Tampereen yliopisto

Antti Lempinen

BLACK-SCHOLES -MALLI EUROOPPALAISTEN OPTIOIDEN HINNOITTELUSSA

Tekniikan ja luonnontieteiden tiedekunta
Kandidaatintyö
Huhtikuu 2020

TIIVISTELMÄ

Antti Lempinen: Black-Scholes -malli eurooppalaisten optioiden hinnoittelussa
Kandidaatintyö
Tampereen yliopisto
Matematiikka, Tekniikka ja luonnontieteet, TkK
Huhtikuu 2020

Black-Scholes -malli on eurooppalaisten optioiden hinnoittelussa käytetty malli. Se on kehitelty jo 1970 -luvulla, mutta on edelleen yksi optioiden hinnoittelussa yleisimmin käytetyistä malleista. Tässä työssä käydään Black-Scholes -mallin todistus matemaattisesti läpi ja verrataan sitä lyhyesti kahteen muuhun yleisesti käytössä olevaan malliin.

Työ jakautuu neljään osaan. Aluksi perehdytään hinnoiteltavaan tuotteeseen, optioon, ja siihen liittyviin muuttujiin, jotka ovat riskitön korko ja volatiliteetti. Toisessa osassa tutustutaan Black-Scholes -malliin ja todistetaan sen paikkaansapitävyys matemaattisia menetelmiä käyttäen. Todistusta pohjustetaan lognormaalisuuden ja Iton apulauseen avulla. Black-Scholes -mallin todistuksen jälkeen tutustutaan lyhyesti kahteen muuhun optioiden hinnoittelumalliin, Binomimalliin ja Monte Carlo -simulaatioon, ja verrataan niitä Black-Scholes -malliin. Työn lopussa esitetään yhteenveto, jossa tarkastellaan Black-Scholes -mallin todistusta, ja siinä tehtyjä oletuksia sekä niiden vaikutusta mallin luotettavuuteen.

Yhteenvedossa keskeisimmiksi mallin heikkouksiksi lukeutuvat juuri mallissa tehdyt oletukset. Etenkin oletus varianssin muuttumattomuudesta option voimassaolon aikana on ristiriidassa todellisen tarkastelun kanssa.

Avainsanat: Optiot, Optioiden hinnoittelu, Black-Scholes

ALKUSANAT

Oma kiinnostukseni sijoittamista kohtaan sekä matematiikan pääaineeni johdattelivat kandidaatintyön aiheen valintaani kohti optioiden hinnoittelua. Optiot eivät sijoituskohteena olleet minulle ennestään tuttuja, joten koin pystyväni syventämään tietymystäni samalla, kun teen kandidaatintyötäni. Koenkin ymmärrykseni optioiden hinnoittelua kohtaan sekä ymmärryksen hinnoittelumallien matemaattiseen tarkasteluun kehittyneen selvästi.

Tampereella, 29. huhtikuuta 2020

Antti Lempinen

SISÄLLYSLUETTELO

LYHENTEET JA MERKINNÄT

D_t	Rahan arvo hetkellä t
e	Neperin luku
ϵ	Satunnaisluku normaalijakaumasta, jonka odotusarvo on 0 ja varianssi 1
K	Kohde-etuuden toteutushinta
μ	Odotettu tuotto
$N()$	Normaalijakauma odotusarvolla 0 ja hajonnalla 1
$\hat{E}[]$	Riskitön odotusarvo
$E[]$	Odotusarvo
r	Riskitön korkokanta
s	Keskihajonta
σ	Volatiliteetti
S_t	Kohde-etuuden hinta hetkellä t
$\sum$	Summamerkintä
v_t	Arvonmuutoksen kerroin hetkellä t
$\binom{T}{k}$	Binomikerroin "T yli k:n". Ilmoittaa mahdollisten kombinaatioiden lukumäärän.

1 JOHDANTO

Johdannaiset ovat rahoitusmaailman sopimuksia, joiden arvo riippuu jostain muusta hyödykkeestä, "kohde-etuudesta". Yleisimpiä johdannaisia ovat optiot ja optioissa edelleen osakeoptiot. Osakeoptiossa kaksi osapuolta solmivat sopimuksen, joka oikeuttaa sopimuksen ostajaa joko myymään tai ostamaan kohde-etuutena olevaa osaketta ennalta sovitulla hinnalla tiettynä ajankohtana. [11] Johdannaisilla käyty kauppa on ikään kuin vedonlyöntiä kohde-etuuden arvosta tai sen muutoksesta. Kaupankäynti optioilla on kasvanut voimakkaasti 1980-luvulta aina tähän päivään saakka ja vuonna 2018 pelkästään Yhdysvaltojen pörssin S&P500 optiota myytiin yli 1,4 miljoonaa kappaletta [16].

Johdannaiset ovat monimutkaisia sopimuksia ja sisältävät paljon ennalta arvaamattomia osia markkinoiden satunnaisen käyttäytymisen johdosta. Silti kaupankäynti niillä on todella vilkasta. Kuinka näitä siis tulisi hinnoitella, jotta markkinoiden arbitraasivapaus säilyisi eli niiden avulla ei voisi saavuttaa riskittömiä tuottoja? Työ pureutuu osakeoptioiden hinnoittelun peruspilariin eli Black-Scholes malliin ja sen läpikäyntiin matemaattisesta näkökulmasta.

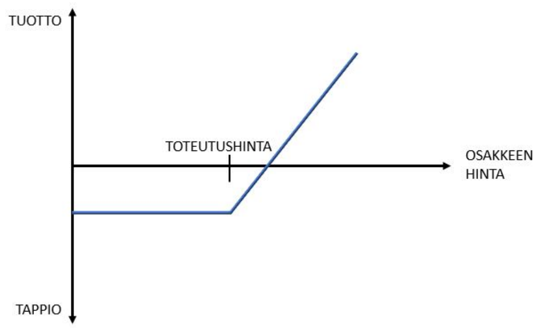
Työn on tarkoitus perehdyttää lukija optioihin ja niiden hinnoitteluun sekä todistaa Black-Scholes -malli. Aluksi perehdytään hinnoiteltavaan kohteeseen eli optioon. Tämän jälkeen käydään Black-Scholes -mallin todistuksen kannalta muutama oleellinen huomio ja oletus läpi sekä todistetaan itse malli. Lopuksi mallia havainnollistetaan esimerkin avulla ja esitellään vertailun vuoksi kaksi muutakin optioiden hinnoittelumallia. Työn keskeisimmät havainnot esitellään yhteenvedossa.

2 OPTIOT

Optio on kahden osapuolen välinen johdannaissopimus, joka antaa sen ostajalle oikeuden joko ostaa tai myydä kohde-etuutta ennalta määritellyllä hinnalla sen erääntymispäivänä. Johdannaissopimukset ovat rahoituksen instrumentteja, joiden arvo riippuu jonkin toisen hyödykkeen tai sopimuksen arvosta. Näitä hyödykkeitä, joista option arvo riippuu, kutsutaan kohde-etuuksiksi. Esimerkkejä optioiden kohde-etuuksista ovat osakkeet ja indeksit. [11] Kuten määrittelyssä käy ilmi, optiota ei ole pakko toteuttaa, mikäli sen toteuttaminen ei olisi kannattavaa. Toteutuspäätöksen voi kuitenkin tehdä vain option ostaja. [15] Jotta markkinat olisivat arbitraasivapaat, eli tuottoa ei voisi saavuttaa ilman riskiä, täytyy optioilla olla kuitenkin jokin hinta.

Optiot jaetaan osto-optioihin ja myyntioptioihin. Molemmat edellisistä voidaan jakaa edelleen pitkään ja lyhyeen positioon sen mukaan, toimitaanko kaupankäynnissä option myyjänä vai ostajana. Pitkän ja lyhyen position yleismääritelmänä voidaan pitää sitä, että pitkä positio vastaa ostamista ja lyhyt positio myymistä. [5]

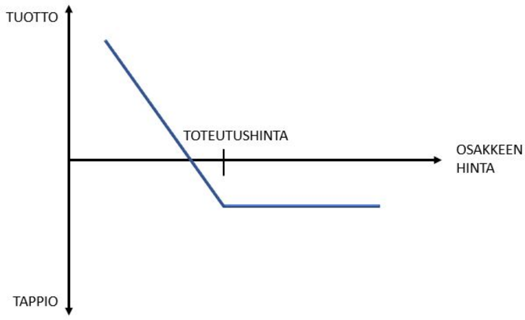
Osto-option tapauksessa pitkän position haltijalla on oikeus option erääntyessä ostaa kohde-etuutta ennalta sovitulla toteutushinnalla. Osto-option lyhyen position haltijalla on puolestaan velvollisuus myydä kohde-etuus toteutushinnalla, mikäli ostaja haluaa option toteuttaa. Tästä oikeudesta option ostajan on maksettava myyjälle korvaus, preemio. [5] Ostaja siis toivoo kohde-etuuden hinnan nousevan option voimassaoloaikana korkeammaksi kuin kaupankäyntihetkellä sovittu toteutushinta. Havainnollistetaan osto-option ostajan tuottokäyrää kuvassa 2.1.



Kuva 2.1. *Kohde-etuuden hinnan muutoksen vaikutus optiosta saatuihin tuottoihin osto-option ostajan näkökulmasta [1, mukaillen]*

Kuvasta huomataan, että jos kohde-etuuden hinta nousee korkeammaksi kuin ennalta sovittu tuottohinta ja optiosta maksettu preemio yhteensä, niin optio on tuottoisa.

Myyntioption pitkän position haltija voi option erääntyessä myydä kohde-etuutta ennaltasovitulla toteutushinnalla, ja myyntioption lyhyen position haltija on velvollinen myymään, mikäli ostaja niin haluaa. [5] Tällöin toiveet ovat siis vastakkaiset osto-optioon nähden. Ostaja toivoo nyt kohde-etuuden arvon alenemista, jotta voisi myydä sitä erääntymishetkellä korkeammalla hinnalla kuin sen markkinahinta on. Kuvassa 2.2 havainnollistetaan myyntioption ostajan tuottokäyrä.



Kuva 2.2. *Kohde-etuuden hinnan muutoksen vaikutus optiosta saatuihin tuottoihin myyntioption ostajan näkökulmasta [9, mukaillen]*

Nyt huomataan, että kohde-etuuden hinta ei saa nousta korkeammaksi kuin toteutushinnan ja preemion erotus, mikäli ostaja havittelee sijoituksestaan tuottoa.

Optioista maksettavan preemion suuruuteen vaikuttaa viisi tekijää: kohde-etuuden nykyinen hinta, kohde-etuuden ennalta sovittu toteutushinta, markkinoilla vallitseva riskitön korko, option voimassaoloaika sekä kohde-etuuden arvon volatiliteetti. [18] Tarkastellaan tarkemmin käsitteitä riskitön korko ja volatiliteetti.

2.1 Riskitön korko

Riskitön korko tarkoittaa korkoa, joihin kaikkia muita riskiä sisältäviä korkoja verrataan markkinoilla. Se ei välttämättä tarkoita, että sijoitus olisi täysin riskitön, vaan se kuvaa pienintä mahdollista riskiä vastaavaa tuottoa. Riskitön korko liitetään usein vahvasti valtion velkakirjojen korkoihin, sillä valtioiden, joiden luottoluokitukset ovat korkeat, joukkovelkakirjat ovat käytännössä riskittömiä. [10]

Riskittömän koron avulla rahan arvoa voidaan vertailla eri ajankohtina. Esimerkiksi summa D_0 ajan hetkellä 0 on arvoltaan

$$D_t = e^{rt} D_0 \tag{2.1}$$

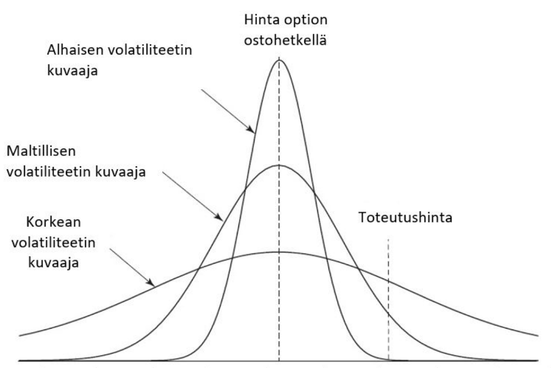
hetkellä t. Yhtälössä r kuvaa nyt juuri riskitöntä korkoa vuositasolla ja t aikaa vuosissa. Edellä esitetystä havainnosta seuraa, että tarjoukset, joissa tarjotaan 100 euroa nyt tai $100e^{rt}$ euroa hetkellä t ovat yhtä arvokkaita. Ensimmäisen tarjouksen tapauksessa tulisi sijoittaa rahat riskittömällä korolla r, jolloin sen arvo olisi $100e^{rt}$ euroa hetkellä t. Jälkimmäisessä tapauksessa voitaisiin lainata 100 euroa hetkellä 0 ja maksaa laina takaisin hetkellä t, kun saadaan tarjouksen summa. Molemmissa vaihtoehdoissa oltaisiin siis tienattu koronmukainen summa ajassa t.

Sama vertailu pätee myös toiseen suuntaan. Eli jos halutaan saada 100 euroa hetkellä t tulee sijoittaa

$e^{-rt}100$ euroa riskittömällä korolla hetkellä 0. Tätä tapausta kutsutaan diskonttaamiseksi ja sen ymmärtäminen on tässä työssä tärkeää. [7, s. 11]

2.2 Volatiliteetti

Volatiliteetti (σ) mittaa kohde-etuuden tuottojen heiluntaa, ja sitä käytetäänkin riskin määrittämiseksi. Volatiliteetti kertoo tuottojen keskihajonnan tietyllä, yleensä vuoden, aikajaksolla.[6] Sen mittaaminen perustuu esimerkiksi osakeoption tapauksessa osakkeen hinnan poikkeamaan sen keskiarvohinnasta tietyllä ajanjaksolla. Jos osakkeen hinta ei ole heilahdellut menneisyydessä vaan se on pysynyt tasaisena, hinnan volatiliteetti on pieni. Jos puolestaan volatiliteetti on suuri, osakkeen hinta on vaihdellut merkittävästi. [17] Vaikka teoriassa volatiliteetti voisikin olla 0, niin sitä se käytännössä ei koskaan ole. Tämän takia volatiliteetti onkin määritelty usein (myös Black-Scholes -mallissa) positiiviseksi luvuksi. Hinnoiteltaessa optiota, arvioidaan osakkeen hintaa erääntymishetkellä, ja hinnoitellaan se sen mukaan. Kuvaan 2.3 on havainnollistettu eri volatiliteetin omaavien optioiden arvon jakautumista erääntymishetkellä.



Kuva 2.3. *Volatiliteetin vaikutus option hintaan erääntymishetkellä [17, mukaillen]*

Kuvasta huomataan, että mitä suurempi volatiliteetti optiolla on, sitä laajemmalle alueelle sen hinta skaalautuu erääntymishetkellä. Huomioitaessa, ettei optiota ole pakko lunastaa, voidaan osto-optiota hinnoiteltaessa jättää hinnan laskun todennäköisyys huomioimatta. Kuvasta huomataan lisäksi, että erääntymishetkellä suuremman volatiliteetin optio antaa korkealle hinnalle korkeamman todennäköisyyden kuin pienemmän volatiliteetin optio. Voidaan siis päätellä, että volatiliteetin kasvu nostaa osto-option hintaa. [17]

3 BLACK-SCHOLES -MALLI

Optioiden hinnan määrittämisessä yleisesti tunnetuin on Black-Scholes malli. Mallin kehittivät tutkijat Fischer Black ja Myron Scholes. [2]. Malli kehitettiin europpalaisen option hinnan määrittämiseksi. Samana vuonna mallia kehitteli myös Robert Merton, joka yhdessä Scholesin kanssa saikin vuonna 1997 Nobelin taloustieteen palkinnon. Fischer Black kuoli kaksi vuotta ennen Nobel-palkinnon jakamista. [24]

3.1 Mallin alkuoletukset

Mallin todistuksen kannalta on syytä esittää muutama alkuoletus. Black-Scholes malli on kehitetty eurooppalaisille optioille. Eurooppalaiset optiot eroavat amerikkalaisista siten, että ne voidaan lunastaa vain option erääntymishetkellä. Maantieteellisillä paikoilla ei ole tekemistä optioiden nimityksissä. Malli olettaa lisäksi, että option voimassaoloaikana kohde-etuutena oleva osake ei maksa osinkoa ja sen volatiliteetti ja riskitön korko pysyvät vakioina. [22] Käydään seuraavaksi vielä läpi mallin todistuksen kannalta oleelliset termit lognormaalisuus ja Iton apulause.

3.1.1 Lognormaalisuus

Osakkeen hintaa kuvataan lognormaalilla kuvaajalla. Lognormaalisuus käytännössä tarkoittaa sitä, että satunnaismuuttujan logaritmi on normaalijakautunut. Vaikka osakkeista saatu tuotto noudattaakin usein normaalijakaumaa, niiden hinta käyttäytyy lognormaalisti. Tämä johtuu siitä, että suuret muutokset niiden hinnoissa ovat sitä epätodennäköisempiä mitä lähempänä hinta on nollaa.[20] Lognormaali kuvaaja ei voi saada negatiivisia lukuja ja toisaalta se ei ole myöskään ylhäältä rajoitettu. Loogisesti ajateltuna tämä siis myös sopii hyvin kuvaamaan osakkeen hintaa, sillä se ei voi saavuttaa negatiivisia arvoja ja toisaalta se voi kasvaa äärettömän suureksi.

Käydään todistus vielä matemaattisesti läpi hyödyntäen lähdettä [21]. Kuvataan osakkeen hintaa hetkellä t muuttujalla S_t ja satunnaista arvonmuutoksen kerrointa muuttujalla v_t. Tiedetään, että hinnan muutos on markkinoilla satunnaista eli muuttuja v_t saa jokaisella t:n arvolla satunnaisen arvon, joka ei riipu sen edellisistä arvoista. Hetkellä t osakkeen hinnalle voidaan kirjoittaa kaava

$$S_t = S_{t-1} \cdot v_t, \tag{3.1}$$

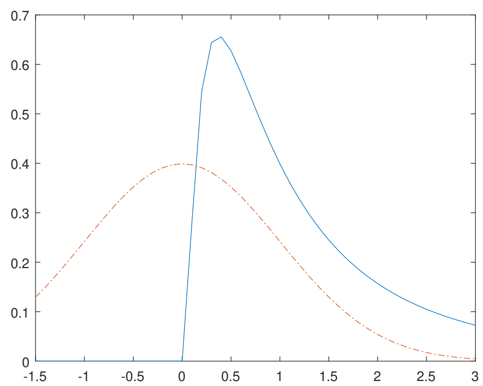
missä S_{t-1} on osakkeen hinta hetkellä $t-1$. Hetkellä t osakkeen arvo siis riippuu sen edellisestä arvosta ja satunnaisesta arvonmuutoksesta. Toisaalta, hetkellä $t-1$ osakkeen arvo riippuu sen arvosta hetkellä $t-2$ ja sen hetkisestä satunnaisesta muutoksesta, v_{t-1}. Tätä voidaan jatkaa aina hetkeen $t = 0$ saakka, jolloin osakkeen hinnalle saadaan kaava

$$S_t = S_0 \cdot v_0 \cdot v_1 \cdot \cdots \cdot v_{t-1} \cdot v_t. \tag{3.2}$$

Osakkeen hinta siis riippuu sen hinnasta hetkellä 0 ja sen jälkeisistä satunnaisista arvonmuutoksista. Koska osakkeen hinnat ovat positiivisia, niin myös arvonmuutoskertoimet ovat positiivisia. Tämän tiedon avulla voidaan seuraavaksi ottaa yhtälön (3.2) molemmilta puolilta logaritmit, jolloin se voidaan esittää muodossa

$$\ln S_t = \ln S_0 + \sum_{i=0}^{t} \ln v_i, \tag{3.3}$$

missä $\sum$ kuvaa siis summaa. Määritellään seuraavaksi uusi muuttuja $w_i = \ln v_i$. Toisin sanoen $v_i = e^{w_i}$. Tästä seuraa, että satunnaisten arvonmuutosten logaritmit jakautuvat normaalisti. Tämä on yhdenmukaista sen oletuksen kanssa, että osakkeiden tuotot ovat normaalijakautuneet. Tuottojen ollessa normaalijakautuneet havaitaan yhtälöiden (3.1) ja (3.2) avulla, että osakkeen hinta on siis lognormaalisti jakautunut. Havainnollistetaan vielä lognormaalijakauman ja normaalijakauman kuvaajien eroja piirtämällä molempien käyrät arvoilla $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$.



Kuva 3.1. *Lognormaalijakauma ja normaalijakauma[13, mukaillen]*

Kuvassa 3.1 on havainnollistettu lognormaalijakauman kuvaajaa sinisellä ja normaalijakauman kuvaajaa punaisella. Kuvasta huomataan, että kuvaajien odotusarvot poikkeavat toisistaan. Todistetaan seuraavaksi lognormaalin kuvaajan odotusarvo.

Määritelmä 3.1. Satunnaismuuttuja X on lognormaalisti jakautunut satunnaismuuttuja, mikäli sen tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}},$$

jonka otosavaruus on kaikki positiiviset reaaliluvut. [4, s. 306]

Lause 3.2. *Odotusarvo lognormaalilla tapahtumalla on* $e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$.

Todistus. Lasketaan lognormaalin tapahtuman odotusarvo hyödyntäen sen tiheysfunktiota.

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^\infty x f_X(x)dx \\
&= \int_0^\infty \frac{x}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Merkitään seuraavaksi $y = \ln x$ (toisin sanoen $x = e^y$), josta seuraa edelleen $dx = e^y dy$. Muuttujanvaihdon seurauksena myös integraalin rajat muuttuvat, sillä y:n otosavaruus on nyt koko reaalilukujen joukko. (vrt. [12, s. 497])

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}+y} dy \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2-2y\mu+\mu^2-y2\sigma^2-(\mu+\sigma^2)^2+(\mu+\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dy \\
&= e^{\frac{(\mu+\sigma^2)^2-\mu^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-(\mu+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} dy
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Huomataan, että integraalissa on normaalijakauman tiheysfunktio odotusarvolla $\mu + \sigma^2$ ja varianssilla σ^2. Nyt, kun integraali on yli koko tiheysfunktion määrittelyjoukon, saadaan sen arvoksi 1 [3], jolloin

$$
\begin{aligned}
E[X] &= e^{\frac{\sigma^4+2\sigma^2\mu+\mu^2-\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot 1 \\
&= e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

□

3.1.2 Iton apulause

Osakeoption hinta on osakkeen nykyisen hinnan ja ajan funktio. Iton prosessi olettaa muuttujan x noudattavan prosessia

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz, \tag{3.7}$$

missä a kuvaa odotettua muutosta ja b muutoksen hajontaa. Dt kuvaa ajan muutosta ja dz varianssin muutosta. [8, s. 286] Varianssin muutos voidaan kirjoittaa myös $dz = \epsilon\sqrt{dt}$, jossa ϵ on satunnaisluku normaalijakaumassa, jonka odotusarvo on 0 ja varianssi 1. Edellä esitettyä varianssin muutosta kutsutaan Wienerin prosessiksi. [8, s. 282]

Funktion G muutokselle voidaan Iton apulauseen avulla kirjoittaa yhtälö muuttujien x ja t suhteen [8, s. 291]

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz. \tag{3.8}$$

Yleisesti voidaan ajatella, että osakeoption hinnan muutos johtuu odotetusta tuotosta sekä sen hajonnasta. Näiden suuruus puolestaan muuttuu ajan mukana. Option hinnan muutosta voidaan kuvata kaavalla

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \tag{3.9}$$

missä S kuvaa option hintaa, μ odotettua muutosta ja σ muutoksen hajontaa. [8, s. 287] Tarkastellaan nyt saatua option hinnan muutosta Iton apulauseen avulla

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz. \tag{3.10}$$

Määritellään seuraavaksi, että muuttuja G kuvaa option hinnan luonnollista logaritmia. Lasketaan tämän jälkeen Iton apulauseessa olevat derivaatat auki

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

ja sijoitetaan nämä yhtälöön (3.10):

$$d(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \tag{3.11}$$

Yhtälön (3.11) odotettu muutos (vrt. Iton prosessi (3.7)) on nyt $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)$ ja varianssi σ^2 (huomaa, että dz:n varianssi on t, sillä ϵ on satunnaisluku normaalijakaumasta, jonka varianssi on 1). Koska osakkeen hinta on lognormaalinen voidaan sen logaritmin muutos ajassa t esittää nyt normaalijakauman avulla

$$\ln S_t - \ln S_0 \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right), \tag{3.12}$$

mistä voidaan edelleen ratkaista

$$\ln S_t \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right). \tag{3.13}$$

Yhtälöstä (3.13) nähdään nyt, että osakeoption hinnan logaritmin odotusarvo hetkellä t on $\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t$ ja varianssi $\sigma^2 t$. [8, s. 292–293]

3.2 Mallin todistus

Todistetaan Black-Scholes malli hyödyntäen lähdettä [8, s. 329–331]. Kuten jo mainittu, optiota ei ole aina pakko lunastaa. Optio kannattaa lunastaa vain silloin, kun se on tuottoisa eli siitä saadut tuotot ovat positiivisia. Merkitään osto-optiosta saatua tuoton odotusarvoa siis nyt

$$E[\max(V - K, 0)], \tag{3.14}$$

missä V on lognormaalisti jakautunut muuttuja ja sen logaritmin $\ln V$ keskihajonta on s. K on sovittu toteutushinta. Määritellään seuraavaksi, että $g(V)$ on muuttujan V tiheysfunktio ja kirjoitetaan yhtälö integraalimuotoon

$$E[\max(V - K, 0)] = \int_K^\infty (V - K) g(V) dV. \tag{3.15}$$

Muuttujan V logaritmi on normaalisti jakautunut keskihajonnalla s. Lognormaalin jakauman ominaisuuksien avulla voidaan sen odotusarvolle kirjoittaa yhtälö

$$m = \ln\left[E(V)\right] - \frac{s^2}{2}, \tag{3.16}$$

missä $m = E[\ln V]$. Määritellään lisäksi jatkoa helpottamaan uusi muuttuja Q

$$Q = \frac{\ln V - m}{s}. \tag{3.17}$$

Muuttuja Q on normaalijakautunut odotusarvolla 0 ja hajonnalla 1. Täten sen tiheysfunktio $h(Q)$ voidaan kirjoittaa

$$h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Q^2}{2}}. \tag{3.18}$$

Muokataan seuraavaksi yhtälön (3.15) oikean puolen integraali kulkemaan yli muuttujan Q. Lasketaan muokkausta varten tarvittavat muuttujat yhtälöstä (3.17). Muuttujan V arvoksi saadaan nyt

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\ln V - m}{s} \\ Qs &= \ln V - m \\ \ln V &= Qs + m \\ V &= e^{Qs+m} \end{aligned} \tag{3.19}$$

ja täten integraalin alarajaksi

$$\begin{aligned} V &> K \\ e^{Qs+m} &> K \\ Qs + m &> \ln K \\ Q &> \frac{\ln K - m}{s}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Yhtälö (3.15) saadaan nyt muotoon:

$$\begin{aligned} E[\max(V - K, 0)] &= \int_{\frac{\ln K - m}{s}}^{\infty} (e^{Qs+m} - K) h(Q) dQ \\ &= \int_{\frac{\ln K - m}{s}}^{\infty} e^{Qs+m} h(Q) d(Q) - K \int_{\frac{\ln K - m}{s}}^{\infty} h(Q) dQ. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Sijoitetaan vielä yhtälön (3.21) ensimmäiseen integraaliin yhtälössä (3.18) ratkaistu tiheysfunktio

$$\begin{aligned} E[\max(V-K,0)] &= \int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} e^{Qs+m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Q^2}{2}}d(Q) - K\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} h(Q)dQ \\ &= \int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Q^2+2Qs+2m}{2}}dQ - K\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} h(Q)dQ \\ &= \int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} \frac{e^{m+\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(Q-s)^2}{2}}dQ - K\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} h(Q)dQ \\ &= e^{m+\frac{s^2}{2}}\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} h(Q-s)dQ - K\int_{\frac{\ln K-m}{s}}^{\infty} h(Q)dQ \end{aligned} \tag{3.22}$$

Määritellään seuraavaksi, että $N(x)$ on todennäköisyys odotusarvolla 0 ja hajonnalla 1 sille, että funktion arvo on pienempää kuin x. Tätä määritystä hyödyntäen yhtälön (3.22) ensimmäinen integraali saadaan nyt muotoon

$$1 - N\left(\frac{\ln K - m}{s} - s\right) = N\left(-\frac{\ln K - m}{s} + s\right). \tag{3.23}$$

Sijoitetaan tähän vielä yhtälössä (3.16) laskettu muuttuja m, jolloin se saadaan lopulliseen muotoonsa

$$N\left(\frac{\ln\frac{E(V)}{K} + \frac{s^2}{2}}{s}\right) = N(d_1). \tag{3.24}$$

Yhtälön (3.22) jälkimmäinen integraali voidaan laskea samaan tapaan

$$N\left(-\frac{\ln K - m}{s}\right) = N\left(\frac{\ln\frac{E(V)}{K} - \frac{s^2}{2}}{s}\right) = N(d_2). \tag{3.25}$$

Sijoitetaan saadut tulokset nyt yhtälöön (3.22), jolloin se voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} E[\max(V-K,0)] &= e^{m+\frac{s^2}{2}}N(d_1) - KN(d_2) \\ &= E(V)N(d_1) - KN(d_2). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Osto-option hinta määritellään siten, että option lunastushetkellä saatu tuotto diskontataan option ostohetkeen. Yllä laskettiin option hinnalle kaava lunastushetkellä. Option hinnan saamiseksi kaava pitää siis vielä diskontata kaupantekohetkeen. Option, jonka hajonta on σ, hinnalle saadaan siis kaava

$$c = e^{-rt}\hat{E}[\max(S_t - K, 0)], \tag{3.27}$$

missä c kuvaa option hintaa, $\hat{E}$ riskineutraalia odotusarvoa, r riskitöntä korkokantaa, t option erääntymishetkeä ja S_t option hintaa hetkellä t. Yllä olevan todistuksen avulla tämä voidaan kirjoittaa

$$c = e^{-rt}[E(S_t)N(d_1) - KN(d_2)]. \tag{3.28}$$

Osakeoption hinnan odotusarvo voidaan Iton apulauseen avulla johdetun yhtälön (3.13) ja sen lognormaalisuuden avulla ilmaista

$$E(S_t) = S_0 e^{rt}, \tag{3.29}$$

minkä ansiosta yhtälö (3.28) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} c &= e^{-rt}[S_0 e^{rt} N(d_1) - KN(d_2)] \\ &= S_0 N(d_1) - e^{-rt} KN(d_2), \end{aligned} \tag{3.30}$$

missä S_0 on option hinta lunastushetkellä ja

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{\hat{E}(S_t)}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2} t}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) t}{\sigma\sqrt{t}} \\ d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{\hat{E}(S_t)}{K}\right) - \frac{\sigma^2}{2} t}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t}{\sigma\sqrt{t}}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Yhtälöä (3.30) kutsutaan Black-Scholes yhtälöksi.

3.3 Laskuesimerkki mallin käytöstä

Lasketaan Black-Scholes mallin avulla osto-optiolle hinta. Otetaan esimerkiksi yritys, jonka osakkeen hinta on 30,00 euroa. Osakkeen volatiliteetti viimeisen vuoden aikana on ollut 10 prosenttia. Yritys on suomalainen ja Suomen 5 vuoden joukkovelkakirjalainan tuottoprosentti on 2 prosenttia. Tätä voidaan pitää riskittömänä korkokantana. Myynnissä olevan option maturiteetti eli lunastuspäivä on puoli vuotta ostohetkestä. Lasketaan sellaisen option hinta, jossa osakkeen toteushinta on 27,50 euroa.

Käytetään hinnoittelussa Black-Scholes kaavaa (3.30).

$$c = S_0 N(d_1) - e^{-rt} KN(d_2)$$

Aloitetaan hinnoittelun laskeminen laskemalla yhtälön normaalijakaumien arvot. Kaavasta (3.31) nähdään muuttujien d_1 ja d_2 sisältämät termit. Sijoitetaan yhtälöihin esimerkissä olevat arvot

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(\frac{30}{27{,}50}\right) + \left(0{,}02 + \frac{0{,}1^2}{2}\right) 0{,}5}{0{,}1\sqrt{0{,}5}} = 1{,}407$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(\frac{30}{27{,}50}\right) + \left(0{,}02 - \frac{0{,}1^2}{2}\right) 0{,}5}{0{,}1\sqrt{0{,}5}} = 1{,}337$$

Normaalijakauman taulukosta tai laskemalla ohjelmalla saadaan yhtälön normaalijakautuneille muuttujille arvot $N(d_1) = 0{,}920$ ja $N(d_2) = 0{,}909$. Lopullinen osto-option hinta saadaan nyt sijoittamalla arvot Black-Scholes yhtälöön

$$c = S_0 N(d_1) - e^{-rt} KN(d_2) = 30 * 0{,}920 - e^{-0{,}02*0{,}5} * 27{,}50 * 0{,}909 = 2{,}85$$

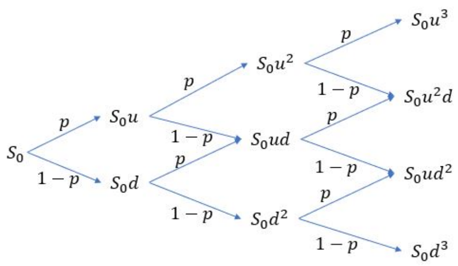
Osto-option hinnaksi saatiin siis 2 euroa ja 85 senttiä.

4 MUITA OPTIOIDEN HINNOITTELUMALLEJA

Esitellään kaksi vaihtoehtoista optioiden hinnoittelumallia ja niiden keskeisimpiä eroavaisuuksia Black-Scholes -malliin.

4.1 Binomimalli

Binomimalli on vuonna 1979 kehitetty optioiden hinnoittelumalli. Mallin ovat kehittäneet John Cox, Stephen Ross ja Mark Rubinstein. Malli on huomattavasti yksinkertaisempi ymmärtää kuin Black-Scholes -malli. Perusideana on, että kohde-etuutena olevan osakkeen hinnan muutoksella on aina kaksi vaihtoehtoa, joko se nousee tai laskee. Lisäksi molemmilla tapauksilla on jokin todennäköisyys. Tämä nousu tai lasku tapahtuu aina tietyin väliajoin ja yleensä useasti option voimassaolon aikana. [23, s. 141–142] Otetaan esimerkiksi tilanne, jossa tiedetään, että osakkeen hinta nousee joka kuukausi 4 prosenttia tai laskee 2 prosenttia. Tämä tieto on verrattavissa Black-Scholes mallin volatiliteettiin. Havainnollistetaan binomimallin perusideaa vielä kuvalla.



Kuva 4.1. *Osakkeen hinnan kehityksen vaihtoehdot kolmen askeleen binomimallin mukaan [23, mukaillen]*

Kuvan 4.1 termeistä S_0 kuvaa osakkeen hintaa alkuhetkellä, u (up) ja d (down) ovat puolestaan kertoimia, jotka kuvaavat joko hinnan nousua tai laskua ja p esittää tapahtuman todennäköisyyttä. Kuvasta 4.1 huomataan, että osakkeen hinnalla on sen voimassaoloaikana useita mahdollisia polkuja. Polkujen lukumäärää kuitenkin rajoittaa kuvan binomimallin oletus siitä,että kasvun ja nousun kertoimet (u ja d) pysyvät koko option voimassaoloajan samana [23, s. 145]. Tästä syystä esimerkiksi toisen polun kohdalla $S_0ud = S_0du$. Arbitraasivapaat markkinat vaikuttavat binomimallissa todennäköisyyteen p. Koska markkinoilla riskittömiä tuottoja ei voi olla, täytyy todennäköisyyden

p arvo olla

$$p = \frac{e^{rL} - d}{u - d}, \tag{4.1}$$

missä r kuvaa riskitöntä korkokantaa ja L on se aika, kuinka usein osakkeen hinta muuttuu vuosissa (esim. kahden kuukauden välein = 1/6). [23, s. 144] Lopulliseksi binomikaavaksi osto-option hinnalle muodostuu täten

$$C_0 = e^{-rL} \sum_{k=0}^{T} \binom{T}{k} (S_0 u^k d^{T-k} - K)^+ p^k (1-p)^{T-k}, \tag{4.2}$$

missä T on hinnan muutosten lukumäärä, k on positiivisten hinnanmuutosten eli u -kirjainten lukumäärä kuvassa 4.1 ja K on ennalta sovittu toteutushinta. Lisäksi on huomioitava, että summan sisällä oleva ensimmäinen lauseke on potenssissa + eli jos sen sisältämä erotus menee negatiiviseksi, sen arvo merkitään nollaksi. [23, s. 145–146]

Hinnanmuutoksen vaihtelevuus ilmoitetaan yleensä volatiliteetin avulla. Binomimallissa se on kuitenkin ilmoitettu ennakoituna hinnan nousuna tai laskuna. Tähän ongelmaan kaavan kehittäjät Cox, Ross ja Rubinstein käyttivät alkuperäisessä julkaisussaan kaavoja

$$u = e^{\sigma\sqrt{L}} \quad , \quad d = \frac{1}{u} \quad , \quad p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r}{\sigma}\sqrt{L}\right) \tag{4.3}$$

joissa σ on vuosittainen volatiliteetti. Binomimallia näillä muutoksilla kutsutaan usein myös keksijöidensä mukaan CRR -binomimalliksi. [23, s. 153] Näiden muutosten avulla voidaan seuraavaksi verrata Black-Scholes -mallin ja CRR -binomimallin antamia tuloksia osto-option hinnalle. Laskettaessa osto-option hinta esimerkkiluvun 3.3 mukaisilla arvoilla, hinnaksi saadaan Black-Scholes -mallilla 2,85 euroa ja CRR-binomimallilla, jossa hinnanmuutoksia tapahtuu kuusi kertaa, 2,95 euroa. Lasketussa esimerkissä osto-option hinnat eroavat 10 senttiä toisistaan, joka on melko paljon. Binomimalli kuitenkin mahdollistaa tarkemman laskutuloksen mikäli nousu- ja laskukertoimia tarkasteltaisiin monen eri vaihtoehdon tapauksissa ja hinnanmuutoksia lisättäisiin useampaan kertaan kuin kuusi. Tällöin laskusta tosin tulisi huomattavasti työläämpi.

4.2 Monte Carlo -simulaatio

Monte Carlo -simulaatio perustuu nimensä mukaisesti simulaatioon. Osakkeiden hintojen muutokset sisältävät aina satunnaisuutta ja ovat täten mahdottomia ennustaa tarkasti. Monte Carlo -simulaation idea perustuu toistojen määrään. Kun koetta toistetaan tarpeeksi monta kertaa, alkaa kokeen tulosten keskiarvo lähestyä jotakin tiettyä lukua. Monte Carlo -simulaation avulla lasketaan kohde-etuuden arvoa option erääntymishetkellä kaavalla

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon}, \tag{4.4}$$

missä S_t on kohde-etuuden hinta erääntymishetkellä t, S_0 on kohde-etuuden hinta alussa, μ kuvaa odotettua tuottoa, σ volatiliteettiä ja ϵ on satunnaisluku normaalijakaumasta, jonka odotusarvo on 0 ja hajonta 1. [14, s. 57–58] Kaava on johdettu kaavasta (3.11). Osto-option hinta saadaan, kun saadusta osakkeen hinnasta vähennetään ennalta sovittu toteutushinta ja diskontataan erotus ostohetkeen. Tässäkin tapauksessa luku voi olla alimmillaan 0. Simulaation avulla saavutettu lopullinen osto-option hinta saadaan toistamalla yllä esitetyt vaiheet mahdollisimman monta kertaa ja ottamalla lopuksi kaikista saaduista tuloksista keskiarvo. Osto-option hinnan kaavaksi muodostuu

$$C_0 = e^{-rt}\hat{E}_0[\max(S_t - K, 0)], \tag{4.5}$$

missä C_0 on osto-option hinta, r kuvaa riskitöntä korkokantaa, t on option voimassaoloaika, $\hat{E}_0$ on riskitön odotusarvo, S_t on yllä laskettu osakkeen hinta toteutushetkellä ja K on sovittu toteutushinta. Koska simulaatio antaa vastaukseksi odotusarvon jostain suuremmasta otoksesta, ilmoitetaan sen yhteydessä tavallisesti myös otoksen luottamusväli. [14, s. 58–59] Monte Carlo -simulaation 95 prosentin luottamusväli suurilla simulaatiomäärillä on

$$C_0 = \pm\frac{1,96s}{\sqrt{n}}, \tag{4.6}$$

missä s on yllä laskettujen osto-optioiden hintojen keskihajonta ja n on suoritettujen simulaatioiden määrä [19]. Monte Carlo -simulaatio ei anna siis yhtä vastausta, kuten kaksi edellistä mallia, vaan se antaa luottamusvälin, jolle option hinta kuuluu.

Verrataan seuraavaksi Monte Carlo -simulaation antamaa tulosta Black-Scholes -mallin tulokseen. Käytetään samoja lukuja kuin työn esimerkkiluvussa 3.3. Simuloidaan seuraavaksi yhtälö (4.5) 500 kertaa satunnaisluvulla ϵ, ja lasketaan niiden avulla osto-option hinnan odotusarvo ja hinnan luottamusväli. Tulokseksi Excel -ohjelmalla osto-option hinnaksi tulee 2,83 euroa ja luottamusväliksi ±0,18 euroa. Huomataan kuitenkin, että aina kun yhtälöt Excelissä ajetaan uudestaan, vastaukseksi tulee eri lukuarvot. Tämä johtuu juuri yhtälössä esiintyvästä satunnaisluvusta. Yhteenvetona Black-Scholes -malli on siis yleistetty ratkaisu ja Monte Carlo -simulaatio puolestaan laskee mahdollisimman monta ratkaisua ja niiden keskiarvon.

5 YHTEENVETO

Black-Scholes -malli on 1973 julkaistu, eurooppalaisten optioiden hinnoittelumalli. Sen avulla pyritään ennustamaan osakkeen hinnanmuutosta ja sitä kautta hinnoittelemaan optio. Mallissa hinnoittelu lähtee liikkeelle option määritelmästä eli sen lunastuksen vapaaehtoisuudesta. Malli olettaa lisäksi osake-optiosta saatavien tuottojen olevan normaalijakautuneita ja sen hinnan oletetaan käyttäytyvän lognormaalisti. Lognormaalisuuden määritelmän mukaan lognormaalin tapahtuman logartimi on normaalijakautunut eli tässä tapauksessa option hinnan logaritmi käyttäytyy normaalijakautuneesti. Tämän tiedon nojalla, Iton apulauseen avulla johdettua, hinnan logaritmin muutosta voidaan kuvata normaalijakauman avulla. Kun riskitön korkokantakin oletetaan vakioksi koko option voimassaolon ajan, voidaan laskettu tuotto lopulta diskontata kaupantekohetkeen. Diskontattua hintaa kutsutaan option hinnaksi tai preemioksi.

Mallin todistus on saatu käytännöllisempään muotoon tekemällä oletuksia osakkeista ja markkinoista. Malli ei ota huomioon volatiliteetin ja riskittömän korkokannan muutosta vaan olettaa niiden pysyvän vakioina. Todellisuudessa näin ei kuitenkaan ole. Lisäksi osakkeen hinnan oletetaan noudattavan niin sanottua Wienerin prosessia. Prosessin mukaan jokaisella tarkasteluhetkellä sen hinnan muutos on täysin satunnainen ja samansuuruinen hinnan nousu ja lasku ovat yhtä todennäköisiä. Tämäkään oletus ei toteudu aina markkinoilla. Esimerkiksi konkurssivaroituksen jälkeen hinnan lasku on hetkellisesti todennäköisempää kuin nousu. Kaiken kaikkiaan mallia käytetään vielä tänäkin päivänä optioiden hinnoittelussa ja se toimii pohjana myös monille muille optioiden hinnoittelumalleille.

LÄHTEET

[1] A. Beaty. *What You Should Know About Option Trading Levels*. The Option Prophet. 2015. URL: https://theoptionprophet.com/blog/what-you-should-know-about-option-trading-levels.

[2] F. Black ja M. Scholes. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy, 1973.

[3] J. Brooks-Bartlett. *Probability concepts explained: probability distributions (introduction part 3)*. Towards Data Science. 2018. URL: https://towardsdatascience.com/probability-concepts-explained-probability-distributions-introduction-part-3-4a5db81858dc.

[4] E. Crow ja K. Shimizu. *Lognormal Distributions: Theory and Applications*. Dekker, 1988.

[5] L. Downey. *Essential Options Trading Guide*. Investopedia. 2020. URL: https://www.investopedia.com/options-basics-tutorial-4583012.

[6] H. Heikinheimo. *Analyysissa volatiliteetti: Miksi kauppasota sai volatiliteetin raketoimaan?* sijoittaja.fi. 2019. URL: https://www.sijoittaja.fi/156673/volatiliteetti-vix-kauppasota/.

[7] D. Higham. *An Introduction to Financial Option Valuation: Mathematics, Stochastics and Computation*. Cambridge University Press, 2004.

[8] J. Hull. *Options, Futures, And Other Derivatives, Eighth Edition*. Pearson Education Limited, 2012.

[9] M. Kerkhoff. *Introduction to Calls and Puts (Part 3)*. Sigma Point Capital. 2017. URL: https://sigmapointcapital.com/market-analysis/introduction-to-calls-and-puts-part-3/.

[10] J. Kovero. *Arvonmäärityksessä käytettävä riskitön korko negatiivisten korkojen maailmassa*. BDO Suomi. 2019. URL: https://www.bdo.fi/fi-fi/nakemyksia/blogit/jan-kovero/arvonmaarityksessa-kaytettava-riskiton-korko-negatiivisten-korkojen-maailmassa.

[11] S. Laakso. *Mikä on optio ja miten optiot toimivat?* Lynx. 2018. URL: https://www.lynxbroker.fi/sijoitusblogi/artikkelit/mika-on-optio-ja-miten-optiot-toimivat/.

[12] P. Lax. Change of Variables in Multiple Integrals. *The American Mathematical Monthly* 106.6 (1999), 497–501.

[13] B. Lee. *What is the difference between a Normal Distribution and a Lognormal Distribution?* inStream. 2015. URL: https://support.instreamwealth.com/hc/en-us/articles/202386009-What-is-the-difference-between-a-Normal-Distribution-and-a-Lognormal-Distribution-.

[14] C. Maya. *Monte Carlo Option Pricing*. Lecturas de Economía, s.53-70, 2004.

[15] A. Milton. *Call and Put Options Definitions and Examples*. the balance. 2020. URL: https://www.thebalance.com/call-and-put-options-definitions-and-examples-1031124.

[16] M. Moran. *Growth In Use Of SP 500 Options At Cboe Over 35 Years*. Seeking Alpha. 2018. URL: https://seekingalpha.com/article/4187953-growth-in-use-of-s-and-p-500-options-cboe-over-35-years.

[17] S. Natenberg. *Option Volatility and Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques, 2nd Edition*. McGraw-Hill, 2014.

[18] R. Navin. *The mathematics of derivatives tools for designing numerical algorithms*. Wiley, 2006.

[19] U. Olsson. Confidence Intervals for the Mean of a Log-Normal Distribution. *Journal of Statistics Education* 13.1 (2005).

[20] H. Ozyasar. *Why Are Stock Prices Considered Log-normal?* ZACKS. URL: https://finance.zacks.com/stock-prices-considered-lognormal-10606.html.

[21] S. Peterson. *Investment Theory and Risk Management*. Wiley, 2012.

[22] P. Radzikowski. *Non-parametric methods of option pricing*. Bertelsmann. 2000. URL: http://www.finance.martinsewell.com/option-pricing/Radz.pdf.

[23] S. Roman. *Introduction to the Mathematics of Finance, Arbitage and Option Pricing, 2nd edition*. Springer New York, 2012.

[24] *The Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel*. Kungliga Vetenskapsakademien. 1997. URL: https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1997/press-release/.