para distintos valores de la dimensión.

1. Conjuntos con valor de D entero. Este tipo de conjuntos pueden ser curvas lisas, superficies suaves, cuerpos geométricos que se describen con la geometría Euclideana, etc... Más adelante en esta sección se dan un par de ejemplos; ver las figuras 1.4, 1.5.
2. Conjuntos con valor de D no entero. Este tipo de conjuntos se definen como fractales (se dan sus definiciones formales más adelante). Estos conjuntos se pueden clasificar en:
 - Fractales Geométricos con un solo patrón $\delta(s)$ - una sola razón de subdivisión- para ejemplos ver las figuras 1.3, 1.6-1.8 y 1.10-1.13.
 - Fractales Físicos (o naturales), a ser discutidos en la sección ??, ver figuras 1.1 y ??.

Una vez que fueron obtenidas las relaciones normalizadas para la longitud, tanto para fractales físicos como geométricos con un solo patrón δ , podemos calcular la dimensión D sin realizar en principio todo el procedimiento anterior. De la ecuación (1.8) o (1.16) obtenemos

$$D = 1 - \frac{\ln L(s)}{\ln \delta(s)} = - \frac{\ln N(s)}{\ln \delta(s)}. \quad (1.17)$$

En esta ecuación δ , N , y L dependen de la etapa s de subdivisión. No obstante $\frac{\ln N(s)}{\ln \delta(s)}$ y $\frac{\ln L(s)}{\ln \delta(s)}$ son independientes de s , dado que la ecuación (1.8) se cumple en cualquier etapa con D constante. Podemos concluir que si seleccionamos algún valor del patrón δ en una etapa s arbitraria y determinamos el $N(s)$ o $L(s)$ correspondiente, según la ecuación (1.17) es suficiente para determinar la dimensión D .

En el caso de fractales estadísticos tipo costera, por la naturaleza del sistema, el valor del patrón δ es arbitrario y puede tomar valores continuos. En la práctica se eligen valores convenientes, esto es, aquellos valores que optimicen el proceso de medición. Es claro que la longitud topológica *no* se obtiene simplemente como $N(\delta)\delta$

con δ arbitrario. Aquí el término longitud topológica se usa para designar longitud ordinaria; $\delta \rightarrow 0 \quad L \rightarrow cte.$ Por otro lado, para fractales geométricos la *longitud fractal se define como la longitud topológica*, en las etapas prefractales. Entonces es natural elegir el patrón δ (en cualquier etapa s) igual a la longitud topológica máxima posible de los pedazos que componen el sistema. Por el momento nos limitamos a sistemas que utilizan un solo patrón de escalamiento, o sea a una sola razón de subdivisión; por lo tanto, con el entendimiento de que $\delta(0) = 1$,

$$\delta(s) = r^s, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

donde $0 < r < 1$, siendo r la razón de subdivisión. Si la primera división (etapa $s = 1$) involucra \mathcal{N} unidades (“pedazos”) de igual tamaño, entonces

$$N(s) = \mathcal{N}^s \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

Con la sustitución directa de las ecuaciones (1.18) y (1.19) en (1.17) tenemos

$$D = \frac{\ln \mathcal{N}}{\ln \left(\frac{1}{r}\right)}, \quad (1.20)$$

independiente de la etapa s . Es claro que no es necesario tomar el límite $s \rightarrow \infty$. De la ecuación (1.20) podemos observar que el valor de la dimensión D puede ser mayor, menor, o igual a uno, esto es,

- i.) $\mathcal{N} < \frac{1}{r}$ entonces $0 < D < 1$; conjunto fractal “discreto”.
- ii.) $\mathcal{N} = \frac{1}{r}$ entonces $D = 1$; caso “Euclidiano”.
- iii.) $\mathcal{N} > \frac{1}{r}$ entonces $D > 1$; conjunto fractal “sustancial”.

Los nombres asignados a cada caso es debido a lo siguiente: en el i) tenemos que el conjunto caracterizado resultante es un conjunto discreto, ver por ejemplo la barra de Cantor figura 1.13. En el ii) tenemos el caso trivial de longitud topológica (independiente de la etapa) figura 1.4. Finalmente en iii) tenemos que los conjuntos resultantes son continuos y más sustanciales que los conjuntos discretos (ver concepto de sustancialidad en la sección 1.2.2), como se observa para las curvas de triádica y cuadrática de Koch, figuras 1.3, 1.11 respectivamente.

Regresemos al caso ii), ver figura 1.4. En este caso $r = 1/3$ y $\mathcal{N} = 3$, o sea, no removemos o agregamos “pedazos”. Por lo tanto $D = 1$. En este caso límite se obtiene que la dimensión fractal es igual a la dimensión topológica— como se esperaba en este caso trivial. Nos daremos cuenta, al dar las definiciones formales de un fractal, que el sistema anterior no lo es.

En el caso de una curva lisa (figura 1.5), tenemos que acudir a la primera ecuación (1.17) y aplicar el límite $s \rightarrow \infty$. Observamos que los “prefractales”¹ en el desarrollo

¹El término *prefractal* fué introducido por Feder[13] para referirse a una etapa intermedia (s finita)

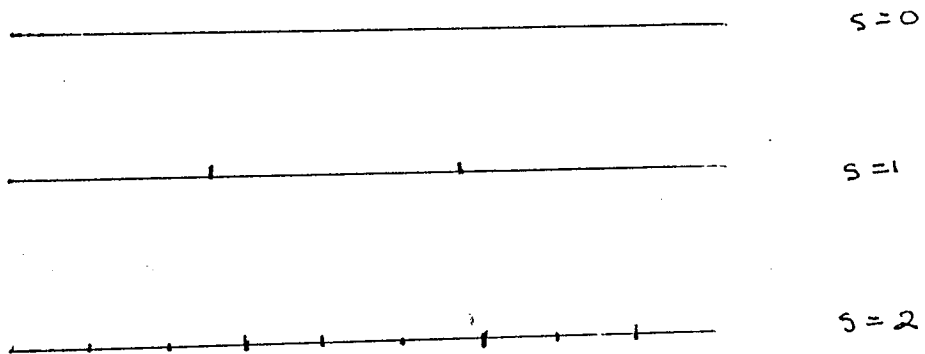


Figura 1.4: Conjunto de segmento recto con tres divisiones sin remover o agregar alguna

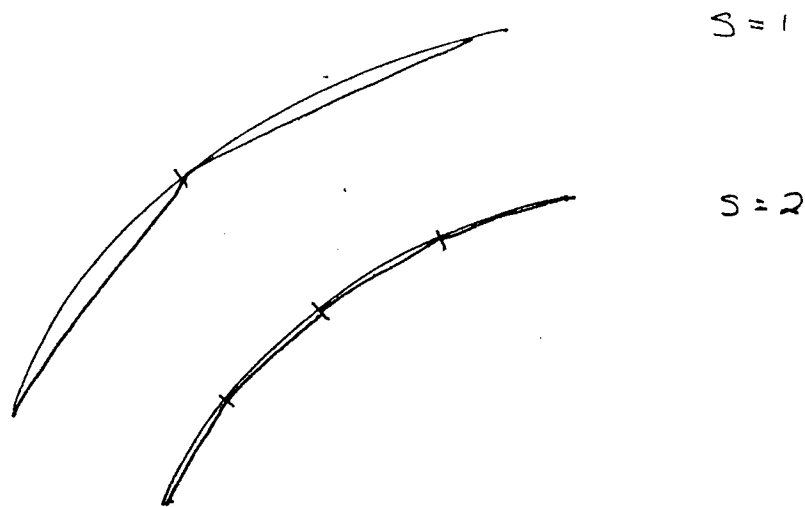


Figura 1.5: curva lisa en dos etapas de subdivisión

de un fractal no dan la dimensión topológica correcta (=1). En este caso, tenemos que tomar el límite

$$D = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\ln L(s)}{\ln \delta(s)} \right]$$

$$= 1 - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln L(s)}{\ln \delta(s)} = 1 - \frac{\ln L_T}{\lim_{s \rightarrow \infty} \ln \delta(s)} = 1.$$

De manera semejante, para fractales geométricos que involucran partes curvadas (no rectas) las ecuaciones (1.13)-(1.17) tendrán que ser generalizadas tomando el límite $s \rightarrow \infty$.

La ecuación (1.20) es válida para fractales geométricos de una sólo razón de subdivisión.

Dos dimensiones

Veamos que sucede si en lugar de tener una curva tuviéramos una superficie, esto es, un problema que corresponde a *dos dimensiones topológicas* (área). En este caso tenemos que reemplazar $L \rightarrow A$.

La ecuación (1.14) se reemplaza por (como veremos en la ecuación (1.24) el carácter fractal (D_1 y D_2) no es necesariamente el mismo en ambas direcciones) ecua)

$$\frac{A(\delta)}{\delta^2} \equiv N(\delta) = \frac{a}{\delta^D}. \quad (1.21)$$

Es importante señalar que en el lado izquierdo de la ecuación (1.13) el patrón δ se reemplazó por el área δ^2 del patrón cuadrado, pero en el lado derecho no hay ningún cambio, por definición, de la dimensión D .

El resultado para fractales geométricos, ecuación (1.15) sigue siendo válida, sin embargo, la ecuación (1.16) se reemplaza según la ecuación (1.21) por

$$A(\delta) = \delta^{2-D}. \quad (1.22)$$

De aquí

$$D = 2 - \frac{\ln A(\delta)}{\ln \delta(s)} = -\frac{\ln N(s)}{\ln \delta(s)}. \quad (1.23)$$

Entonces la última expresión en la ecuación (1.17) sigue siendo válida para áreas (pero no la primera). Como δ es el lado de un cuadrado, entonces es obvio que la ecuación (1.18) también es correcta. La ecuación (1.20) es también válida dado que ahora \mathcal{N} es el número de *cuadrados* después de la primera división. La ecuación (1.20) también es aplicable en este caso de áreas.

En el caso de que el número N se pueda escribir como $N = N_1 N_2$, donde N_1 es el número de veces que el patrón se acomoda en una dirección, digamos x , y N_2 el número de veces que lo hace en la dirección perpendicular a x , digamos y , la dimensión fractal de la superficie será dada por

$$D = -\frac{\ln[N_1(\delta)N_2(\delta)]}{\ln \delta} = D_1 + D_2, \quad (1.24)$$

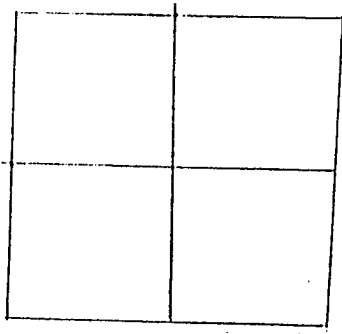
donde D_1 y D_2 son las dimensiones fractales correspondientes a las direcciones x y a y .

Tomemos el caso particular que se muestra en la figura 1.6. Aquí tenemos que $r = 1/2$ (dado que r se define según δ y no según el área δ^2) y $\mathcal{N} = 4$. Entonces de la ecuación (1.20)

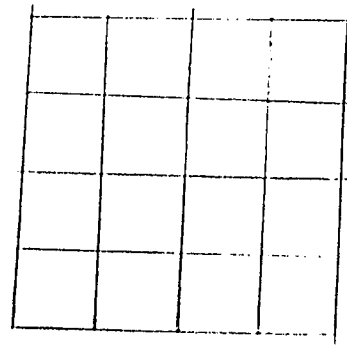
$$D = 2,$$

o sea, este valor nos da correctamente la dimensión topológica de área. El mismo resultado se obtiene de la ecuación (1.24). Debemos aclarar que la superficie mostrada en la figura 1.6 no es un fractal.

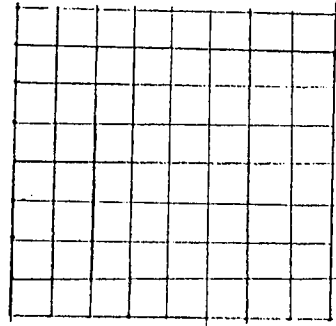
El tipo de conjuntos fractales que cumplen con la ecuación (1.24) son aquellos conjuntos que son generados mediante el producto cartesiano de dos conjuntos fractales, esto es, sean S_1 y S_2 dos conjuntos fractales entonces $S = S_1 \times S_2$ será un conjunto fractal con dimensión $D = D_1 + D_2$, ver [12]. Un ejemplo fractal con estas características es el conjunto fractal generado mediante dos conjuntos de Cantor



$$s=0$$



$$s=1$$



$$s=2$$

Figura 1.6: Superficie suave con $D = 2$

(ver definición de conjuntos de Cantor en sección 1.4.2), con diferentes razones de escalamiento, ver figura 1.7. A este conjunto lo hemos denominado tabla de Cantor.

Un ejemplo pertinente es la superficie de Koch [12], figura 1.8. En esta curva los comportamientos fractales son diferentes en las dos dimensiones topológicas (x, y digamos). Si l - longitud lineal, ver figura 1.8-es dado, entonces no cabe, en general, un número entero $N(s)$ en el área $A(s)$, dado que $l/\delta(s)$ no es un número entero en general. El patrón de área δ^2 se puede acomodar por completo en $A(s)$ solamente si $\delta^2 \rightarrow 0$, es decir, $s \rightarrow \infty$. Entonces solo podemos utilizar la ecuación (1.24) en el límite $s \rightarrow \infty$. Denotamos por D_1 la dimensión fractal longitudinal dada por la ecuación (1.12) y por D_2 ($= 1$) la dimensión del conjunto en la dirección de l . De la ecuación (1.24) la dimensión de este sistema es

$$D = D_2 + D_1 = 1 + \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

Como hemos podido esperar intuitivamente, la dimensión fractal de la superficie de Koch difiere de la dimensión fractal de la curva de Koch en uno. Esto es debido a que la superficie de Koch tiene caracter Euclideano en la dirección de l .

¿ Qué sucede si elegimos como patrón un disco circular de diámetro δ en lugar de un cuadrado de lado δ ? Claramente, para cubrir cierta área con discos de diámetro δ necesitamos un número mayor de discos que cuadrados de lado δ (igual). ¿ Cuantas veces más discos ? Para una etapa de subdivisión s arbitraria la respuesta sería una

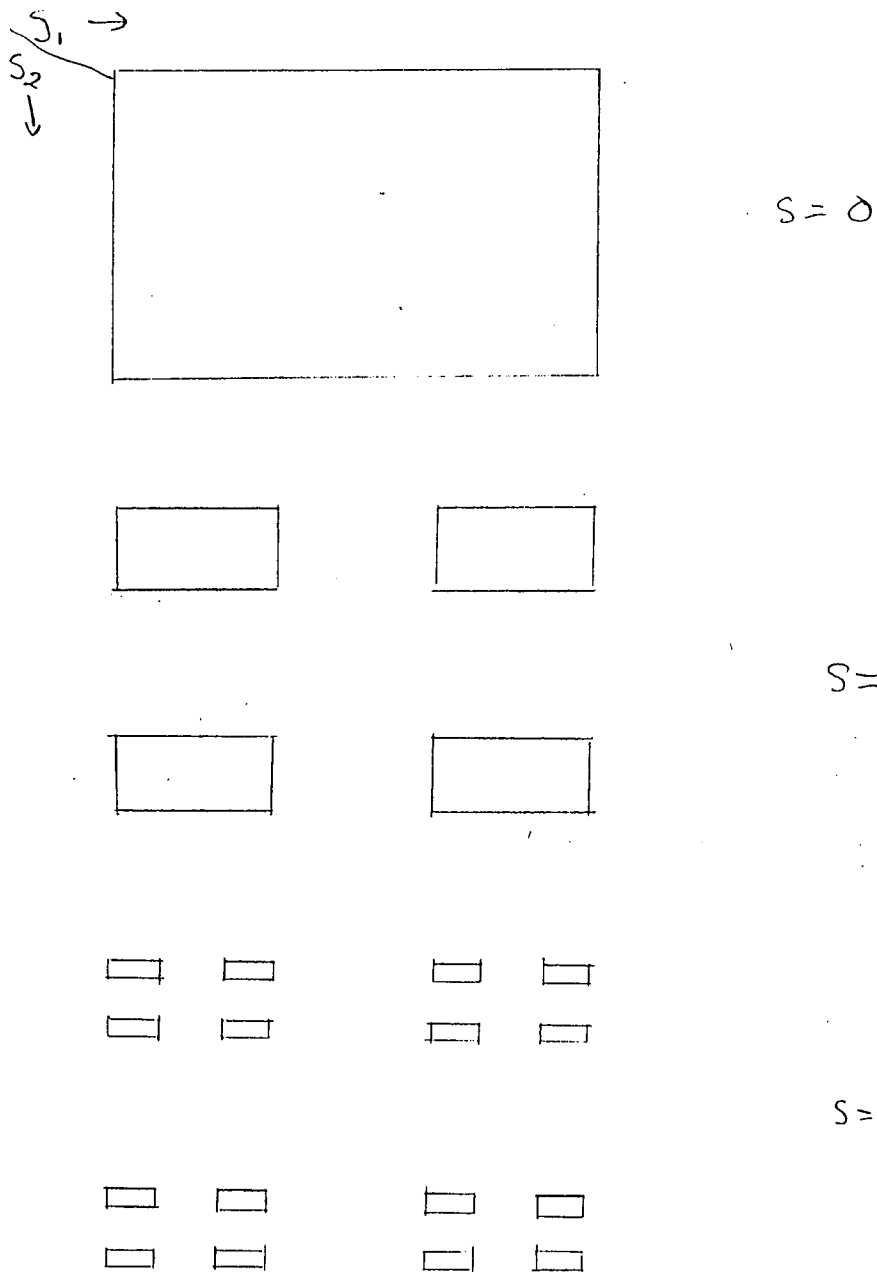


Figura 1.7: Tabla de Cantor generado con diferentes razones de escalamiento; S_1 con $r_1 = r_2 = r_3 = 1/3$ ($D_1 = 0.6309$) y el conjunto S_2 con $r_1 = r_3 = 1/4$ y $r_2 = 1/2$ ($D_2 = 0.5$), por lo tanto $D = 1.1309$.

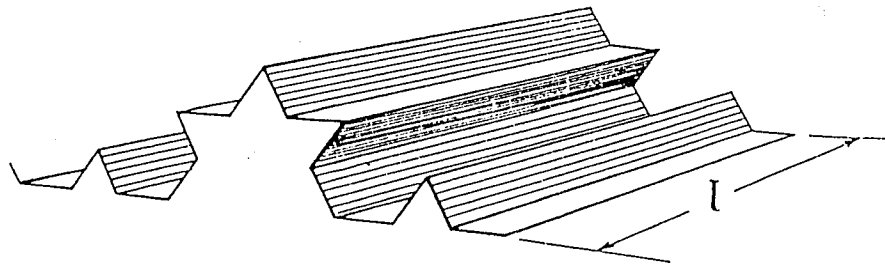


Figura 1.8: Superficie de Koch

función complicada de s y de la forma del área. Sin embargo, en el límite $s \rightarrow \infty$ el factor requerido es

$$\frac{\delta^2}{\pi \frac{\delta^2}{4}} = \frac{4}{\pi} = \frac{1}{\gamma}.$$

Si en lugar de discos circulares utilizamos otra forma geométrica, siempre tendremos un factor geométrico semejante, al cual denotaremos $1/\gamma$.

Ahora, la dimensión fractal D , por definición debe de corresponder a la forma más eficiente de llenado, esto es el patrón debe de ser cuadrado. Si utilizamos un patrón diferente a un cuadrado, entonces $N(s)$ en la ecuación (1.23) es demasiado grande y debemos de reducirlo mediante el factor geométrico de “ineficiencia” γ . Entonces la ecuación (1.23) se reemplaza por una forma más general, dada por

$$D = - \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln [\gamma N(s)]}{\ln \delta(s)} \quad (1.25)$$

donde $\gamma = \pi/4$ para discos circulares.

Tres dimensiones

El mismo razonamiento se puede aplicar al caso de tres dimensiones topológicas. Ahora L o A serán reemplazados por el volumen V . No obstante la ecuación (1.25) sigue siendo válida. Si el patrón es un cubo obviamente $\gamma = 1$. Por otro lado, si el patrón es una esfera, entonces

$$\gamma = \frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right) \left(\frac{\delta}{2}\right)^3}{\delta^3} = \frac{\pi}{6}.$$

En el límite $s \rightarrow \infty$ podemos escribir

$$\gamma N(s) = N_{optimo}(s) \quad (1.26)$$

que corresponde a cubos. Notemos que en una dimensión normalmente $\gamma = 1$.

1.2.1 Fractales que no pueden ser caracterizados mediante un solo patrón

En el caso de fractales que sí pueden ser caracterizados mediante un solo patrón, de la ecuación (1.14) tenemos

$$N_{optimo}(\delta)\delta^D = a.$$

Utilizando la ecuación (1.26) obtenemos

$$\gamma N(s)\delta^D(s) = a.$$

Si el proceso de medición involucra dos diferentes patrones de tamaños δ_1 y δ_2 , y el primer (segundo) patrón se utiliza $N_1(s)$ ($N_2(s)$) veces entonces la última ecuación se generaliza de la siguiente manera

$$\gamma N_1(s)\delta_1^D(s) + \gamma N_2(s)\delta_2^D(s) = a.$$

En general en el caso de tener n patrones de tamaños $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n(s)$ la generalización es

$$\sum_{\nu=1}^n \gamma N_{\nu}(s)\delta_{\nu}^D(s) = a. \quad (1.27)$$

Si tenemos un conjunto *geométrico* donde en la etapa $s = 0$ existe un solo elemento entonces $\gamma N_1(0) = 1$. En este caso se elige $\delta_1(0) = 1$, así que la ecuación (1.27) nos da

$$a = \gamma N_1(0)\delta_1(0) = 1. \quad (1.28)$$

De esta manera se reemplaza el lado derecho de la ecuación (1.27) por 1, lo que es la generalización de la ecuación (1.8).

Aplicamos la ecuación (1.27) al conjunto fractal mostrado en la figura 1.15. Por definición este conjunto consta solamente de las barras negras. Para entender mejor la notación que usaremos, consideremos la etapa $s = 3$ como ejemplo. Es conveniente utilizar tantos patrones $\delta_\nu(3)$ como son barras negras, o sea en esta etapa $\nu(3) = \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_8$. Eligiendo patrones de los mismos tamaños como son las barras de la figura 1.15 vemos que $\delta_1(3) = r_1^3$, $\delta_2(3) = r_1^2 r_3$, ..., $\delta_8(3) = r_3^3$. Generalizando, en este caso ν es un índice colectivo que abarca a $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ (n índices). Así que

$$\nu(s) = \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n(s)} \quad n \text{ índices, dependiendo de la etapa.}$$

En esta notación definimos

$$\delta_\nu \equiv \delta_{\nu_1 \nu_2, \dots, \nu_n} = r_{\nu_1} r_{\nu_2} \cdots r_{\nu_n}.$$

Donde δ_ν es la longitud del patrón de medición en la etapa ν .

Cualquiera de estos factores r_{ν_i} puede tener el valor r_1 o r_3 (tomar en cuenta que en este ejemplo ν_i solo toma valores impares, dado que los valores pares corresponden a barras blancas). Claramente la fórmula para δ_ν es la longitud de un elemento arbitrario de la barra de Cantor en una etapa arbitraria s . Si permitimos que todos los r_{ν_i} tomen estos dos valores posibles entonces en la sumatoria de la ecuación (1.27) cada "barrita" $\delta_{\nu(i)}$ será contada una sola vez. Entonces en esta notación $\gamma N_{\nu(i)} \equiv N_{\nu_1 \nu_2, \dots, \nu_i} = 1$ y la ecuación (1.27) se reduce a

$$\sum_{\nu_1=1,3} \sum_{\nu_2=1,3} \cdots \sum_{\nu_n=1,3} (r_{\nu_1} r_{\nu_2} \cdots r_{\nu_n})^D = 1. \quad (1.29)$$

La etapa $s = 0$ ya se eliminó, en realidad. En la etapa $s = 1$ la ecuación se reduce a

$$\sum_{\nu_1=1,3} (r_{\nu_1})^D = r_1^D + r_3^D = 1.$$

En la etapa $s = 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_1=1,3} \sum_{\nu_2=1,3} (r_{\nu_1} r_{\nu_2})^D &= \sum_{\nu_1, \nu_2=1,3} r_{\nu_1}^D r_{\nu_2}^D = r_1^D r_1^D + r_1^D r_3^D + r_3^D r_1^D + r_3^D r_3^D \\ &= (r_1^D + r_3^D)^2 = 1. \end{aligned}$$

Es fácil observar que para una etapa s arbitraria la ecuación (1.29) se reduce a

$$(r_1^D + r_3^D)^s = 1, \quad s \geq 1.$$

Como $r_1 > 0$ y $r_3 > 0$ la única solución posible es

$$r_1^D + r_3^D = 1, \quad (1.30)$$

independientemente de la etapa.

Tomemos un ejemplo con $r_1 = 1/4$ y $r_3 = 2/5$, entonces

$$\left(\frac{1}{4}\right)^D + \left(\frac{2}{5}\right)^D = 1.$$

La solución aproximada es $D = 0.6110$.

Regresando al caso general, una manera compacta de escribir la ecuación (1.27) es

$$\sum \gamma \delta^D(s) = a \quad (1.31)$$

donde los factores $N_\nu(s)$ ya están tomados en cuenta en la sumatoria que ahora incluye a todos los elementos individualmente. La expresión

$$\gamma \delta^D(s) \equiv h[\delta(s)] \quad (1.32)$$

se llama “*función de prueba*”– debido a que sirve para determinar la dimensión D mediante el requerimiento

$$\sum h[\delta(s)] = a \quad (=1 \text{ para fractales geométricos}). \quad (1.33)$$

Los lados izquierdos de las ecuaciones (1.27), o (1.29), o (1.31), o (1.33) se llaman “*medida*”. Así que de manera general la medida se define como

$$M_D = \sum h[\delta(s)]. \quad (1.34)$$

En el caso de que el conjunto fractal incluye curvas entonces es necesario involucrar el límite $s \rightarrow \infty$, y entonces la ecuación (1.34) tiene que ser generalizada a:

$$M_D = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum h[\delta(s)]. \quad (1.35)$$

Por supuesto, el límite $s \rightarrow \infty$ equivale a $\delta \rightarrow 0$ para todas las δ 's involucradas. De las ecuaciones (1.33) y (1.34) o (1.35) obtenemos que

$$M_D = a \quad (=1 \text{ para fractales geométricos}).$$

Esta ecuación define a la dimensión fractal D en el caso de sistemas que no pueden ser caracterizados mediante un solo patrón.

El concepto de la medida como criterio fundamental para la determinación de la dimensión fractal D del sistema fué introducido por Hausdorff y Besicovitch, y por eso frecuentemente se le llama *medida de Hausdorff-Besicovitch (HB)*. También a la dimensión D correspondiente frecuentemente se le llama dimensión HB.

1.2.2 La medida y la dimensión Hausdorff -Besicovitch

La medida de prueba M_d se define como

$$M_d = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum \gamma \delta^d(s) \quad (1.36)$$

donde "d" es una dimensión de prueba hipotética; se busca un valor de d tal que dará una medida finita. Este valor especial se llama "la dimensión de Hausdorff-Besicovitch", D_{HB} . El valor correspondiente de la medida es $M(D_{HB})$.

Si todos los elementos son iguales en tamaño entonces la ecuación (1.36) toma la forma simplificada

$$M_d = \lim_{s \rightarrow \infty} [\gamma \delta^d(s) N[\delta(s)]] \quad (1.37)$$

donde $N[\delta(s)]$ es el número de patrones (iguales), en la etapa s , que caben en el conjunto prefractal, por ejemplo número de barras, de cuadrados, de discos circulares, etc. Utilizando la ecuación (1.14) y el hecho que, en el límite $s \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} M_d &= \lim_{s \rightarrow \infty} [\gamma \delta^{d-D}(s) a] \\ &= \begin{cases} \infty & , d < D \\ \gamma a & , d = D \\ 0 & , d > D. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.38)$$

La condición, entonces, para que se obtenga una medida finita es

$$D_{HB} \equiv D. \quad (1.39)$$

Concluimos que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch es idéntica a la dimensión fractal ordinaria D del conjunto. Además,

$$M_D = \gamma a \quad (1.40)$$

aún para s arbitrario.

El procedimiento anterior es la manera formal para calcular el parámetro D , dimensión fractal, para un conjunto arbitrario. En particular, en esta tesis la dimensión fractal asociada con los conjuntos de Cantor (fractales determinísticos), se encontrará con el procedimiento mostrado en la sección anterior. Cabe mencionar que si calculamos la medida M_d para $d < D$ entonces el resultado diverge. Por otro lado M_d para $d > D$ se anula. Entonces es claro que M_D es la única medida útil. De hecho, por definición, la dimensión de Hausdorff-Besicovitch es la dimensión fractal.

Ahora ya estamos en posibilidad de dar las diferentes definiciones de conjunto fractal dadas por B.B. Mandelbrot[12]. Estas no son equivalentes, dado que describen distintos tipos de fractales. Tenemos que cada una de las siguientes definiciones es suficiente pero no necesaria y que un fractal puede cumplir con una o más de las definiciones simultáneamente.

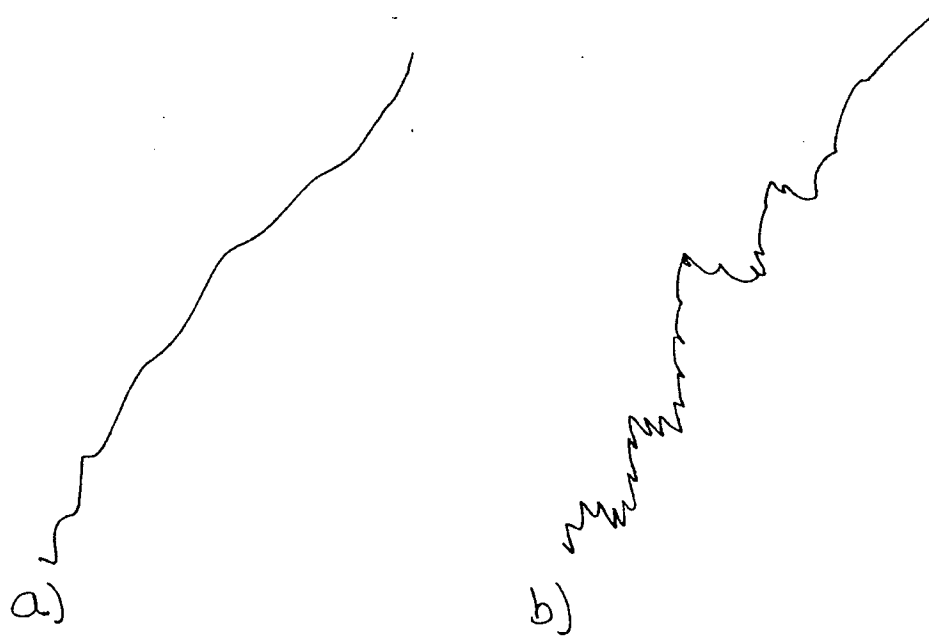


Figura 1.9: Conjuntos con distinta sustancialidad

- Un fractal es un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede “estrictamente” la dimensión topológica del conjunto.
- Cualquier conjunto con un valor de D (dimensión de la medida) no entera será un fractal.
- Un fractal es una forma compuesta de partes similares a el todo en alguna manera (condición de auto-similaridad, ver sección 1.3).

Usaremos el término “sustancial” para decir cuando un conjunto fractal es más irregular y/o fragmentado que otro. La cuantificación de la sustancialidad nos la da el valor de la dimensión fractal asociada con el conjunto. Esto es, al decir que un sistema fractal es *más sustancial que otro*, significa por lo general, que su dimensión fractal es mayor. Observemos lo anterior con mayor claridad. En la figura ?? se muestran un par de conjuntos fractales con distintos grados de irregularidad. Escojamos el mismo patrón de referencia δ_0 como un patrón arbitrario, no necesariamente el “inicial”, para ambas curvas a y b. Entonces

$$\frac{L_a(\delta)}{L_a(\delta_0)} = \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{1-D_a}, \quad \frac{L_b(\delta)}{L_b(\delta_0)} = \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{1-D_b} \quad (1.41)$$

Para comparar a las dos curvas necesitamos encontrar un valor específico δ_0 para el cual las longitudes de las curvas son iguales, o sea

$$L_a(\delta_0) = L_b(\delta_0) . \quad (1.42)$$

Esto lo lograremos tomando diferentes extensiones lineales en las curvas. Entonces dividiendo a las ecuaciones (1.41),

$$\frac{L_a(\delta)}{L_b(\delta)} = \left(\frac{\delta}{\delta_0} \right)^{D_b - D_a} . \quad (1.43)$$

Suponiendo que $\underline{D_a < D_b}$

$$L_a < L_b \quad \text{si} \quad \delta < \delta_0 \quad (1.44)$$

$$L_a > L_b \quad \text{si} \quad \delta > \delta_0 .$$

Concluimos que la curva b en la figura ?? es más sustancial que la curva a, porque para δ suficientemente pequeño ($\delta < \delta_0$) $L_b > L_a$ lo cual muestra mayor grado de irregularidad de la curva b. El hecho que, para valores pequeños de δ , $L_b > L_a$ (y, también, $N_b > N_a$) es una manifestación cuantitativa de “sustancialidad”. Entonces vemos que un grado mayor de sustancialidad ($L_b > L_a$, $N_b > N_a$) se caracteriza mediante una dimensión fractal mayor ($D_b > D_a$). (Por otro lado, la posibilidad de que $L_a > L_b$ no nos dice que la curva a sea más sustancial que la curva b, sino que este valor del patrón $\delta > \delta_0$ para medir la longitud de las curvas no es un patrón adecuado para medir la curva b.)

Es de esperarse el mismo comportamiento para fractales geométricos. En la figura 1.10 se muestran cinco conjuntos diferentes que tienen el mismo iniciador pero distinto generador, y por lo tanto, diferente sustancialidad. Con la aplicación directa de la ecuación (1.20) obtenemos la dimensión de cada uno de los sistemas. Esta va aumentando con N para $2 \leq N \leq 5$. Obviamente, N es una medida cuantitativa de la sustancialidad, por lo que en un fractal geométrico es también cierto que la dimensión aumenta con la sustancialidad. Este análisis nos lleva a la conclusión que la dimensión fractal es una medida de la sustancialidad (o irregularidad o complejidad) del sistema.

1.3 Auto-Similaridad y Auto-Afinidad

En esta sección hablaremos de las propiedades de invarianza (simetría) que tienen los objetos fractales. Sabemos que para un objeto Euclideo las propiedades de simetría pueden ser de traslación, rotación, escalamiento, reflexión, etc... Los fractales también presentan estas propiedades las cuales nos ayudarán a clasificarlos.

Analicemos la curva triádica de Koch, figura 1.3. Esta curva es un conjunto limitado dado que su generación se define en un intervalo finito y es continua. Notemos que si reescalamos la etapa n por una razón $r = 1/3$ podemos cubrir la etapa ($n +$

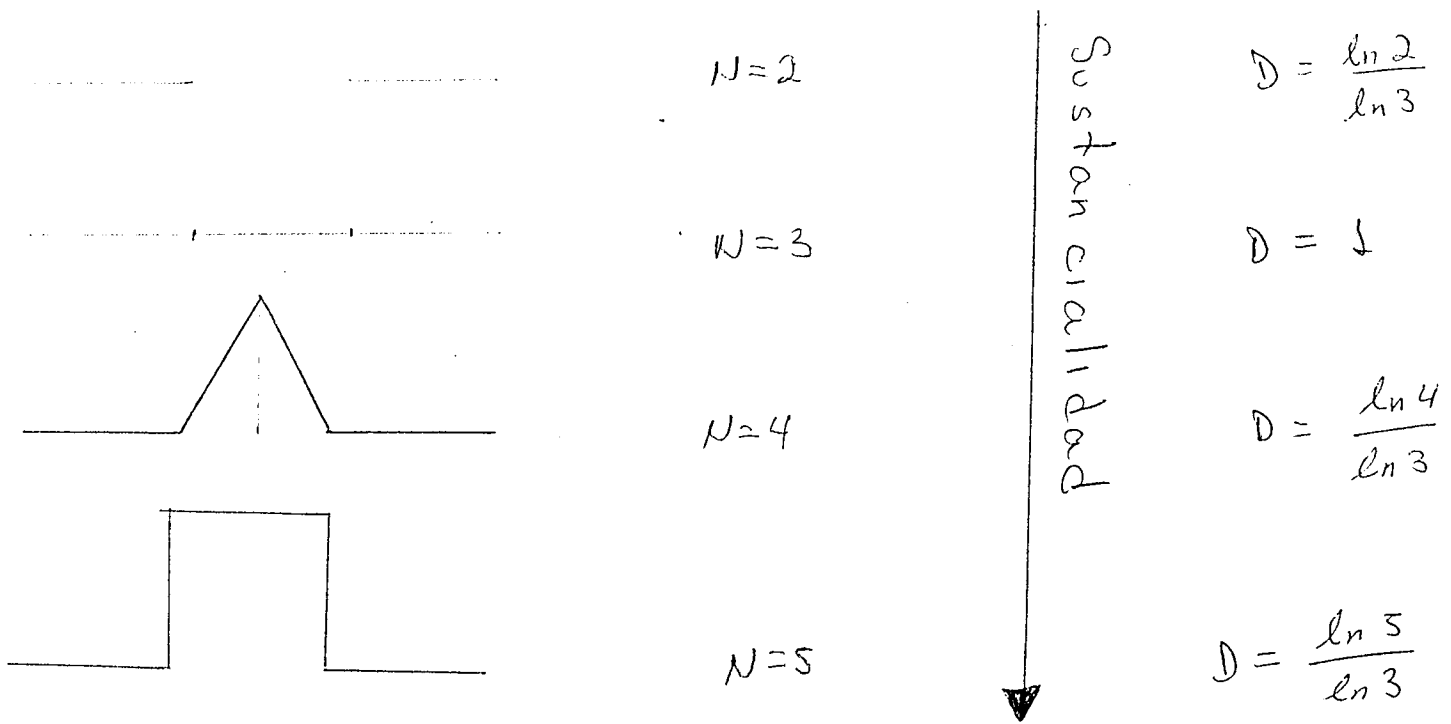


Figura 1.10: Conjunto de curvas con $\delta = r = 1/3$ y diferente N

1), al hacer uso de traslaciones así como rotaciones. A esto se le denomina auto-similaridad, lo que nos dice es que cierta parte del conjunto en la etapa $(n+1)$ tienen exactamente la misma forma como la etapa n , siendo la única diferencia la escala. Por lo que se sigue que la curva triádica de Koch es auto-similar.

Representemos con r a la razón de escalamiento mencionada anteriormente, por S al conjunto fractal, y por $r(S)$ al conjunto resultante al aplicar la operación r sobre el conjunto S . Una manera formal de definir la autosimilaridad es la siguiente:

- Un conjunto limitado o no limitado S en el espacio es auto-similar con respecto a la razón r (razón de escalamiento) y a un entero N , cuando S es la unión de N subconjuntos que no se traslapan, cada uno de los cuales es congruente al conjunto $r(S)$ escalado. Congruente significa *idéntico* en forma y no excluye desplazamientos y/o rotaciones. Este tipo de propiedad puede ser observada en la curva de Koch.

La dimensión dada por la ecuación (1.20) se conoce como dimensión de auto-similaridad o de similaridad.

Aplicamos la dimensión de similaridad a la curva cuadrática de Koch, figura 1.11. Esta curva tiene como iniciador un cuadrado de lado unitario, el generador consiste en la forma geométrica que se muestra en la parte a) de la figura, aplicándolo a cada lado del cuadrado. El número de segmentos de igual longitud que se repiten

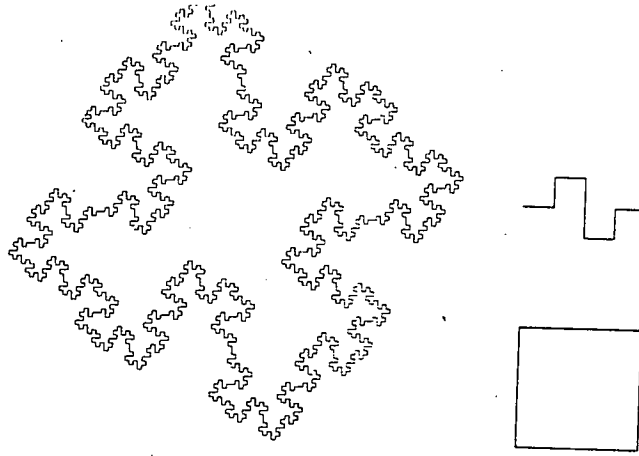


Figura 1.11: Curva cuadrática de Koch

es $N(\delta) = 8$, y el valor de la razón de subdivisión es $r = \frac{1}{4}$, por lo que su dimensión fractal es dada por:

$$D = -\frac{\ln \mathcal{N}}{\ln r} = -\frac{\ln 8}{\ln \frac{1}{4}} = \frac{3}{2} . \quad (1.45)$$

El siguiente ejemplo es la curva de Peano-Gosper, figura 1.12. Podemos observar que esta curva es auto-similar y que se necesitan siete segmentos lineales ($\mathcal{N} = 7$) de longitud $r = \frac{1}{\sqrt{7}}$ en la etapa $s = 1$. Usando la ecuación (1.20), encontramos que su dimensión de similaridad es dada por :

$$D = -\frac{\ln 7}{\ln \frac{1}{\sqrt{7}}} = 2 . \quad (1.46)$$

La curva de Gosper-Peano es fractal dado que su dimensión fractal excede a su dimensión topológica, la cual es $D_T = 1$.

A continuación damos un par de definiciones para otros tipos de conjuntos auto-similares.

- Un conjunto limitado S es auto-similar, con respecto a un arreglo de razones $r_{(1)}, \dots, r_{(n)}$, cuando S es la unión de n subconjuntos (S_n) que no se traslapan, respectivamente congruentes al conjunto $r_{(n)}(S)$.

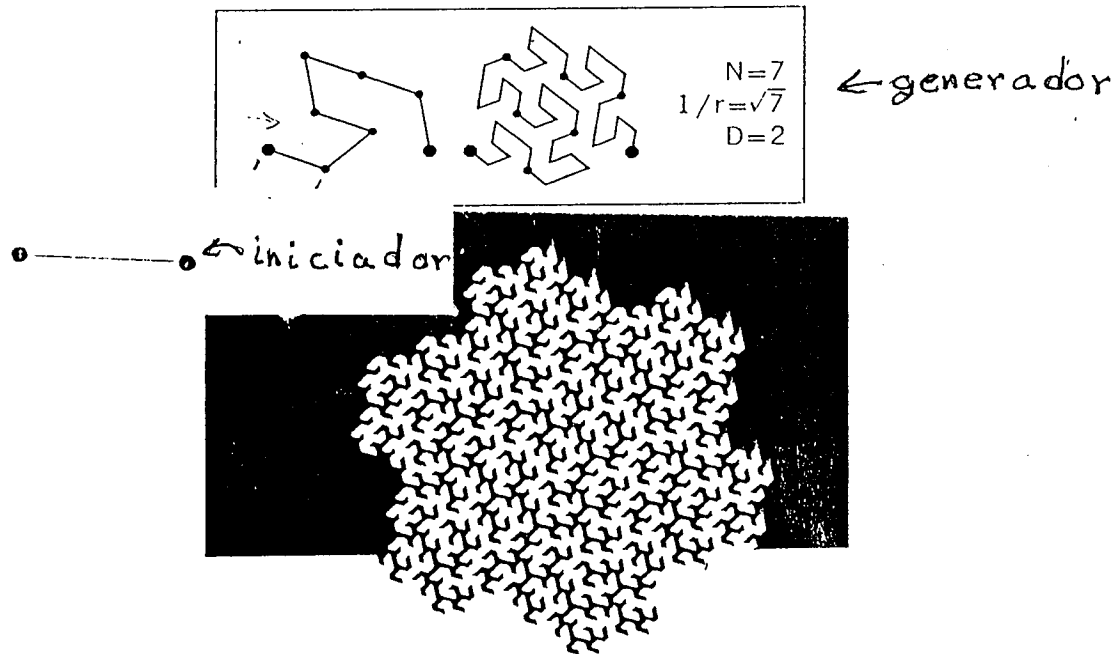


Figura 1.12: Curva de Gosper-Peano

- Un conjunto limitado S es estadísticamente auto-similar, con respecto a la razón r y a un entero N , cuando S es la unión de N subconjuntos S_n que no se traslapan, cada uno de los cuales es de la forma $r(S_n)$, donde los N subconjuntos S_n son congruentes en distribución a S . Este tipo de conjuntos aparecen, por ejemplo, en una línea costera.

Existen conjuntos fractales que no son auto-similares. Por ejemplo, si queremos estudiar el movimiento Browniano (fractal natural) de una partícula, siendo la posición y el tiempo cantidades físicas diferentes, no es posible escalar las dos cantidades con la misma razón de escalamiento; entonces no se puede aplicar el concepto de auto-similaridad.

Para poder estudiar dicho tipo de conjuntos necesitamos introducir el concepto de *auto-afinidad*.

Una transformación afín transforma un punto $\vec{x} = (x_1, \dots, x_E)$ a $\vec{x}' = (r_1 x_1, \dots, r_E x_E)$, donde las razones de escalamiento r_1, \dots, r_E no son todas iguales. La auto-afinidad se define como:

- Un conjunto limitado o no limitado S es auto-afín con respecto a la razón vectorial $\vec{r} = (r_1, \dots, r_E)$, si S es la unión de N subconjuntos que no se traslapan S_1, \dots, S_N , cada uno de los cuales es congruente al conjunto $\vec{r}(S)$.

En la siguiente sección nos damos cuenta que el conjunto que discutiremos en

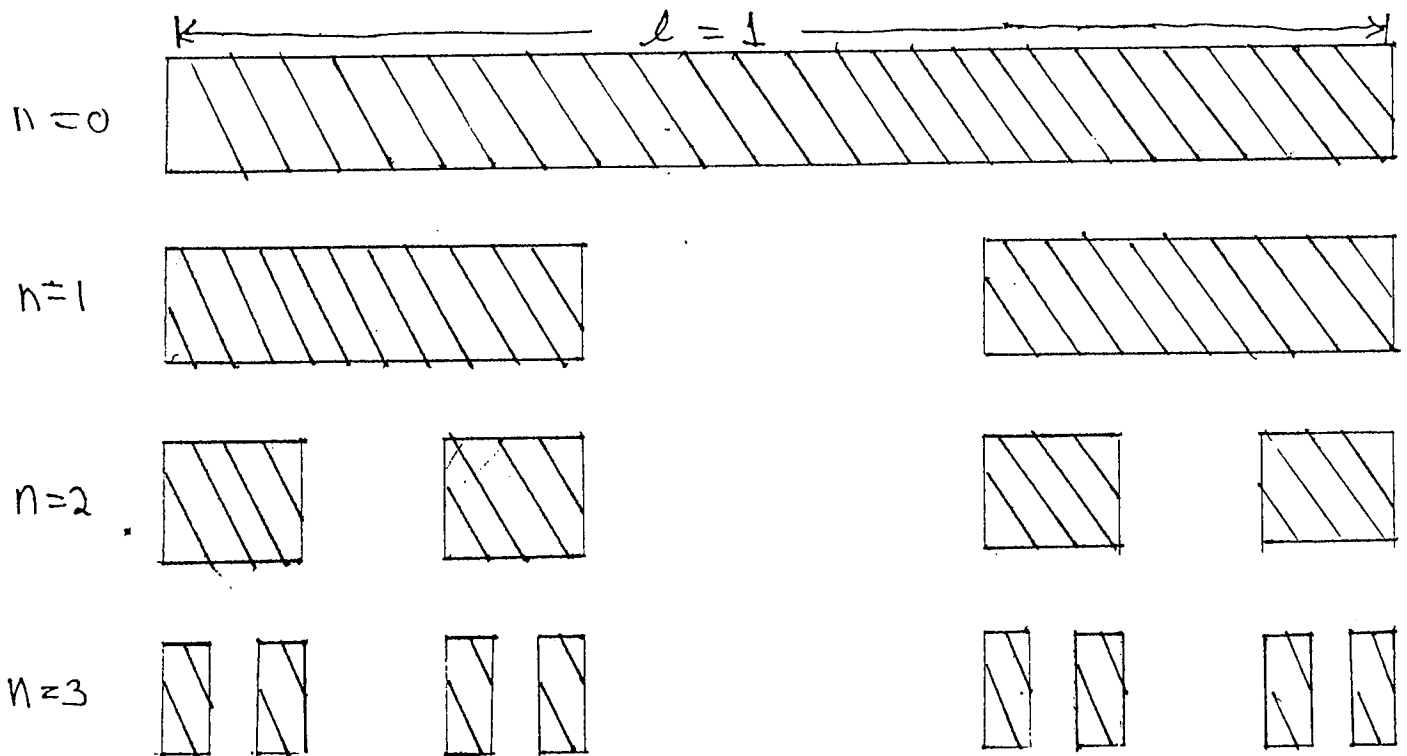


Figura 1.13: Conjunto Triádico de Cantor

el desarrollo de la tesis es un sistema fractal auto-similar con razones de división distintas.

1.4 Conjuntos de Cantor

En esta sección se discutirán diferentes tipos de conjuntos de Cantor. En la primera subsección se analizan conjuntos simétricos; en este caso particular usaremos únicamente una razón de subdivisión (o escalamiento). Posteriormente se consideran conjuntos no simétricos, tanto en el arreglo triádico, así como en el caso de tener cinco subdivisiones .

1.4.1 Conjuntos simétricos triádicos de Cantor

El conjunto triádico de Cantor estandar, figura 1.13, se construye en base al siguiente algoritmo: inicialmente se tiene un segmento lineal de longitud unitaria (etapa $s = 0$), en seguida se divide en tres partes iguales $N = 3$, por lo que $r = 1/3$ y se remueve la parte central; de esta manera se obtiene la etapa $s = 1$. Se prosigue de esta manera aplicando el algoritmo un número infinito de veces (o hasta una etapa s deseada) solo a los segmentos negros de la figura 1.13. Dado que el conjunto resultante es *auto-similar*, su dimensión correspondiente se encuentra usando la ecuación (1.20) directamente, con $N = 2$ y $r = 1/3$, por lo que

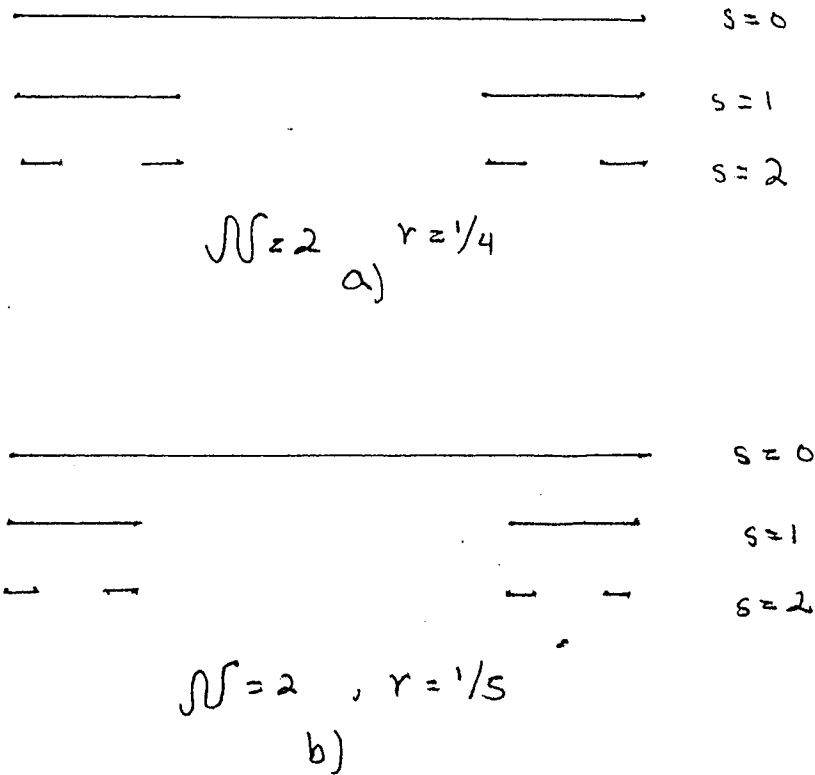


Figura 1.14: Conjuntos simétricos de Cantor

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} .$$

Como la dimensión topológica del conjunto de Cantor es cero (distribución discreta de puntos en el límite $s \rightarrow 0$), entonces D es mayor que su dimensión topológica, por lo que el conjunto triádico de Cantor es un fractal con dimensión $D = \ln 2 / \ln 3$.

Analicemos ahora conjuntos de Cantor simétricos con razones de subdivisión diferentes a $r = 1/3$ pero usando un solo patrón de medición. En la figura 1.14 se muestran dos conjuntos de Cantor con diferentes dimensiones. Este tipo de conjuntos se construyen de la siguiente manera: se divide el segmento lineal unitario en N partes iguales, posteriormente se remueven las N_m partes centrales, dejando que la razón de escalamiento para las partes extremas sea de $r = \frac{N - N_m}{2N} = \frac{1}{N}$; y el número de patrones de esta longitud es $\mathcal{N} = N - N_m = 2$. Este algoritmo se aplica únicamente a las barras negras del conjunto hasta alcanzar la etapa s deseada. En la figura 1.14a se muestra un conjunto que se construye dividiendo el iniciador en cuatro partes iguales ($N = 4$) y posteriormente removiendo las dos partes centrales ($N_m = 2$), de donde $r = 1/4$. Las ecuaciones (1.18)-(1.20) siguen siendo válidas, por lo tanto, la dimensión fractal del sistema es

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 4} = 0.5 .$$

En la figura 1.14b se muestra un conjunto fractal construido con $N = 5$ y $N_m = 3$. Este conjunto tiene una razón de escalamiento $r = 1/5$, por lo que su dimensión es

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 5} \cong 0.4306 .$$

El concepto intuitivo de “sustancialidad” se puede cuantificar definiendolo como la fracción de “espacio negro” ($\frac{1}{2}$ en la figura 1.14a y $\frac{2}{5}$ en la figura 1.14b). Entonces en el caso presente podemos definir la sustancialidad como $\sigma = r_1 + r_3 = 2r = 2/N$. Es facil ver que $D = (1 - \ln\sigma/\ln 2)^{-1}$. Podemos concluir que la dimensión aumenta con la sustancialidad.

1.4.2 Conjuntos de Cantor asimétricos con tres razones de escalamiento.

En esta sección se estudian sistemas no simétricos de Cantor con tres divisiones de distinta longitud, figura 1.15. Estos sistemas se construyen iniciando con segmento lineal unitario, el cual se divide en tres partes con razones de subdivisión r_1 , r_2 y r_3 que son diferentes. Posteriormente se remueve el segmento cuya razón de escalamiento es r_2 , dando como resultado la etapa $s = 1$. Se prosigue aplicando este algoritmo infinitamente (o hasta la etapa s deseada) solo a las barras negras del sistema. La dimensión fractal de este tipo de sistemas fractales se calcula usando la ecuación (1.30). En estos sistemas se utilizan dos patrones δ diferentes para cuantificarlos, $\delta_1 = r_1$ y $\delta_2 = r_3$.

En la figura 1.15a se muestra un conjunto con $r_1 = 1/4$ y $r_3 = 2/5$. Con estos valores en las razones de escalamiento la dimensión fractal del sistema es dada por la ecuación

$$\left(\frac{1}{4}\right)^D + \left(\frac{2}{5}\right)^D = 1$$

de donde

$$D \cong 0.611 .$$

En la figura 1.15b tenemos un conjunto con razones $r_1 = 1/3$ y $r_3 = 1/5$, con los cuales obtenemos una dimensión fractal

$$D \cong 0.518 .$$

La asimetría tiene como efecto disminuir la dimensión fractal del sistema; este comportamiento se muestra en la figura 1.16. Es importante señalar que el efecto de la asimetría es independiente de la sustancialidad. En la curva mostrada en la figura 1.16 se mantiene la sustancialidad- recordemos como fué definida para conjuntos de Cantor al final de la sección anterior- y se varía el grado de asimetría del conjunto. El grado de asimetría es cuantificado por $\alpha \equiv \left|r_1 - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{2} |r_1 - r_3|$. Aquí la sustancialidad es $\sigma = r_1 + r_3 = 1 - r_2 = \frac{2}{3}$.

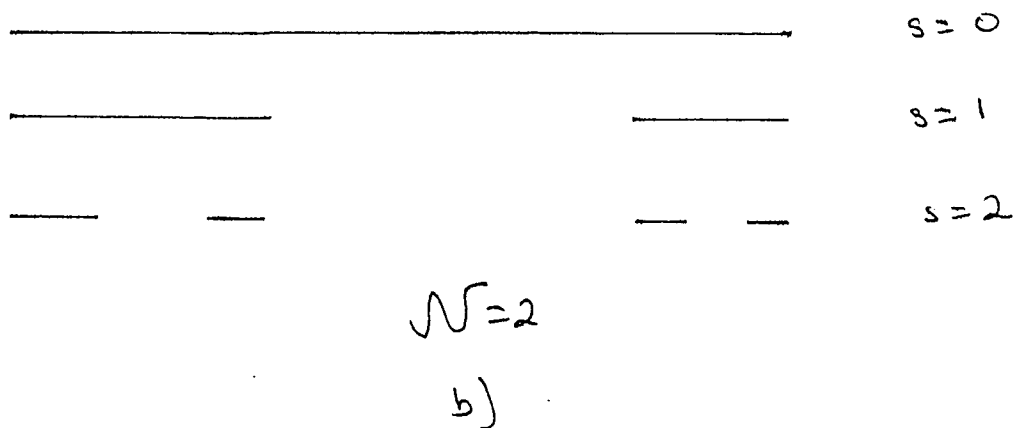
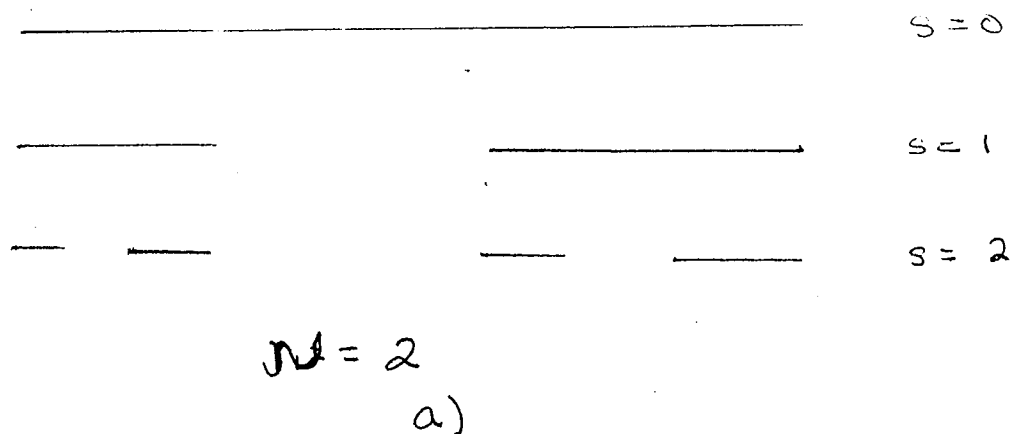


Figura 1.15: Conjuntos asimétricos de Cantor. En la sección consideramos dos casos: a) $\mathcal{N} = 2, r_1 = 1/4, r_2 = 7/20, r_3 = 2/5$ ($D = 0.6109$). b) $\mathcal{N} = 2, r_1 = 1/3, r_2 = 7/15, r_3 = 1/5$ ($D = 0.518$).

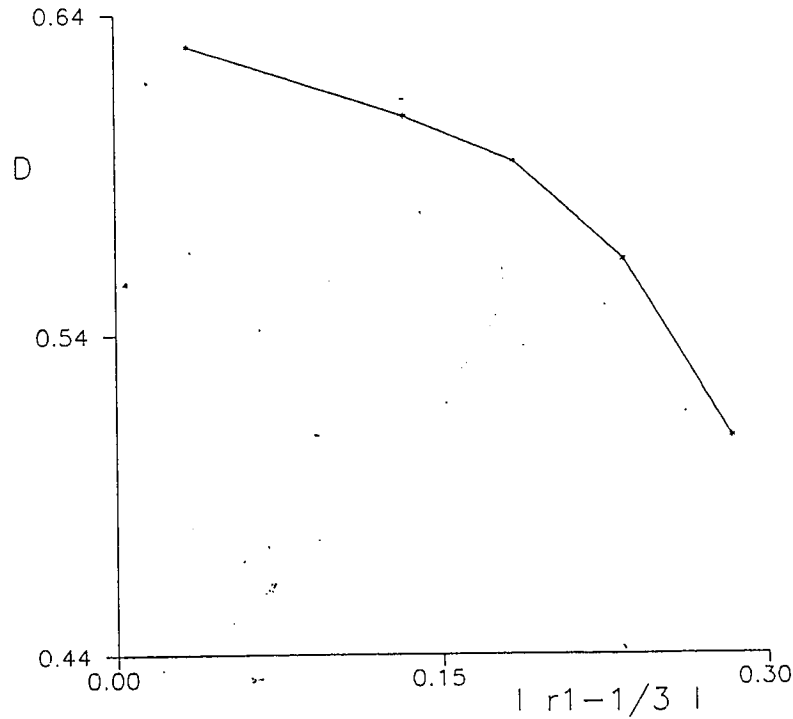


Figura 1.16: Efecto de la asimetría en la dimensión fractal, $N=3$

1.4.3 Conjuntos de Cantor asimétricos con cinco razones de escalamiento.

En esta sección se estudian sistemas no simétricos de Cantor con cinco divisiones de distinta longitud, figura 1.17. Estos sistemas se construyen iniciando con segmento lineal unitario, el cual se divide en cinco partes con razones diferentes de subdivisión r_1, r_2, r_3, r_4 y r_5 . Posteriormente se remueven los segmentos cuyas razones de escalamiento son r_2 y r_4 , dando como resultado la etapa $s = 1$. Se prosigue aplicando este algoritmo infinitamente (o hasta la etapa s deseada) solo a las barras negras del sistema. La dimensión fractal de este tipo de sistemas fractales se calcula desarrollando la ecuación (1.27) hasta $\nu_n = 5$ y recordando que ν_n solo toma valores impares. En estos sistemas se utilizan tres patrones δ diferentes para cuantificarlos, $\delta_1 = r_1$, $\delta_2 = r_3$ y $\delta_3 = r_5$.

En la figura 1.17 se muestra el arreglo para este tipo de sistemas. En la parte (a) de la leyenda de esta figura el conjunto de Cantor se forma con las siguientes razones de subdivisión $r_1 = 3/20$, $r_2 = r_3 = r_4 = 1/5$, y $r_5 = 5 = 20$; con la aplicación de la ecuación (1.27) tenemos

$$r_1^D + r_3^D + r_5^D = 1, \quad (1.47)$$

que puede ser considerado una generalización de la ecuación (1.30).

Para los valores dados arriba

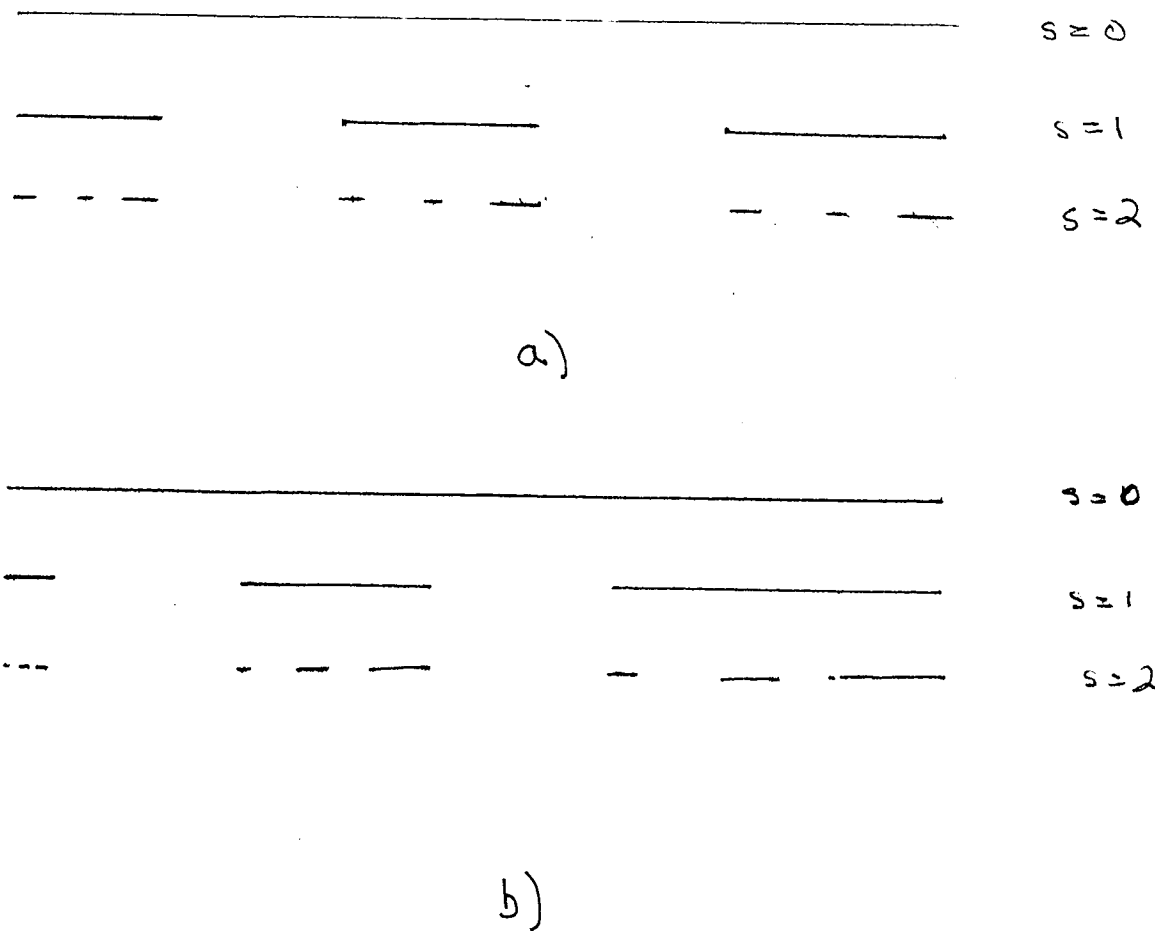


Figura 1.17: Conjuntos asimétricos de Cantor con a) $r_1 = 3/20$, $r_2 = r_3 = r_4 = 1/5$ $r_5 = 5/20$ con $D = 0.6797$ y b) $r_1 = 1/20$, $r_2 = r_3 = r_4 = 1/5$ $r_5 = 7/20$ con $D = 0.6495$

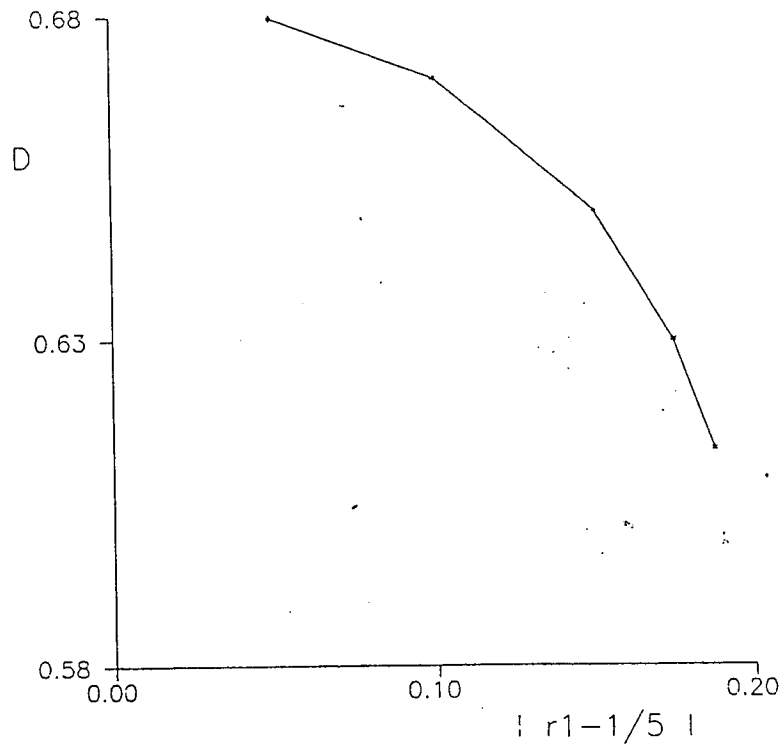


Figura 1.18: Efecto de la asimetría en la dimensión fractal, $N=5$

$$\left(\frac{3}{20}\right)^D + \left(\frac{4}{20}\right)^D + \left(\frac{5}{20}\right)^D = 1 ,$$

con la solución

$$D \cong 0.6795 .$$

En la parte (b) de la leyenda de la misma figura mostramos que aún y cuando la sustancialidad del sistema se mantiene constante el valor de la dimensión disminuye. Para las razones de subdivisión $r_1 = 1/20$, $r_2 = r_3 = r_4 = 1/5$, y $r_5 = 7/20$ la ecuación (1.47) da $D \cong 0.6495$.

El efecto de la asimetría del sistema se muestra en la figura 1.18 de manera más completa. Como se puede observar al aumentar la asimetría el valor de la dimensión fractal disminuye. Como es claro para poder analizar el efecto de la asimetría la sustancialidad del sistema no cambia.

1.5 Fractales en la Física :ejemplo

Existen algunos fenómenos físicos que proveen datos experimentales directamente relacionados con la dimensión fractal del sistema. Por ejemplo, tenemos que para dispersión de rayos X a ángulos pequeños, la intensidad de dispersión I es proporcional

a θ^{D_s-6} [4], donde θ es el ángulo de dispersión (en radianes) y D_s la dimensión. Consecuentemente graficando $\ln I$ vs $\ln \theta$ obtendremos la dimensión superficial fractal del dispersor rugoso (para una superficie lisa se obtendría el caso Euclideo $D_s = 2$). Tsallis[15] argumenta que el efecto pelicular pertenece a este tipo de métodos, y que por lo tanto podría ser conveniente usarlo para determinar las distintas dimensiones fractales asociadas con conductores arbitrariamente rugosos e irregulares.

Muchos fenómenos físicos tienen características fractales, tales como el proceso de difusión, agregación, crecimiento de cristales, movimientos Brownianos, etc...[14, 15]. Un ejemplo importante es el desarrollado por C. Allien y M. Cloitre [15a], en el cual presentan resultados de difracción óptica para fractales determinísticos, en particular para una rejilla fractal Tipo Cantor. Ellos demuestran que la intensidad dispersada por la rejilla está dada por $I(q) \approx q^{-(D)}$ y que es simplemente la transformada de Fourier óptica. Esto les permite la determinación directa de la dimensión de Hausdorff-Besicovitch (dimensión fractal) y otras características geométricas del fractal.

Capítulo 2

ARREGLO FRACTAL DE PELÍCULAS DELGADAS: caso I

2.1 Introducción

En esta parte del trabajo desarrollaremos el algoritmo para encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión de una estructura fractal. Esta estructura se obtiene mediante un iniciador (película delgada de espesor Δ) y un generador que consiste del algoritmo de Cantor con razones distintas, el cual es dado en la sección 1.4.3. Empezando con una capa delgada (de espesor Δ e índice de refracción n_1), se inicia un proceso de subdivisión mediante el algoritmo mencionado anteriormente. Por ejemplo, dividimos el espesor inicial Δ en tres partes, cuyos espesores son $r_1\Delta$, $r_2\Delta$, y $r_3\Delta$; los índices de refracción correspondientes se alternan (n_1 , n_2 , y n_1). Este proceso se continúa hasta alcanzar la etapa deseada, aplicando el algoritmo (generador) únicamente a los medios con índice de refracción n_1 .

Estudiaremos las propiedades de reflexión y transmisión en este tipo de sistemas. Los coeficientes de reflexión y transmisión son obtenidos para incidencia normal de ondas planas, y se calculan para distintas dimensiones fractales y etapas de subdivisión. Obtendremos un algoritmo recursivo general para los coeficientes de reflexión y transmisión en una etapa de subdivisión dada en función de los coeficientes de la etapa anterior. La obtención de los algoritmos se basa en las propiedades de autosimilaridad del sistema.

2.1.1 Cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión de un sistema multicapas.

Para calcular los coeficientes de reflexión y transmisión de un sistema multicapas se usará el método de interfaces efectivas [17], i.e., el sistema se separa en dos subsistemas los cuales se unirán por medio de una película de espesor Δ dado, figura 2.1. Cada uno de los subsistemas consta de un número finito de películas delgadas en cualquier etapa prefractal.

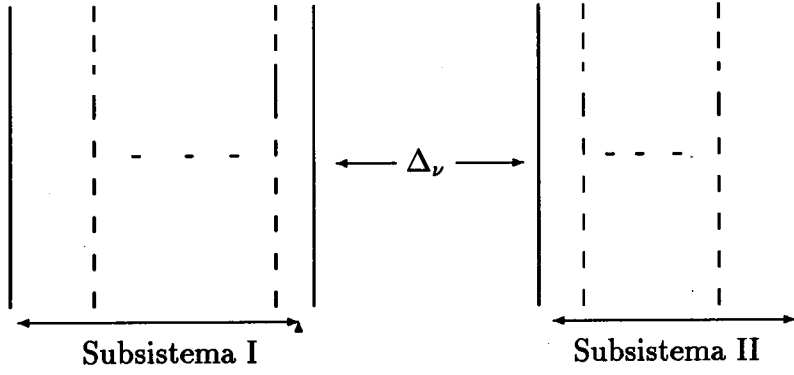


Figura 2.1: La fase del ν -ésimo medio es dada por $\varphi_\nu = k\Delta_\nu n_\nu$, donde $\Delta_\nu = r_\nu \Delta$ es el espesor de una fracción r_ν del espesor total Δ , n_ν es el índice de refracción correspondiente y k el vector de onda. Cada uno de los subsistemas I y II contienen un número arbitrario de capas.

Los coeficientes de reflexión y transmisión para una película delgada de espesor Δ son dados por las formulas de Airy [18], ver deducción apéndice A : (la onda incide de izquierda a derecha)

$$r_R = r_{1R} + \frac{t_{1R} t_{1L} r_{2R} e^{2i\varphi}}{1 - r_{1L} r_{2R} e^{2i\varphi}} \quad (2.1)$$

$$t_R = \frac{t_{1R} t_{2R} e^{i\varphi}}{1 - r_{1L} r_{2R} e^{2i\varphi}} \quad (2.2)$$

con los sub-índices R y L indicando que la onda incide por la derecha o por la izquierda a cada una de las interfaces (1 o 2) respectivamente. Por otro lado, si queremos calcular los coeficientes de reflexión y transmisión para un sistema multicapas se divide el sistema en dos subsistemas, que denotaremos como I y II, los cuales son unidos por una película de espesor Δ y fase $\varphi_\nu (= kn_\nu)$. Cada uno de los subsistemas se considera como interface para la película delgada de espesor Δ que los separa, por lo que los coeficientes totales para cada uno de ellos es considerado como un coeficiente efectivo de interface [18], [17]. Entonces las ecuaciones (2.1)-(2.2) dan lugar a

$$r_R = r_{IR} + \frac{t_{IR} t_{IL} r_{IIR} e^{2i\varphi}}{1 - r_{IL} r_{IIR} e^{2i\varphi}} \quad (2.3)$$

$$t_R = \frac{t_{IR} t_{IIR} e^{i\varphi}}{1 - r_{IL} r_{IIR} e^{2i\varphi}} \quad (2.4)$$

Como ya se dijo anteriormente, los subsistemas mostrados en la figura 2.1 estan compuestos por un sistema multicapas. Por lo cual, los coeficientes de reflexión y transmisión correspondientes a cada uno de los subsistemas son calculados usando el

procedimiento anterior; esto es, de nuevo se divide en dos a cada uno de los subsistemas. Este procedimiento se prosigue hasta llegar a un sistema monocapa. A este método de cálculo se le denomina “método de interfaces efectivas” [17], dado que el coeficiente total del sistema se puede usar como un coeficiente de interface cuando dicho sistema es componente de otro más general. La deducción de las ecuaciones (2.3) y (2.4) es dada en el apéndice A, este método fué introducido por Knittl [17].

2.1.2 Arreglo fractal de películas delgadas en un medio huesped

El sistema que se resuelve en esta sección se muestra en la figura 2.2. De esta figura podemos observar que se puede utilizar el método de coeficientes de interface efectiva. Esto se realiza de la siguiente manera: Para la etapa $s = 0$, los coeficientes son dados por las interfaces $n_0|n_1$ y $n_1|n_0$, ver ecuaciones (2.7). Los coeficientes de interface en la etapa $s = 1$, son los coeficientes encontrados para la etapa anterior ($s = 0$), evaluados para el subsistema *I* de espesor $r_1\Delta$ y para el subsistema *II* de espesor $r_3\Delta$. Esto es debido a que los subsistemas *I* y *II* para cualquier etapa, diferente a la etapa $s = 0$, son equivalentes al sistema completo en la etapa anterior, y la única diferencia es su espesor, esto es, su grado de escalamiento en la etapa. En los casos a resolver en este capítulo las películas de índice n_1 están inmersas en un medio huesped, i.e., $n_2 = n_0$.

2.2 Coeficientes de reflexión y transmisión : caso Triádico

El sistema que se resuelve en esta sección se muestra en la figura 2.2. Como ya se dijo se tiene un medio huesped ($n_2 = n_0$) y el número de divisiones de cada película de índice n_1 del sistema en una etapa dada es igual a $N = 3$. El espesor del medio inicial (etapa $s = 0$) es Δ . Se usa la siguiente notación para los coeficientes de reflexión y transmisión total: $R(s, z)$ y $T(s, z)$ donde s es la etapa de subdivisión y z al espesor del medio.

Los coeficientes de reflexión y transmisión para la etapa de subdivisión $s = 0$ son dados de la siguiente manera:

$$R_R(0, \Delta) = r_{1R} + \frac{r_{2R}t_{1R}t_{1L}e^{2ikn_1\Delta}}{1 - r_{1L}r_{2R}e^{2ikn_1\Delta}} \quad (2.5)$$

$$T_R(0, \Delta) = \frac{t_{1R}t_{2R}e^{ikn_1\Delta}}{1 - r_{1L}r_{2R}e^{2ikn_1\Delta}} \quad (2.6)$$

donde

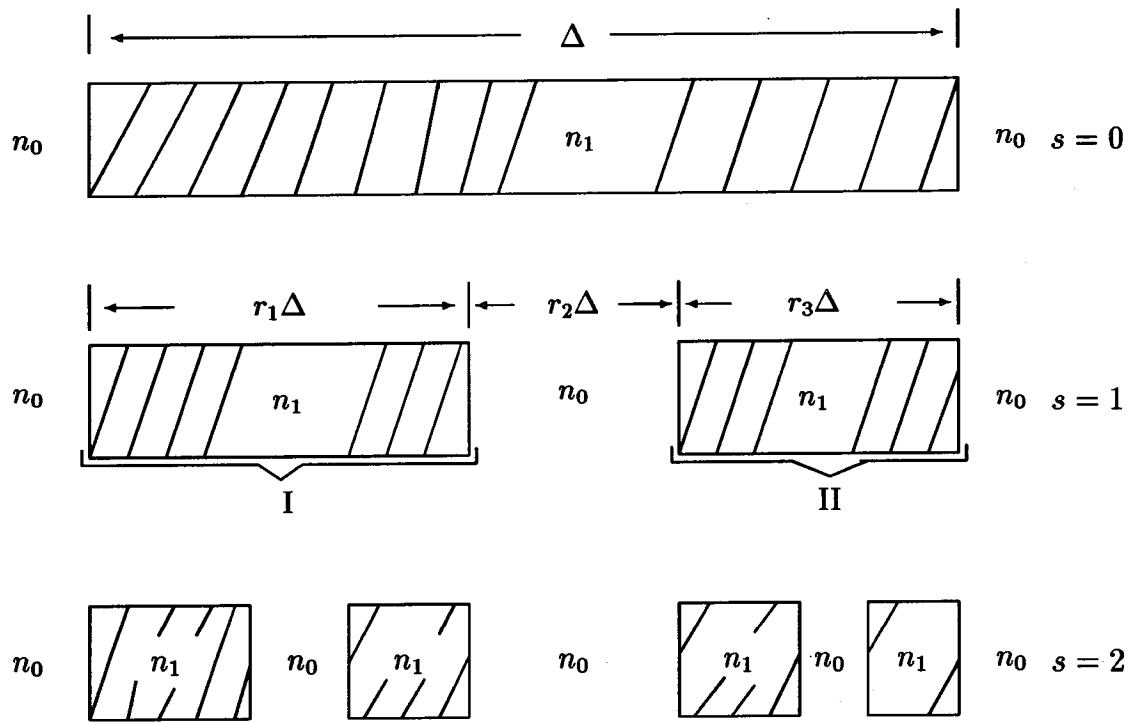


Figura 2.2: Geometría del sistema, caso de medio huesped y tres divisiones

$$\left. \begin{aligned} r_{1L} &= \frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0} , & r_{2R} &= \frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0} \\ r_{1R} &= -r_{1L} \\ t_{1R} &= \frac{2n_0}{n_1 + n_0} , & t_{1L} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_0} \\ t_{2R} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

siendo estos coeficientes los correspondientes a la etapa $s = 0$.

Debemos recordar que los coeficientes de transmisión cumplen con la siguiente condición:

$$T_L(0, \Delta) = T_R(0, \Delta) \quad (2.8)$$

donde T_L y T_R respectivamente son los coeficientes de transmisión cuando la luz incide por la izquierda y por la derecha al sistema respectivamente. La igualdad (2.8) se obedece dado que tenemos un medio hoesped ($n_2 = n_0$).

Definamos un par de funciones g_r y g_t las cuales nos permitirán escribir de una manera más simple las ecuaciones (2.5) y (2.6) [11]:

$$g_r(x, y, z, w, d) = x + \frac{wz e^{2ikn_0 d}}{1 - yz e^{2ikn_0 d}} \quad (2.9)$$

$$g_t(x, y, z, w, d) = \frac{z w e^{ikn_0 d}}{1 - x y e^{2ikn_0 d}} \quad (2.10)$$

donde x, y, z, w representan los coeficientes de reflexión y transmisión, según sea requerido, y d el espesor del sistema correspondiente.

Los coeficientes de reflexión y transmisión para la etapa $s = 1$, usando las funciones g_r y g_t , son dados de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} R_R(1, \Delta) &= g_r [R_R(0, r_1 \Delta), R_L(0, r_1 \Delta), \\ &\quad R_R(0, r_3 \Delta), T_R(0, r_1 \Delta), r_2 \Delta] \\ T_R(1, \Delta) &= g_t [R_L(0, r_1 \Delta), R_R(0, r_3 \Delta), \\ &\quad T_R(0, r_1 \Delta), T_R(0, r_3 \Delta), r_2 \Delta] \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

donde

$$R_L(0, r_1 \Delta) = R_R(0, r_1 \Delta)$$

Es importante notar que la igualdad dada para el coeficiente $R_L = R_R$ sólo es válida para la etapa $s = 0$, esto se puede observar de la figura 2.3 considerando la ecuación (2.1). En forma análoga se encuentran los coeficientes para etapas subsiguientes. Los coeficientes correspondientes a la etapa $s = 2$ son:

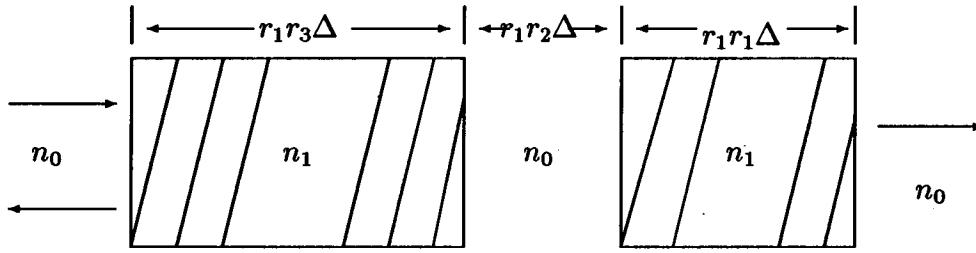


Figura 2.3: Sistema para encontrar el coeficiente $R_L(1, r_1 \Delta)$

$$\left. \begin{aligned} R_R(2, \Delta) &= g_r [R_R(1, r_1 \Delta), R_L(1, r_1 \Delta), \\ &\quad R_R(1, r_3 \Delta), T_R(1, r_1 \Delta), r_2 \Delta] \\ T_R(2, \Delta) &= g_t [R_L(1, r_1 \Delta), R_R(1, r_3 \Delta), \\ &\quad T_R(1, r_1 \Delta), T_R(1, r_3 \Delta), r_2 \Delta] \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

donde

$$R_L(1, r_1 \Delta) = g_r [R_L(0, r_3 \Delta), R_R(0, r_3 \Delta), \\ R_L(0, r_1 \Delta), T_R(0, r_3 \Delta), r_2 \Delta]$$

Ahora ya estamos en posibilidad de generalizar las ecuaciones para los coeficientes de reflexión y transmisión.

$$\left. \begin{aligned} R_R(s, \Delta) &= g_r [R_R(s-1, r_1 \Delta), R_L(s-1, r_1 \Delta), \\ &\quad R_R(s-1, r_3 \Delta), T_R(s-1, r_1 \Delta), r_2 \Delta] \\ T_R(s, \Delta) &= g_t [R_L(s-1, r_1 \Delta), R_R(s-1, r_3 \Delta), \\ &\quad T_R(s-1, r_1 \Delta), T_R(s-1, r_3 \Delta), r_2 \Delta] \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$R_L(s-1, \Delta) = g_r [R_L(s-2, r_3 \Delta), R_R(s-2, r_3 \Delta), \\ R_L(s-2, r_1 \Delta), T_R(s-2, r_3 \Delta), r_2 \Delta]$$

Es importante expresar el índice de refracción efectivo del sistema fractal mostrado en la figura 2.2 en función de las razones de partición, (r_1 , r_2 , y r_3), y de la etapa de subdivisión correspondiente. Esto debe realizarse para obtener información de las características fractales de los espectros de reflectividad, como se verá en el capítulo cuatro. Para esto veamos primeramente los resultados que arroja la teoría de medios efectivos para un sistema arbitrario, ver las referencias [19], [18], [20] y [21]. En estos trabajos se muestra que si tenemos el campo eléctrico paralelo a las interfaces del sistema (polarización TE), la constante dieléctrica efectiva se escribe como

$$\epsilon_{ef} = f_1 \epsilon_1 + f_2 \epsilon_2$$

donde f_1 y f_2 son las fracciones de ocupación de los medios uno y dos respectivamente. El rango de validez de esta aproximación es dado por la teoría de medios efectivos, ver [19]. Este rango es dado por la condición: espesor (o tamaño característico del medio) sea a lo mas 10% del valor de la longitud de onda de la onda incidente.

En general, la constante dieléctrica efectiva a bajas frecuencias, de un medio compuesto de varios materiales dieléctricos (con constantes dieléctricas ϵ_i y fracciones de ocupación f_i) y siendo el campo eléctrico paralelo a las interfaces que separan a estos materiales es dado, simplemente, por la constante dieléctrica promedio de los dieléctricos componentes [19]:

$$\epsilon_{ef} = \bar{\epsilon} = \sum_i \epsilon_i f_i \quad (2.14)$$

Por lo tanto, el índice de refracción efectivo es

$$n_{ef} = \sqrt{\epsilon_{ef}} = \sqrt{\sum_i \epsilon_i f_i} \quad (2.15)$$

En nuestro caso, dado que tenemos incidencia normal y nuestro sistema fractal cumple con las condiciones del desarrollo anterior a bajas frecuencias, podemos usar la relación anterior para escribir en la etapa número uno la constante dieléctrica efectiva de la siguiente manera

$$\epsilon_{ef} = r_1 \epsilon_1 + r_2 \epsilon_0 + r_3 \epsilon_1 \quad (2.16)$$

o sea, ϵ_{ef} es simplemente el promedio ponderado de las constantes dieléctricas constituyentes ϵ_i . Las fracciones de ocupación se transforman en las razones de división para el desarrollo fractal, dado que ambas nos dicen que fracción del medio total es ocupada por dicho material.

Agrupando términos semejantes

$$\epsilon_{ef} = (r_1 + r_3) \epsilon_1 + r_2 \epsilon_0 \quad (2.17)$$

Extendiendo directamente la ecuación (2.16), escribamos la constante dieléctrica efectiva para $s = 2$

$$\epsilon_{ef} = r_1 r_1 \epsilon_1 + r_1 r_2 \epsilon_0 + r_1 r_3 \epsilon_1 + r_2 \epsilon_0 + r_3 r_1 \epsilon_1 + r_3 r_2 \epsilon_0 + r_3 r_3 \epsilon_1$$

agrupando

$$\epsilon_{ef} = (r_1 + r_3)^2 \epsilon_1 + (r_1 + r_3) r_2 \epsilon_0 + r_2 \epsilon_0 \quad (2.18)$$

Aplicando el procedimiento anterior a la etapa $s = 3$ y agrupando, obtenemos

$$\epsilon_{ef} = (r_1^3 + 3r_1^2r_3 + 3r_1r_3^2 + r_3^3) \epsilon_1 + (r_1^2 + 2r_1r_3 + r_3^2) r_2 \epsilon_0 + (r_1 + r_3) r_2 \epsilon_0 + r_2 \epsilon_0$$

$$\epsilon_{ef} = (r_1 + r_3)^3 \epsilon_1 + [(r_1 + r_3)^2 + (r_1 + r_3) + 1] r_2 \epsilon_0 \quad (2.19)$$

De las ecuaciones (2.17)-(2.19) deducimos:

$$\epsilon_{ef} = (r_1 + r_3)^s \epsilon_1 + r_2 \epsilon_0 \sum_{n=0}^{s-1} (r_1 + r_3)^n \quad (2.20)$$

Desarrollando la serie geométrica se tiene

$$\epsilon_{ef} = (r_1 + r_3)^s \epsilon_1 + r_2 \epsilon_0 \frac{1 - (r_1 + r_3)^s}{1 - (r_1 + r_3)}$$

Utilizando $r_2 = 1 - (r_1 + r_3)$ obtenemos finalmente

$$\epsilon_{ef} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) (r_1 + r_3)^s + \epsilon_0 \quad (2.21)$$

Es importante señalar que la reflectividad del sistema a bajas frecuencias será igual a la reflectividad producida por una película delgada de espesor Δ e índice de refracción $n_{ef} = \sqrt{\epsilon_{ef}}$ dado en la ecuación anterior. Esto es debido a que a bajas frecuencias la onda incidente no siente la estructura del sistema, dado que la longitud de onda de la luz incidente es mucho mayor que el espesor del sistema completo. A bajas frecuencias Sun y Jaggard [11] utilizan un índice de refracción efectivo igual a $\bar{n} = \sum n_i f_i$. Según la discusión anterior, referencias [19]-[21] y la ecuación (2.14), el procedimiento en la referencia [11] no es correcto. Esto se confirma mediante el siguiente cálculo. En la figura 2.4 se muestran los espectros exactos encontrados para un sistema de tres películas delgadas, con $n_1 = 3.0$ y $f_1 = 3/9$ para el primer medio, para el segundo medio $n_2 = 1.5$ y $f_2 = 2/9$ y finalmente $n_3 = 5.0$ $f_3 = 4/9$ para el tercer medio. También se muestran dos espectros aproximados: uno (campanitas) basado en la aproximación de Sun y Jaggard [11], con índice de refracción efectivo $n_e = \bar{n} = 3.5555$; y el otro (asteriscos) calculado en base de la aproximación dada en [19] (la aproximación dada por (2.21) que usaremos en fractales) de medios efectivos, con índice efectivo $n_{ef} = 3.8224$, ecuación (2.14). En la figura se observa que la curva del sistema efectivo con n_{ef} concuerda en un rango mayor con el espectro exacto, a diferencia de la curva obtenida con el índice efectivo n_e . Por lo que se confirma que el promedio correcto es el promedio de las constantes dieléctricas y no el de los índices de refracción correspondientes. Es importante señalar que existe relación entre el índice efectivo de refracción con la etapa de desarrollo fractal s . De esta manera relacionamos la amplitud del coeficiente de reflexión con una característica fractal. En los espectros, que mostraremos en el capítulo cuatro, esta información es rescatada del valor en el primer pico.

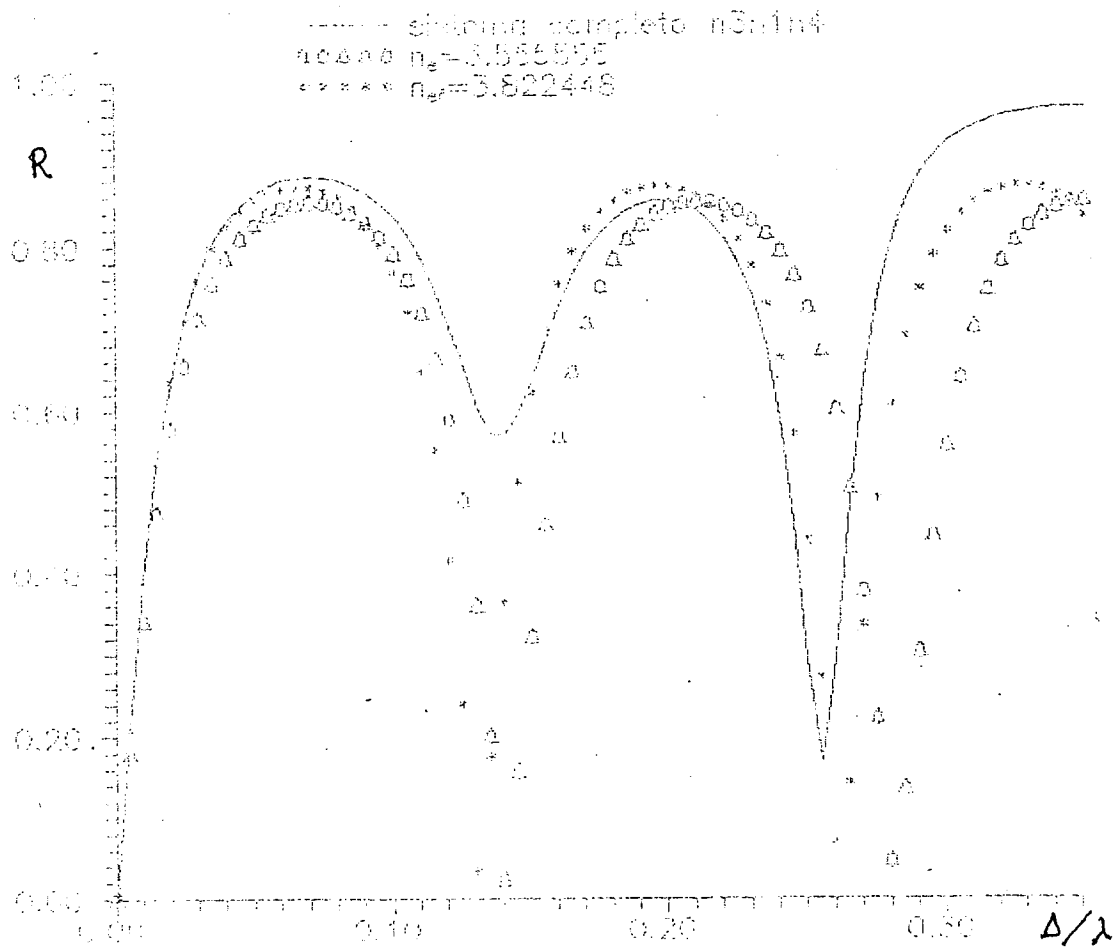


Figura 2.4: Se muestran tres espectros a bajas frecuencias . Linea continua indica sistema completo. La curva para n_e es el índice promediado. Finalmente la curva con n_{ef} es el índice obtenido de la constante dieléctrica efectiva. En esta figura no se muestran resultados para una estructura fractal.

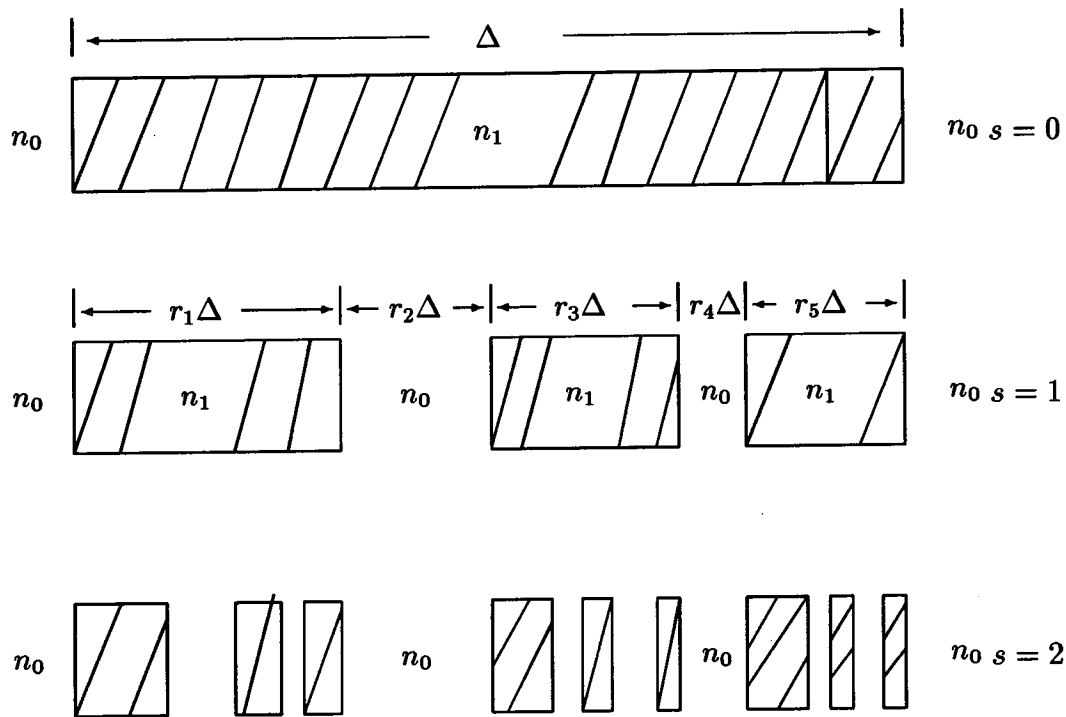


Figura 2.5: Película fractal con cinco razones de subdivisión $r_i (i = 1, 2, \dots, 5)$

Un parámetro importante para distinguir una estructura fractal de otra es la dimensión fractal asociada con ellas. Dado que tenemos estructuras fractales tipo Cantor triádicas, su dimensión fractal es dada por la ecuación (1.30)

$$r_1^D + r_3^D = 1$$

2.3 Coeficientes de Reflexión y Transmisión: $N = 5$

Ahora extenderemos los algoritmos recursivos encontrados para el caso triádico ($N=3$) al caso de tener $N = 5$. El sistema a resolver se muestra en la figura 2.5.

Los coeficientes de reflexión y transmisión para la etapa cero son dados por las ecuaciones (2.5 y 2.6). Para calcular los coeficientes correspondientes a cada una de las siguientes etapas se usará la misma metodología que en la sección anterior. La distribución de los subsistemas, que en este caso son tres, se muestra en la figura 2.5. El subsistema cuyo espesor es $r_3\Delta + r_4\Delta + r_5\Delta$ forma el subsistema *II*; con este subsistema y 1 se calculan los coeficientes totales. Utilizaremos directamente las funciones g_r y g_t , introducidas en la sección anterior.

De esta manera tenemos que el coeficiente de reflexión es dado por el conjunto de

ecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{aligned}
 R_R(1, \Delta) &= g_r [R_R(0, r_1 \Delta), R_L(0, r_1 \Delta), \\
 &\quad R_{IIR}(1, d), T_R(0, r_1 \Delta), r_2 \Delta] \\
 \text{donde} \\
 R_{IIR}(1, d) &= g_r [R_R(0, r_3 \Delta), R_L(0, r_3 \Delta), \\
 &\quad R_R(0, r_5 \Delta), T_R(0, r_3 \Delta), r_4 \Delta]
 \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

donde R_{IIR} es el coeficiente de reflexión cuando la luz incide de izquierda a derecha en el subsistema dos.

El coeficiente de transmisión correspondiente a la etapa $s = 1$ es dado por las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned}
 T_R(1, \Delta) &= g_t [R_L(0, r_1 \Delta), R_{IIR}(1, d), \\
 &\quad T_R(0, r_1 \Delta), T_{IIR}(1, d), r_2 \Delta] \\
 \text{donde} \\
 T_{IIR}(1, d) &= g_t [R_L(0, r_3 \Delta), R_R(0, r_5 \Delta), \\
 &\quad T_R(0, r_5 \Delta), T_R(0, r_3 \Delta), r_4 \Delta]
 \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Recordemos que en el caso de $s = 0$ el coeficiente izquierdo es igual al coeficiente derecho.

Demos a continuación los coeficientes correspondientes a la etapa número dos; posteriormente se dan las relaciones generales para los mismos.

$$\left. \begin{aligned}
 R_R(2, \Delta) &= g_r [R_R(1, r_1 \Delta), R_L(1, r_1 \Delta), \\
 &\quad R_{IIR}(2, d), T_R(1, r_1 \Delta), r_2 \Delta] \\
 \text{donde} \\
 R_{IIR}(2, d) &= g_r [R_R(1, r_3 \Delta), R_L(1, r_3 \Delta), \\
 &\quad R_R(1, r_5 \Delta), T_R(1, r_3 \Delta), r_4 \Delta]
 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

el coeficiente de transmisión correspondiente es dado por:

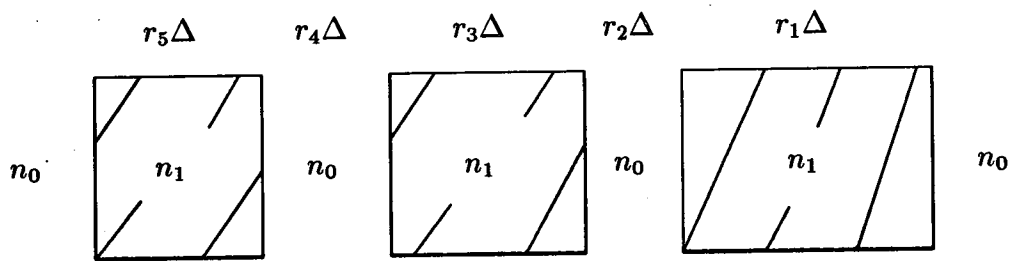


Figura 2.6: Geometría del sistema para calcular el coeficiente R_L evaluado en la etapa $s = 1$.

$$\left. \begin{aligned}
 T_R(2, \Delta) &= g_t [R_L(1, r_1\Delta), R_{IIR}(2, d), \\
 &\quad T_R(1, r_1\Delta), T_{IIR}(2, d), r_2\Delta] \\
 \text{donde} \\
 T_{IIR}(2, d) &= g_t [R_L(1, r_3\Delta), R_R(1, r_5\Delta), \\
 &\quad T_R(1, r_5\Delta), T_R(1, r_3\Delta), r_4\Delta]
 \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

En la figura 2.6, se muestra la configuración correspondiente al coeficiente $R_L(1, d)$, el cual es dado de la siguiente forma

$$\left. \begin{aligned}
 R_L(1, \Delta) &= g_r [R_{IIL}(1, d), R_{IIR}(1, d), \\
 &\quad R_L(0, r_1\Delta), T_{IIR}(1, d), r_2\Delta] \\
 \text{donde} \\
 R_{IIL}(1, d) &= g_r [R_L(0, r_5\Delta), R_R(0, r_5\Delta), \\
 &\quad R_L(0, r_3\Delta), T_R(0, r_5\Delta), r_4\Delta]
 \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

donde R_{IIL} representa el coeficiente de reflexión cuando la luz incide por el lado izquierdo al subsistema dos.

La generalización de las ecuaciones (2.22)-(2.26) para los coeficientes de reflexión y transmisión para cualquier etapa es dada de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned}
R_R(s, \Delta) &= g_r [R_R(s-1, r_1\Delta), R_L(s-1, r_1\Delta), \\
&\quad R_{IIR}(s, d), T_R(s-1, r_1\Delta), r_2\Delta] \\
R_{IIR}(s, d) &= g_r [R_R(s-1, r_3\Delta), R_L(s-1, r_3\Delta), \\
&\quad R_R(s-1, r_5\Delta), T_R(s-1, r_3\Delta), r_4\Delta]
\end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Para el coeficiente de transmisión correspondiente tenemos que las relaciones son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned}
T_R(s, \Delta) &= g_t [R_L(s-1, r_1\Delta), R_{IIR}(s, d), \\
&\quad T_R(s-1, r_1\Delta), T_{IIR}(s, d), r_2\Delta] \\
T_{IIR}(s, d) &= g_t [R_L(s-1, r_3\Delta), R_R(s-1, r_5\Delta), \\
&\quad T_R(s-1, r_5\Delta), T_R(s-1, r_3\Delta), r_4\Delta]
\end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

A continuación se dan las relaciones correspondientes al coeficiente R_L .

$$\left. \begin{aligned}
R_L(s, \Delta) &= g_r [R_{IIL}(s, d), R_{IIR}(s, d), \\
&\quad R_L(s-1, r_2\Delta), T_{IIR}(s, d), r_2\Delta] \\
R_{IIL}(s, d) &= g_r [R_L(s-1, r_5\Delta), R_R(s-1, r_5\Delta), \\
&\quad R_L(s-1, r_3\Delta), T_R(s-1, r_5\Delta), r_4\Delta]
\end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Las relaciones anteriores nos dan los algoritmos recursivos de los coeficientes de reflexión y transmisión. Solo nos resta dar los algoritmos correspondientes al caso donde N es general pero impar. Esto lo haremos en la próxima sección.

Utilizando la ecuación (2.14), la constante dieléctrica efectiva a bajas frecuencias se obtiene de la misma manera en que se obtuvo el correspondiente al caso $N = 3$, y es dada por:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ef} &= (r_1 + r_3 + r_5)^s \epsilon_1 + (r_2 + r_4) \epsilon_0 \sum_{n=0}^{s-1} (r_1 + r_3 + r_5)^n \\
\epsilon_{ef} &= (\epsilon_1 - \epsilon_0) (r_1 + r_3 + r_5)^s + \epsilon_0
\end{aligned} \quad (2.30)$$

La dimensión fractal asociada con este tipo de fractales es dada por la ecuación (1.27) con el índice de la suma a cinco y tomando unicamente valores impares, esto es,

$$\sum_{i=1,3,5} r_i^D = 1$$

En el siguiente capítulo se obtienen los algoritmos de recursividad para los coeficientes de reflexión y transmisión en el caso de ya no tener medio huésped, $n_2 \neq n_0$.

Capítulo 3

Cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión para el caso donde se tiene tres medios distintos (n_0, n_1, n_2) .

Como se mencionó en la introducción del capítulo anterior, el interés de este trabajo es el analizar los coeficientes de transmisión y reflexión para un sistema multicapas fractal tipo Cantor generalizado. La diferencia entre este capítulo y el anterior es que en lugar de tener un medio huésped ($n_2 = n_0$), ahora se tiene que $n_2 \neq n_0$, esto es, se distribuye un medio con índice de refracción n_2 entre los medios con índice de refracción n_1 y el medio que los rodea tiene índice de refracción n_0 , figura 3.1. El ya no tener medio huésped nos amplía la realización experimental de dichos sistemas fractales.

Otra diferencia importante con el capítulo anterior es la no simetría que se tiene para calcular los coeficientes de reflexión y transmisión. En lugar de encontrar relaciones recursivas directas para los coeficientes de reflexión y transmisión estos serán encontrados de una manera indirecta con el uso de coeficientes de reflexión y transmisión auxiliares \mathcal{R} y \mathcal{T} para las distintas partes del sistema. Esto se ilustra gráficamente en la figura 3.3. Como puede observarse de la figura 3.1, el coeficiente de la etapa $s = 1$ no se puede escribir con el coeficiente de la etapa $s = 0$ usando el método de interfaces efectivas usado en el capítulo anterior. Esto es debido a que los medios que limitan a los subsistemas ya no son iguales para etapas diferentes de cero, capítulo anterior $n_2 = n_0$. Para lograr escribir el coeficiente de reflexión en la etapa $s = 1$ necesitamos usar los coeficientes auxiliares correspondientes a los sistemas mostrados en la figura 3.2. Posteriormente para construir el coeficiente de reflexión en la etapa $s = 2$ necesitamos utilizar los coeficientes auxiliares mostrados en las figuras 2.3-3.4 y así sucesivamente. Este procedimiento se muestra en la siguiente sección.

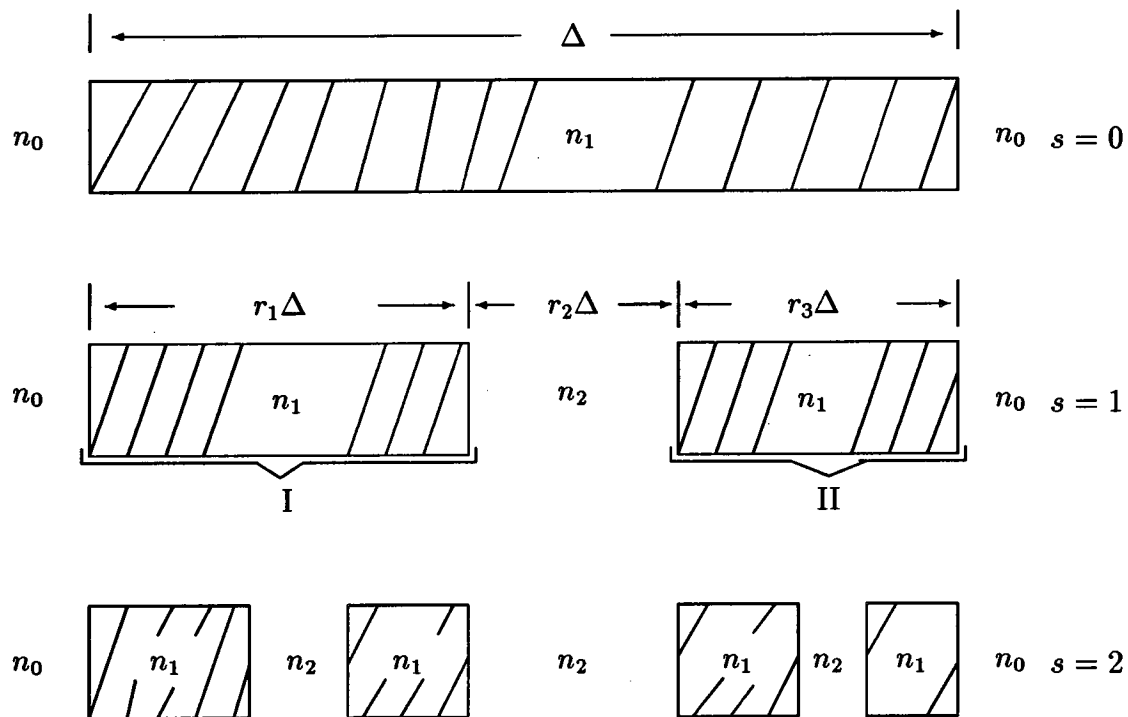


Figura 3.1: En esta figura se muestran las primeras tres etapas de subdivisión.

3.1 Algoritmo Recursivo para los Coeficiente de Reflexión y Transmisión para tres razones de subdivisión (r_1, r_2, r_3) .

En la figura 3.1 se muestra la geometría del sistema a resolver. Los coeficientes de reflexión y transmisión para la etapa $s = 0$ son dados por las ecuaciones (2.5) y (2.6). Ahora debemos proceder a encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión en la etapa $s = 1$.

ETAPA $s = 1$

Para poder encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión totales correspondientes a la etapa $s = 1$ es necesario calcular los coeficientes auxiliares \mathcal{R} y \mathcal{T} , correspondientes a la geometría mostrada en la figura 3.3. A continuación damos sus relaciones.

de la figura 3.3(a), \mathcal{R}_R y \mathcal{T}_R son dados por :

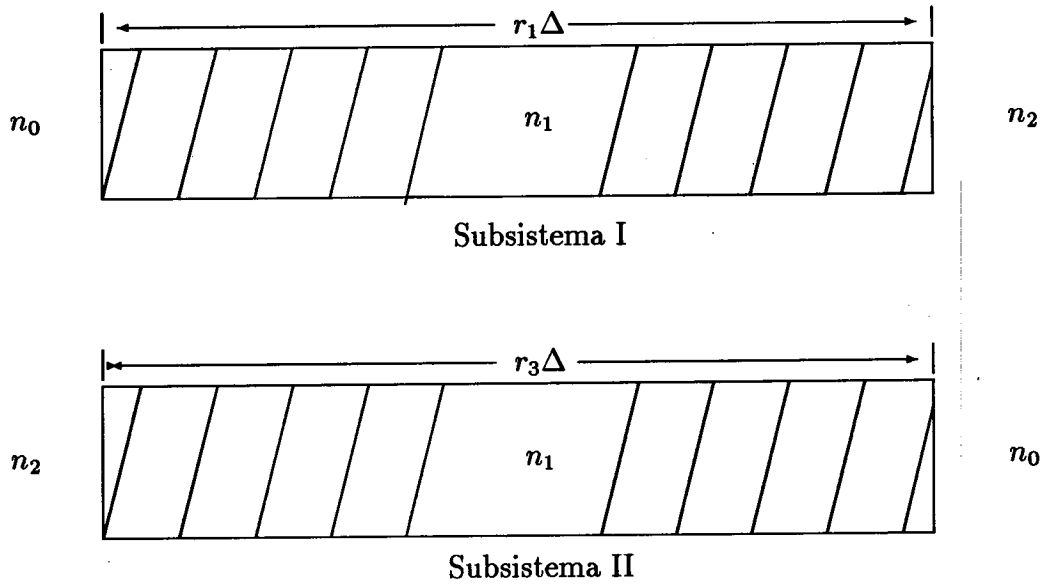


Figura 3.2: Estructura geométrica de los sistemas I y II

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_R(0, x) &= -r + \frac{tt'r'e^{2ikn_1x}}{1-rr'e^{2ikn_1x}} \\ \mathcal{T}_R(0, x) &= \frac{tTe^{ikn_1x}}{1-rr'e^{2ikn_1x}} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

los coeficientes correspondientes a la figura 3.3(b) \mathcal{R}_L y \mathcal{T}_L son dados

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_L(0, x) &= -r' + \frac{TT'r'e^{2ikn_1x}}{1-rr'e^{2ikn_1x}} \\ \mathcal{T}_L(0, x) &= \frac{t'T'e^{ikn_1x}}{1-rr'e^{2ikn_1x}} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Finalmente damos los coeficientes correspondientes a la película de la figura 3.3(c) \mathcal{R}_S y \mathcal{T}_S

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_S(0, x) &= -r' + \frac{TT'r'e^{2ikn_1x}}{1-rr'e^{2ikn_1x}} \\ \mathcal{T}_S(0, x) &= \frac{TT'e^{ikn_1x}}{1-rr'e^{2ikn_1x}} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

donde

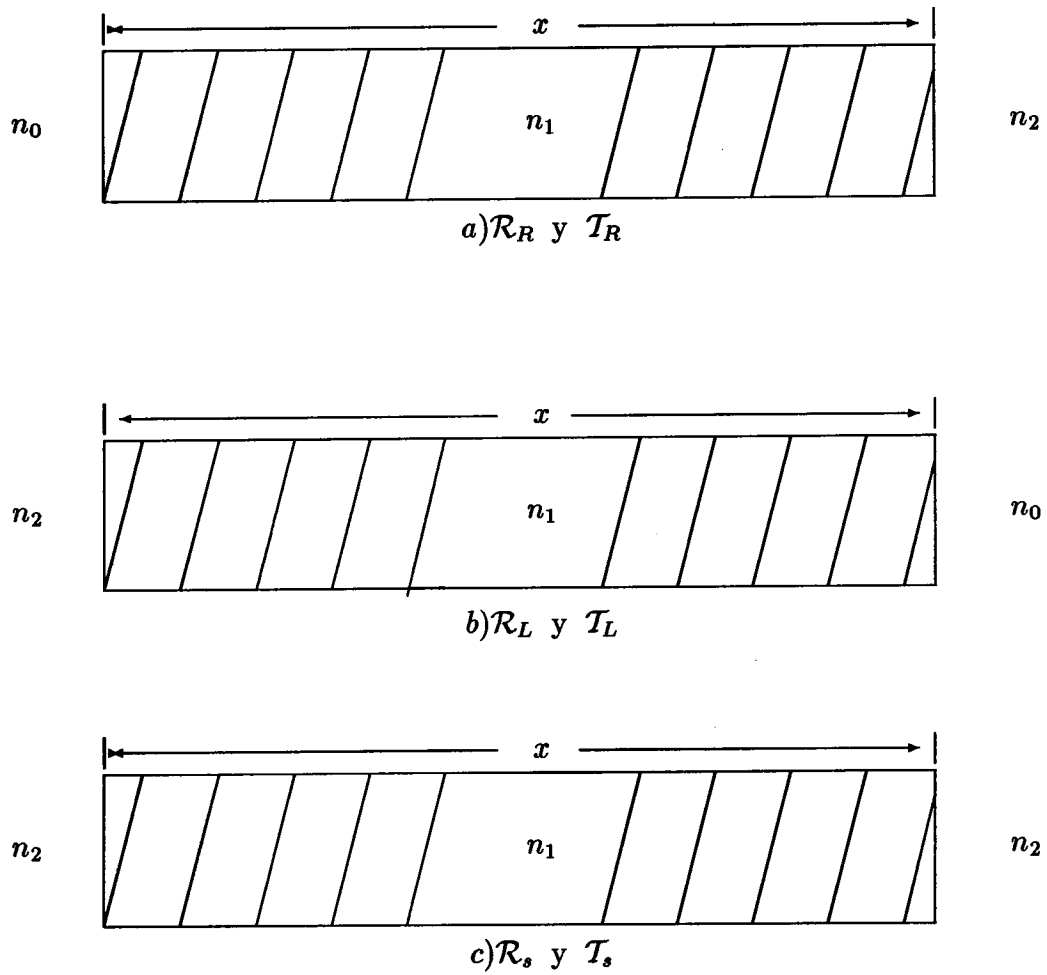


Figura 3.3: Descripción geométrica de los coeficientes $\mathcal{R}'s$ y $\mathcal{T}'s$

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{n_1 - n_0}{n_1 + n_0} \quad , \quad r' = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ t &= \frac{2n_0}{n_1 + n_0} \quad , \quad T = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \\ t' &= \frac{2n_1}{n_1 + n_0} \quad , \quad T' = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

se observa fácilmente que

$$\mathcal{T}_L(0, x) = \frac{n_2}{n_0} \mathcal{T}_R(0, x) \quad (3.5)$$

El significado de los índices es el mismo que se les dió en el capítulo anterior.

Debemos de observar que para poder encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión en una etapa dada sólo es necesario usar los coeficientes auxiliares $\mathcal{R}_R(s, x)$, $\mathcal{R}_L(s, x)$, y $\mathcal{T}_R(s, x)$, escritas para la etapa anterior de interes (s-1), dado que con estos cubrimos completamente el sistema completo en la etapa deseada. Por otro lado, para encontrar los coeficientes auxiliares correspondientes a esa misma etapa se usarán además de los coeficientes anteriores, los dos restantes, \mathcal{R}_S y \mathcal{T}_S . Escribamos los coeficientes de reflexión y transmisión correspondientes a la etapa número uno.

$$\left. \begin{aligned} R(1, \Delta) &= g_r [\mathcal{R}_R(0, r_1 \Delta), \mathcal{R}_L(0, r_1 \Delta), \\ &\quad \mathcal{R}_L(0, r_3 \Delta), \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \mathcal{T}_R(0, r_1 \Delta), r_2 \Delta] \\ T(1, \Delta) &= g_t [\mathcal{R}_L(0, r_1 \Delta), \mathcal{R}_R(0, r_3 \Delta), \\ &\quad \mathcal{T}_R(0, r_3 \Delta), \frac{n_2}{n_0} \mathcal{T}_R(0, r_1 \Delta), r_2 \Delta] \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

ETAPA $s = 2$

Para poder encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión totales correspondientes a la segunda etapa ($s = 2$) necesitamos conocer los coeficientes auxiliares \mathcal{R}'_s y \mathcal{T}'_s para la geometría mostrada en la figura 3.4. Estos coeficientes son dados por :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_R(1, x) &= g_r [\mathcal{R}_R(0, r_1 x), \mathcal{R}_L(0, r_1 x), \\ &\quad \mathcal{R}_S(0, r_3 x), \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \mathcal{T}_R(0, r_1 x), r_2 x] \\ \mathcal{T}_R(1, x) &= g_t [\mathcal{R}_L(0, r_1 x), \mathcal{R}_S(0, r_3 x), \\ &\quad \mathcal{T}_R(0, r_1 x), \mathcal{T}_S(0, r_3 x), r_2 x] \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_L(1, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(0, r_1 x), \mathcal{R}_S(0, r_1 x), \\ &\quad \mathcal{R}_L(0, r_3 x), \mathcal{T}_S(0, r_1 x), r_2 x] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

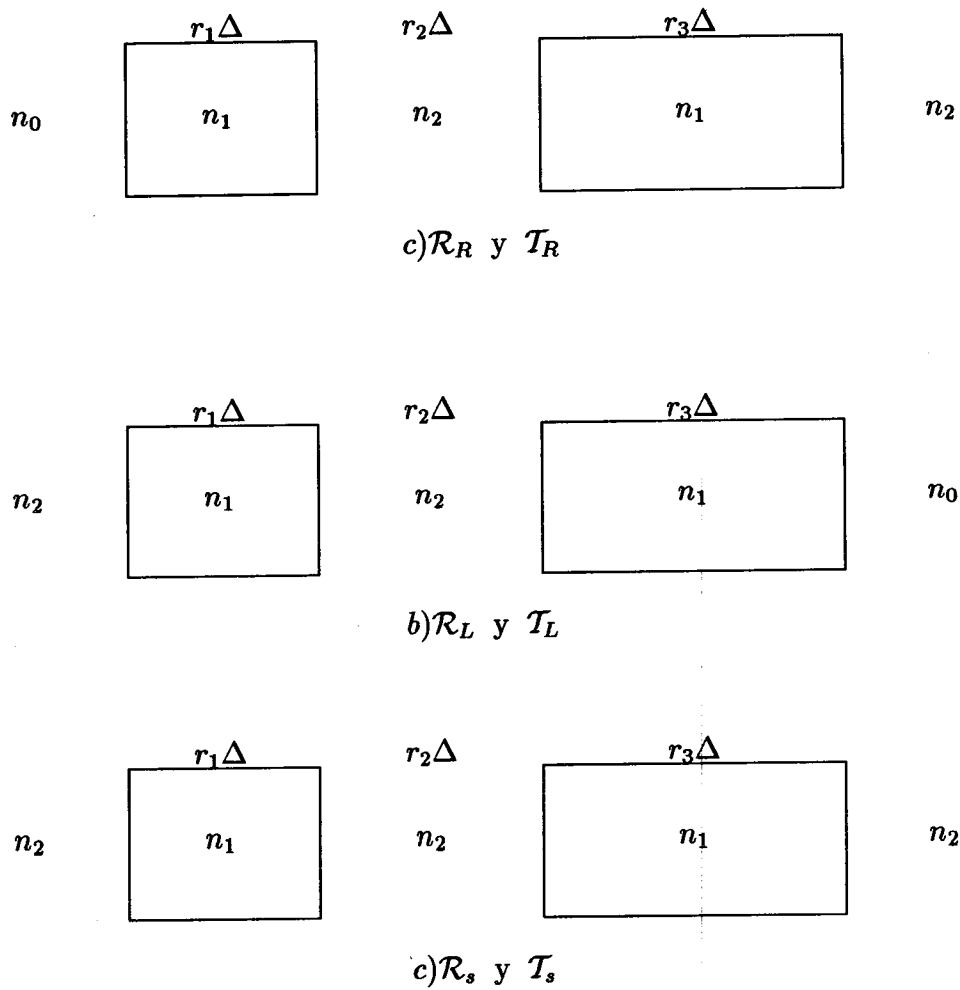


Figura 3.4: Descripción geométrica de los subsistemas en la etapa uno.

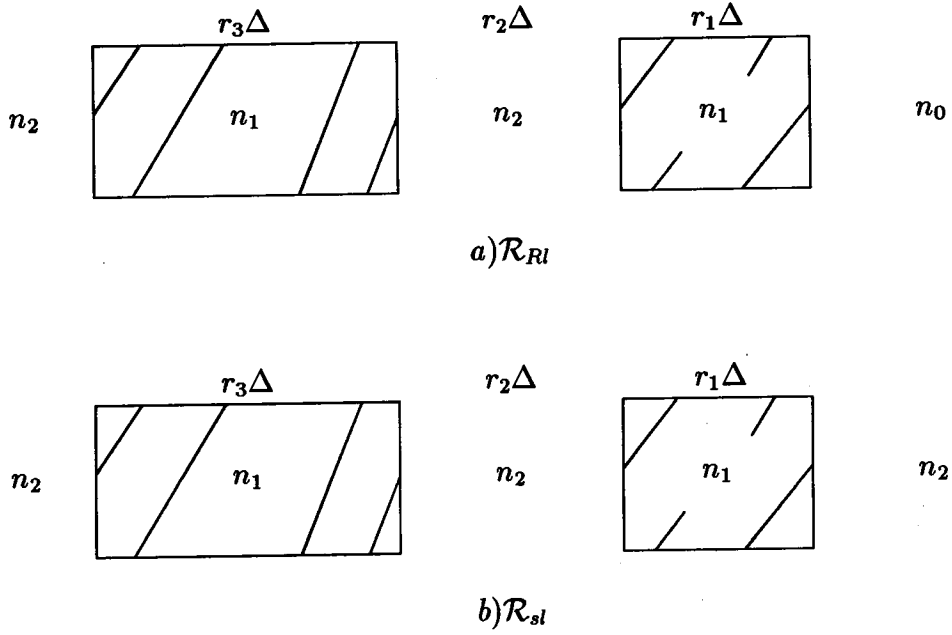


Figura 3.5: Descripción de las funciones \mathcal{R}_{Rl} y \mathcal{R}_{Sl}

$$\left. \begin{aligned}
 \mathcal{R}_S(1, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(0, r_1x), \mathcal{R}_S(1, 0, r_1x), \\
 &\quad \mathcal{R}_S(0, r_3x), \mathcal{T}_S(0, r_1x), r_2x] \\
 \mathcal{T}_S(1, x) &= g_t [\mathcal{R}_S(0, r_1x), \mathcal{R}_S(0, r_3x), \\
 &\quad \mathcal{T}_S(0, r_1x), \mathcal{T}_S(0, r_3x), r_2x]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Como se hizo en el capítulo anterior, se necesitan unos coeficientes que nos sirvan para describir la situación cuando la onda incide de la derecha, es decir, que incida sobre la parte del sistema que se escala con la razón r_3 . A este nuevo par de coeficientes los denotaremos por \mathcal{R}_{Rl} y \mathcal{R}_{Sl} respectivamente, que corresponden a los coeficientes de reflexión para los sistemas de la figura 3.5.

$$\left. \begin{aligned}
 \mathcal{R}_{Rl}(1, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(0, r_3x), \mathcal{R}_S(0, r_3x), \\
 &\quad \mathcal{R}_L(0, r_1x), \mathcal{T}_S(0, r_3x), r_2x] \\
 \mathcal{R}_{Sl}(1, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(0, r_3x), \mathcal{R}_S(0, r_3x), \\
 &\quad \mathcal{R}_S(0, r_1x), \mathcal{T}_S(0, r_3x), r_2x]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Demos a continuación los coeficientes de reflexión y transmisión para la etapa número dos ($s = 2$).

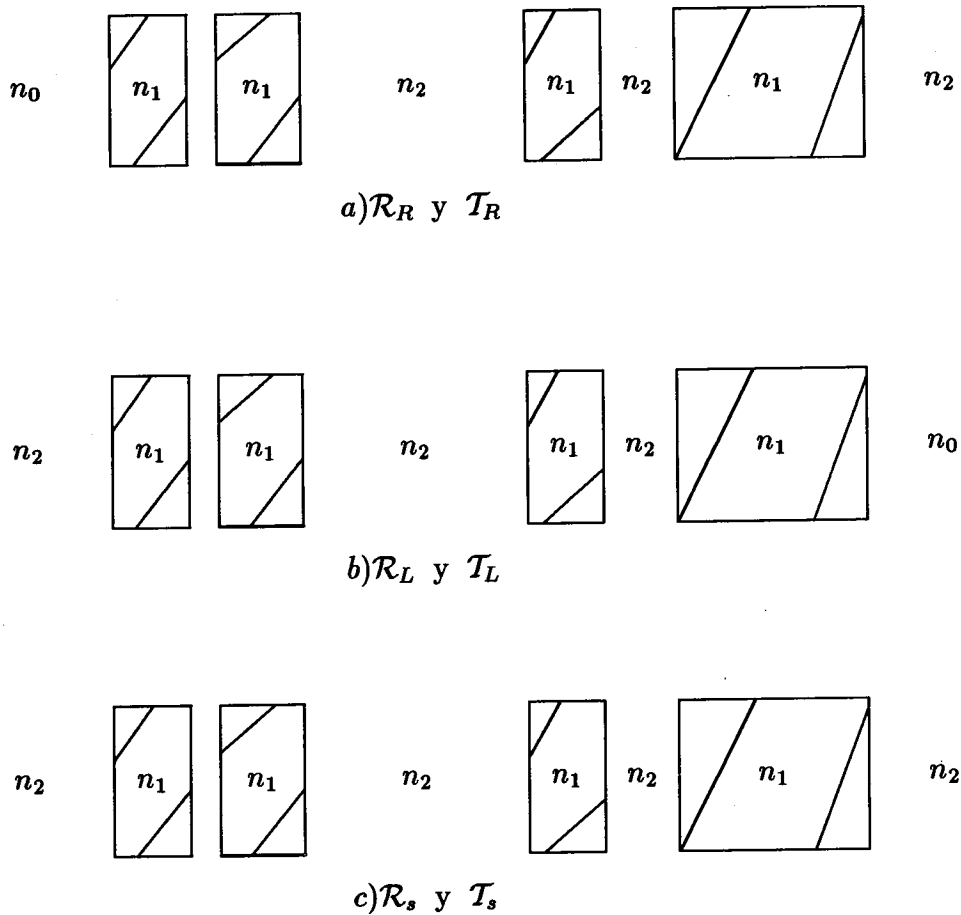


Figura 3.6: Descripción de los subsistemas para $s=2$

$$\left. \begin{aligned}
 R(2, \Delta) &= g_r [\mathcal{R}_R(1, r_1 \Delta), \mathcal{R}_{Rl}(1, r_1 \Delta), \\
 &\quad \mathcal{R}_L(1, r_3 \Delta), \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \mathcal{T}_R(1, r_1 \Delta), r_2 \Delta] \\
 T(2, \Delta) &= g_t [\mathcal{R}_{Rl}(1, r_1 \Delta), \mathcal{R}_L(1, r_3 \Delta), \\
 &\quad \mathcal{T}_R(1, r_1 \Delta), \mathcal{T}_L(1, r_3 \Delta), r_2 \Delta]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

ETAPA $s = 3$

Siguiendo el procedimiento anterior, obtengamos los coeficientes de reflexión y transmisión auxiliares mostrados en la figura 3.6, para poder calcular los coeficientes de reflexión y transmisión totales de la etapa $s = 3$. Así tenemos que:

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{R}_R(2, x) &= g_r [\mathcal{R}_R(1, r_1 x), \mathcal{R}_{Rl}(1, r_1 x), \\
&\quad \mathcal{R}_S(1, r_3 x), \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \mathcal{T}_R(1, r_1 x), r_2 x] \\
\mathcal{T}_R(2, x) &= g_t [\mathcal{R}_{Rl}(1, r_1 x), \mathcal{R}_S(1, r_3 x), \\
&\quad \mathcal{T}_R(1, r_1 x), \mathcal{T}_S(1, r_3 x), r_2 x]
\end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

donde \mathcal{R}_{Rl} fué dada en la ecuación (3.10). A continuación damos la función corespondiente a \mathcal{R}_L , para posteriormente dar las correspondientes a \mathcal{R}_S y \mathcal{T}_S .

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{R}_L(2, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(1, r_1 x), \mathcal{R}_{Sl}(1, r_1 x), \\
&\quad \mathcal{R}_L(1, r_3 x), \mathcal{T}_S(1, r_1 x), r_2 x]
\end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{R}_S(2, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(1, r_1 x), \mathcal{R}_{Sl}(1, r_1 x), \\
&\quad \mathcal{R}_S(1, r_3 x), \mathcal{T}_S(1, r_1 x), r_2 x] \\
\mathcal{T}_S(2, x) &= g_t [\mathcal{R}_{Sl}(1, r_1 x), \mathcal{R}_S(1, r_3 x), \\
&\quad \mathcal{T}_S(1, r_1 x), \mathcal{T}_S(1, r_3 x), r_2 x]
\end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Escribamos los coeficientes de reflexión y transmisión correspondientes a la etapa número tres.

$$\left. \begin{aligned}
R(3, \Delta) &= g_r [\mathcal{R}_R(2, r_1 \Delta), \mathcal{R}_{Rl}(2, r_1 \Delta), \\
&\quad \mathcal{R}_L(2, r_3 \Delta), \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \mathcal{T}_R(2, r_1 \Delta), r_2 \Delta] \\
T(3, \Delta) &= g_t [\mathcal{R}_{Rl}(2, r_1 \Delta), \mathcal{R}_L(2, r_3 \Delta), \\
&\quad \mathcal{T}_R(2, r_1 \Delta), \mathcal{T}_L(2, r_3 \Delta), r_2 \Delta]
\end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

“Etapa s ”

Después de haber encontrado los coeficientes (y los correspondientes coeficientes auxiliares) correspondientes a las primeras tres etapas (a las primeras dos etapas), nos es posible extender el cálculo a etapas superiores arbitrarias, digamos la etapa s . Escribamos primero los coeficientes $\mathcal{R}'s$ y $\mathcal{T}'s$ y posteriormente los coeficientes de reflexión y transmisión. Estos coeficientes auxiliares pueden ser visualizados con la ayuda de las figuras 3.3-3.6.

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{R}_R(s, x) &= g_r [\mathcal{R}_R(s-1, r_1 x), \mathcal{R}_{Rl}(s-1, r_1 x), \\
&\quad \mathcal{R}_S(s-1, r_3 x), \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \mathcal{T}_R(s-1, r_1 x), r_2 x] \\
\mathcal{T}_R(s, x) &= g_t [\mathcal{R}_{Rl}(s-1, r_1 x), \mathcal{R}_S(s-1, r_3 x), \\
&\quad \mathcal{T}_R(s-1, r_1 x), \mathcal{T}_S(s-1, r_3 x), r_2 x]
\end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

$$\mathcal{R}_L(s, x) = g_r \left[\mathcal{R}_S(s-1, r_1x), \mathcal{R}_{SI}(s-1, r_1x), \mathcal{R}_L(s-1, r_3x), \mathcal{T}_S(s-1, r_1x), r_2x \right] \quad (3.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_S(s, x) &= g_r \left[\mathcal{R}_S(s-1, r_1x), \mathcal{R}_{SI}(s-1, r_1x), \mathcal{R}_S(s-1, r_3x), \mathcal{T}_S(s-1, r_1x), r_2x \right] \\ \mathcal{T}_S(s, x) &= g_t \left[\mathcal{R}_{SI}(s-1, r_1x), \mathcal{R}_S(s-1, r_3x), \mathcal{T}_S(s-1, r_1x), \mathcal{T}_S(s-1, r_3x), r_2x \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

A continuación se dan las funciones correspondientes al caso donde la onda incide por el lado izquierdo del sistema, esto es, \mathcal{R}_{RI} y \mathcal{R}_{SI} :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_{RI}(s, x) &= g_r \left[\mathcal{R}_{SI}(s-1, r_3x), \mathcal{R}_S(s-1, r_3x), \mathcal{R}_{RI}(s-1, r_1x), \mathcal{T}_S(s-1, r_3x), r_2x \right] \\ \mathcal{R}_{SI}(s, x) &= g_r \left[\mathcal{R}_{SI}(s-1, r_3x), \mathcal{R}_S(s-1, r_3x), \mathcal{R}_{SI}(s-1, r_1x), \mathcal{T}_S(s-1, r_3x), r_2x \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Finalmente los coeficientes de reflexión y transmisión para el sistema completo en la etapa s son dados por

$$\left. \begin{aligned} R(s, \Delta) &= g_r \left[\mathcal{R}_R(s-1, r_1\Delta), \mathcal{R}_{RI}(s-1, r_1\Delta), \mathcal{R}_L(s-1, r_3\Delta), \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \mathcal{T}_R(s-1, r_1\Delta), r_2\Delta \right] \\ T(s, \Delta) &= g_t \left[\mathcal{R}_{RI}(s-1, r_1\Delta), \mathcal{R}_L(s-1, r_3\Delta), \mathcal{T}_R(s-1, r_1\Delta), \mathcal{T}_L(s-1, r_3\Delta), r_2\Delta \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

La dimensión fractal del sistema es dada por la ecuación (1.30), esto es

$$r_1^D + r_3^D = 1$$

El índice de refracción efectivo en el límite de bajas frecuencias es dado por la generalización de la ecuación (2.21), por lo que

$$\epsilon_{ef} = (r_1 + r_3)^s \epsilon_1 + r_2 n_2 \sum_{s=1}^{n=0} (r_1 + r_3)^n$$

$$\epsilon_{ef} = (\epsilon_1 - \epsilon_2) (r_1 + r_3)^s + \epsilon_2 \quad (3.21)$$

donde el único cambio con respecto a la constante dieléctrica efectiva para el caso mostrado en el capítulo anterior es $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_2$.

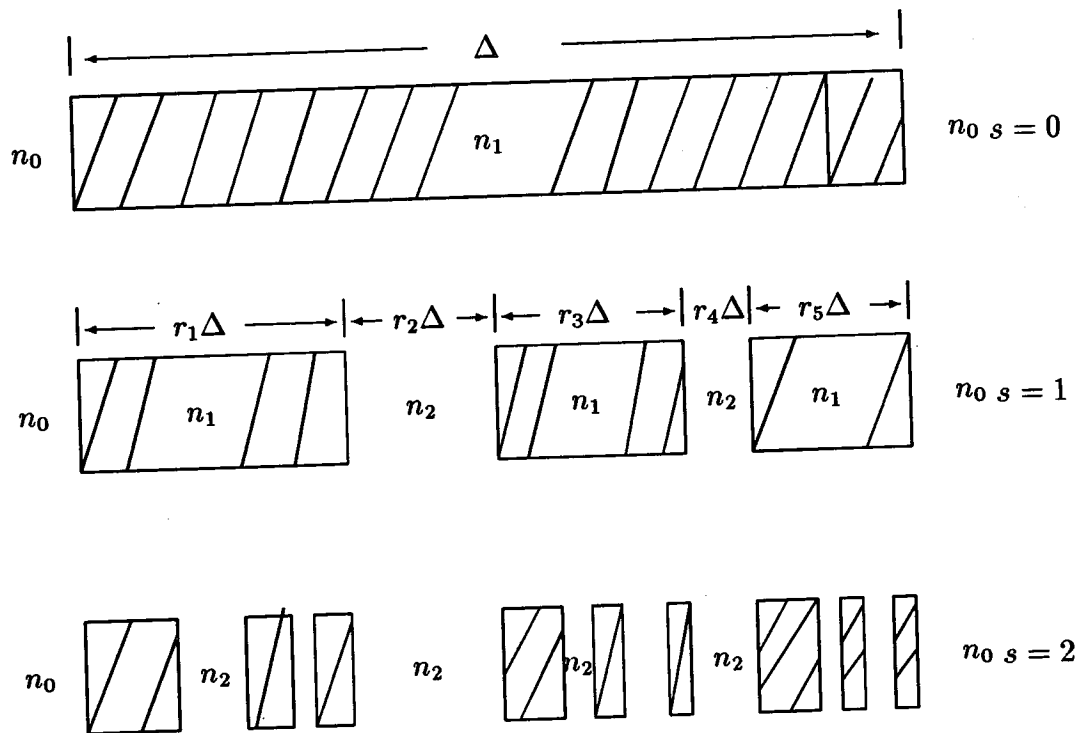


Figura 3.7: Sistema de películas delgadas en el caso de tener $N = 5$.

3.2 Algoritmo Recursivo para los Coeficientes de Reflexión y Transmisión para cinco razones de subdivisión $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$

En esta sección resolveremos el caso donde el número de divisiones en el generador fractal es igual a cinco. Se alternarán dos medios distintos rodeados por un medio de índice de refracción n_0 (medios a alternar n_1 y n_2). Después de la primera división, se volverá a aplicar el generador, pero únicamente a los medios con un índice de refracción n_1 . Para encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión que corresponden a cada una de las etapas de subdivisión, se usan las mismas funciones introducidas en la sección anterior, aunándole el procedimiento recursivo para las funciones en la misma etapa introducido en la sección 2.3 del capítulo anterior. La geometría del sistema a resolver se muestra en la fig. 3.7.

Para poder calcular los coeficientes de reflexión y transmisión de la etapa uno, usaremos las funciones definidas en las ecs. (3.1 -3.3) de la sección anterior. Además estas funciones sirven de base para la construcción de las funciones subsiguientes para poder calcular los coeficientes correspondientes a las siguientes etapas.

$$\left. \begin{aligned}
R(1, \Delta) &= g_r [\mathcal{R}_R(0, r_1 \Delta), \mathcal{R}_{RI}(0, r_1 \Delta), \mathcal{R}_{II}(1, d), \\
&\quad \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{T}_R(0, r_1 \Delta), r_2 \Delta] \\
T(1, \Delta) &= g_t [\mathcal{R}_L(0, r_1 \Delta), \mathcal{R}_{II}(1, d), \\
&\quad \mathcal{T}_R(0, r_1 \Delta), \mathcal{T}_{II}(1, d), r_2 \Delta] \\
\mathcal{R}_{RI}(0, x) &= \mathcal{R}_L(0, x)
\end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

donde

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{R}_{II}(1, d) &= g_r [\mathcal{R}_S(0, r_3 \Delta), \mathcal{R}_{SI}(0, r_3 \Delta), \\
&\quad \mathcal{R}_L(0, r_5 \Delta), \mathcal{T}_S(0, r_3 \Delta), r_4 \Delta] \\
\text{donde} \\
\mathcal{R}_S(0, r_3 \Delta) &= \mathcal{R}_{SI}(0, r_3 \Delta) \\
\mathcal{T}_{II}(1, d) &= g_t [\mathcal{R}_{SI}(0, r_3 \Delta), \mathcal{R}_L(0, r_5 \Delta), \\
&\quad \mathcal{T}_S(0, r_3, \Delta), \mathcal{T}_L(0, r_5, \Delta), r_4 \Delta] \\
\text{con} \\
\mathcal{T}_L(0, r_5 \Delta) &= \frac{n_2}{n_0} \mathcal{T}_R(0, r_1 \Delta)
\end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Con las ecs. (3.22) y (3.23) encontramos los coeficientes en la etapa uno, para poder construir los coeficientes de la segunda etapa necesitamos encontrar los coeficientes auxiliares de reflexión y transmisión $\mathcal{R}'_s(1, d)$ y $\mathcal{T}'_s(1, d)$, en términos de los coeficientes auxiliares en $s = 0$. En la figura 3.8 se muestran esquemáticamente dichas funciones.

Escribamos los coeficientes \mathcal{R}_R y \mathcal{T}_R para la etapa uno:

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{R}_R(1, x) &= g_r [\mathcal{R}_R(0, r_1 x), \mathcal{R}_{RI}(0, r_1 x), \\
&\quad \mathcal{R}_{RAII}(1, x), \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{T}_R(0, r_1 x), r_2 x] \\
\mathcal{T}_R(1, x) &= g_t [\mathcal{R}_{RI}(0, r_1 x), \mathcal{R}_{AII}(1, x), \\
&\quad \mathcal{T}_R(0, r_1 x), \mathcal{T}_{RAII}(1, x), r_2 x]
\end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

con la condición

$$\mathcal{R}_{RI}(0, r_1 x) = \mathcal{R}_l(0, r_1 x)$$

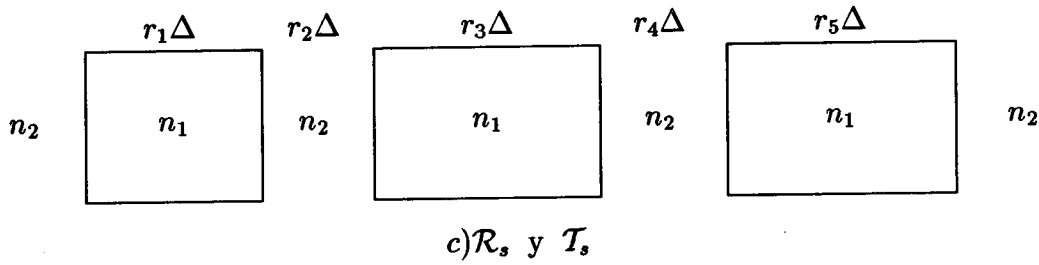
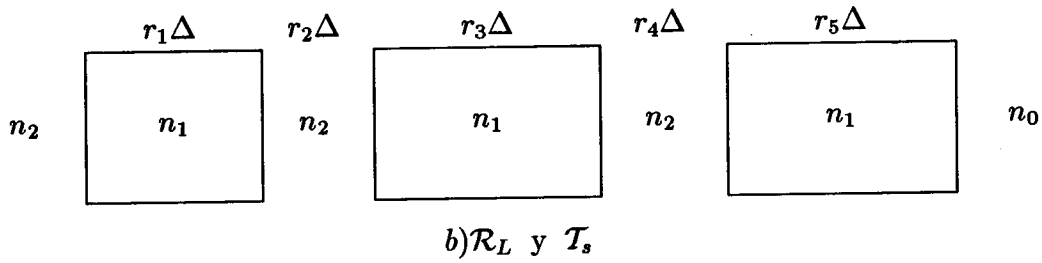
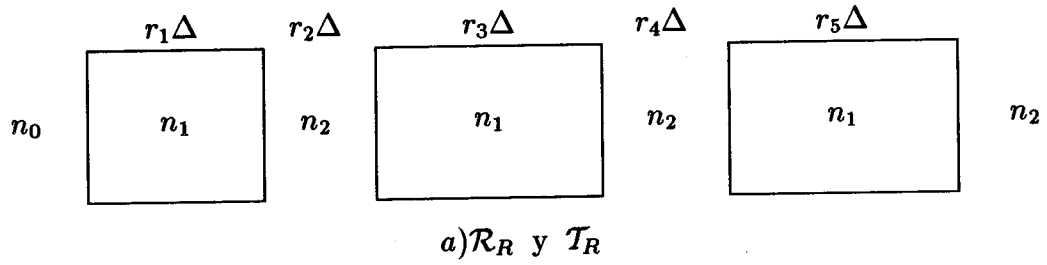


Figura 3.8: Geometría para las distintas funciones $\mathcal{R}'s$ y $\mathcal{T}'s$

donde

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_{RAII}(1, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(0, r_3x), \mathcal{R}_{SI}(0, r_3x), \\ &\quad \mathcal{R}_S(0, r_5x), \mathcal{T}_S(0, r_3x), r_4x] \\ \mathcal{T}_{RAII}(1, x) &= g_t [\mathcal{R}_{SI}(0, r_3x), \mathcal{R}_S(0, r_5x), \\ &\quad \mathcal{T}_S(0, r_3x), \mathcal{T}_S(0, r_5x), r_4x] \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

con la condición

$$\mathcal{R}_{SI}(0, r_3x) = \mathcal{R}_S(0, r_2x)$$

para $\mathcal{R}_L(1, x)$ ya sabemos la relación que existe entre \mathcal{T}_L y \mathcal{T}_R para cualquier etapa ($\mathcal{T}_L(s, x) = \frac{n_2}{n_0} \mathcal{T}_R(s, x)$).

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_L(1, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(0, r, x), \mathcal{R}_{SI}(0, r_1x), \\ &\quad \mathcal{R}_{LAII}(1, x), \mathcal{T}_S(0, r_1x), r_2x] \\ \mathcal{R}_{LAII}(1, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(0, r_3x), \mathcal{R}_{SI}(0, r_3x), \\ &\quad \mathcal{R}_L(0, r_5x), \mathcal{T}_S(0, r_3x), r_4x] \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

finalmente

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_S(1, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(0, r_1x), \mathcal{R}_{SI}(0, r_1x), \\ &\quad \mathcal{R}_{SAII}(1, x), \mathcal{T}_S(0, r_1x), r_2x] \\ \mathcal{R}_{SAII}(1, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(0, r_3x), \mathcal{R}_{SI}(0, r_3x), \\ &\quad \mathcal{R}_S(0, r_5x), \mathcal{T}_S(0, r_3x), r_4x] \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{T}_S(1, x) &= g_t [\mathcal{R}_{SI}(0, r_1x), \mathcal{R}_{SAII}(1, x), \\ &\quad \mathcal{T}_S(0, r_1x), \mathcal{T}_{SAII}(1, x), r_2x] \\ \mathcal{T}_{SAII}(1, x) &= g_t [\mathcal{R}_{SI}(0, r_3x), \mathcal{R}_S(0, r_5x), \\ &\quad \mathcal{T}_S(0, r_3x), \mathcal{T}_S(0, r_5x), r_4x] \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Como podemos observar de las ecuaciones (3.22) y (3.23) nos hace falta escribir las ecuaciones para $\mathcal{R}_{RI}(1, x)$ y $\mathcal{R}_{SI}(1, x)$, ver figura 3.9. Esto se hará con el fin de encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión par $s = 2$.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_{RI}(1, x) &= g_r [\mathcal{R}_{SAI}(1, x), \mathcal{R}_{SAII}(1, x), \\ &\quad \mathcal{R}_L(0, r_1x), \mathcal{T}_{SAI}(1, x), r_2x] \\ \mathcal{R}_{SAI}(1, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(0, r_5x), \mathcal{R}_{SI}(0, r_5x), \\ &\quad \mathcal{R}_S(0, r_3x), \mathcal{T}_S(0, r_5x), r_4x] \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

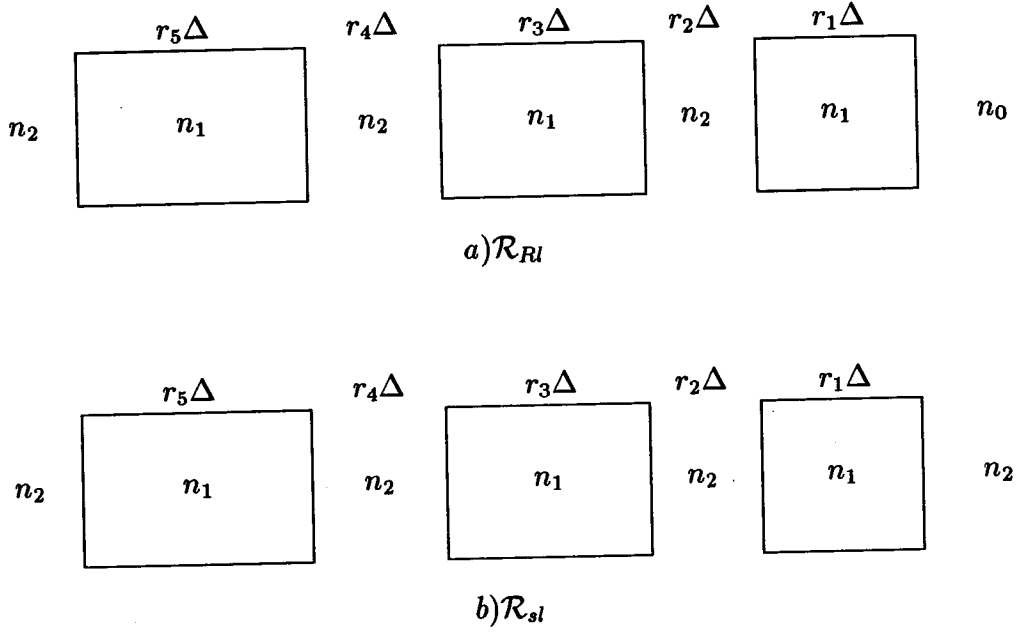


Figura 3.9: Geometría para las funciones \mathcal{R}_{RL} y \mathcal{R}_{SI}

$$\left. \begin{aligned}
 \mathcal{T}_{SAI}(1, x) &= g_t [\mathcal{R}_{SI}(0, r_5x), \mathcal{R}_S(0, r_3x), \\
 &\quad \mathcal{T}_S(0, r_5x), \mathcal{T}_S(0, r_3x), r_4x] \\
 \mathcal{R}_{SI}(1, x) &= g_r [\mathcal{R}_{SAI}(1, x), \mathcal{R}_{SAII}(1, x), \\
 &\quad \mathcal{R}_S(0, r_1x), \mathcal{T}_{SAI}(1, x), r_2x]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

donde $\mathcal{R}_{SAI}(1, x)$, $\mathcal{T}_{SAI}(1, x)$ son dados por las ecuaciones anteriores (3.29) y $\mathcal{T}_{SAII}(1, x)$ es dado por la ecuación (3.27).

Ahora estamos en posibilidades de calcular $R(s = 2)$

$$\left. \begin{aligned}
 R(2, \Delta) &= g_r [\mathcal{R}_R(1, r_1\Delta), \mathcal{R}_{RI}(1, r_1\Delta), \\
 &\quad \mathcal{R}_{II}(2, x), \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{T}_R(1, r_1\Delta), r_2\Delta] \\
 \mathcal{R}_{II}(2, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(1, r_3\Delta), \mathcal{R}_{SI}(1, r_3\Delta), \\
 &\quad \mathcal{R}_L(1, r_5\Delta), \mathcal{T}_S(1, r_3\Delta), r_4\Delta]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

$$\left. \begin{aligned}
T(2, \Delta) &= g_t [\mathcal{R}_{RI}(1, r_1 \Delta), \mathcal{R}_{II}(2, x), \\
&\quad \mathcal{T}_R(1, r_1 \Delta), \mathcal{T}_{II}(2, x), r_2 \Delta] \\
\mathcal{T}_{II}(2, x) &= g_t [\mathcal{R}_{SI}(1, r_3 \Delta), \mathcal{R}_L(1, r_5 \Delta), \\
&\quad \mathcal{T}_S(1, r_3 \Delta), \frac{n_2}{n_0} \mathcal{T}_R(1, r_5 \Delta), r_2 \Delta]
\end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Generalizando para s arbitrario,

$$\left. \begin{aligned}
R(s, \Delta) &= g_r [\mathcal{R}_R(s-1, r_1 \Delta), \mathcal{R}_{RI}(s-1, r_1 \Delta), \\
&\quad \mathcal{R}_{II}(s, \Delta), \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{T}_R(s-1, r_1 \Delta), r_2 \Delta] \\
\mathcal{R}_{II}(s, \Delta) &= g_r [\mathcal{R}_S(s-1, r_3 \Delta), \mathcal{R}_{SI}(s-1, r_3 \Delta), \\
&\quad \mathcal{R}_L(s-1, r_5 \Delta), \mathcal{T}_S(s-1, r_3 \Delta), r_4 \Delta]
\end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

$$\left. \begin{aligned}
T(s, \Delta) &= g_t [\mathcal{R}_{RI}(s-1, r_1 \Delta), \mathcal{R}_{II}(s, \Delta), \\
&\quad \mathcal{T}_R(s-1, r_1 \Delta), \mathcal{T}_{II}(s, \Delta), r_2 \Delta] \\
\mathcal{T}_{II}(s, \Delta) &= g_t [\mathcal{R}_{SI}(s-1, r_3 \Delta), \mathcal{R}_L(s-1, r_5 \Delta), \\
&\quad \mathcal{T}_S(s-1, r_3 \Delta), \mathcal{T}_L(s-1, r_5 \Delta), r_4 \Delta] \\
\text{donde} \\
\mathcal{T}_L(s, d) &= \frac{n_2}{n_0} \mathcal{T}_R(s, d)
\end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Esto para los coeficientes de reflexión y transmisión del sistema. Ahora debemos escribir la relación recursiva para los coeficientes de reflexión y transmisión auxiliares usadas.

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{R}_R(s, x) &= g_r [\mathcal{R}_R(s-1, r_1 x), \mathcal{R}_{RI}(s-1, r_1 x), \\
&\quad \mathcal{R}_{RAII}(s, x), \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \mathcal{T}_R(s-1, r_1 x), r_2 x] \\
\mathcal{R}_{RAII}(s, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(s-1, r_3 x), \mathcal{R}_{SI}(s-1, r_3 x), \\
&\quad \mathcal{R}_S(s-1, r_5 x), \mathcal{T}_S(s-1, r_3 x), r_4 x]
\end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{T}_R(s, x) &= g_t [\mathcal{R}_{RI}(s-1, r_1 x), \mathcal{R}_{RAII}(s, x), \\
&\quad \mathcal{T}_R(s-1, r_1 x), \mathcal{T}_{AII}(s, x), r_2 x] \\
\mathcal{T}_{SII}(s, x) &= g_t [\mathcal{R}_{SI}(s-1, r_3 x), \mathcal{R}_S(s-1, r_5 x), \\
&\quad \mathcal{T}_S(s-1, r_3 x), \mathcal{T}_S(s-1, r_5 x), r_4 x]
\end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_L(s, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(s-1, r_1x), \mathcal{R}_{SI}(s-1, r_1x), \\ &\quad \mathcal{R}_{LAI}(s, x), \mathcal{T}_S(s-1, r_1x), r_2x] \\ \mathcal{R}_{LAI}(s, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(s-1, r_3x), \mathcal{R}_{SI}(s-1, r_3x), \\ &\quad \mathcal{R}_L(s-1, r_5x), \mathcal{T}_S(s-1, r_3x), r_4x] \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_S(s, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(s-1, r_1x), \mathcal{R}_{SI}(s-1, r_1x), \\ &\quad \mathcal{R}_{SAI}(s, x), \mathcal{T}_S(s-1, r_1x), r_2x] \\ \mathcal{R}_{SAI}(s, x) &= g_r [\mathcal{R}_S(s-1, r_3x), \mathcal{R}_{SI}(s-1, r_3x), \\ &\quad \mathcal{R}_S(s-1, r_5x), \mathcal{T}_S(s-1, r_3x), r_4x] \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{T}_S(s, x) &= g_t [\mathcal{R}_{SI}(s-1, r_1x), \mathcal{R}_{SAI}(s, x), \\ &\quad \mathcal{T}_S(s-1, r_1x), \mathcal{T}_{SAI}(s, x), r_2x] \\ \mathcal{T}_{SAI}(s, x) &= g_t [\mathcal{R}_{SI}(s-1, r_3x), \mathcal{R}_S(s-1, r_5x), \\ &\quad \mathcal{T}_S(s-1, r_3x), \mathcal{T}_S(s-1, r_5x), r_4x] \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Escribamos finalmente las ecuaciones correspondientes a $\mathcal{R}_{RI}(s, x)$, $\mathcal{R}_{SI}(s, x)$ y $\mathcal{T}_{SI}(s, x)$:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_{RI}(s, x) &= g_r [\mathcal{R}_{SAI}(s, x), \mathcal{R}_{SAIL}(s, x), \\ &\quad \mathcal{R}_{RI}(s-1, x), \mathcal{T}_{SAI}(s, x), r_2x] \\ \mathcal{R}_{SAI}(s, x) &= g_r [\mathcal{R}_{SI}(s-1, r_5x), \mathcal{R}_S(s-1, r_5x), \\ &\quad \mathcal{R}_{SI}(s-1, r_3x), \mathcal{T}_S(s-1, r_5x), r_4x] \\ \mathcal{R}_{SAIL}(s, x) &= \mathcal{R}_{SAI}(s, x) \\ \mathcal{T}_{SAI}(s, x) &= g_t [\mathcal{R}_{SI}(s-1, r_5x), \mathcal{R}_{SI}(s-1, r_3x), \\ &\quad \mathcal{T}_S(s-1, r_5x), \mathcal{T}_S(s-1, r_3x), r_4x] \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_{SI}(s, x) &= g_r [\mathcal{R}_{SAI}(s, x), \mathcal{R}_{SAIL}(s, x), \\ &\quad \mathcal{R}_S(s-1, x), \mathcal{T}_{SAI}(s, x), r_2x] \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

donde las funciones $\mathcal{R}_{SAI}(s, x)$ y $\mathcal{T}_{SAI}(s, x)$ son dados por la ecuación (3.40) y $\mathcal{R}_{SAIL}(s, x) = \mathcal{R}_{SAI}(s, x)$ por la ecuación (3.38).

La dimensión fractal del sistema es dada por la generalización de la ecuación (1.47), esto es

$$r_1^D + r_3^D + r_5^D = 1$$

La correspondiente constante dieléctrica efectiva a bajas frecuencias es dado por:

$$\epsilon_{ef} = (r_1 + r_3 + r_5)^s \epsilon_1 + (r_2 + r_4) \epsilon_0 \sum_{n=0}^{s-1} (r_1 + r_3 + r_5)^n \quad (3.42)$$

En los siguientes capítulos damos los resultados numéricos y las conclusiones.

Capítulo 4

Descusión y Resultados

En los capítulos anteriores hemos obtenido expresiones para los coeficientes de reflexión y transmisión de una manera recursiva basandonos en la propiedad de auto-similaridad del sistema. Para el caso donde se tiene un medio huesped las expresiones son dadas por las ecuaciones (2.13) caso de tres divisiones ($N = 3$), y (2.27)- (2.29) para el caso de cinco divisiones ($N=5$). Además expresamos el índice efectivo de refracción a bajas frecuencias en función de las razones de subdivisión y de la etapa de subdivisión del sistema (s). Este es dado por la ecuación (2.21) en el caso tres divisiones y por la ecuación (2.30) para cinco divisiones. Por otro lado, se obtienen expresiones para el caso donde se tiene un sistema más general en el cual, en lugar de tener un medio huesped con índice de refracción n_0 , en la estructura este se intercambia por un medio con índice n_2 . Para este caso las expresiones para los distintos sistemas (diferente número de subdivisiones en el algoritmo de Cantor) son dados en las ecuaciones (3.20) para tres subdivisiones y con $N = 5$ son dados por las ecuaciones (3.33)-(3.34). Los índices efectivos de refracción respectivos son dados por las ecuaciones (3.21) y (3.42).

Hemos mencionado en la introducción de la tesis que esta es una generalización del trabajo de Sun y Jaggard [11]. Ellos tratan sistemas simétricos de películas delgadas, las cuales son arregladas en base al algoritmo de Cantor Triádico. El sistema es triádico en el sentido que independientemente del número de divisiones iniciales realizadas (ver introducción) siempre resulta un arreglo de tres subsistemas efectivos de los cuales los dos subsistemas extremos son idénticos. Encuentran relaciones recursivas para los coeficientes de reflexión y transmisión del sistema, esto es, escriben los coeficientes de la etapa s en función de los correspondientes en la etapa $s - 1$ del sistema fractal. Escriben un índice de refracción efectivo a bajas frecuencias el cual es el promedio de los índices del sistema; como se mencionó anteriormente (capítulo 2) esto no es una aproximación bona fide aún en el límite de bajas frecuencias. Por otro lado, los autores mencionados estudian como influye la dimensión fractal de diferentes sistemas en sus espectros de reflectividad. Ellos encuentran que cuando la dimensión fractal decrece, los picos de la reflectividad se separan (bifurcan). Observan, además, que los espectros son periódicos y simétricos con respecto al valor central en cada período. Encuentran que el período es dado por $p = N^s$, donde N es el número

de divisiones iniciales en el algoritmo de Cantor. También describen como varía la amplitud del primer pico conforme incrementan la dimensión fractal en cada una de las etapas de subdivisión.

Las curvas publicadas por Sun y Jaggard [11] las podemos obtener empleando las ecuaciones (2.13) y (3.20). Estas curvas son mostradas en la figura 4.1 y reproducen exactamente las correspondientes de la referencia [11].

A cambio del trabajo de Sun y Jaggard [11] nosotros analizamos sistemas no simétricos de películas delgadas arregladas bajo el algoritmo de Cantor Generalizado. Este algoritmo fué descrito en la introducción de la tesis. Estudiamos sistemas con medio huésped y sistemas donde el arreglo se construye con dos medios de índices de refracción diferentes al medio exterior- vacío. Este último arreglo introduce una diferencia importante en las relaciones recursivas para los coeficientes de reflexión y transmisión del sistema. De hecho, no se encuentra una relación recursiva para los coeficientes de reflexión y transmisión del sistema en una etapa dada, sino que se divide el sistema en diferentes subsistemas (ver capítulo tres), para los cuales se escriben sus coeficientes de reflexión y transmisión correspondientes. Es para estos coeficientes que se escriben las relaciones recursivas del sistema. Por otro lado, introducimos un parámetro para describir la asimetría del sistema y analizamos los espectros de reflectividad en función de este parámetro. Otra diferencia importante con el trabajo de Sun y Jaggard es la forma de escribir el índice efectivo de refracción en bajas frecuencias. Este se obtiene de la constante dieléctrica promedio del sistema, $n_{ef} = \sqrt{\bar{\epsilon}}$, ver capítulo dos.

A continuación mencionamos el orden en que realizaremos el análisis en los diferentes sistemas de películas delgadas considerados en esta tesis:

- Sistema fractal de películas delgadas en un medio huésped con tres subdivisiones iniciales en el algoritmo de Cantor. Esto corresponde a $n_0|n_1|n_0$ en la etapa $s = 0$ y para la etapa $s = 1$ a $n_0|n_1|n_0|n_1|n_0$, figura 2.2. Analizaremos la dependencia de los espectros de la reflectividad con la etapa de subdivisión s , la asimetría del sistema α - concepto que es introducido en la sección 1.4.2-, la dimensión fractal y observaremos lo que sucede con los espectros en un período dado para diferentes dimensiones fractales.
- Sistema fractal de películas delgadas en un medio huésped con cinco subdivisiones iniciales en el algoritmo de Cantor con estructura simétrica. En la etapa $s = 0$, los índices de refracción se distribuyen de la siguiente forma $n_0|n_1|n_0$, y en la etapa $s = 1$ como $n_0|n_1|n_0|n_1|n_0$, figura 2.5. En este caso la asimetría del sistema es igual a cero. Decimos que tenemos simetría cuando las razones de división cumplen lo siguiente: $r_1 = r_3 = r_5$ y $r_2 = r_4$. En estos sistemas la dimensión fractal se puede expresar en función de la sustancialidad.
- Sistema fractal de películas delgadas en un medio huésped con cinco subdivisiones con estructura asimétrica. En este caso consideraremos el análisis con respecto a la asimetría. Se hará el análisis con respecto a los demás parámetros también.

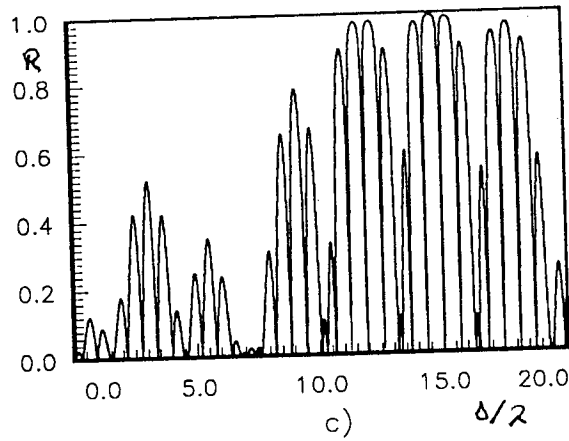
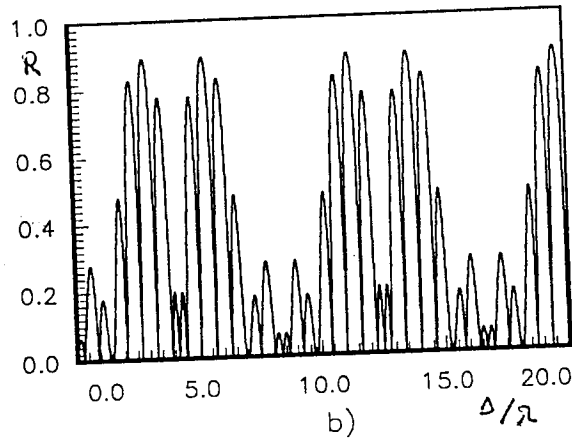
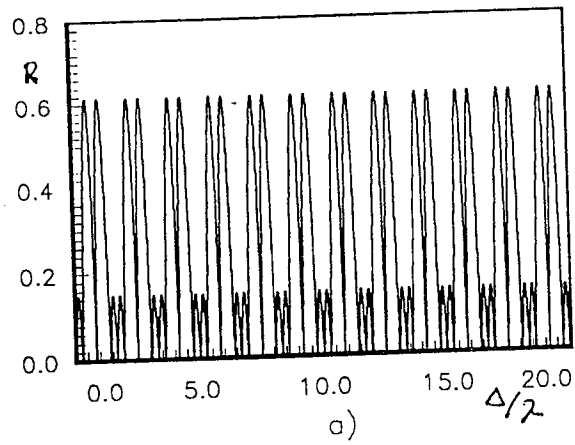


Fig 4.1 Reproducción de los espectros de reflectividad correspondientes al trabajo de Sun y Jaggard [11] para las cuatro primeras etapas de subdivisión, $N=3$, en función del espesor de la película Δ normalizado con la longitud de onda del vacío, con los siguientes parámetros: $r_1 = r_3 = 1/5$, $r_2 = 3/5$ y $n_0 = 1.0$ ($n_2 = 1.0$) y $n_1 = 1.5$. a) $s=1$; b) $s=2$; c) $s=3$.

- Sistema fractal de películas delgadas, no considerando medio huésped, con tres y cinco subdivisiones iniciales en el algoritmo de Cantor. El orden inicial es $n_0|n_1|n_0$, etapa $s = 0$; para la etapa $s = 1$ tenemos que los índices se distribuyen como $n_0|n_1|n_2|n_1|n_0$, figura 3.1. Analizaremos la reflectividad con respecto a la variación de los parámetros mencionados anteriormente, s , α , D . Esto lo haremos para dos diferentes situaciones. En el primer caso consideraremos $n_1 > n_2$, esto es, el algoritmo de Cantor se aplica al medio ópticamente más denso. Finalmente estudiaremos el sistema cuando el algoritmo de Cantor se aplica al medio ópticamente menos denso ($n_1 < n_2$).

Los espectros de reflectividad se presentarán en función de $\Delta/\lambda = \omega/(2\pi c)$, donde Δ es el espesor total del sistema de películas y λ es la longitud de onda en vacío.

Antes de analizar las variaciones en los espectros de reflectividad debemos notar que los espectros tienen un período, esto es, el espectro se repite completamente después de un valor $\Delta/\lambda = p$, el cual depende de los valores de las razones de subdivisión, índices de refracción y etapa de subdivisión. Esto era de esperarse dado que la reflectividad se obtiene de funciones periódicas. La expresión para el período es dada por, (ver prueba en el apéndice B)

$$p_s = \frac{vq^s}{2\nu} \quad (4.1)$$

donde los parámetros v , q , ν , tienen el siguiente significado: v es el denominador que resulta de escribir los índices de refracción como $n_i = u_i/v$, siendo v es el mínimo común denominador que resulta de expresar los índice de refracción en forma fraccionaria.; q corresponde al mínimo común denominador de las razones de subdivisión $r_i = t_i/q$; ν es el factor común que resulta de los productos $t_i u_i$.

La fórmula anterior para el período se puede checar con los siguientes datos: $r_1 = 1/4$, $r_2 = 1/4$, $r_3 = 2/4$ e índices de refracción $n_0 = 1.0$, $n_1 = 6/3$ y $n_2 = 7/3$. Con estos valores se encuentra que el período en la etapa $s = 1$ es $p = 6$, en la etapa $s = 2$ es $p = 24$ y para la etapa $s = 3$ es $p = 96$, lo cual se observa en la figura 4.2.

4.1 Análisis del sistema de películas delgadas con tres divisiones iniciales y medio huésped, caso asimétrico.

En la figura 4.3 se muestra como varían los espectros conforme aumenta la etapa s de subdivisión. Se observa que conforme aumenta la etapa de subdivisión el número de picos por período aumenta. El valor del primer pico disminuye conforme la etapa de subdivisión aumenta; esto es debido a que el índice efectivo de refracción también disminuye. Debemos de recordar que la reflectividad de una película delgada es menor conforme su índice sea menor. Los efectos de la auto-similaridad se siguen manifestando en los espectros, lo cual se muestra en la figura 4.3 por medio de las líneas

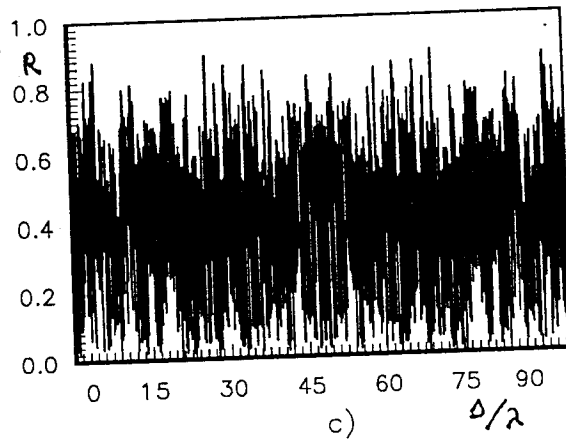
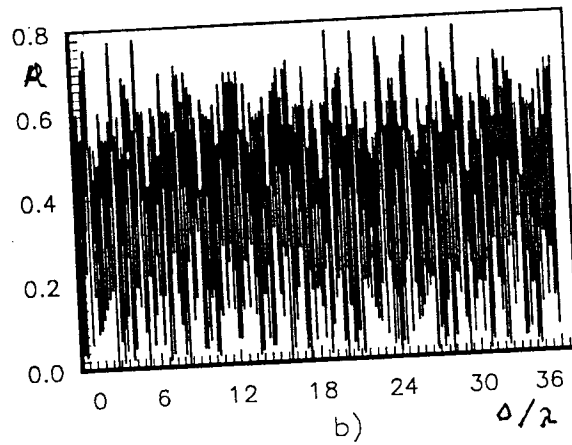
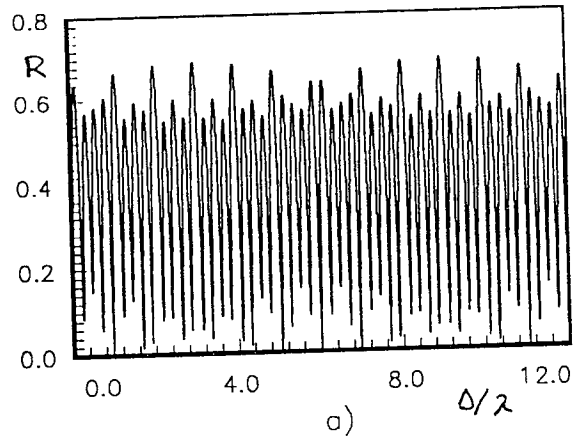


Fig. 4.2 Se observan los períodos de las primeras tres etapas: a) $s=1$ con $p=6$; b) $s=2$ con $p=24$; c) $s=3$ con $p=96$. Los períodos satisfacen la ecuación (4.1). Las razones de subdivisión son las siguientes: $r_1 = 1/4$, $r_2 = 1/4$, $r_3 = 2/4$ y los índices de refracción son $n_0 = 1.0$, $n_1 = 2.0$, $n_2 = 7/3$. La dimensión fractal del sistema es $D = 0.694241$.

punteadas la cuales marcan la envolvente del espectro. Los espectros son simétricos con respecto al valor central en cada uno de los períodos.

Para demostrar que los espectros mostrados en la figura 4.3 son fractales auto-similares, es necesario encontrar que la razón entre el perímetro y el área de las curvas espectrales, normalizados con los correspondientes de la etapa cero, sigue una serie geométrica, jugando el papel de exponente la etapa de subdivisión fractal. Esto es basado en el análisis de fractales determinísticos, ver curva de Koch (secc. 1.2). La relación matemática es la siguiente

$$P_s/A_s = a^s \text{ o } \ln(P_s/A_s) = s \ln a$$

Lo anterior se muestra gráficamente en la figura 4.4

Definamos ahora la asimetría del sistema. La asimetría α , será dada por $\alpha \equiv |r_1 - r_3|$. Debemos observar que la dimensión fractal ya no es un parámetro independiente que dependa solo de una razón de subdivisión r_i (caso simétrico) sino que ahora es función de r_1 y r_3 . Por otro lado, si definimos $\tau \equiv r_1 + r_3$, , entonces de la ecuación (1.30) para la dimensión fractal obtenemos

$$\left[\frac{1}{2}(\tau + \alpha) \right]^D + \left[\frac{1}{2}(\tau - \alpha) \right]^D = 1$$

Si fijamos los valores de D y α entonces la ecuación anterior determina τ . Como resultado, encontramos los valores de r_1, r_2, r_3 y podemos calcular el espectro. La conclusión es que D y α determinan el espectro. Por lo tanto, para poder observar los efectos de la dimensión fractal o de la asimetría en las amplitudes de la reflexión es necesario cambiar solo uno de los dos. El análisis anterior se realiza de esta manera para no introducir efectos de los dos parámetros simultáneamente sobre el espectro.

Analicemos primero como influye la dimensión fractal del sistema en los espectros. En la figura 4.5 se observan un conjunto de curvas con asimetría $\alpha = 1/5$ en las etapas $s = 1$ y $s = 2$. Los primeros cuatro incisos (a-d) son para la etapa $s = 1$ con períodos respectivos $p = 5.0, 8.33, 10.0, 2.5$. Los espectros restantes (incisos e-h) corresponden a $s = 2$ con períodos $p = 25.0, 625/3, 100, 37.5$. La reflectividad es simétrica con respecto al valor central en cada período. El valor del primer pico aumenta conforme la dimensión fractal aumenta. Por otro lado, al aumentar el período en los espectros los picos de la reflectividad se separan a diferencia de lo que dicen Sun y Jaggard [11], que la separación se da al disminuir la dimensión fractal. Lo anterior lo notamos si observamos las figura 4.5 en el orden d, a, b, c. Los resultados anteriores son independientes de la etapa s de subdivisión, ver figuras 4.5e-h.

Para continuar con nuestro estudio sobre sistemas fractales con tres subdivisiones iniciales en un medio huesped, fijemos ahora la dimensión fractal del sistema con $D = 0.631$, y cambiemos la asimetría del mismo. Esto se muestra en la figura 4.6. Se observa que la amplitud del primer pico aumenta al incrementar la asimetría. Esto se debe a que el valor del primer pico está asociado con el índice efectivo de refracción, el cual crece al aumentar el valor de α , dado que $r_1 + r_3$ es mayor conforme α crece.

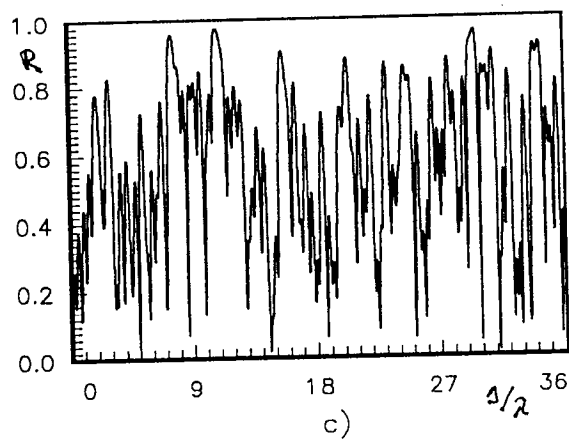
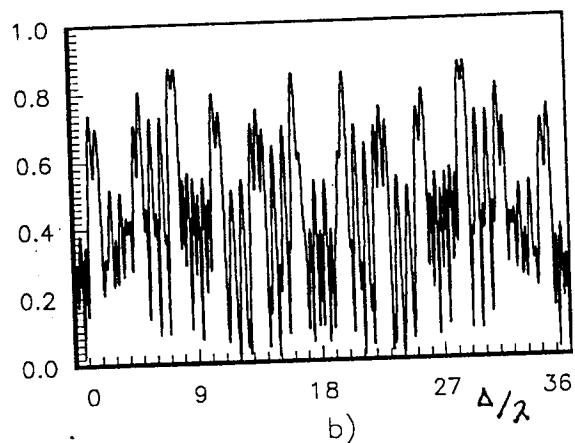
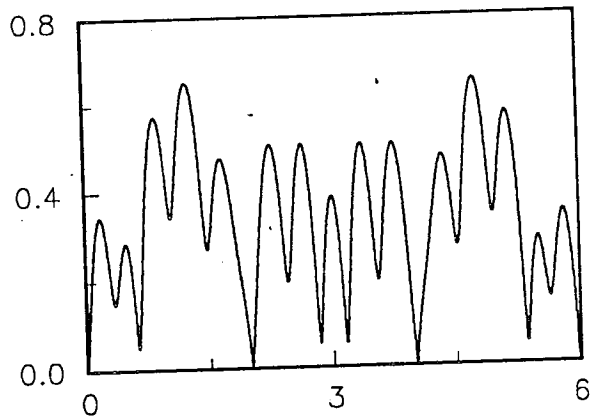


Fig. 4.3 Espectros de reflectividad para las primeras tres etapas de subdivisión, $N=3$, en función del espesor de la película Δ normalizado con la longitud de la onda en vacío λ , caso no simétrico; con $r_1 = 1/6$, $r_2 = 1/6$, $r_3 = 4/6$, dimensión fractal $D = 0.748222$. a) $s = 1$ con $p = 6$; b) $s = 2$ con $p = 36$; c) $s = 3$ con $p = 198$. Se utilizan los siguientes índices de refracción, $n_1 = 1.5$ y $n_2 = n_0 = 1.0$

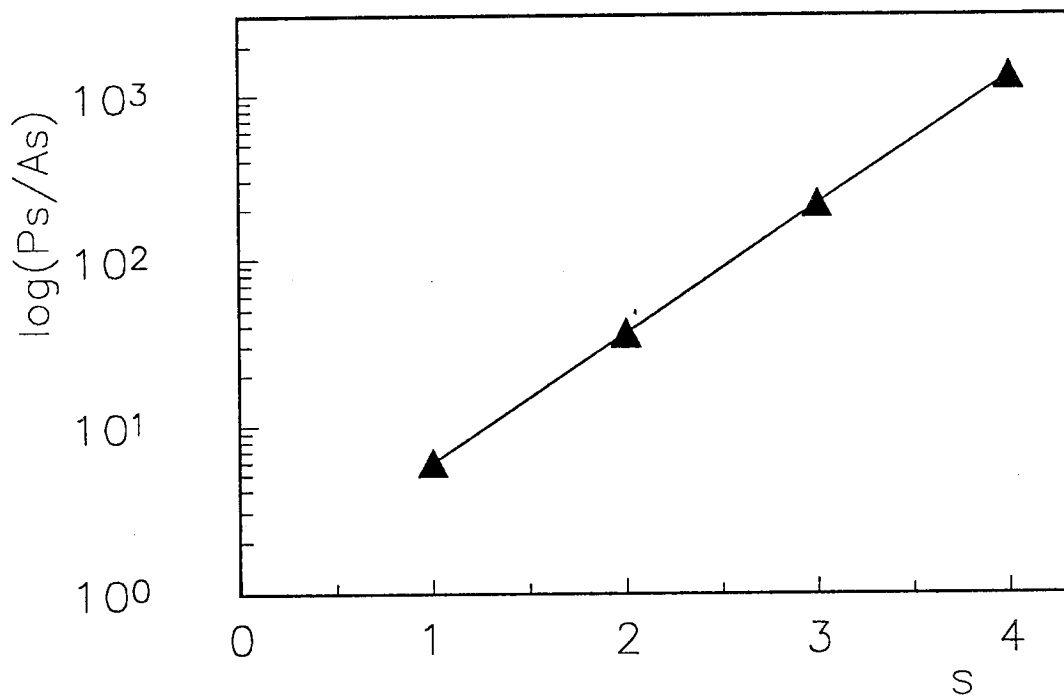


Figura 4.4: Grafica que demuestra la fractalidad para la serie de espectros mostrados en la figura 4.3)

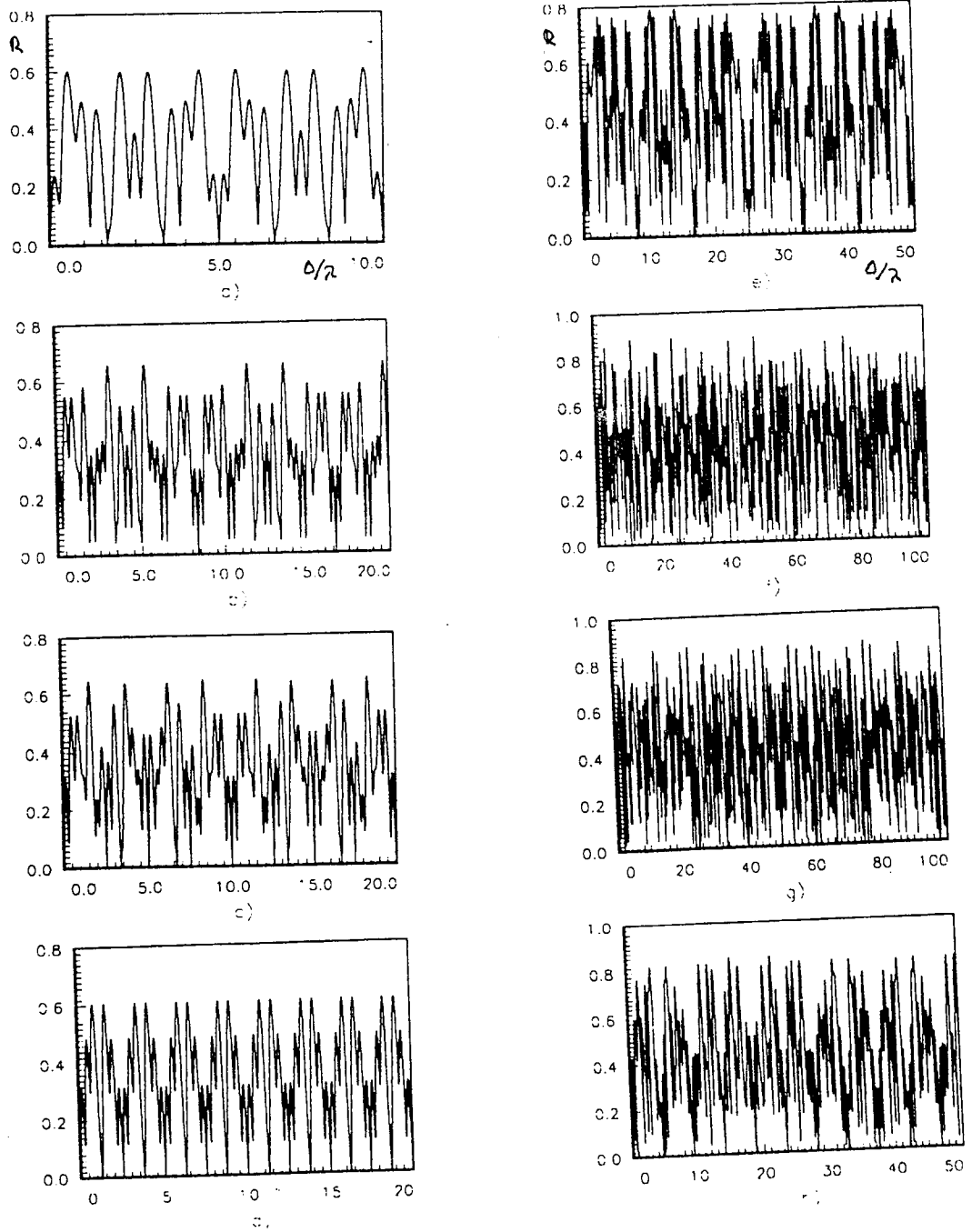


Fig. 4.5 Espectros de reflectividad para distintos valores de la dimensi3n fractal en las primeras dos etapas de subdivisi3n, $N=3$, en funci3n del espesor de la peli3cula Δ normalizado con la longitud de la onda en vaci3o λ , caso no sim3trico. Tenemos que las razones de subdivisi3n y la dimensi3n fractal son: a) y e) $r_1 = 1/5$, $r_2 = 2/5$, $r_3 = 2/5$ con $D = 0.5638$; b) y f) $r_1 = 12/25$, $r_2 = 6/25$, $r_3 = 7/25$ con $D = 0.7088$; c) y g) $r_1 = 3/10$, $r_2 = 2/10$, $r_3 = 5/10$ con $D = 0.7499$; d) y h) $r_1 = 4/15$, $r_2 = 3/15$, $r_3 = 8/15$ con $D = 0.7445$. Se usan los valores de la figura anterior para los 3ndices de refracci3n.

Recordemos que la función dieléctrica efectiva es proporcional a $r_1 + r_3$, ver ecuación (2.20). Además sabemos que a mayor índice de refracción mayor reflectividad para una película. Por otro lado, el valor del punto central (en el período) se corre un poco a la región de bajas frecuencias al aumentar α . Es importante señalar que aparecen mayores zonas (bien definidas) de interferencia constructiva alrededor del valor central. En este valor aparece el único punto con interferencia destructiva bien definida dentro de este rango.

De los espectros mostrados en las figuras anteriores es factible considerar la idea de que existe un período aproximado en los espectros al variar en una pequeña cantidad las fracciones de ocupación (r'_i 's) de los distintos medios que componen al sistema. Se ejemplifica este concepto en la figura 4.7 donde se toma el espectro de la figura 4.5a y se anexan tres curvas las cuales tienen los siguientes parámetros: mismos valores en los índices de refracción que los usados en la figura 4.5, con razones de subdivisión a) $r_1 = 1/5$, $r_2 = r_3 = 2/5$, b) $r_1 = 0.205$, $r_2 = 0.4$, $r_3 = 0.395$, c) $r_1 = 0.205$, $r_2 = 0.3905$, $r_3 = 0.4045$ y d) $r_1 = 0.21$, $r_2 = 0.4$, $r_3 = 0.39$. Los períodos exactos para las diferentes curvas son: a) $p = 5$; b) $p = 200$; c) $p = 2000$; d) $p = 100$. Notamos que la figura 4.6b se asemeja considerablemente a la figura 4.6a, a pesar del hecho que el período es 40 veces más grande. Entonces, en el caso (b) podemos hablar de un *período aproximado* $p \approx 5$ (igual al caso (a)), además al período exacto $p = 200$. Esta situación se debe, por supuesto, a la igualdad aproximada de los r_i en los dos casos. En los casos (c) y (d) los r'_i 's se alejan más y más de los valores del caso (a). Por lo tanto, como se puede observar de las figuras 4.6(c) y (d), el concepto de “período aproximado” gradualmente pierde su legitimidad. De los resultados anteriores se observa que los espectros de reflectividad del sistema son muy sensibles a pequeños cambios en las fracciones de ocupación de los diferentes medios que componen al mismo.

4.2 Análisis del sistema de películas delgadas con cinco divisiones iniciales y medio huésped, caso simétrico.

Analicemos a continuación el sistema fractal de películas delgadas en un medio huésped que se genera al tener $N = 5$ subdivisiones iniciales en el algoritmo de Cantor. En este caso el conjunto será simétrico si las razones de subdivisión r_i cumplen con $r_1 = r_3 = r_5$ y $r_2 = r_4$, existiendo como caso particular el tener todas las razones de subdivisión iguales, esto, $r_i = 1/5$. Esto lo mostramos en la figura 4.8. Notamos que la auto-similaridad en los espectros se mantiene. Esto es debido a que las ecuaciones para los coeficientes de reflexión y transmisión siguen siendo recursivas. Observamos que la amplitud del primer pico disminuye conforme aumenta la etapa de subdivisión s . Esto es debido a que el índice efectivo de refracción disminuye con la etapa s , ecuación 2.21. El período de las distintas curvas se obtiene con la ecuación (4.1). Conforme las etapas de subdivisión aumentan, las zonas de interferencia constructiva

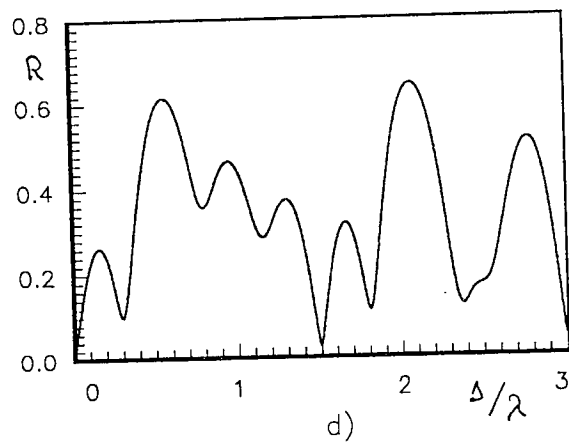
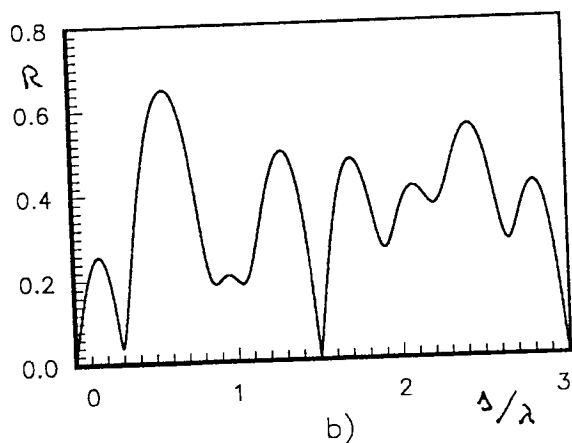
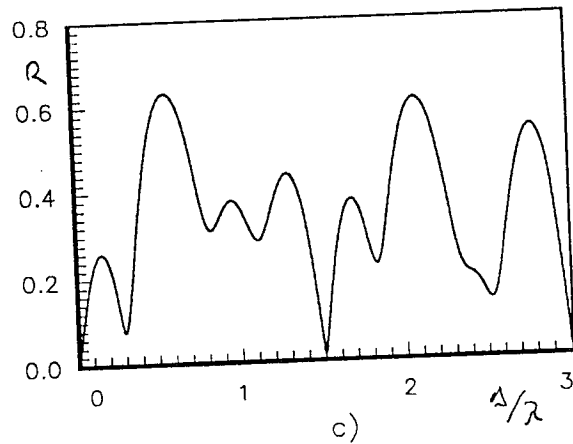
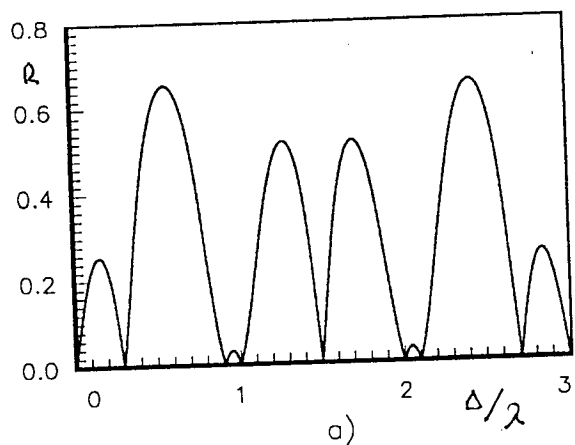


Fig 4.6 Espectros de reflectividad para distintos valores de σ en la primera etapa de subdivisión, $N=3$, en función del espesor de la película Δ normalizado con la longitud de la onda en vacío λ . La dimensión fractal de los distintos sistemas es $D = 0.631$ a) $r_1 = r_2 = r_3 = 1/3$ con $\sigma = 0.0$; b) $r_1 = 0.363364$, $r_2 = 0.332366$, $r_3 = 0.30427$ con $\sigma = 0.059$; c) $r_1 = 0.393405$, $r_2 = 0.329578$, $r_3 = 0.277017$; con $\sigma = 0.116$ d) $r_1 = 0.413432$, $r_2 = 0.326781$, $r_3 = 0.259787$ con $\sigma = 0.153$. Se usan los valores de la figura anterior para los índices de refracción.

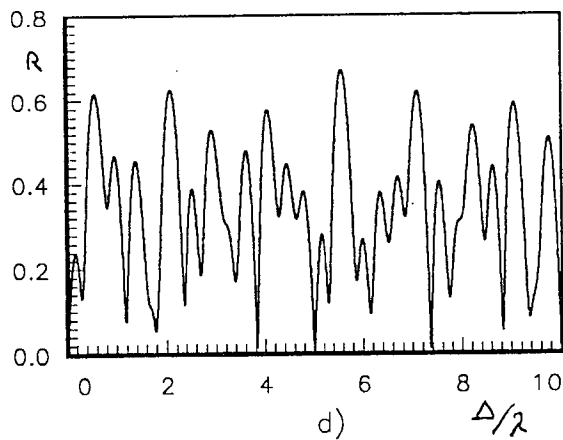
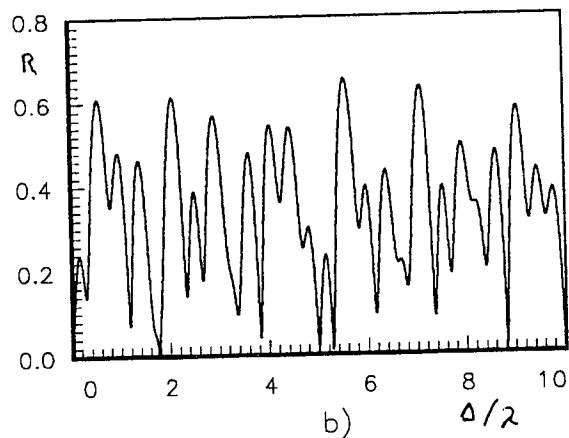
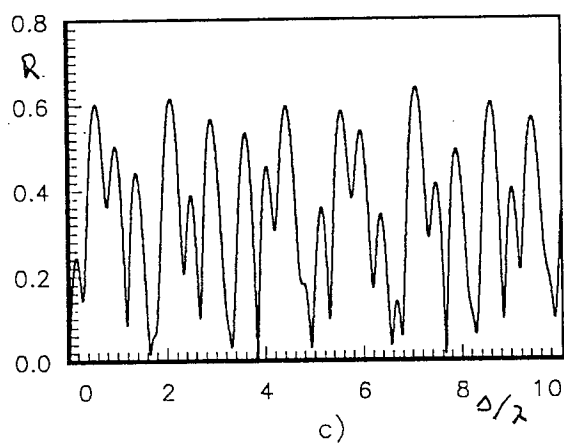
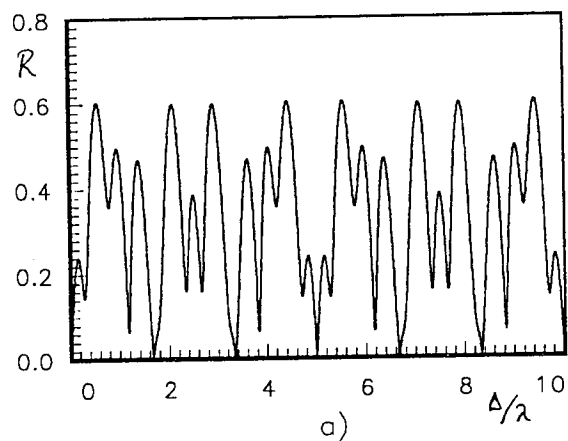


Fig 4. ↗ Espectros de reflectividad para ejemplificar el concepto de período aproximado en sistemas con $N = 3$. Las razones de subdivisión son las siguientes: a) $r_1 = 1/5$, $r_2 = 2/5$, $r_3 = 2/5$; b) $r_1 = 0.205$, $r_2 = 0.40$, $r_3 = 0.395$; c) $r_1 = 0.205$, $r_2 = 0.3905$, $r_3 = 0.4045$; d) $r_1 = 0.21$, $r_2 = 0.40$, $r_3 = 0.39$. El período exacto para la curva a) es $p = 5$.

(bien definidas) son más marcadas, tal que el valor de la reflectividad es uno. En este caso la dimensión fractal del sistema debe considerarse como parámetro independiente dado que no existe asimetría. En la figura 4.9 observamos un conjunto de curvas con distintos valores de la dimensión fractal. El valor del primer pico disminuye conforme disminuye el valor de la dimensión fractal. Debemos observar que no existen diferencias en el comportamiento cualitativo de los espectros para los dos diferentes casos aquí. De lo anterior se observa que cualitativamente no existe diferencia entre los resultados encontrados aquí y los dados por Sun y Jaggard [11].

4.3 Análisis del sistema de películas delgadas con cinco divisiones iniciales y medio huesped, caso no simétrico.

En la figura 4.10 observamos los espectros de reflectividad de un sistema no simétrico. Se observa que el valor del primer pico disminuye conforme aumenta la etapa de subdivisión. Tanto en el caso simétrico como no simétrico existe auto-similaridad del sistema. Por otro lado se observa que en ambos tipos de arreglos las zonas de interferencia destructiva y constructiva se definen desde la primera etapa de subdivisión a diferencia del caso de tres divisiones.

La dimensión fractal no puede ser considerada como una variable independiente, dado que existe asimetría en el sistema. La asimetría en este caso la definimos como $\alpha_5 \equiv |r_5 - r_1|$. Analicemos los espectros cuando mantenemos fija α y variamos la dimensión fractal, ver figura 4.11. De nuevo, el valor del primer pico crece al aumentar la dimensión fractal del sistema. Al incrementar el período los picos de la reflexión se bifurcan, en concordancia con lo dicho para el caso de tener tres subdivisiones. En los incisos a y c , que tienen el mismo período, se mantiene prácticamente el mismo número de picos dentro del período. Lo anterior se observa también en la etapa $s = 2$.

Estudiamos ahora los cambios de los espectros respecto a la asimetría, figura 4.12. Se observa que al aumentar α se incrementa el valor del primer pico. El pico centrado con respecto al período se corre hacia la izquierda conforme el valor de α crece. Al aumentar la asimetría se definen mejor las zonas de interferencia constructiva dentro del período. La naturaleza de estos efectos es la misma que se mencionó en el caso triádico.

Observamos que no existe gran diferencia cualitativa entre el comportamiento de los espectros con tres y cinco subdivisiones, con respecto a la variación de los parámetros fractales.

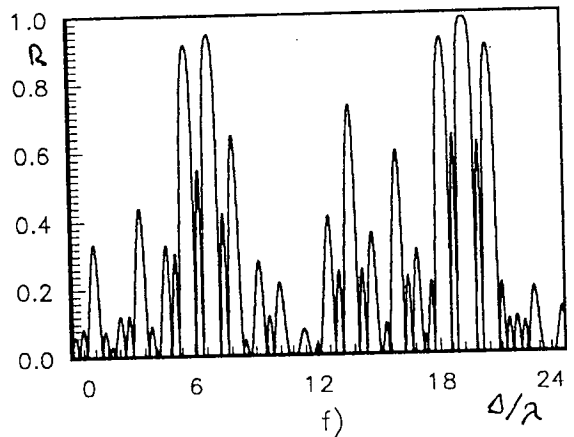
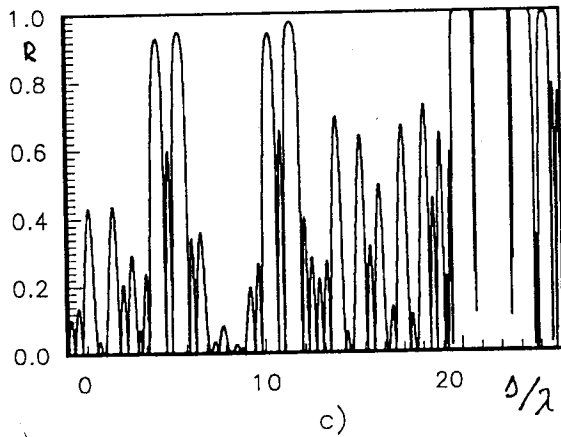
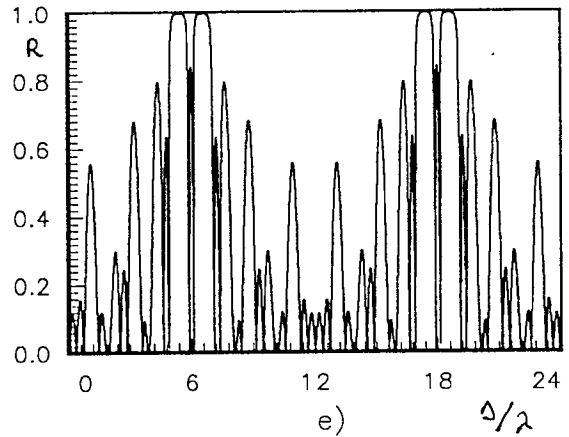
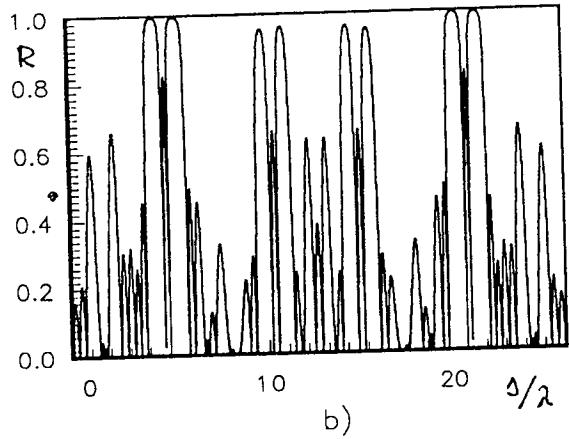
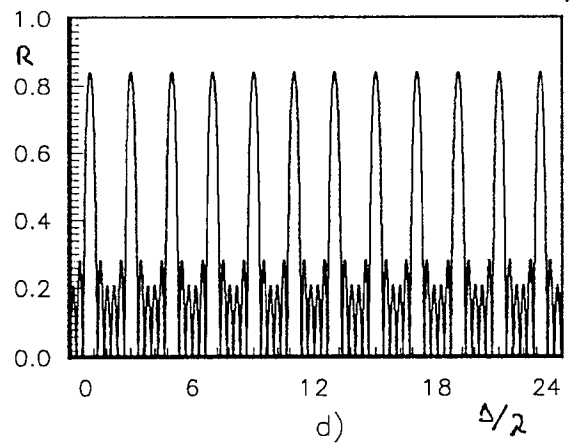
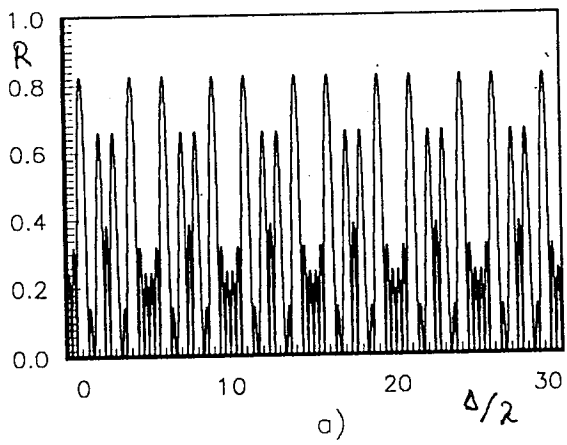


Fig 4.8 Espectros de reflectividad para las primeras tres etapas de subdivisión, $N=5$, en función del espesor de la película Δ normalizado con la longitud de la onda en vacío λ , caso simétrico. a) $s=1$ con $p=5.0$, b) $s=2$ con $p=25$, c) $s=3$ con $p=125$; en los incisos anteriores las razones de subdivisión son $r_i = 1/5$. d) $s=1$ con $p=2$, e) $s=2$ con $p=12$ y f) $s=3$ con $p=72$; con dimensión fractal $D = 0.613147$ y con las siguientes razones de subdivisión : $r_1 = r_3 = r_5 = 1/6$, $r_2 = r_4 = 1/4$.

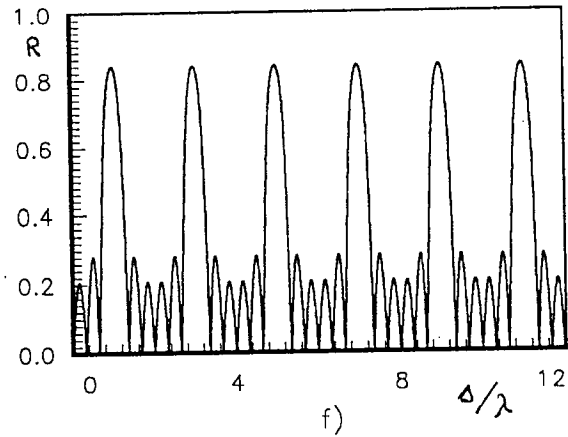
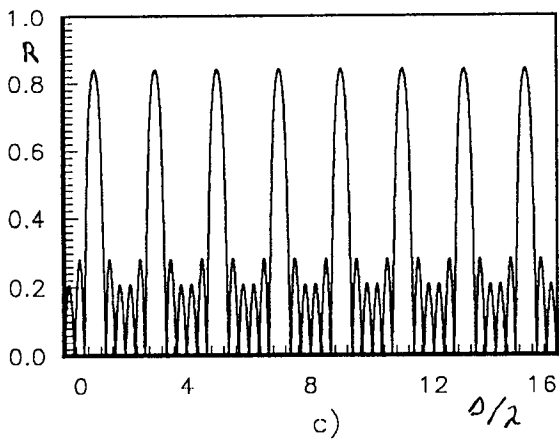
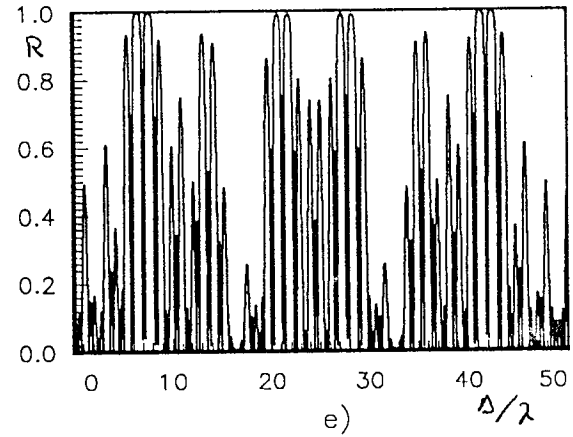
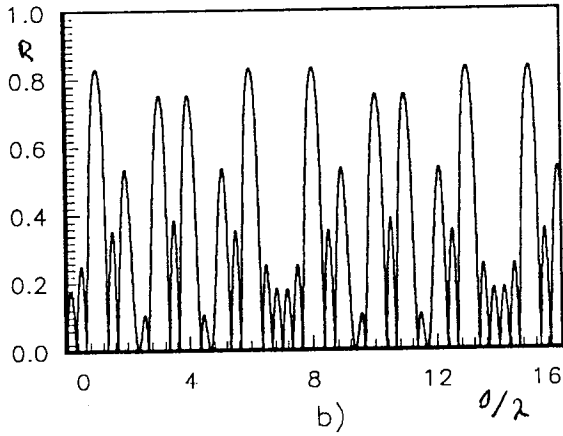
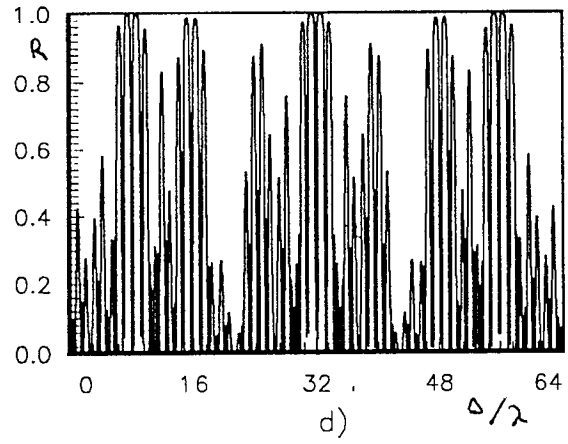
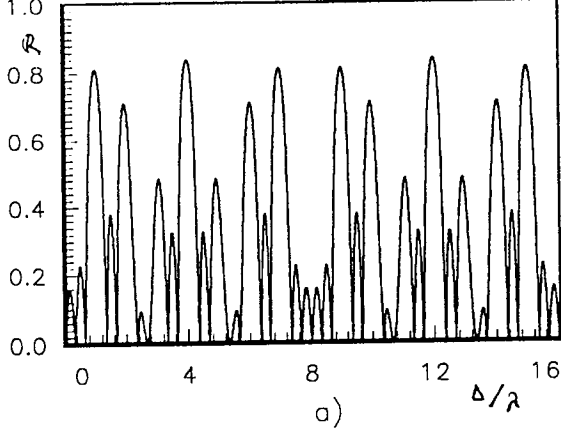


Fig 4.9 Espectros de reflectividad para diferentes valores de la dimensión fractal para un sistema con $N = 5$ subdivisiones, en función del espesor de la película Δ normalizado con la longitud de la onda en vacío λ , caso simétrico. En la etapa $s = 1$ tenemos a) $r_1 = r_3 = r_5 = 2/16$, $r_2 = r_4 = 5/16$; $D = 0.5283$, con $p = 8$. b) $r_1 = r_3 = r_5 = 1/7$, $r_2 = r_4 = 2/7$; $D = 0.5645$ con $p = 7$. c) $r_1 = r_3 = r_5 = 1/6$, $r_2 = r_4 = 1/4$; $D = 0.6131$ $p = 2$. En la etapa $s = 2$ tenemos que son los mismos parámetros excepto el período, así d) $p=64$; e) $p=49$; f) $p=12$.

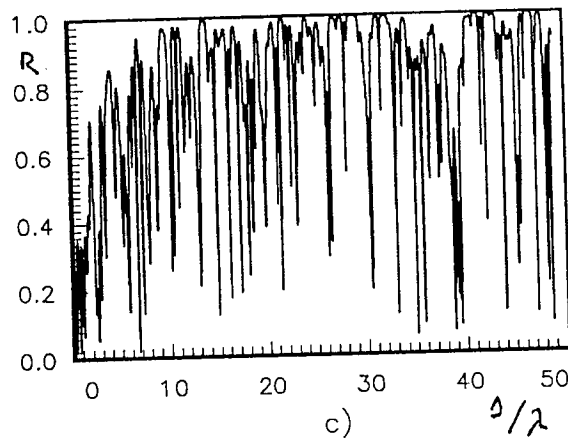
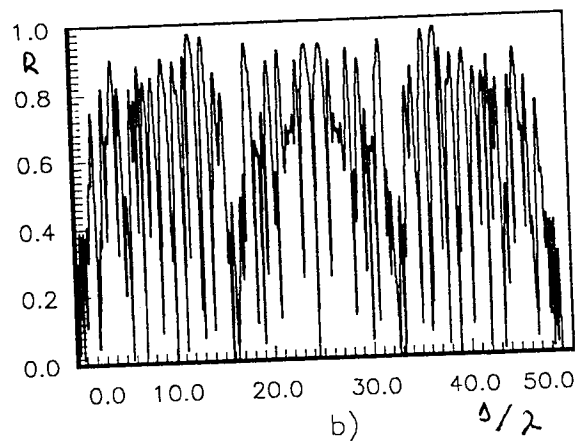
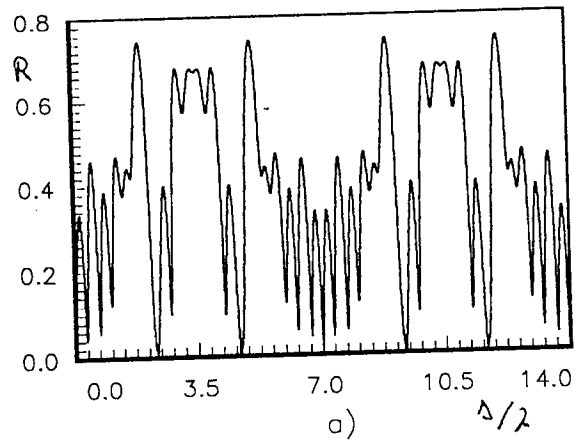


Fig. 4.10 Espectros de reflectividad para las primeras tres etapas de subdivisión, $N=5$, en función del espesor de la película Δ normalizado con la longitud de la onda en vacío λ , caso no simétrico. Se utilizan los siguientes parámetros, $r_1 = 6/14$, $r_2 = 1/14$, $r_3 = 2/14$, $r_4 = 1/14$, $r_5 = 4/14$, con $D = 0.8689$. a) $s=1$, $p=7$; b) $s=2$, $p=49$; c) $s=3$, $p=343$.

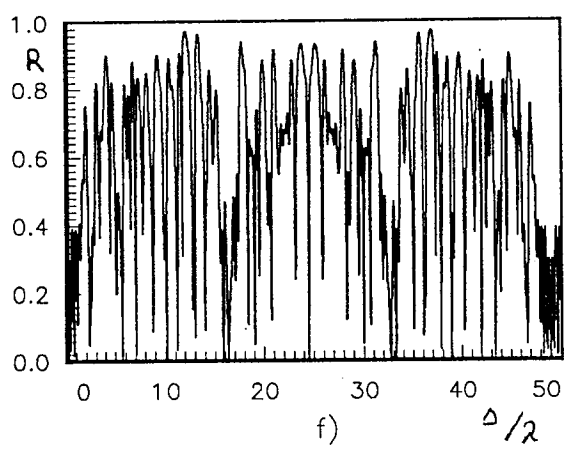
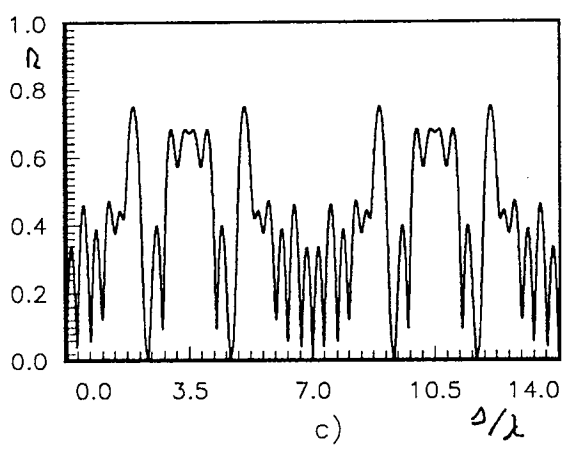
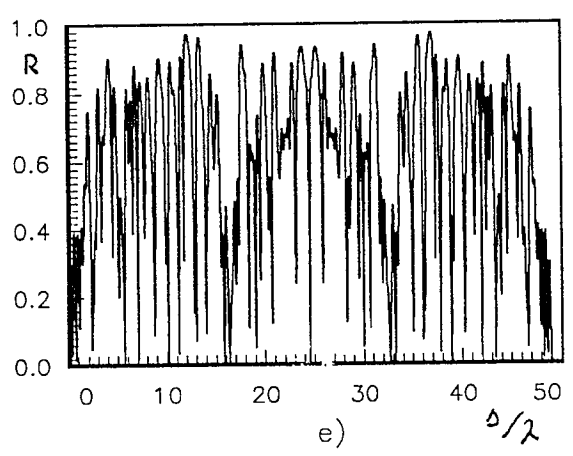
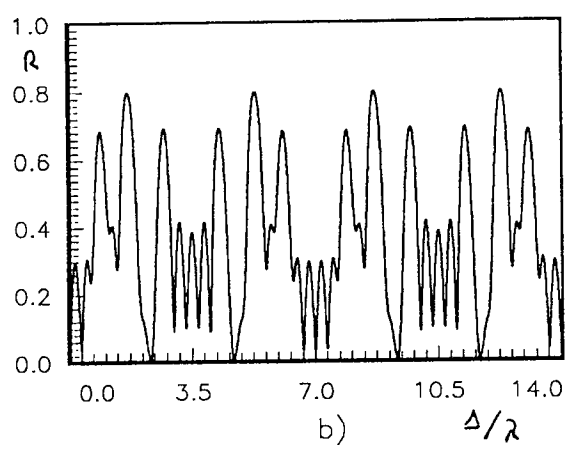
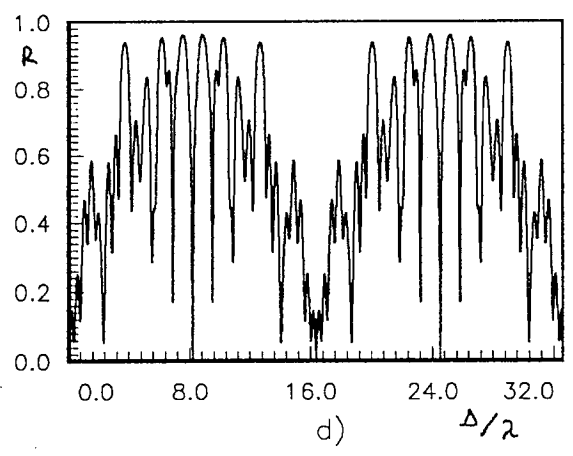
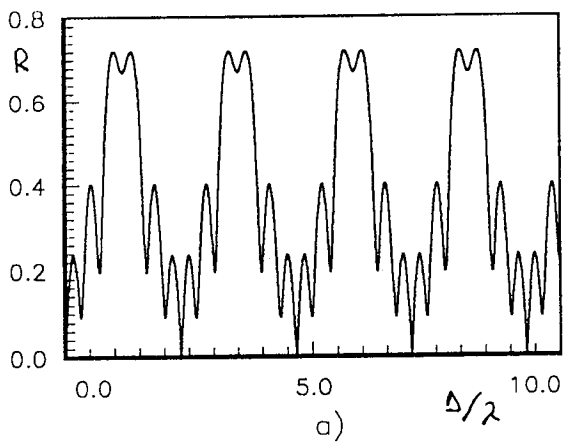


Fig. 4.1 Espectros de reflectividad en función del espesor de la película Δ normalizado con la longitud de la onda en vacío λ con diferentes valores de la dimensión fractal. Número de subdivisiones iniciales $N = 5$, caso no simétrico. En la etapa $s = 1$ a) $r_1 = 2/14, r_2 = 3/14, r_3 = 2/14, r_4 = 3/14, r_5 = 4/14; D = 0.6545$ con $p = 7/3$. b) $r_1 = 2/7, r_2 = 1/7, r_3 = 2/7, r_4 = 1/7, r_5 = 1/7; D = 0.7598$ con $p = 7$. c) $r_1 = 6/14, r_2 = 1/14, r_3 = 2/14, r_4 = 1/14, r_5 = 4/14; D = 0.8689$ con $p = 7$. En $s = 2$ se tienen los mismos parámetros d)-f) respectivamente excepto el período: d) $p = 49/3$, e) $p = 49$ y f) $p = 49$.

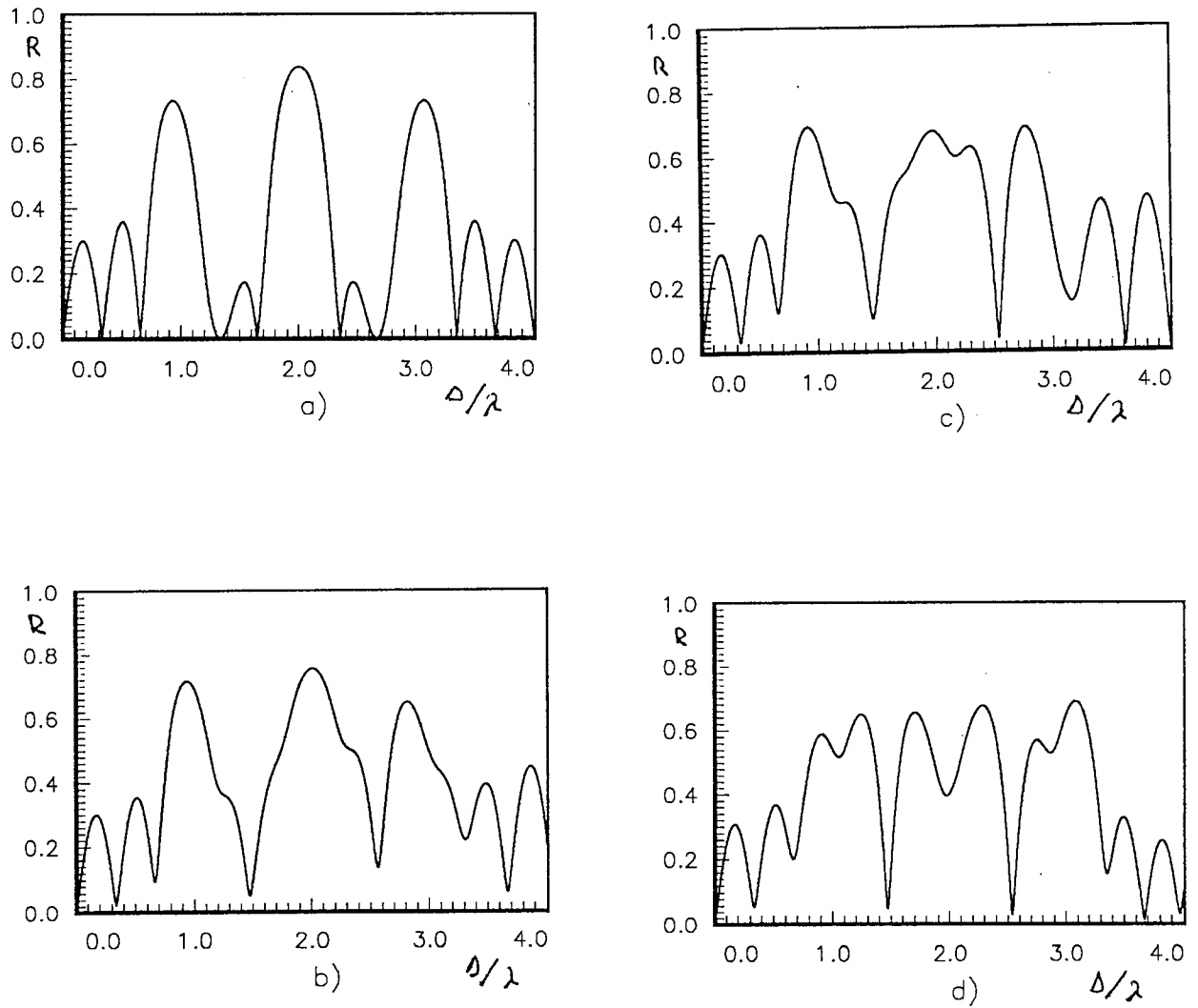


Fig. 4.12 Espectros de reflectividad para distintos valores de la asimetría σ con $N=5$, en función del espesor de la película Δ normalizado con la longitud de la onda en vacío λ . Se considera el caso asimétrico con películas de índice n_1 en un medio huésped n_0 . Aquí la dimensión fractal $D = 0.792481$ se mantiene constante, y el análisis se realiza en $s = 1$. a) $r_1 = 1/4$, $r_2 = 1/8$, $r_3 = 1/4$, $r_4 = 1/8$, $r_5 = 1/4$; $\sigma = 0$, $p = 4.0$. b) $r_1 = 0.280031$, $r_2 = 0.124634$, $r_3 = 1/4$, $r_4 = 0.124634$, $r_5 = 0.20701$; $\sigma \approx 0.05$. c) $r_1 = 0.300058$, $r_2 = 0.123997$, $r_3 = 1/4$, $r_4 = 0.123997$, $r_5 = 0.201948$; $\sigma \approx 0.09$. d) $r_1 = 0.342525$, $r_2 = 0.121653$, $r_3 = 1/4$, $r_4 = 0.121653$, $r_5 = 0.164169$; $\sigma \approx 0.17$.

4.4 Análisis del sistema de películas delgadas con tres divisiones iniciales y $n_2 \neq n_0$, caso asimétrico.

En el caso de no tener medio huésped, esto es, $n_0 \neq n_2$, el comportamiento de los espectros con respecto a la variación de los parámetros antes mencionados es cualitativamente el mismo independientemente del número de subdivisiones usado, ver figuras 4.13-4.15. Sin embargo, se observa que el valor del primer pico es mayor que el correspondiente cuando se tiene medio huésped. Esto es claro dado que el sistema ahora tiene una constante dieléctrica efectiva mayor. Debemos recordar que el valor del primer pico disminuye al aumentar la etapa de subdivisión. El período de las curvas aumenta y las zonas de interferencia destructiva son más localizadas.

Si ahora aplicamos el algoritmo de Cantor al medio ópticamente menos denso, esto es, $n_1 = 1.5 < n_2 = 1.8$ encontramos diferencias importantes en el cambio del valor del primer pico con respecto al incremento de la etapa de subdivisión. Lo anterior es debido a que la constante dieléctrica efectiva aumenta al aumentar la etapa de subdivisión, figura 4.16. Lo anterior se comprueba directamente en la ecuación (3.21). Con respecto a la variación de la dimensión fractal, ver la figura 4.17, y para la variación de α observar la figura 4.18. A pesar de los cambios mencionados en el comportamiento de los espectros con respecto a los distintos parámetros involucrados la forma cualitativa de los espectros se mantiene, cambiando solo el período correspondiente a cada uno de los espectros.

Finalmente es importante señalar las diferencias en los espectros de reflexión en el caso de tener tres razones de subdivisión iniciales, cuando el valor de el índice de refracción n_2 es $= n_0, < n_1, > n_1$. Tenemos que independientemente de la etapa de subdivisión, dimensión fractal y asimetría el número de picos por período aumenta conforme el medio huésped es ópticamente más denso. Como se ha mencionado anteriormente, cuando el índice de refracción n_2 es mayor que el índice n_1 observamos que la reflectividad es mayor, en promedio, que en los casos restantes. Tenemos además que las zonas de interferencia constructiva se definen más fuertemente conforme el medio huésped es ópticamente más denso.

El caso considerado en esta sección, $n_2 \neq n_0$, tiene la importancia de corresponder a arreglos de películas delgadas en la práctica del laboratorio.

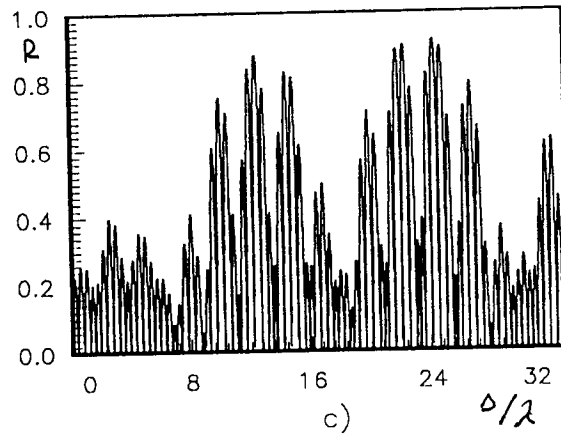
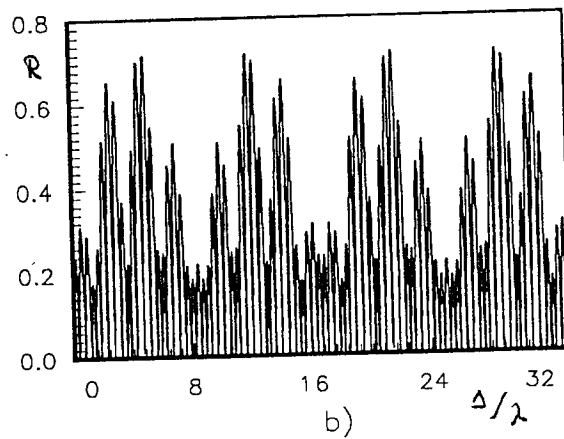
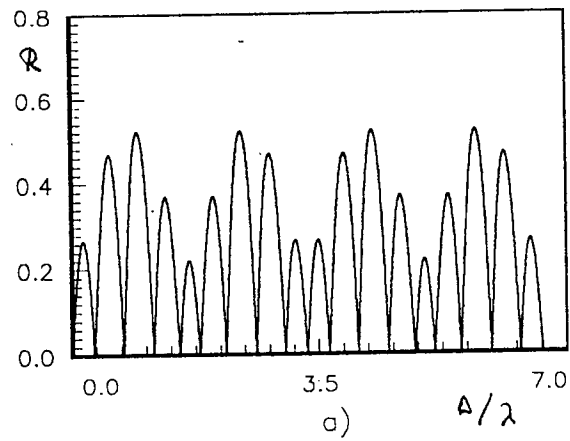


Fig. 4.13 Espectros de reflectividad para las primeras tres etapas de subdivisión, $N=3$ con $n_0 \neq n_2$, en función del espesor de la película Δ normalizado con la longitud de la onda en vacío λ , caso simétrico. Con razones de subdivisión $r_1 = 1/5$, $r_2 = 3/5$, $r_3 = 1/5$; dimensión fractal $D = 0.430677$. a) $s = 1$, $p = 10/3$; b) $s = 2$, $p = 50/3$; c) $s = 3$, $p = 250/3$. Comparar con la figura 4.1 ($n_2 = n_0$). Los valores de los índices de refracción son $n_0 = 1.0$, $n_1 = 1.5$ y $n_2 = 1.25$.

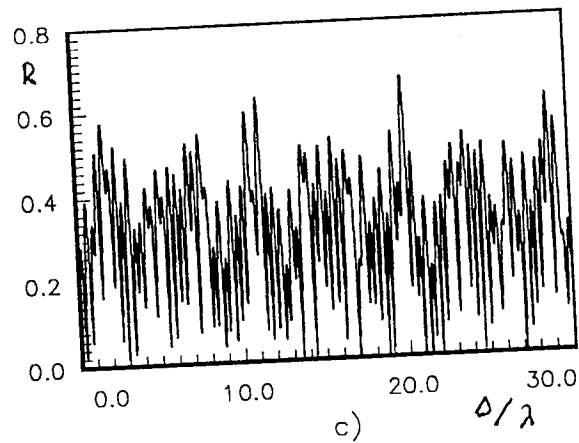
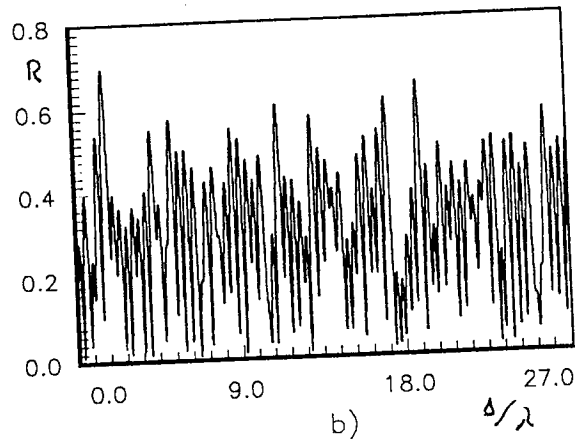
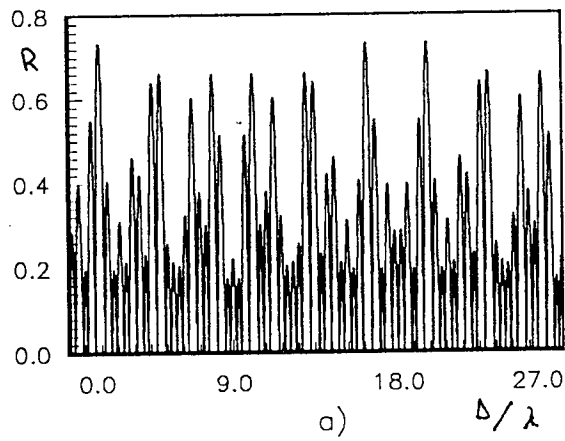


Fig 4.14 Espectros de reflectividad para distintos valores de σ en dos etapas de subdivisión, $N=3$, con $n_0 \neq n_2$, en función del espesor de la película Δ normalizado con la longitud de la onda en vacío λ . Se analiza la etapa $s = 2$ con $D = 0.6309$. a) $r_1 = r_2 = r_3 = 1/3$, $\sigma = 0.0$; b) $r_1 = 0.363364$, $r_2 = 0.332366$, $r_3 = 0.30427$, $\sigma \approx 0.059$; c) $r_1 = 0.393405$, $r_2 = 0.329578$, $r_3 = 0.277017$, $\sigma \approx 0.11$. Los valores de los índices de refracción tienen los mismos valores que en la figura 4.12. Comparar con la figura 4.5 para $n_2 = n_0$.

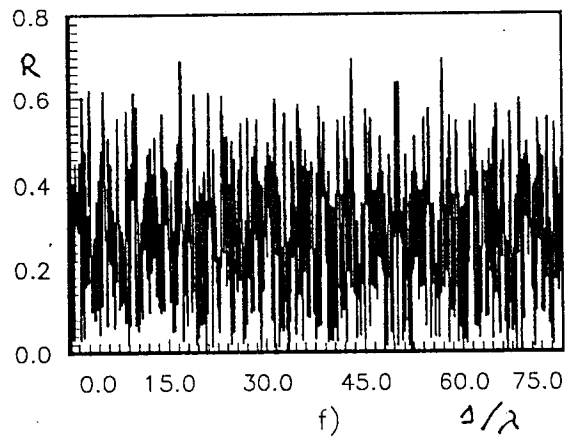
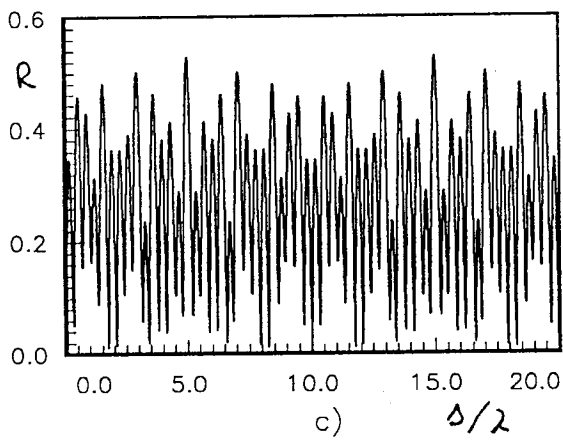
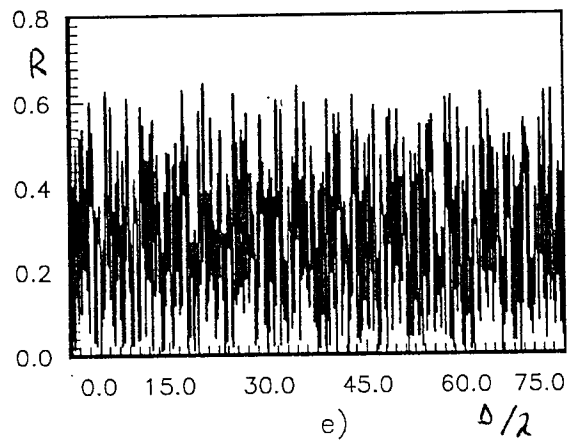
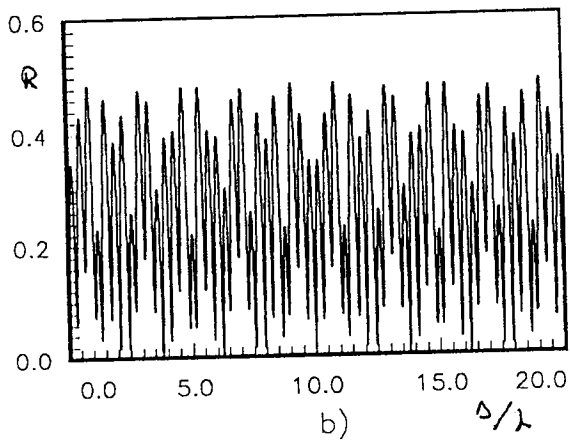
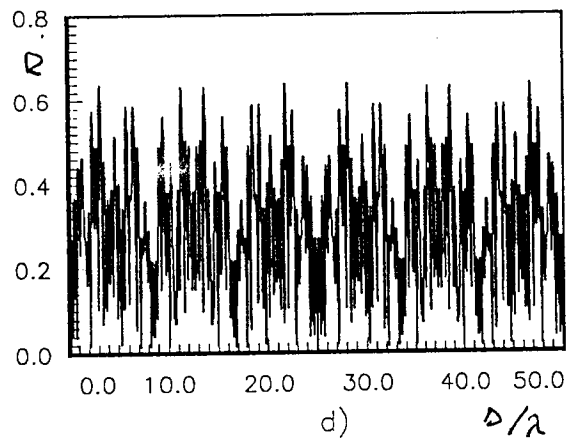
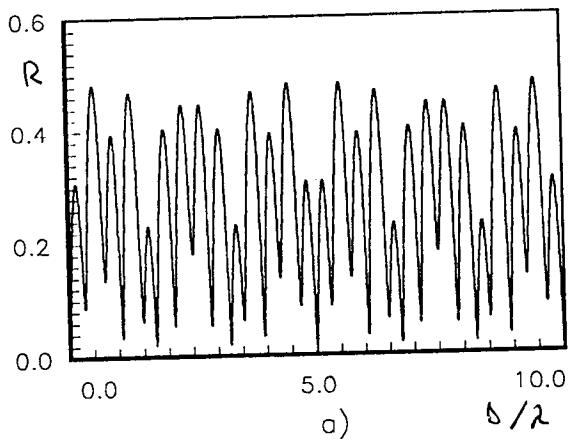


Fig 4.15 Espectros de reflectividad para distintos valores de la dimensión fractal en las primeras tres etapas de subdivisión, $N=3$ con $n_0 \neq n_2$, en función del espesor de la película Δ normalizado con la longitud de la onda en vacío λ , caso simétrico, se considera $\sigma = 1/5$. Para la etapa $s = 1$ tenemos a) $r_1 = 1/5$, $r_2 = 2/5$, $r_3 = 2/5$, $D = 0.563896$, $p = 5$, b) $r_1 = 4/15$, $r_2 = 3/15$, $r_3 = 8/15$, $D = 0.744556$, $p = 10$; c) $r_1 = 3/10$, $r_2 = 2/10$, $r_3 = 5/10$, $D = 0.74996$, $p = 10$. Etapa $s = 2$ d) $p=25$ y razones r_i igual al inciso a). e) $p=150$ con r_i del inciso b). f) $p=100$ con los r_i iguales a los del inciso c). Los n_i tienen los valores dados en la figura 4.12. Comparar con la figura 4.4 para $n_2 = n_0$.

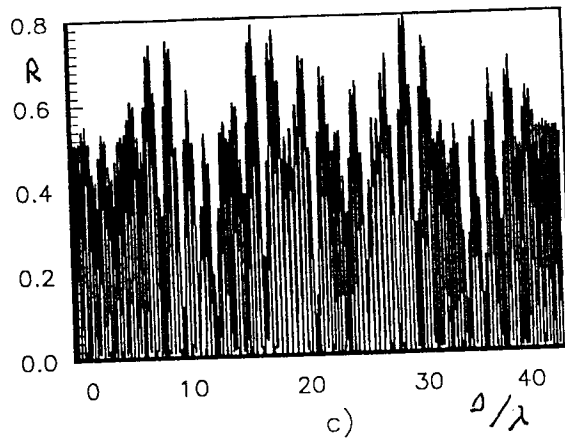
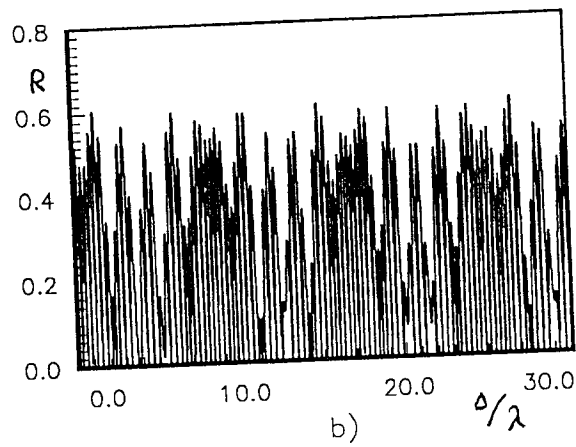
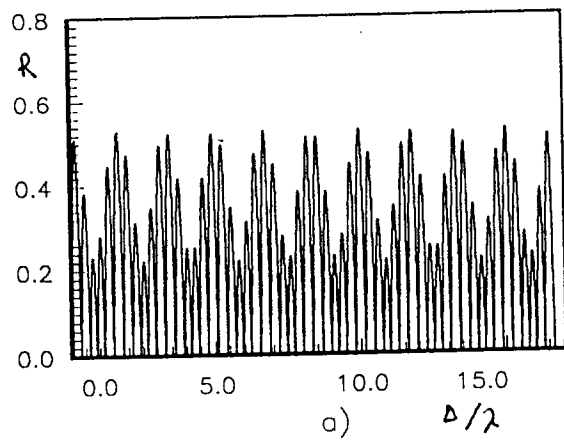


Fig. 4.16 Espectros de reflectividad para las primeras tres etapas de subdivisión, $N=3$ con $n_0 \neq n_2$, en función del espesor de la película Δ normalizado con la longitud de la onda en vacío λ , caso simétrico. Mismos parámetros que figura 4.12, con diferente de $n_2 = 1.8$.

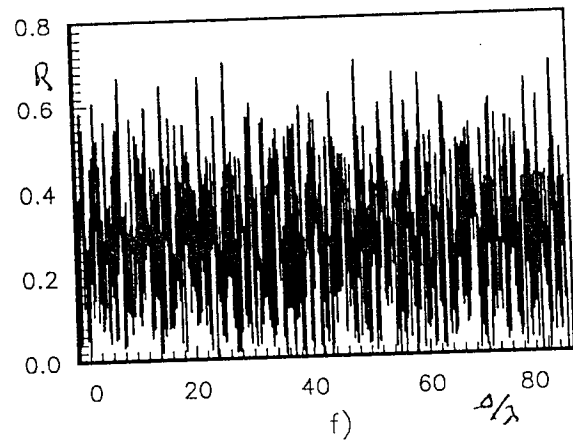
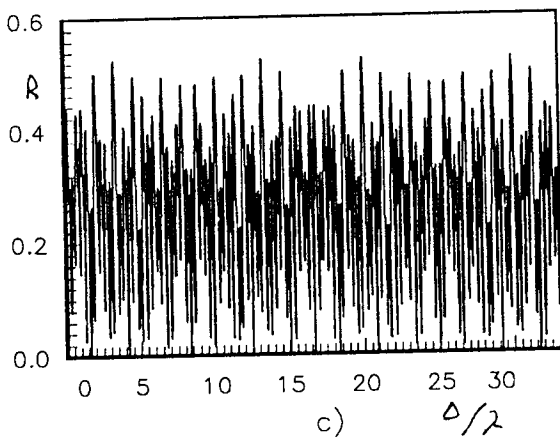
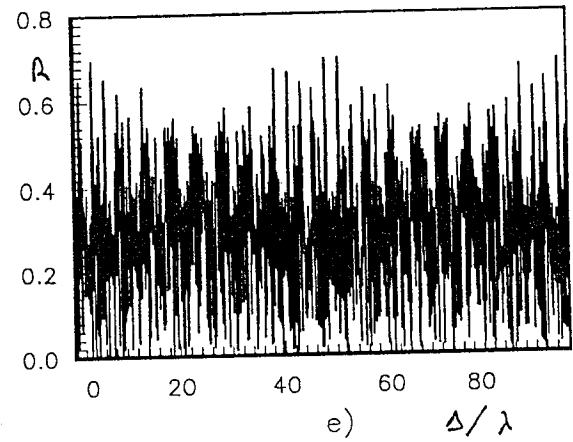
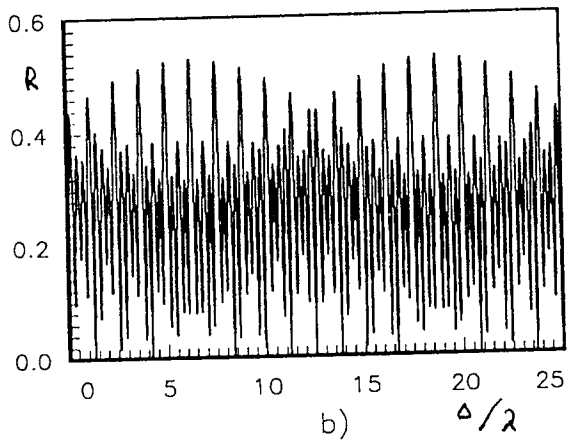
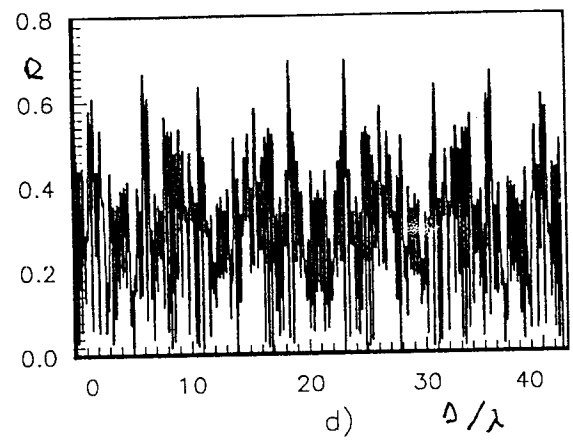
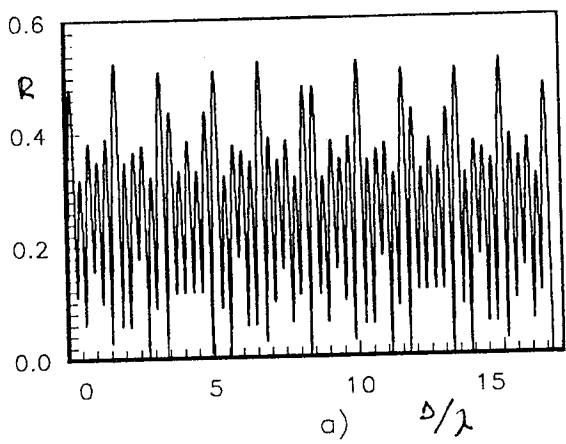


Fig. 4.17 Espectros de reflectividad para distintos valores de la dimensión fractal en las primeras tres etapas de subdivisión, $N=3$ con $n_0 \neq n_2$, en función del espesor de la película Δ normalizado con la longitud de la onda en vacío λ , caso simétrico. Mismos parámetros de la figura 4.13 ($n_2 = 1.8$) cambiando solo el período. a) $p=25/3$, b) $p=25/2$, c) $p=50/3$, d) $p=125/3$, e) $3/2$ (125), f) $p = 500/3$.

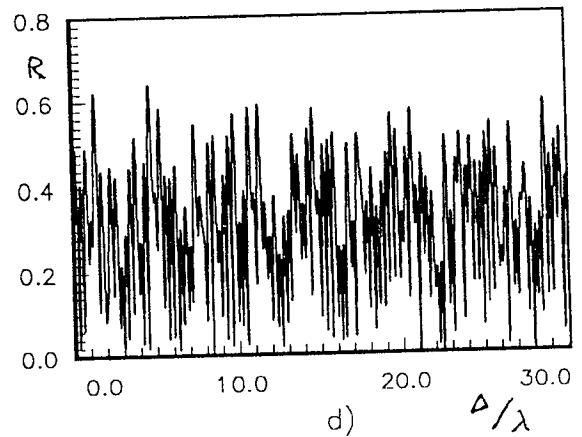
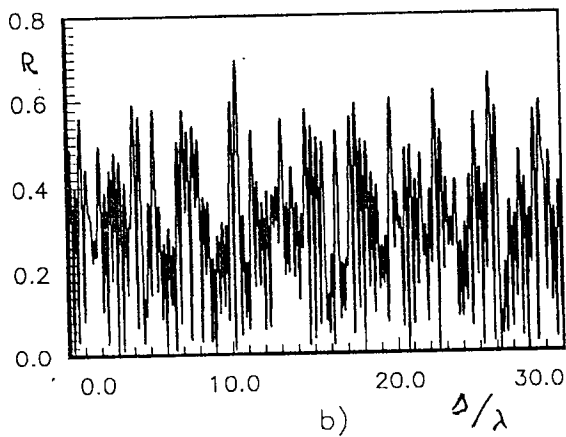
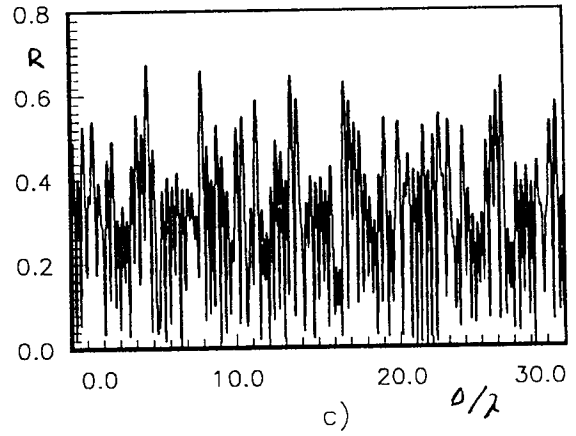
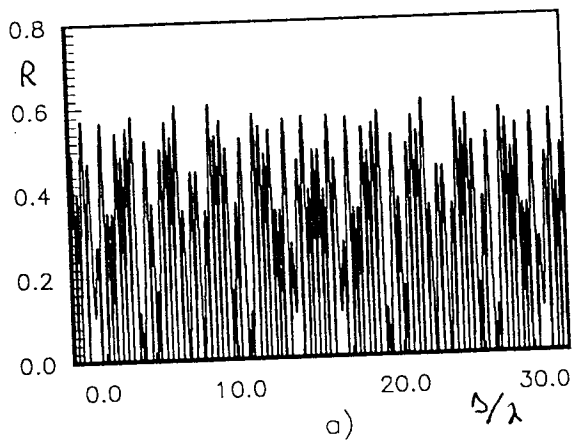


Fig. 4.18 Espectros de reflectividad para distintos valores de σ $s = 2$, $N = 3$ con $n_0 \neq n_2$, en función del espesor de la película Δ normalizado con la longitud de la onda en vacío λ . La dimensión fractal del sistema es $D = 0.6309$. a) $r_1 = r_2 = r_3 = 1/3$, $\sigma = 0.0$; b) $r_1 = 0.363364$, $r_2 = 0.332366$, $r_3 = 0.30427$, $\sigma \approx 0.059$; c) $r_1 = 0.393405$, $r_2 = 0.329578$, $r_3 = 0.277017$, $\sigma \approx 0.116$; d) $r_1 = 0.413432$, $r_2 = 0.326781$, $r_3 = 0.259787$, $\sigma \approx 0.154$. Estos parámetros son los mismos como en la figura 4.13, pero con $n_2 = 1.8$.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se estudio la propagación de ondas electromagnéticas a través de un sistema de capas discretas distribuidas bajo el algoritmo fractal de Cantor generalizado. El sistema se construye mediante el algoritmo de Cantor con razones de subdivisión diferentes, generalización del trabajo presentado por X. Sun y D.L. Jaggard [11]. A diferencia del trabajo de Sun y Jaggard aquí es importante considerar otro parametro como la asimetría σ del sistema para poder describir en forma completa los espectros. Es importante señalar que debido a que existe asimetría en el sistema no es posible considerar la dimensión fractal del sistema como un parametro totalmente independiente, debido a que existen un conjunto de parejas (tríos) de razones de subdivisión para los cuales se tiene el mismo valor de la dimensión fractal si el número de subdivisiones iniciales son tres (cinco) . Por lo que los efectos de la dimensión fractal se deben estudiar en sistemas que tienen el mismo valor de la asimetría. A pesar de la asimetría existente la autosimilaridad de los sistema se mantiene por lo cual es posible escribir relaciones recursivas para los coeficientes de reflexión y transmisión usando coeficientes efectivos de interface. En el caso de tener medio huésped las relaciones de recursividad para los coeficientes de reflexión y transmisión son escritas en función de los coeficientes de la etapa anterior directamente. Cuando ya no tenemos un medio huésped las relaciones recursivas son complicadas, dado que se escribieron relaciones recursivas para coeficientes de reflexión y transmisión de subsistemas diferentes al caso de tener medio huésped. Una vez obtenidas estas relaciones se encuentran los coeficientes de reflexión y transmisión correspondientes a cada una de las etapas de subdivisión del arreglo fractal. Estas relaciones recursivas generalizan en forma completa las relaciones recursivas encontradas por Sun y Jaggard [11]. Además de que ellos solo muestran resultados para valores en los índices de refracción $n_0 = 1.0$ y $n_1 = 1.5$. Por otro lado, la formula encontrada para el período por nosotros es mucho más general que la dada por Sun y Jaggard. Una diferencia muy importante con el trabajo [11] es la realizada para encontrar el índice promedio. Donde la validez de la misma comparada con el índice efectivo usado por nosotros fué mostrado en la figura 2.4. Consideramos un error la aproximación hecha por Sun y Jaggard dado que solo es valida cuando el valor de los índices de refracción usados tienen valores aproximados a uno [17, 20].

Es importante señalar la diferencia que existe en el comportamiento de los sistemas cuando se considera que $n_2 \neq n_0$. Encontramos que el comportamiento cualitativo de los espectros debido a cada uno de los parametros se mantiene si se aplica el algoritmo generalizado de Cantor al medio ópticamente más denso. Sin embargo, cuando aplicamos el algoritmo de Cantor al sistema ópticamente menos denso los comportamientos de los espectros ya no son cualitativamente similares. En este caso se observa que al aumentar la etapa de subdivisión del arreglo el valor del primer pico aumenta en lugar de disminuir. Si disminuimos la dimensión fractal del sistema el valor de los dos primeros picos aumenta en lugar de disminuir como se da en la situación de tener un medio huesped o cuando se tiene que $n_1 > n_2$. Estos resultados nos muestran la magnitud de nuestra generalización de los resultados comparada con los obtenidos por Sun y Jaggard, los cuales son limitados.

En ambos tipos de arreglos, con y sin medio huesped, se observa que existen zonas de interferencia constructiva que nos lleban a tener amplitudes de reflectividad de uno, y zonas de interferencia destructiva, que nos dan transmisión completa. Conforme aumenta la etapa de subdivisión las zonas de interferencia constructiva van agrandando y las zonas de interferencia destructiva se localizan practicamente en valores bien determinados de la frecuencia.

Cuando se aplica el algoritmo generalizado de Cantor con cinco razones de división podemos volver a considerar la dimensión fractal como un parametro totalmente independiente si consideramos que el sistema es simétrico. La diferencia importante con el trabajo de Sun y Jaggard, bajo estas circunstancias, es debida a que las zonas de interferencia constructiva y destructiva bien definidas se manifiestan más rapidamente que en el caso de tres razones de subdivisión. En general aún y cuando el sistema no sea simétrico la diferencia importante es la relacionada con las zonas de interferencia constructiva y destructiva. El comportamiento de los espectros con respecto a la variación de los parametros restantes se mantiene.

Una aplicación directa de este tipo de arreglos de películas delgadas es la construcción de filtros ópticos, espejos para cavidades resonantes de laseres, etc.

Los objetivos principales del trabajo fueron cumplidos en forma completa, dado que se buscaba la generalización del trabajo de Sun y Jaggard tanto en las ecuaciones como en los resultados finales.

Apéndice A

Deducción de los coeficientes de reflexión y transmisión de interface efectivos.

La deducción de los coeficientes se hará usando el método matricial para un sistema multicapa; el sistema se muestra en la figura A.1. El sistema multicapa completo se separará en dos subsistemas enlazados por un medio de espesor Δ_ν , como se muestra en la figura A.2; por lo que necesitamos expresar los coeficientes de reflexión y transmisión del sistema completo en función de los coeficientes de los dos subsistemas [17].

La relación de las amplitudes de la onda en el medio con etiqueta cero y el medio etiquetado por $N + 1$ es

$$\begin{pmatrix} E_{0,R} \\ E_{0,L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{N+1,R} \\ E_{N+1,L} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

con

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = D_0^{-1} \left[\prod_{l=0}^N D_l P_l D_l^{-1} \right] D_{N+1} \quad (\text{A.2})$$

$$P_l = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_l} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_l} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

donde $\varphi_l = kn_l \Delta_l$.

En este formalismo los coeficientes de reflexión y transmisión son definidos por las siguientes relaciones

$$\left. \begin{aligned} r_R &= \frac{M_{21}}{M_{11}} & t_R &= \frac{1}{M_{11}} \\ r_L &= -\frac{M_{12}}{M_{11}} & t_L &= \frac{M_{11}}{M_{11}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

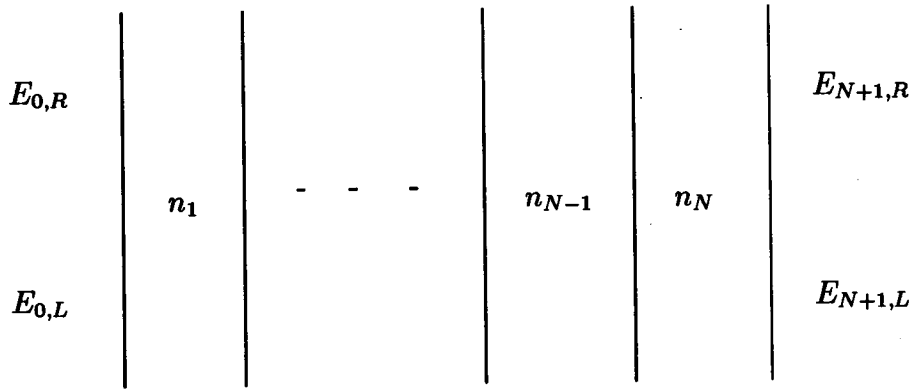


Figura A.1: Sistema multicapa con N medios.

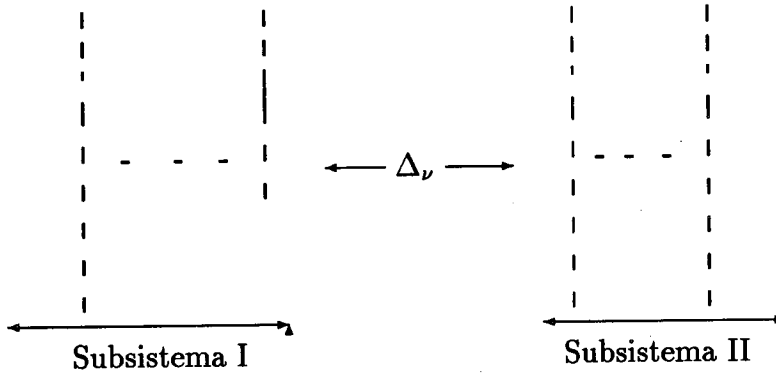


Figura A.2: Sistema multicapa separado en dos subsistemas por una película delgada de espesor Δ_ν y fase $\varphi_\nu = kn_{\nu u}\Delta_\nu$

cumpliendo la siguiente relación

$$t_R t_L - r_R r_L = \frac{|M| + M_{12}M_{21}}{M_{11}^2} = \frac{M_{22}}{M_{11}} \quad (\text{A.5})$$

Ahora nos interesa separar el sistema multicapa completo en dos subsistemas separados por un medio cuya fase es dada por φ_ν , como se muestra en la figura A.2.

Denotemos las matrices de los subsistemas parciales como $M_I = \begin{vmatrix} M'_{ij} \end{vmatrix}$ y $M_{II} = \begin{vmatrix} M''_{ij} \end{vmatrix}$ con $i, j = 1, 2$ y la matriz final M es dada por el producto

$$M = \begin{vmatrix} M_{ij} \end{vmatrix} = M_I P_\nu M_{II} \quad (\text{A.6})$$

Realizando el producto matricial obtenemos

$$M = \begin{pmatrix} M'_{11}M''_{11}e^{i\varphi\nu} + M'_{12}M''_{21}e^{i\varphi\nu} & M'_{11}M''_{12}e^{i\varphi\nu} + M'_{12}M''_{22}e^{i\varphi\nu} \\ M'_{21}M''_{11}e^{i\varphi\nu} + M'_{22}M''_{21}e^{i\varphi\nu} & M'_{21}M''_{12}e^{i\varphi\nu} + M'_{22}M''_{22}e^{i\varphi\nu} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Usando las ecuaciones (A.4) y (A.7) obtenemos

$$r_R = \frac{M_{21}}{M_{11}} = \frac{M'_{21}M''_{11}e^{i\varphi\nu} + M'_{22}M''_{21}e^{i\varphi\nu}}{M'_{11}M''_{11}e^{i\varphi\nu} + M'_{12}M''_{21}e^{i\varphi\nu}}$$

dividimos por $M'_{11}M''_{11}e^{i\varphi\nu}$ entonces

$$r_R = \frac{\frac{M'_{21}}{M'_{11}} + \frac{M''_{21}M'_{22}}{M''_{11}M'_{11}}e^{2i\varphi\nu}}{1 + \frac{M'_{12}M''_{21}}{M'_{11}M''_{11}}e^{2i\varphi\nu}}$$

reinterpretando los cocientes anteriores en el conjunto de ecuaciones (A.4) y (A.5) obtenemos el coeficiente de reflexión requerido

$$r_R = \frac{r_{IR} + (t_{IR}t_{IL} - r_{IR}r_{IL})r_{IIR}e^{2i\varphi\nu}}{1 - r_{IL}r_{IIR}e^{2i\varphi\nu}}$$

el cual se expresa finalmente como

$$r_R = r_{IR} + \frac{t_{IR}t_{IL}r_{IIR}e^{2i\varphi\nu}}{1 - r_{IL}r_{IIR}e^{2i\varphi\nu}} \quad (\text{A.8})$$

Siguiendo un procedimiento similar se obtiene el coeficiente de transmisión, el cual es dado como

$$t_R = \frac{t_{IR}t_{IIR}e^{i\varphi\nu}}{1 - r_{IL}r_{IIR}e^{2i\varphi\nu}} \quad (\text{A.9})$$

Apéndice B

Deducción del período y simetría dentro de este, para curvas de reflexión, de un sistema fractal de películas delgadas.

B.1 Deducción del período

Primero encontremos el período asociado con un sistema multicapas arbitrario de películas delgadas. Posteriormente lo extenderemos a un sistema fractal.

Para un sistema de películas delgadas compuesto de N capas la amplitud de reflexión se puede escribir como

$$r = r(x_1, x_2, \dots, x_N),$$

donde

$$\begin{aligned} x_i &= e^{i2\frac{\omega}{c}n_i d_i} = e^{i2\frac{\omega}{c}n_i r_i \Delta} \\ &= e^{i4\pi n_i r_i (\Delta/\lambda)} \equiv e^{i4\pi n_i r_i \delta} \equiv x_i(\delta) \end{aligned}$$

$$\delta = \Delta/\lambda = (\Delta/2\pi c)\omega$$

Aquí $r_i = d_i/\delta$ es el espesor normalizado de la capa i o, simplemente, su razón de subdivisión (Δ es el espesor total de la película), y δ es el espesor normalizado de la película.

Si definimos

$$p_i = \frac{1}{2n_i r_i}$$

$$x_i(\delta + p_i) = e^{i4\pi n_i r_i (\delta + 1/2n_i r_i)} = e^{i4\pi n_i r_i \delta + i2\pi}$$

lo cual nos lleva a

$$x_i(\delta + p_i) = x_i(\delta)$$

Entonces observamos que p_i es el período de la función $x_i(\delta)$.

Ahora, siempre es posible escribir n_i y r_i como fracciones,

$$n_i = \frac{u_i}{v}, \quad r_i = \frac{t_i}{q}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

Esto es, v y q son independientes de i (también, $\sum t_i = q$). Aquí, u_i , v , t_i , y q son enteros positivos (Notese que los t_i no pueden tener un factor común, pues ese se hubiera cancelado con el q , debido a que $\sum t_i = q$). Por lo tanto,

$$p_i = \frac{vq}{2u_it_i}$$

Si $u_1t_1, u_2t_2, \dots, u_Nt_N$ tiene un factor ν en común, entonces podemos escribir $u_it_i = \nu u'_it'_i$, donde ahora los $u'_it'_i$ no tienen factor común. Notese que los t_i no pueden tener un factor común, pues este se hubiera cancelado con el q , debido a que $\sum t_i = q$. No obstante, los t_i si pueden tener un factor en común con los u_i . Entonces

$$p_i = \frac{vq}{2\nu u'_it'_i}$$

Si multiplicamos p_i por algún entero arbitrario N_i entonces, por supuesto, $x_i(\delta)$ también será periódico en $N_i p_i$. Es necesario encontrar el conjunto *más pequeño* de enteros N_i tal que

$$p_1 N_1 = p_2 N_2 = \dots = p_N N_N$$

Obviamente, el espectro entero poseerá el período $p = p_i N_i$. Debido a que $u'_it'_i$ no tienen factor común, estos enteros son

$$N_i = u'_it'_i$$

por lo tanto,

$$p_i N_i = \frac{vq}{2\nu}$$

Entonces

$$x_i(\delta + \frac{vq}{2\nu}) = x_i(\delta), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Esto permanece válido para todo i . Debido a que r depende de δ únicamente a través de x_i , por lo tanto

$$\begin{aligned} r(\delta + \frac{vq}{2\nu}) &= r[x_1(\delta + \frac{vq}{2\nu}), x_2(\delta + \frac{vq}{2\nu}), \dots, x_N(\delta + \frac{vq}{2\nu})] \\ &= r[x_1(\delta), x_2(\delta), \dots, x_N(\delta)] \\ &= r(\delta) \end{aligned}$$

Finalmente probamos que el período del sistema de películas delgadas es

$$p = \frac{vq}{2\nu}$$

B.1.1 Sistema fractal

Es importante aplicar la ultima formula para el sistema fractal que nos interesa, sistema de Cantor. Para lograr esto es necesario que escribamos las razones de subdivisión y los índices de refracción correspondientes a cada medio, para cada una de las etapas, en función de los parámetros introducidos anteriormente.

Consideremos el caso de tres razones de subdivisión. En la etapa $s = 1$ tenemos que las razones de subdivisión son

$$r_1 = t_1/q, \quad r_2 = t_2/q, \quad y \quad r_3 = t_3/q$$

y los índices de refracción son

$$n_1 = u_1/v, \quad n_2 = u_2/v \quad y \quad n_3 = n_1 = u_1/v$$

por lo que, comparando con los parámetros anteriores el período en esta etapa es dado por

$$p_1 = \frac{vq}{2v}$$

En la etapa $s = 2$, tenemos que el número de medios se incrementa a siete, por lo que es necesario conocer las nuevas razones de subdivisión r_i y los índices de refracción correspondientes n_i . Estos son

$$\begin{aligned} r_1 &= t_1 t_1 / q^2, & n_1 &= u_1 / v \\ r_2 &= t_2 t_1 / q^2, & n_2 &= u_2 / v \\ r_3 &= t_3 t_1 / q^2, & n_3 &= u_1 / v \\ r_4 &= t_2 t_2 / q^2, & n_4 &= u_2 / v \\ r_5 &= t_3 t_1 / q^2, & n_5 &= u_1 / v \\ r_6 &= t_3 t_2 / q^2, & n_6 &= u_2 / v \\ r_7 &= t_3 t_3 / q^2, & n_7 &= u_1 / v \end{aligned}$$

Debemos encontrar el factor común ν , y notar que q se transforma en q^2 :

$$\begin{aligned} t_1 t_1 u_1 &= t_1 \nu t'_1 u'_1 \\ t_1 t_2 u_2 &= t_1 \nu t'_2 u'_2 \\ t_1 t_3 u_1 &= t_1 \nu t'_3 u'_1 \\ q t_2 u_2 &= q \nu t'_2 u'_2 \\ t_3 t_1 u_1 &= t_3 \nu t'_1 u'_1 \\ t_3 t_2 u_2 &= t_3 \nu t'_2 u'_2 \\ t_3 t_3 u_1 &= t_3 \nu t'_3 u'_1 \end{aligned}$$

Una observación cuidadosa de las expresiones en los lados derechos nos conduce a la conclusión que tienen el factor común ν anterior, unicamente. Por lo tanto,

$$p_2 = \frac{vq^2}{2\nu}$$

Prosiguiendo de esta manera para las siguientes etapas se encuentra que el período en una etapa s arbitraria es dado por

$$p_s = \frac{vq^s}{2\nu}$$

Con esto queda definido el período para un sistema de películas delgadas tipo Cantor. Sin embargo, al tener cinco razones de subdivisión surge un nuevo factor común entre los t_i , con i impar, y q . A este factor común lo denominaremos γ . Por lo que la ecuación para el período se ve modificada de la siguiente manera

$$p_s = \frac{vq^s}{2\nu\gamma^{s-1}}$$

B.2 Simetría de los espectros de reflexión dentro de un período.

Definimos

$$\delta = \frac{vq}{2\nu}(\mathcal{N} + 1/2) + \eta \equiv \delta_{\mathcal{N}} + \eta$$

esto es, η mide la distancia apartir del centro de un período, con $\mathcal{N} = 0, 1, 2, \dots$

Entonces

$$r(\delta_{\mathcal{N}} - \eta) = r[x_1(\delta_{\mathcal{N}} - \eta), x_2(\delta_{\mathcal{N}} - \eta), \dots, x_N(\delta_{\mathcal{N}} - \eta)]$$

con

$$\begin{aligned} x_i(\delta_{\mathcal{N}} - \eta) &= e^{i4\pi n_i r_i (\delta_{\mathcal{N}} - \eta)} = e^{i4\pi n_i r_i [\frac{vq}{2\nu}(\mathcal{N} + 1/2) - \eta]} \\ &= e^{i2\pi u'_i t'_i (\mathcal{N} + 1/2)} e^{-i4\pi n_i r_i \eta} \\ &= (-1)^{u'_i t'_i} e^{-4\pi n_i r_i \eta} \end{aligned}$$

La reflectividad es

$$R = |r|^2 = r(x_1, x_2, \dots, x_N) r^*(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Debido a que la disipación es despreciable todos los coeficientes parciales de reflexión y transmisión son reales. De aquí

$$R = r(x_1, x_2, \dots, x_N) r^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$$

Entonces

$$\begin{aligned} R(\delta_{\mathcal{N}} - \eta) &= r [(-1)^{u'_1 t'_1} e^{-i4\pi n_1 r_1 \eta}, (-1)^{u'_2 t'_2} e^{-i4\pi n_2 r_2 \eta}, \dots, (-1)^{u'_N t'_N} e^{-i4\pi n_N r_N \eta}] \times \\ &\quad \times r [(-1)^{u'_1 t'_1} e^{i4\pi n_1 r_1 \eta}, (-1)^{u'_2 t'_2} e^{i4\pi n_2 r_2 \eta}, \dots, (-1)^{u'_N t'_N} e^{i4\pi n_N r_N \eta}] \\ &= R(\delta_{\mathcal{N}} + \eta) \end{aligned}$$

Con esto demostramos que los espectros son simétricos dentro de un período alrededor del punto medio de este.

Referencias

- [1] F. Claro and R. Fuchs, Phys. Rev. B, **44**, 4109, (1991).
- [2] V. A. Markel , L. S. Muratov, Mark I. Stockman and Thomas F. George, Phys. Rev. B, **43**, 8183, (1991).
- [3] Vladimir M. Shalaev, R. Botet and R. Julien, Phys. Rev. B, **44**, 12216, (1991)
- [4] Harold D. Bale and Paul W. Schmidt, Phys. Rev. Letters, **53**, 596, (1984).
- [5] Eric Jakeman, Scattering by Fractals, in *Fractals in Physics*, Edited by L. Pietronero, E. Tossati (Elsevier Science Publishers B.V., 1986).
- [6] D.L. Jaggard and Y. Kim, J. Opt. Soc. Am. A, **4**, 1055, (1987).
- [7] D.L. Jaggard and X. Sun, J. Opt. Soc. Am. A, **7**, 1131, (1990).
- [8] V.V. Konotop, O.I. Yordanov and Yurkevitch, Europhysics Letters, **12**, 481, (1990).
- [9] Vladimir V. Konotop, Phys. Rev. A, **43**, 1352, (1991).
- [10] V.V. Konotop and S.A. Bulgakov, Phys. Rev. A, **45**, 5994, (1992).
- [11] X. Sun and D.L. Jaggard, J. Appl. Phys., **70**, 2500, (1991).
- [12] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, (Freeman 1983).
- [13] Jens Feder, *Fractals*, (Plenum 1988).
- [14] Physica D, *Fractals in Physics*, **38**, Edited by Amnon Aharony and Jens Feder, (1989).
- [15] Constantino Tsallis, On the Measure of Fractal Dimensionalities Through Physical Properties, in *Fractals in Physics*, Edited by L. Pietronero, E. Tossati (Elsevier Science Publishers B.V., 1986)
- [15a] C. Allain and M. Cloitre, Optical Diffraction on Fractals, Phys. Rev. B, **33**, 3566, (1986).
- [16] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Second edition, (Wiley, 1975).

- [17] Z. Knittl, *Optics of Thin Films*, (John Wiley and Sons, 1976).
- [18] Pochi Yeh, *Optical Waves in Layered Media*, (Wiley Interscience , 1988).
- [19] D.E. Aspnes, *Thin Solid Films*, **89**, 249, (1982).
- [20] H. Angus Macleod, *J. Vac. Sci. Technol. A*, **4**, 418, (1986).
- [21] M. Born y E. Wolf, *Principles of Optics*, Fifth Edition, (Pergamon Press, 1975).