Katri Thurén

SANOISTA YMMÄRRYKSEEN

Kielentäminen matemaattisia oppimisvaikeuksia omaaville oppilaille

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Huhtikuu 2020

Tiivistelmä

Katri Thurén: Sanoista ymmärrykseen: Kielentäminen matemaattisia oppimisvaikeuksia omaaville oppilaille
Pro gradu -tutkielma, 62 sivua
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2020

Tutkimukseni tarkoituksena oli tarkastella matematiikan kielentämistä matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavien nuorten opetuksessa sekä kehittää heidän osaamistasoon sopivia kielentämistehtäviä. Tutkimuksessa selvitettiin myös, mitä mieltä oppilaat olivat matematiikan kielentämisestä, niin kirjallisesta kuin suullisestakin. Lopullisena tarkoituksena oli hyötyä tulevana matematiikan aineenopettajana tutkimuksesta ja selvittää millä tavoin matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavat oppilaat hyötyvät parhaiten matemaattisesta kielentämisestä, myös yleisopetuksessa.

Tutkimukseni on kvalitatiivinen ja empiirinen tapaustutkimus. Itse osallistuin tutkimukseen havainnoimalla tutkimuskohteita, suunnittelemalla tuntien sisällöt sekä kehittämällä sopivia kielentämistehtäviä. Tutkimuskohteenani oli neljä yläkouluikäistä oppilasta länsisuomalaisesta koulusta. Erityisopettaja valikoi heidät tutkimukseen ja jokaisella heistä oli jonkin tasoisia matemaattisia oppimisvaikeuksia. Tutkimusperiodin aikana oppilailla oli kuusi oppituntia, joiden aiheina oli yhtälö, sen ratkaiseminen ja yhtälöparit. Jokaisella tunnilla pyrittiin käymään paljon matemaattista keskustelua sekä tehtiin erilaisia kielentämistehtäviä. Kaikki oppitunnit kuvattiin ja kuvamateriaalin perusteella tutkimuksen kannalta tärkeät keskustelut litteroitiin. Tämän lisäksi jokainen oppilas osallistui alku- ja loppuhaastatteluun, jotta heidän mielipiteitä pystyttiin kunnolla kartoittamaan. Aineistoon kuului myös oppilaiden tunneilla käyttämät vihot sekä erityisopettajan kanssa tuntien jälkeen käydyt keskustelut.

Tutkimustuloksista selvisi, että aiheen ollessa oppilaiden mielestä ymmärrettävä, kielentäminen oli miellyttävämpää. Jatkuva kielentäminen ja matemaattinen keskustelu oli kuitenkin useiden mielestä raskasta. Suurin osa oppilaista koki hyötyneensä edes jollakin tavalla kielentämisestä sekä koki kirjallisen kielentämisen luonnolli-

sempana kuin suullisen. Kielentämistehtäviä tehdessä oppilaissa oli havaittavissa jonkin tasoista oppimista, sillä tutkimusperiodin jälkeen tehtävät onnistuivat ilman sen suurempaa ohjeistusta. Keskusteluista nousi esille myös kuinka tärkeää opettajan on kiinnittää huomiota aikaan. Suullisesti kielentäessä oppilaalle kannattaa antaa kunnolla aikaa jäsentää asia itselleen, ennen kuin pyytää heitä aloittamaan ääneen selittämisen. Opettajan on myös helppo puuttua virheellisiin ajatusmalleihin suullisessa kielentämisessä.

Tutkimustulokset eivät sellaisenaan ole yleistettävissä, koska tutkimus on laadullinen tapaustutkimus. Tulokset voivat kuitenkin toimia ohjaavina tuloksina jatkotutkimuksille. Myös matematiikan aineenopettajat ja erityisopettajat voivat saada tutkimuksen tuloksista uusia ideoita ja näkökulmia omaan opetukseensa. Tutkimukseni osoitti, että matematiikan kielentämisellä opettaja voi auttaa matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavia oppilaita ymmärtämään matematiikka paremmin. Kuitenkin oppilaiden näkökulmasta kielentäminen pitää olla harkittua sekä sitä tulee käyttää silloin kun opettaja kokee siitä oikeasti olevan hyötyä. Kaikkiin aiheisiin kielentäminen ei sovi, kun oppilaana on matemaattisia oppimisvaikeuksia omaava nuori.

Avainsanat: matematiikka, matemaattinen ajattelu, matematiikan kielentäminen, osa-aikainen erityisopetus, matemaattiset oppimisvaikeudet

Sisältö

1 Johdanto **6**

2 Teoreettinen viitekehys **8**

2.1 Matemaattinen osaaminen 8

2.2 Kielentäminen matematiikassa 10

2.2.1 Kieli ja matematiikka 11

2.2.2 Matematiikan kielentäminen 13

2.3 Oppilaan matematiikkakuva ja asenteet 16

2.4 Matemaattiset oppimisvaikeudet 17

2.4.1 Dyskalkulia 19

2.4.2 Heikko osaaminen matemaattisissa taidoissa 19

2.5 Erityisopetus Suomessa 22

2.6 Tutkimuksia matematiikan kielentämisestä matemaattisia oppimisvaikeuksia omaaville 23

2.7 Matematiikka tutkimuksen takana 24

2.7.1 Johdatus lineaarisiin yhtälöryhmiin 24

2.7.2 Kahden ja kolmen muuttujan yhtälöryhmät ja graafinen ratkaisu 25

2.7.3 Lineaariyhtälön matriisiesitys 29

2.7.4 Lineaariyhtälöiden ratkaiseminen 32

3 Tutkimustehtävä ja tutkimusongelmat **38**

4 Tutkimuksen lähtökohdat ja toteutus **39**

4.1 Tutkimuksen toteutus ja aineiston keruu 39

4.2 Aineiston analysointi 41

5 Kielentäminen matemaattisia oppimisvaikeuksia omaaville oppilaille **42**

5.1 Minkälaista oppimista havaittiin kielentämistehtävien avulla? 42

5.2 Mitä mieltä matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavat oppilaat olivat kielentämisestä? 44

5.3 Millä tavoilla kielentämistä pystytään hyödyntämään matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavien oppilaiden kanssa parhaiten? 46

6 Pohdintaa **49**

Lähteet **51**

Liitteet 57

A Tutkimuslupa rehtorille 57

B Tutkimuslupa oppilaiden huoltajille 58

C Alkuhaastattelu 59

D Käsitteen määrittely ja sen käyttäminen 60

E Yhtälöpari 61

F Mikä ratkaisussa on väärin? 62

1 Johdanto

Matemaattiset oppimisvaikeudet ovat kiinnostaneet minua yliopistourani alusta saakka. Matemaattiset oppimisvaikeudet käsitteenä toimii yläkäsitteenä kaiken tasoisille matemaattisille oppimisvaikeuksille. Vaikeusasteeltaan lievempiä matemaattisia oppimisvaikeuksia kuvataan käsitteellä heikko osaaminen matemaattisissa taidoissa ja sitä voi aiheuttaa esimerkiksi heikko motivaatio. Minulle itselleni matematiikan opiskelu peruskoulun ja lukion aikana oli helppoa. Tulevana opettajana minua kuitenkin kiinnosti, miten matematiikasta ja sen opiskelusta saataisiin mielekkäämpää myös matemaattisia oppimisvaikeuksia omaaville oppilaille. Suurimmalla osalla oppilaista on jossain vaiheessa vaikeuksia matematiikan kanssa ja halusinkin tutkia, voisiko matematiikan kielentämisen avulla matematiikasta tehdä ymmärrettävämpää ja sitä kautta mukavampaa.

Tutkimuksessa matematiikan tuntien sisältö muutettiin täysin. Tyypillisesti matematiikan tunnit ovat hyvinkin opettajajohtoisia ja tähän myös oppilaat ovat tottuneet. Opettaja selittää tunnin alussa aiheen, jonka jälkeen oppilaat tekevät hiljaisuudessa kirjan tehtäviä ja kysyvät, jos on kysyttävää. Joutsenlahden (2003) mukaan, jos opettaja aktiivisesti kannustaa oppilaita käyttämään epäformaalia kieltä eli kannustaa heitä kertomaan matemaattisista ajatuksistaan omin sanoin, pääsee hän tällöin kaikista lähimmäksi oppilaan ajatuksen kulkua. Ottamalla kielentämisen osaksi matematiikan oppitunteja opettaja voi saada siis arvokasta tietoa oppilaan oppimisesta, jonka lisäksi oppilas itse pystyy jäsentämään omaa ajatteluaan. Matemaattisten ratkaisuiden perustelu niin suullisesti kuin kirjallisesti on sellainen oppilaan kyky, joka on nostettu esille myös perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa. (Opetushallitus 2014)

Tiesin tutkimuksen aihetta päättäessäni, että halusin jollain tavalla tutkia oppilaita, joilla on jonkin tasoisia matemaattisia oppimisvaikeuksia. Matematiikan kielentämiseen päädyin lopulta luettuani Joutsenlahden ja Tossavaisen artikkelin "Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa" (2018). Ajatus matematiikan tekemisestä hyvin erillä tavalla kuin on totuttu, innosti minua.

Tutkimus suoritettiin syksynä 2019 länsisuomalaisessa yläkoulussa. Tutkimukseen osallistui neljä matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavaa oppilasta. Tutkimusjaksoon kuului kuusi 75 minuutin pituista oppituntia ja niiden aiheina olivat yhtälö, sen ratkaiseminen sekä yhtälöparit. Tunnit suunniteltiin yhteistyössä koulun erityisopettajan kanssa, joka toimi tunneilla opettajana. Jokaisella tunnilla tehtiin kielentämistehtäviä ja koko tunnin aikana pyrittiin käymään paljon matemaattista keskustelua.

Itse toimin tuntien aikana ulkopuolisena havainnoijana. Havainnoinnin lisäksi oppitunnit kuvattiin sekä jokainen oppilas osallistui alku- ja loppuhaastatteluihin. Tutkimuksesta saatuja tutkimustuloksia on pyritty havainnollistamaan eri tapahtumien ja keskustelujen avulla. Tutkielmassa käsitellään ensin tutkimukseen liittyvää teoriaa ja tuodaan esille matemaattisia oppimisvaikeuksia, jotta lukija saa käsityksen millaisia taustoja oppilailla voi olla. Kuitenkaan tutkimukseen osallistuneiden oppilaiden matemaattisia oppimisvaikeuksia ei tutkielmassa avata. Lopuksi tutkimuksesta saatuja tutkimustuloksia peilataan teoriaan.

2 Teoreettinen viitekehys

2.1 Matemaattinen osaaminen

Käsitettä matematiikan osaaminen (*mathematical profiency*) käytetään kun puhutaan matematiikan monipuolisesta hallinnasta. Kilpatrick, Swafford ja Findell (2001) katsovat jokaisen yksilön matemaattisen osaamisen koostuvan viidestä matemaattisen osaamisen pääpiirteestä:

1. **Käsitteellinen ymmärtäminen** (*conceptual understandiing*): matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja niiden välisten relaatioiden ymmärtäminen.

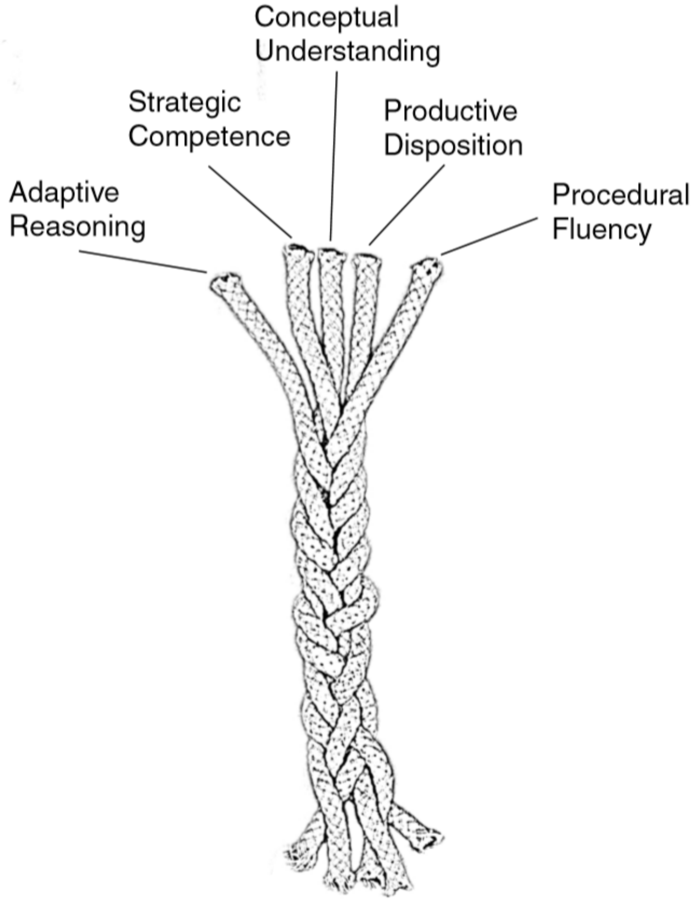
2. **Proseduraalinen sujuvuus** (*procedural fluency*): kyky käyttää proseduureja mahdollisimman joustavasti, huolellisesti sekä tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti.

3. **Strateginen kompetenssi** (*strategic competence*): taito muotoilla, esittää sekä ratkaista erinäisiä matemaattisia ongelmia.

4. **Mukautuva päättely** (*adaptive reasoning*): olla kykenevä ajattelemaan loogisesti, reflektoimaan, selittämään ja todistamaan.

5. **Yritteliäisyys** (*productive disposition*): luontainen kyky nähdä matematiikka järkevänä, hyödyllisenä ja arvokkaana sekä yksilön usko ahkeruuden merkityksellisyyteen ja omiin kykyihinsä.

On tärkeää huomata, että kaikki edelliset piirteet ovat kietoutuneet toisiinsa ja ovat myös riippuvaisia toinen toisistaan. (kuva 2.1). Oppilas, jolla on hyvä käsitteellinen ymmärrys, omaa enemmän tietoa kuin vain erillisiä faktoja ja menetelmiä. Tämän lisäksi hän ymmärtää käyttää matemaattisia käsitteitä oikeissa konteksteissa, tietää miten eri matemaattiset käsitteet liittyvät toisiinsa ja osaa liittää uudet käsitteet omaan tietorakenteeseensa. Oppilaan ei tarvitse olla kykenevä ilmaisemaan sanallisesti omaa käsitteellistä ymmärrystään, sillä usein käsitteen voi ymmärtää jo ennen kuin kykenee ilmaisemaan ymmärrystään. [23, s. 118]



Kuva 2.1. Matemaattisen osaamisen katsotaan koostuvan viidestä piirteestä, jotka ovat kietoutuneena toisiinsa. [23, s. 117]

Proseduraalisen sujuvuuden johdosta oppilas tietää missä tilanteissa ja miten proseduureja voidaan käyttää tarkoituksenmukaisesti. Proseduurien hallinta ja käsitteellinen ymmärrys ovat yhteydessä toisiinsa, sillä ilman proseduurien hallintaa esimerkiksi paikkajärjestelmän ja rationaalilukujen ymmärtäminen ei olisi mahdollista. [23, s. 121]

Strateginen kompetenssi nähdään sellaisten ongelmien ratkaisuissa, joiden ratkaisumenetelmä ei oppilaalle ole etukäteen selvillä. Jotta ongelma saadaan ratkaistua, oppilaan on tunnettava ja hallittava useita erilaisia ratkaisustrategioita. Hänen tulee tunnistaa tehtävästä ratkaisustrategioiden kannalta olennaiset piirteet ja muotoilla ongelma ratkaistavaan muotoon. [23, s. 124]

Mukautuvalla päättelyllä tarkoitetaan oppilaan kapasiteettia ajatella loogisesti käsitteiden ja tilanteiden välisistä suhteista. Oppilas kykenee mukautuvaan päättelyyn, jos seuraavat ehdot toteutuvat: hänellä on riittävä tietopohja, tehtävä on ymmärrettävä ja motivoi oppilasta sekä tehtävän konteksti on oppilaalle tuttu ja miellyttävä. Eräs tärkeä asia, jossa mukautuva päättely ilmenee, on kyky perustella omat ratkaisunsa. [23, s. 129-130]

Oppilaan yrittelijäisyydellä tarkoitetaan taipumusta nähdä matematiikka merkityksellisenä, mieltää se hyödyllisenä sekä kannattavana sekä uskoa, että jatkuva ponnistelu ja matematiikan opiskelu kannattaa. Lisäksi oppilas näkee itsensä tehokkaana oppijana ja matematiikan käyttäjänä. Oppilaan yrittäjyys kehittyy samalla kun muut matemaattisen osaamisen piirteet kehittyvät ja samalla auttaa muita piirteitä kehittymään edelleen. Esimerkiksi samalla kun oppilaat kehittävät strategista kompetenssia ratkaistessaan ei-rutiininomaisia tehtäviä, heidän asenteensa matematiikkaa kohtaan ja usko itseensä matemaattisena oppijana kasvaa ja muuttuu positiivisemmaksi. [23, s. 131]

2.2 Kielentäminen matematiikassa

Matematiikkaa opiskellessa ei voida välttyä käsitteiden monipuoliselta tarkastelulta. Käyttämällä matemaattisen symbolikielen lisäksi omaa luonnollista kieltä sekä kuviokieltä voidaan luoda syvempi ymmärryksen taso. *Kielentäessä* oppilaat jäsentävät omaa matemaattista ajatteluaan itselleen sekä mahdollisesti myös muille oppilaille ymmärrettäväksi. Oppilaiden monipuolinen kielen käyttö tekee opettajan arviointityöstä mielekkäämpää ja siten opetuksen suunnittelustakin. Kielentäminen on siis matemaattisen ajattelun ilmaisemista kielen avulla, niin kirjallisesti kuin suullisestikin. Tässä yhteydessä matemaattisella ajattelulla tarkoitetaan tiedon; konseptuaalisen, proseduraalisen sekä strategisen, prosessointia, jota ohjaavat ihmisen metakognitiot. [21]

On perusteltua tarkastella luonnollisen kielen käyttöä ja sen merkitystä matematiikan opiskelussa, sillä kielemme on keskeisessä osassa niin opettajan ja oppilaan välisessä vuorovaikutuksessa, kuin oppimateriaalin ymmärtämisessä. Kun oppilas selittää ongelmaa ääneen tai kirjallisesti opettajalle tai muille oppilaille, hän jäsentää ongelman itselleen luonnollisen kielen avulla. Tämä voi johtaa siihen, että selittäessä oppilas kykenee jo näkemään ongelman ratkaisun. Ajatuksen ja ulkoisen puheilmaisun (puhetta muille) välillä on sisäinen puhe (puhetta itselle), joka on supistunutta ja ilman konkreettista muotoa jäävää puhetta, mutta sen komponenttien ympärille rakentuvat puheen kokonaiset lauseet [48]

2.2.1 Kieli ja matematiikka

Tarkasteltaessa kielen merkitystä matematiikan opiskelussa voidaan havaita muun muassa seuraavat kaksi näkökulmaa: *psykolingvistinen* sekä *sosiolingvistinen*. Psykolingvistisessa näkökulmassa keskitytään tarkkailemaan henkilön kielen käyttöä ja toimintaa. Tarkkailu tapahtuu yleensä valmiiksi suunnitelluissa koeolosuhteissa. Sosiolingvistisessa näkökulmassa tarkkaillaan enemmänkin kielen sosiaalista luonnetta sekä sen käyttöä eri tilanteissa. [29]

Jorma Joutsenlahti (2003) on tutkinut matemaattisen ajattelun ja kielen yhteyttä matematiikan oppimisen näkökulmasta. Oppilaan kognitiivisessa kehitysprosessissa kielellä on hyvin tärkeä rooli. Kielen avulla oppilas kykenee jäsentämään omaa ajatteluaan itselleen ja muille. Näin ollen itse asiassa kieltä ja ajattelua ei voida erottaa toisistaan. Luonnollisen kielen käyttö auttaa oppilasta jäsentämään matemaattista ajatteluaan. Luonnollisella kielellä tarkoitetaan yleensä oppilaan omaa äidinkieltä. [18]

Kieli matematiikan peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa tuodaan esille matematiikan kieli muutamaan kertaan. Esimerkiksi matematiikan opetuksen tavoitteisiin luokille 1-2 ja luokille 3-6 on kirjattu, että opetuksen tulee kehittää oppilaiden kykyä ilmaista omaa matemaattista ajatteluaan konkreettisten välineiden avulla, suullisesti, kirjallisesti sekä kuvia tulkitsemalla.

Yläkouluikäisillä matematiikan opetuksen tavoitteisiin on kirjattu seuraava lause:

> *"Kannustaa oppilasta harjaantumaan täsmälliseen matemaattiseen ilmaisuun suullisesti ja kirjallisesti."*
> (Opetushallitus 2014)

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteista voidaankin tulkita, että matematiikassa kielen käytön ensisijainen tarkoitus on, että oppilas kykenee jäsentämään matemaattisen ajattelunsa niin, että sen pystyy muutkin ymmärtämään.

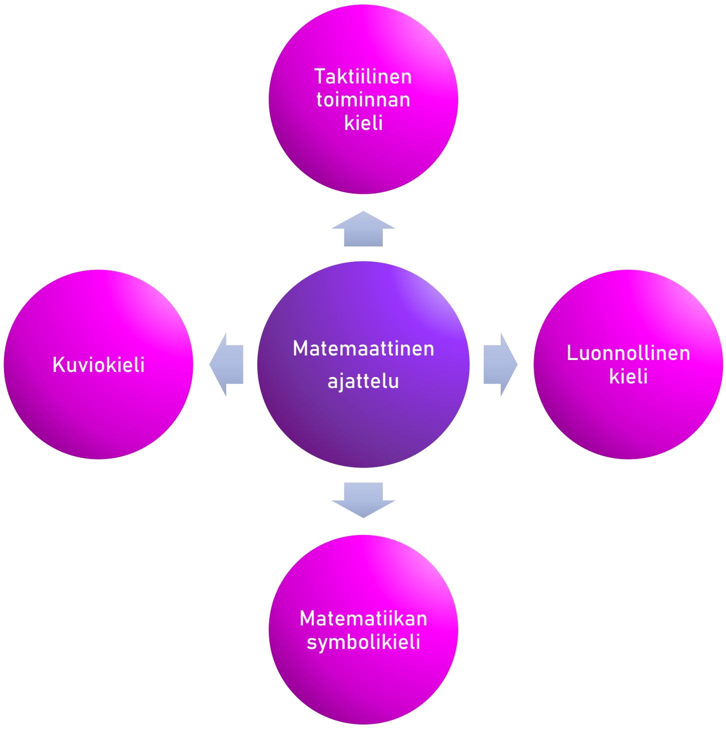
Matematiikan kieli

Matematiikka voidaan tulkita aivan omaksi kielekseen, sillä esitettäessä matematiikkaa perimmiltään kysymys on ajattelusta ja kommunikaatiosta. Matemaattiseen kieleen voidaan luokitella kuuluvaksi muun muassa luonnollisen kielen ilmauksia, joilla on omat erityiset merkityksensä matematiikan kielessä. Sen lisäksi siihen kuuluvat tietysti matemaattiset symbolit ja lausekkeet. Matematiikan kieli on kuitenkin siitä erikoinen, että kaikilla matemaatikoilla ei ole yhtä yhtenäistä tapaa ilmaista itseään, vaan esimerkiksi kulttuurilla on suuri vaikutus matematiikan kielenkäyttöön. Myös yksilöiden välillä on paljon eroja. Matematiikan symbolijärjestelmän avulla matematiikan abstrakteja käsitteitä pystytään ilmaisemaan yksinkertaisesti ja yksiselitteisesti sekä yhteisen normin tavalla. [21]

Matematiikan symbolijärjestelmä ei ole kuitenkaan ainoa, mitä voidaan käyttää avuksi matematiikkaa tehdessä. Matematiikan historiasta voidaan huomata, että luonnollinen sekä kuviokieli eli asioiden visualisointi ovat olleet keskeisessä osassa matematiikkaa esittäessä aina 1800-luvulle saakka. Tämänkin jälkeen matematiikkaa on esitetty luonnollisen kielen, kuviokielen sekä symbolisten lausekkeiden avulla. [44, 34]

Toiminnan kieli on myös keskinäinen matemaattisen ajattelun ilmaisemistapa. Siinä oppilas pystyy esimerkiksi toimintamateriaalien avulla havainnollistamaan erilaisia laskutoimituksia. Esimerkkinä voidaan käyttää yhtälön ja laskutoimitusten havainnollistamista vaa'an avulla. [21]

Alla esitetty malli ei ole yksiselitteinen vaan siinä on myös yhteisiä alueita. Kuten edellä todettiin, että luonnollisessa kielessä on useita matematiikan kieleen kuuluvia käsitteitä.



Kuva 2.2. Matemaattista ajattelua voidaan ilmaista neljän kielen avulla; taktiilinen toiminnan kieli, kuviokieli, luonnollinen kieli sekä matematiikan symbolikieli. [20]

Edellä esitettyjen kielien ominaispiirteet sekä ilmaisulliset vahvuudet eroavat toisistaan, mutta silti täydentävät toisiaan. On tehokasta käyttää luonnollista kieltä silloin, kun käsitteitä määritellään ja niille haetaan merkityksiä niiden laadullisten ominaisuuksien perusteella. Kun taas matematiikan symbolikieltä on tehokasta käyttää tutkittaessa käsitteiden määrällisiä muutoksia tai ominaisuuksia ja matemaattista kuviokieltä havainnollistettaessa käsitteitä.

2.2.2 Matematiikan kielentäminen

Yksi keskeisimmistä haasteista matematiikan opetuksessa on se, miten saisimme kuvattua matemaattista ajattelua ja miten saisimme sen näkyväksi. Yksi mahdollisuus olisi matemaattisen ajattelun kielentäminen, jolloin oppilaan ajatusprosessia olisi mahdollista seurata ja myös kehittää.

Matemaattinen ajattelu

Matemaattista ajattelua voidaan lähestyä seuraavista näkökulmista tyypillisten ominaispiirteidensä perusteella:

1. **Antropologinen lähestymistapa:** Matemaattista ajattelua tarkastellaan eri kulttuurien näkökulmista. Esimerkiksi eri kielillä muodostetut lukusanat eroavat toisistaan huomattavasti muodostamistavoiltaan. Tämä voi taas vaikeuttaa lasten lukukäsitteen muodostumista eri kulttuureissa.

2. **Informaation prosessointia tutkiva lähestymistapa:** Pyritään keskittymään matemaattisen ongelmaratkaisun kannalta olennaisiin prosesseihin, jotka muodostavat matemaattisen ajattelun ytimen.

3. **Matematiikan lähestymistapa:** Tutkitaan, mitkä piirteet ovat keskinäisimpiä matemaattisessa ajattelussa, kun opiskellaan matematiikkaa puhtaasti tieteenä.

4. **Pedagoginen lähestymistapa:** Matemaattista ajattelua tarkastellaan opettamisen näkökulmasta, osa matemaattisista käsitteitä on helpompia opettaa tuloksekkaasti kuin toiset.

5. **Psykometrinen lähestymistapa:** Matemaattisen ajattelun ajatellaan kuvaavan ihmisen mieltä karttana, jossa on monia eri kokoisia alueita, jotka sijaitsevat eri paikoissa. Toiset näistä paikoista ovat keskeisempiä kuin toiset.

[42]

Tässä yhteydessä matemaattista ajattelua tarkastellaan informaation prosessoinnin kannalta. Matematiikan opiskelun yhteydessä puhumme tiedon eli merkittävän informaation prosessoinnista. Siihen vaikuttavat ja sitä säätelevät affektiiviset tekijät ja henkilön aikaisemmat tiedot. Voidaankin puhua henkilön *metakognitioista*, joilla tarkoitetaan yksilön ajattelua omasta ajattelustaan.

Hiebertin ja Lefevren mukaan tieto jaetaan konseptuaaliseen tietoon (*conseptual knowledge*) ja proseduraaliseen tietoon (*procedural knowledge*). Konseptuaalinen tieto on usein linkittyneenä useampaan tietoyksikköön ollen näin osana suurempaa tietoverkkoa. Proseduraaliseen tietoon kuuluvat matemaattisten symbolien esittämisjärjestelmä ja esimerkiksi matematiikan säännöt matemaattisten ongelmien ratkaisemiseksi, algoritmit ja proseduurit. [19]

Voidaan siis todeta, että tässä yhteydessä *matemaattisella ajattelulla* tarkoitetaan siis konseptuaalisen, proseduraalisen ja strategisen matemaattisen tiedon prosessointia, jota ohjaavat henkilön metakognitiot.

Matemaattista ajattelua voidaan ilmaista kuvan 2.2 kullakin esitetyllä kielellä erikseen tai useampaa yhdistellen. [20] Ajattelun näkökulmasta kielen käytössä voidaan havaita erilaisia tapahtumia: sisäistä puhetta (tiivistettyä puhetta itselle), puhuttua kieltä (puhetta ulkopuolisille) ja kirjoitettua kieltä (selvää ja mahdollisimman täydellistä ilmaisua), jotka ovat kaikki hyvinkin erilaisia rakenteeltaan ja tarkoitusperältään. Kielellinen ajattelu on kuitenkin käsitteellistä eikä sanallista ajattelua.[48]

Matemaattista ajattelua kielennettäessä oppilas ohjataan matemaattisen ajattelun sekä puhutun ja kirjoitetun kielen väliseen sykliin, jossa oppilaan omaa ajattelua pyritään jäsentämään ja kehittämään kielen avulla. Uudet ajatukset mahdollistavat sen, että oppilas kykenee kuvaamaan käsitteitä ja prosesseja yhä monipuolisemmin ja sitä kautta pystyy syventämään ymmärrystään. [21]

Suullinen kielentäminen

Matematiikan suullinen kielentäminen on pääsääntöisesti keskustelua ryhmässä omalla luonnollisella kielellä, tehtävien ratkaisuiden selittämistä toisille ja argumentointia sekä käsitteiden merkitysten rakentamista arjesta tuttujen ilmiöiden avulla. Suullinen kielentäminen on oppilaan oman ymmärryksen syventämisen kannalta hyödyllistä. Ratkaisua selittäessä oppilas joutuu ensin jäsentämään oman ajattelunsa itselleen. Sen jälkeen hän joutuu vielä muotoilemaan sen kokonaisiksi lauseiksi niin, että myös muut kuuntelijat ymmärtäisivät sen. [21]

Eräs tunnettu tapa etsiä ratkaisua ongelmaan on ääneen ajattelu. Siinä puheeksi jäsennetty kieli auttaa oppilasta ajattelemaan. Opettajan on myös helppo ja nopea arvioida oppilaan sanoin esittämistä ratkaisuista, onko oppilas ymmärtänyt oikealla tavalla käydyt käsitteet ja kuinka niitä käytetään.

Oppilaat voivat kielentää matemaattista ajatteluaan opettajajohtoisesti koko luokan keskusteluissa, pienryhmäkeskusteluissa tai parikeskusteluissa. Opettaja voi ohjata keskustelua esimerkiksi seuraavilla tavoilla: 1) oppilas selittää uudelleen saman asian eri sanoin, 2) toistamalla toisen oppilaan selittämän päättelyn tms., 3) vertailemalla päättelyitä, 4) täydentämällä toisen päättelyä ja 5) odottamalla hetken ja sen jälkeen kertomalla ajatuksiaan. [7]

Oppilaat väistämättä ymmärtävät matematiikan peruskäsitteitä paremmin ja oppivat käyttämään niitä täsmällisemmin, kun he pääsevät esittämään ajatuksiaan muille. Tämä onkin keskeinen tavoite matematiikassa. Kuunnellessa muiden oppilaiden ratkaisuita oppilas kykenee reflektoimaan omaa ratkaisuaan vaikkei sisältö olisikaan aivan sama. Oppilas voi saada uusia lähestymistapoja saman tehtävän ratkaisuun ja näin laajentaa omaa ymmärrystään aiheesta. Kuuntelijat voivat myös tarkastella ratkaisun oikeellisuutta ja mahdollisesti keskustella siitä, jolloin ratkaisun esittäjä pääsee perustelemaan omia ratkaisujaan.

Kirjallinen kielentäminen

Kirjoittaessa ylös omia ajatuksia omat ratkaisun vaiheet jäävät nähtäväksi ja niihin voi palata uudelleen myöhemmin tai niitä voi tarvittaessa muuttaa. Kirjallinen kielentäminen auttaa oppimaan matematiikkaa sillä kirjoittaessa oppilas joutuu pohtimaan enemmän ja syvällisemmin ratkaisua kuin ääneen puhuessa. Kirjoittamisprosessi voi myös selkeyttää ja kehittää matemaattista ajattelua. Kirjalliseen kielentämiseen on luotu erilaisia malleja (kts. Joutsenlahti 2009). Ideana on kuitenkin, että oppilas luo oman, itselle tarkoituksenmukaisen tavan, jolla esittää ratkaisu. Näin tehdessään hän jäsentää tehtävän itselleen ja tekee oman ajattelun kulun seuraamisesta helpompaa myös muille tehtävän lukijoille. [21]

2.3 Oppilaan matematiikkakuva ja asenteet

Oppilaan *matematiikkakuvalla* tarkoitetaan oppilaan tunnesuhtautumista matematiikkaan sekä matematiikkaan liittyvää motivaatiota ja uskomuksia. Uskomukset voivat koskea matematiikkaa, sen oppimista sekä oppilasta itseään matematiikan oppijana. Matematiikkakuvan muodostumiseen ja sen muuttumiseen vaikuttavat oppilaan matematiikassa kokemansa kokemukset. Kuitenkaan matematiikkakuvaan ei vaikuta ainoastaan oppilaan yksilötasolla kokemat asiat, vaan myös luokan ilmapiirillä ja kulttuurilla on suuri vaikutus matematiikkakuvan muovaantumiseen. [15]

Matematiikkaan ja sen oppimiseen liittyvät uskomukset, tunteet ja motivoituneisuus voivat olla tiedostettuja tai sitten tiedostamattomia. Kuitenkin niitä on hyvin hankala muuttaa ja ne ovatkin yleensä suhteellisen pysyviä. Nopeasti vaihtelevat tilannesidonnaiset tunteet, tavoitteet ja ajatukset ovat matematiikkakuvasta erillisiä asioita.

Matematiikan oppimistutkimuksissa kiinnitetään huomiota yleensä juuri oppilaiden kielteisiin matematiikka-asenteisiin. [15] Pahimmillaan vahvasti kielteinen asenne matematiikkaa ja sen oppimista kohtaan voi johtaa niin kutsuttuun *matematiikka-*

ahdistukseen. Jo vähäinenkin matematiikka-ahdistus voi heikentää oppilaan suoritusta matematiikassa ja saa oppilaan välttelemään matematiikan opiskelua. Hembreen (1990) meta-analyysin tulokset osoittavat, että syvän matematiikka-ahdistuksen vähentäminen on hidas prosessi. [16]

Matematiikkaan liittyvistä asenteista erityisesti pystyvyyden tunteen korrelaatio suoritustason kanssa on monissa tutkimuksissa havaittu korkeaksi. Pystyvyyden tunteen ja oppilaan suoriutumisen välinen yhteys on ollut jo pitkää tiedossa. Esimerkiksi Banduran (1986) sosiaalis-kognitiivisen oppimisteorian mukaan oppilaan tunne omasta pystyvyydestään ennustaa vahvasti tulevaisuuden osaamistasoa. Tämä voidaan perustella sillä, että ihmiset käyttäytyvät ja tekevät valintoja peilaten usein omaan pystyvyyden tunteeseensa. [4] Matematiikan osaamiseen ja oppimiseen liittyvän oppilaan pystyvyyden tunteen on havaittu olevan kaikista voimakkaimmin yhteydessä tulevaan osaamistasoon kuin muiden oppilaan matematiikkaan liittyvien asenteiden. [32] Kuitenkin pystyvyyden tunne harvoin yksin selittää tulevaisuuden osaamistasoa vaan se kulkee usein vähintäänkin käsi kädessä muiden asennetekijöiden kanssa. Muita asennetekijöitä ovat esimerkiksi matematiikasta pitäminen, sen kokeminen tulevaisuudessa hyödylliseksi sekä ahdistuksen tunne.

Opetushallituksen teettämän pitkittäistutkimuksen mukaan oppilaan osaaminen selittää hänen asennettansa opeteltavaa aihetta kohtaan, mutta ei juurikaan toisinpäin. On todennäköistä, että asenteiden heikkenemisen taustalla on oppilaan epäonnistumisen kokemukset matematiikan oppimisessa. Oppilaan epäonnistuessa käsitys omista kyvyistään matematiikassa heikkenee. Pelko tulevista epäonnistumisista kasvattaa oppilaan matematiikka-ahdistusta. Mitä vähemmän oppilas kokee tarvitsevansa matematiikkaa sitä heikommaksi hänen kokemus omasta pystyvyydestään laskee ja matematiikka-ahdistus kasvaa. [46]

2.4 Matemaattiset oppimisvaikeudet

Matemaattisia oppimisvaikeuksia on tutkittu huomattavasti vähemmän verrattuna lukivaikeuksiin. [39] Matematiikan oppimisessa epäonnistumisen taustalla on usein monia tekijöitä. Matemaattisesti heikkojen oppilaiden oppimisvaikeudet ovat yhteydessä niin sosiaalisiin, keskushermoston toimintaan liittyviin kuin opetuksellisiin tekijöihin. Sosiaalisia tekijöitä voivat olla esimerkiksi oppilaan sosioekonominen status sekä vanhempien koulutus. Keskushermoston toimintaan liittyviin ongelmiin vaikuttavat esimerkiksi oppilaan perintötekijät ja aivotoiminnan eroavaisuudet oppilaiden välillä. Myös opetuksen laatu ja sen saatavuus ovat tekijöitä, joiden vaikutusta oppilaan oppimiseen ei tule unohtaa. Heikkoon matematiikan osaamiseen on siis useita tekijöitä ja näistä viimeisimpään on helpoin vaikuttaa. Oppilaiden opetuksen laatua tulisi parantaa sekä antaa sellaista opetusta, joka vastaisi paremmin heidän sen hetkisiä oppimisen haasteitaan. [28]

Oppimisvaikeuksia yleisesti tarkastellessa tulee huomioida kolme eri näkökulmaa. Ensimmäisenä ovatko oppilaan oppimisvaikeudet laaja-alaiset vai kapea-alaiset. Tämän jälkeen tulee miettiä ovatko oppimisvaikeudet lieviä, kohtalaisia vai jopa vaikeita eli tarkastella oppimisvaikeuden vaikeusastetta. Tämän lisäksi tulee tarkastella millaisia oppimisvaikeudet ovat laadultaan eli missä tapahtumissa niitä voidaan havaita. Yleensä matemaattiset oppimisvaikeudet ovat melko kapea-alaisia, mutta niiden vaikeusaste vaihtelee. On itsestään selvää, että matemaattiset oppimisvaikeudet hankaloittavat matemaattisten taitojen opiskelua, mutta ne tuotavat hankaluuksia myös useiden muiden oppiaineiden opiskelussa. Oppilaalla sanotaan olevan *matemaattisia oppimisvaikeuksia* silloin, kun puhutaan oppilaasta, jolle matemaattisten taitojen oppiminen ja niiden käyttäminen on muihin saman ikäisiin oppilaisiin verrattuna vaikeampaa. [28]

On melko yleistä, että oppilaalla on jonkin tasoisia matemaattisia oppimisvaikeuksia, sillä noin 15-20 prosentilla lapsista ja nuorista on havaittu vaikeuksia matematiikan oppimisessa. Jos matemaattiset oppimisvaikeudet ovat erityisen vaikeita, puhutaan *dyskalkuliasta*. Sitä on havaittavissa 5-7 prosentilla ihmisistä. [13, 41] Heillä on havaittavissa huomattavia vaikeuksia erottaa ja ymmärtää lukumäärien suuruuksia ja aritmeettisten taitojen käyttö on heikkoa. Tämän lisäksi *matemaattisten taitojen osaaminen on heikkoa* 10-15 prosentilla lapsista ja nuorista. [13]

Tässä työssä käytetään usein kirjallisuudessa olevan käsitteen matematiikan oppimisvaikeudet (engl. *mathematics learning difficulties*) sijaan käsitettä matemaattiset oppimisvaikeudet (engl. *mathematical learning difficulties*), jolla pyritään painottamaan sitä, että matemaattisia vaikeuksia on läsnä jatkuvasti, arjessa sekä työelämässä, ei ainoastaan matematiikassa oppiaineena. Täytyy myös muistaa, että ei ole yhtä matemaattista vaikeutta vaan kirjo matemaattisten taitojen oppimisessa ilmeneviä vaikeuksia.

Vaikeusasteeltaan lievempiä matemaattisia oppimisvaikeuksia kuvataan siis käsitteellä heikko osaaminen matemaattisissa taidoissa (engl. *low performance/achievement in mathematical skills*). Vaikeudet näyttäisivät selittyvän kognitiivisten taitojen heikkouksilla, motivationaalisilla tekijöillä sekä oppimisympäristötekijöillä.

2.4.1 Dyskalkulia

Dyskalkulia on ihmisen kehityksellinen häiriö ja sitä esiintyy 5-7 prosentilla ihmisistä. [13, 41] Dyskalkuliasta käytetään myös käsitettä laskemiskyvyn häiriö (Tunniste F81.2, engl. *Specific disorder of arithmetical skills*) maailman terveysjärjestön WHO:N ICD-10-tautiluokituksessa. [49] ICD-10-tautiluokituksen mukaan dyskalkuliassa matemaattisten taitojen heikkous ei selity kehitysvammaisuudella tai puutteellisella opetuksella ja se havaitaan häiriönä peruslaskutaitojen käytössä, kuten yhteen- ja vähennyslaskutaidossa. Käsitteellisempiin matemaattisiin taitoihin, kuten algebraan ja trigonometriaan dyskalkulia ei niinkään vaikuta.

Tämänhetkisen tutkimustiedon perusteella dyskalkulian syitä ovat häiriöt niissä neurologisissa ja kognitiivisissa toiminnoissa, joita tarvitaan lukumäärä-käsitteen ymmärtämisessä sekä lukumäärien prosessoinnissa. Vaikeuksia ilmenee siis juurikin pienten lukujen tarkassa määrittelyssä sekä lukumäärän suuruuden arvioinnissa. [38] Monissa maissa tuen saamiseksi tarvitaan diagnoosi, mutta Suomi eroaa tässä. Tuen tarve määritellään suomalaisissa kouluissa moniammatillisesti pedagogisen arvioinnin avulla. On kuitenkin tärkeää yksilön kannalta saada selitys sille, miksi matemaattisten taitojen oppiminen on niin hankalaa. Useimmiten psykologisten tai neuropsykologisten tutkimusten avulla lähdetään selvittämään mahdollista dyskalkuliaa ja Suomessa lopullisen diagnoosin määrittää lääkäri. [28]

2.4.2 Heikko osaaminen matemaattisissa taidoissa

Lapsista ja nuorista 10-15 prosentilla matemaattiset taidot ovat huomattavasti heikommat kuin muilla saman ikäisillä. Vaikeudet eivät ole yhtä pahoja kuin dyskalkuliassa, mutta ne hankaloittavan matematiikan oppimista oppiaineena sekä selviytymistä arkielämän asioista. Heikko osaaminen voi selittyä kognitiivisilla, motivationaalisilla sekä oppiympäristöstä johtuvilla tekijöillä.

Kognitiiviset tekijät

Tutkimusten mukaan heikkous kognitiivisissa taidoissa voi omalta osaltaan selittää matemaattisten taitojen heikkoa osaamista. Viimeaikaisissa tutkimuksissa on selvitetty erityisesti kielellisten taitojen ja toiminnanohjauksen yhteyttä matemaattisten taitojen oppimiseen.

Tehdessään matemaattista tehtävää oppilaan tulee osata ohjata toimintaansa, suunnitella eteenpäin ja arvioida sekä mahdollisesti jopa korjata toimintaansa. Käsitettä *toiminnanohjaus* käytetään yleensä yleisenä käsitteenä erinäisille kognitiivisille prosesseille. Se voidaan karkeasti jakaa kolmeen keskeiseen alueeseen, jotka ovat työmuisti, inhibitio sekä kognitiivinen joustavuus. [12]

Työmuistilla tarkoitetaan ihmisen rajallista resurssia prosessoida asioita. Tämä mahdollistaa lyhyiden periodien ajan tiedon yhtäaikaisen käsittelyn ja varastoinnin. [3] Työmuistin vaikutusta matemaattisiin oppimisvaikeuksiin on tutkittu paljolti ja sen onkin havaittu olevan yksi tärkeimmistä matemaattisten taitojen oppimiseen liittyvistä kognitiivisista tekijöistä. [17] On havaittu myös, että niillä nuorilla, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, on usein myös heikompi työmuistikapasiteetti verrattaessa samaan ikäluokkaan. [33]

Inhibitiolla tarkoitetaan oman käyttäytymisen ja reagoimisen säätelyä, erityisesti sillä hetkellä epäolennaisen käyttäytymisen ja toiminnan estämistä. [9] Tämän voi havaita esimerkiksi silloin, kun oppilaan muistista tulee väliin matemaattisen tehtävän kannalta epäolennaisia tietoja ja ärsykkeitä, esimerkiksi väärä laskustrategia. On esitetty, että yksi syy, minkä takia aritmeettisten tietojen noutaminen muistista voi olla vaikeaa, on työmuistin häiriintyminen väliin tulevasta epäoleellisesta tiedosta. [14] Inhibitioon liittyvät ongelmat tulevat näkyväksi todennäköisesti vasta sitten, kun muistissa on enemmän opittuja asioita, jotka voivat hypätä oikean vastauksen löytämisen väliin.

Kognitiivisella joustavuudella tarkoitetaan oman tarkkaavaisuutensa suuntaamista, sen ylläpitämistä sekä tarkkaavaisuuden kohteen vaihtamista. [30] Matematiikassa kognitiivista joustavuutta vaaditaan esimerkiksi silloin, kun samalla tehtäväsivulla on yhteen- ja vähennyslaskuja sekaisin tai pidempää laskua laskettaessa tarkkaavaisuus tulee kohdistaa eri laskuvaiheisiin. Jo se, että omassa luokassa tekee omia tehtäviään, vaatii oppilaalta tarkkaavaisuuden säätelyä ja kohdistamista.

Toiminnanohjauksen lisäksi kielellisten taitojen yhteyttä matemaattiseen osaamiseen on tutkittu melko laajalti. Tutkimusten mukaan matemaattisten taitojen osaamista ja oppimista voidaan ennustaa hyvin *sanavaraston hallinnan, fonologisen tietouden* sekä *painetuun kieleen liittyvien taitojen* avulla [25, 37, 36] Päiväkoti- ja esikouluikäisillä lapsilla sanavaraston hallinta näyttäisi vaikuttavan siihen, kuinka hyvin he osaavat tunnistaa numeroita ja nimetä niitä. [36]

Fonologisella tietoudella tarkoitetaan lapsen kykyä jakaa sanoja erisuuruisiksi yksiköiksi, kuten äänteiksi tai tavuiksi, sekä rakentaa edellä mainituista yksiköistä sanoja. Tutkimustulokset fonologisen tietoisuuden yhteydestä matemaattisiin taitoihin ovat hyvinkin ristiriitaisia. [28]

Painetun kielen liittyvien taitojen yhteyttä matemaattiseen osaamiseen on tutkittu näistä kolmesta kielellisestä taidoista kaikista vähiten. On kuitenkin havaittu, että juuri kirjainten tunnistamisen esikouluiässä ennustaa yhteen- ja laskutaitoa ensimmäisellä luokalla sekä myöhempää kehitystä aritmeettisissa taidoissa aina kolmannelle luokalle saakka. [52]

Lapsille ja nuorille, joilla on *kielellisiä erityisvaikeuksia*, tehty tutkimus on osaltaan valoittanut kielen roolia matemaattisen osaamisen ja oppimisen kehityksessä. On havaittu, että kielellisiä erityisvaikeuksia omaavilla lapsilla on keskimäärin heikommat matemaattiset taidot jo ennen koulun alkua kuin ikätovereillaan, joilla ei ole kielellisiä erityisvaikeuksia. [27]

Motivationaaliset tekijät

Motivaatiolla on suuri vaikutus kaikenlaiseen oppimiseen. Sen rooli matemaattisten taitojen kehityksessä on huomattava. [8] Käsitteenä motivaatio on hyvinkin laaja. Sitä voidaan kuvata muun muassa oppilaan kyvykkyyskäsityksen, kiinnostuksen ja arvostuksen sekä oppimiseen liittyvien tavoitteiden avulla. Myös motivationaalisilla tunteilla on suuri vaikutus oppimisprosessin etenemiseen. [35] Yleisesti voidaan sanoa, että motivationaaliset tekijät vaikuttavat laajalti matemaattisten taitojen kehitykseen ja tukevat oppilaan halua yrittää ja panostaa matematiikan opiskeluun ja oppimiseen. [45] On yleistä, että vahvat matemaattiset taidot omaavalla oppilaalla on myös vahva matematiikan oppimismotivaatio. Tutkimuksissa on kuitenkin ilmennyt, että on myös sellaisia oppijoita, joilla perustaidot ja kognitiiviset työkalut ovat hyvät, mutta heidän heikko motivaatio tai negatiiviset tunteet matematiikkaa kohtaan estävät heitä suoriutumasta ja oppimasta. [6, 51]

Oppimisympäristöön liittyvät tekijät

Oppimisympäristötekijöillä tarkoitetaan tässä yhteydessä niin koti- kuin kouluympäristöä ja niiden vaikutusta oppilaan matemaattisen osaamisen kehittymiseen. Yksi oppimisympäristötekijöistä on lapsen tai nuoren perheen sosioekonominen tausta. Sitä mitataan yleensä perheen tulojen ja vanhempien koulutuksen perusteella. Suomessa esi- ja ensiluokkalaisille tehdyssä tutkimuksissa on todettu, että vanhempien koulutaustalla on ollut yhteys soveltavien aritmeettisten taitojen osaamiseen. Vanhemman korkeampi koulutausta ennusti kyseisten tehtävien parempaa osaamista. Muihin matemaattisiin taitoihin sillä ei niinkään ollut vaikutusta. [2] Äidin koulutuksella on todettu olevan myös vaikutusta ensiluokkalaisten matemaattisen suhdekäsitteen kehittymiseen. [26] Suomessa ensiluokkalaisille tehdyssä tutkimuksessa todettiin, että äidin korkeampi koulutustaso ennusti lapsen parempaa osaamista matemaattista suhdetaitoa kehittävissä tehtävissä. Todennäköisesti kyse on siitä, että kodeissa, joissa äidin koulutustaso on korkeampi, kiinnitetään huomiota suhdetaitojen harjoitteluun jo ennen kouluikää, esimerkiksi suhdekäsitteisiin ja luokittelutehtäviin. [28]

Toisinaan voi olla, että oppimisympäristössä lapsi ei saa tarvittavaa määrää opetusta ja matemaattisten taitojen harjoittelu jää vähäiseksi, joka osaltaan selittää myös heikkoa osaamista.

2.5 Erityisopetus Suomessa

Perusopetuslain mukaan jokaisella oppilaalla on oikeus saada erityisopetusta;

> "*Oppilaalla, jolla on vaikeuksia oppimisessaan tai koulunkäynnissään, on oikeus saada osa-aikaista erityisopetusta muun opetuksen ohessa.*" (Perusopetuslaki 16 §)

Erityisopetusta pyritään antamaan *kolmiportaisen mallin* mukaan ja se on saanut nykyisen muotonsa vuoden 2010 perusopetuslakiuudistuksen yhteydessä. *Yleistä tukea* tarjotaan kaikille oppilaille, *tehostettu tuki* on tarkoitettu heille, jotka tarvitsevat osittaista oppimisen tukea ja *erityinen tuki* heille, jotka tarvitsevat jatkuvaa tukea opinnoissaan.

Thunbergin ja kollegoiden (2014) mukaan tehostettua tukea tarvitsevia olisi 20 prosenttia oppilaista ja 5 prosenttia tarvitsisi erityistä tukea. Kuitenkin opetus- ja kulttuuriministeriön laatimassa selvityksessä (2014) todetaan, että tehostettua tukea saa ainoastaan 5,1 prosenttia ja erityisen tuen piirissä on 7,6 prosenttia peruskoulun oppilasmäärästä.

Yleisellä tuella tarkoitetaan opetuksen eriyttämistä, tukiopetuksen antamista ja mahdollisesti myös yksilöllistä tukea. Tuen antaminen tapahtuu yleensä omassa yleisopetuksen luokassa. Jos oppilaan tuen tarve kasvaa ja on jatkuvaa, siirretään oppilas tehostetun tuen pariin. Oppilaalle tehdään pedagogisen arvion mukaan oppimissuunnitelma, johon kirjataan tuen muodot. Tarjottava tuki suunnitellaan ja toteutetaan aina moniammatillisesti, jolloin oppilashuoltoryhmän merkitys kasvaa. Oppilas siirretään erityiseen tukeen sen jälkeen, kun todetaan, että yleinen ja tehostettu tuki ei riitä.

Oppilas voi saada erityistä tukea yleisopetuksen tai erityisopetuksen opetussuunnitelman mukaisesti ja oppivelvollisuutta voidaan tarvittaessa pidentää. Oppilaalle laaditaan virallisen hallintapäätöksen jälkeen yksilöllisen tuen suunnitelma (henkilökohtainen opetuksen järjestämistä koskeva suunnitelma, HOJKS) .

Yksi yleisimmistä tavoista järjestää osa-aikaista erityisopetusta on pienen ryhmän opettaminen erityisopettajan omassa luokassa. Jokainen ryhmässä olevista oppilaista tarvitsee tukea joko opillisissa asioissa tai koulunkäynnissä. Jokaiselle ryhmässä olevalle voidaan taata yksilöllinen ohjaus unohtamatta sosiaalisten taitojen harjoittamista. Oppilaille tutussa ja turvallisessa ympäristössä työskentely on tärkeää, jotta he uskaltavat pyytää apua.

2.6 Tutkimuksia matematiikan kielentämisestä matemaattisia oppimisvaikeuksia omaaville

Matematiikan kielentämistä matemaattisia oppimisvaikeuksia omaaville oppilaille on tutkittu hyvin vähän. Suurimmassa osassa tutkimuksista kielentämistä on tutkittu alakouluikäisillä tai sitä nuoremmilla lapsilla.

Kramerin (2012) mukaan suullisesta matematiikan kielentämisestä on ollut apua matemaattisia oppimisvaikeuksia omaaville alakouluikäisille oppilaille. Kielentämällä suullisesti matemaattisia ajatuksiaan, he tulevat tietoiseksi omista vahvuuksista sekä heikkouksista. Muiden selityksiä kuuntelemalla he saavat ideoita omaan työskentelyynsä ja voivat reflektoida omaa työskentelyään. Suullisesti kielentämällä myös erityisopettajallakin on mahdollisuus seurata oppilaan ajatuksia, jolloin epäjohdonmukaisuudet, väärät ajatusmallit sekä metodivalinnat huomataan ajoissa.

2.7 Matematiikka tutkimuksen takana

Tässä kappaleessa esitellään oppilaiden opiskelemaa aihetta huomattavasti syvemmällä tasolla sekä esitellään joitain oppilaiden tekemiä tehtäviä. Tutkimuksessa oppilaiden aiheena oli yhtälö, sen ratkaiseminen sekä yhtälöparit. Seuraavissa kappaleissa tuodaan esille tapoja ratkaista myös useamman muuttujan yhtälöitä. Tehtävien ratkaisujen muoto on enemmän koulumaailmassa kuin matemaattisessa kirjallisuudessa käytetty. Oletetaan, että lukija osaa matriisien peruskäsitteet. Kuvat on piirretty GeoGebra-matematiikkaohjelmiston avulla.

2.7.1 Johdatus lineaarisiin yhtälöryhmiin

Palautetaan mieleen, että kaksiulotteisessa avaruudessa xy-koordinaatistossa oleva suora saadaan esitettyä muodossa

$$ax + by = c, \qquad a \text{ tai } b \neq 0,$$

sekä kolmeulotteisessa avaruudessa xyz-koordinaatistossa oleva taso saadaan esitettyä muodossa

$$ax + by + cz = d, \qquad a, b \text{ tai } c \neq 0.$$

Näitä yhtälöitä voidaan kutsua *lineaariyhtälöiksi*. Ensimmäisessä lineaariyhtälössä muuttujia ovat x ja y ja toisessa muuttujia ovat x, y sekä z. [1, s. 2]

Määritelmä 2.1. Lineaariyhtälö, jossa on n muuttujaa $x_1, x_2, ..., x_n$, voidaan esittää muodossa

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \tag{2.1}$$

missä $a_1, a_2, ...a_n$ sekä b ovat vakioita ja kaikki a vakiot eivät ole nollia. [1, s. 2]

Määritelmä 2.2. *Homogeeniseksi lineaariyhtälöksi* kutsutaan sitä erikoistapausta, kun $b = 0$. Tällöin yhtälö (2.1) saa muodon

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0, \tag{2.2}$$

missä $x_1, x_2, ..., x_n$ ovat lineaarisen yhtälön muuttujia. [1, s. 2]

Äärellistä joukkoa lineaarisia yhtälöitä kutsutaan *lineaariseksi yhtälöryhmäksi* ja sen muuttujia *tuntemattomiksi*. Jos muuttujia on vain kaksi, symboleja x_1 ja x_2 voidaan merkitä kirjaimilla x ja y. Jos muuttujia on kolme, merkintöjen x_1, x_2 ja x_3 sijaan käytetään yleensä kirjaimia x, y ja z. [1, s. 2]

Määritelmä 2.3. Lineaarinen yhtälöryhmä on muotoa

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

missä a_{ij} ja b_i ($1 \leq i \leq m$ ja $1 \leq j \leq n$) ovat vakioita ja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat muuttujia. [1, s. 2][11, s. 158-159]

Yhtälöryhmässä 2.3 on siis m kappaletta lineaariyhtälöitä ja n kappaletta tuntemattomia.

2.7.2 Kahden ja kolmen muuttujan yhtälöryhmät ja graafinen ratkaisu

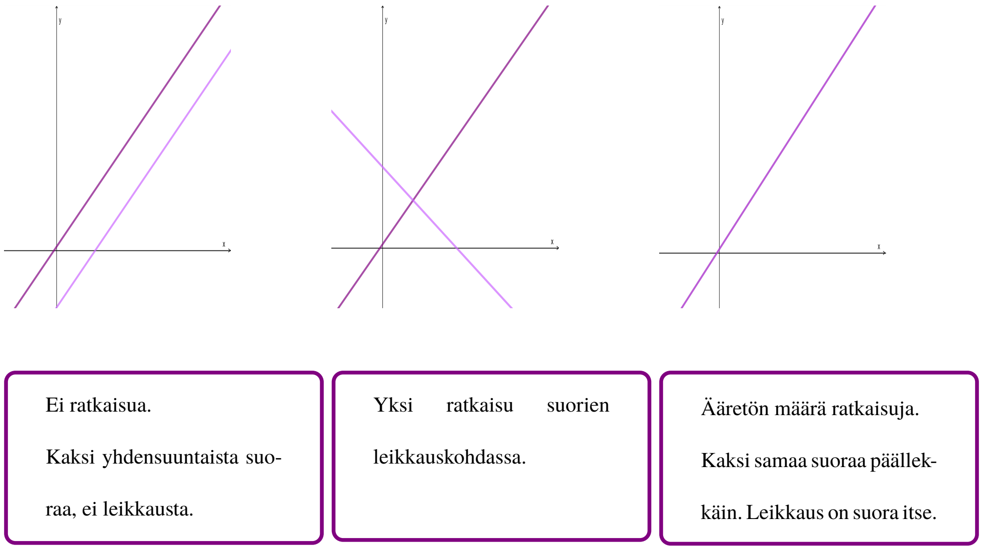
Kahden muuttujan lineaarisissa yhtälöryhmissä muuttujien arvot saadaan suorien leikkauspisteen avulla. Tarkastellaan seuraavan kaltaista lineaarista yhtälöryhmää:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

jonka kuvaajat ovat suoria xy-koordinaatistossa. Jokainen yhtälöryhmän ratkaisu (x, y) vastaa suorien leikkausta, joten näin ollen on olemassa kolme eri mahdollisuutta:

1. Suorat voivat olla samansuuntaiset, mutta erit. Näin ollen niillä ei ole yhtäkään yhteistä pistettä ja tästä johtuen yhtälörymällä ei ole myöskään ratkaisua.
2. Suorat voivat leikata jossain yhdessä pisteessä. Tämä piste on tällöin yhtälöryhmän yksi ja ainoa ratkaisu.
3. Suorat voivat myös yhtyä, jolloin suorilla on äärettömän monta leikkauspistettä ja näin ollen yhtälöparilla on äärettömän monta eri ratkaisua.

[1, s. 3]
Kuvassa 2.3 on esitelty yllä esitetyt ratkaisut xy-koordinaatistossa.



Kuva 2.3. Kahden muuttujan lineaarisen yhtälöryhmän kaikki mahdolliset ratkaisut.

Tutkimuksessa oppilaat ratkaisivat yhtälöpareja graafisesti esimerkin 2.4 tapaisesti.

Esimerkki 2.4. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ -x + y = -1 \end{cases}$$

graafisesti. Muutetaan ensin alempi yhtälö suoran yhtälön muotoon eli $y = kx + c$. Siis

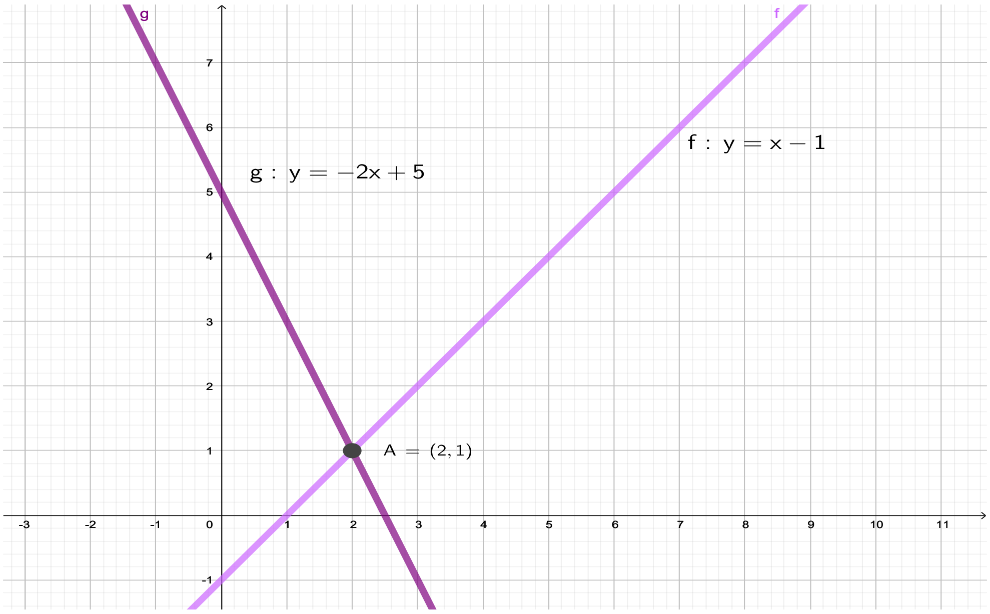
$$-x + y = -1,$$

niin

$$y = x - 1.$$

Seuraavaksi esitellään kaksi eri tapaa piirtää suorat.

Tapa 1. Suorien yhtälöt voidaan suoraan kirjoittaa matematiikkaohjelmistoon ja lukea sen avulla niiden leikkauspiste kuvan 2.4 tapaan.



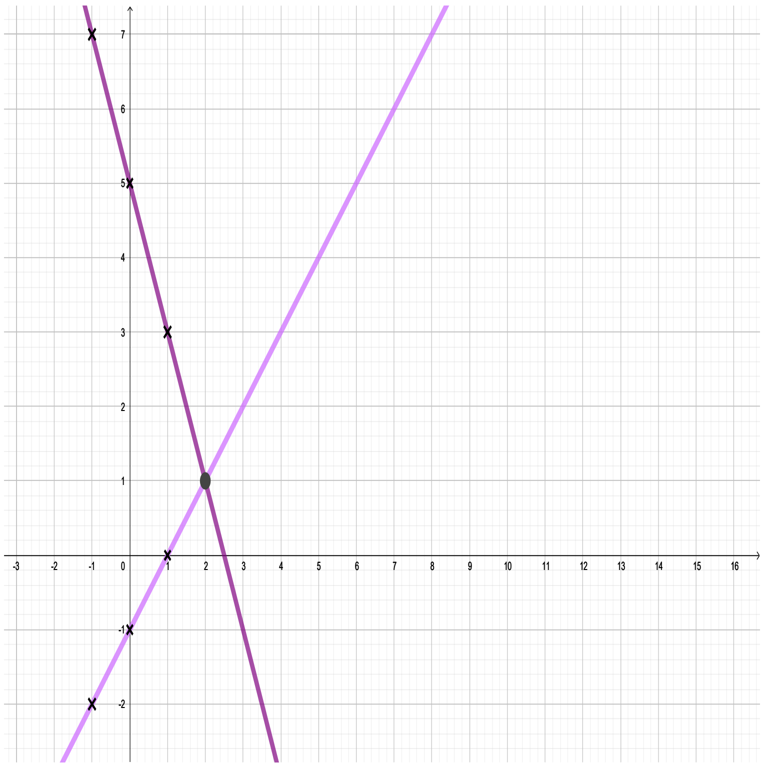
Kuva 2.4. Suorat kirjoitettuna matematiikkaohjelmistoon.

Ohjelmistosta voidaan lukea että suorien $y = -2x + 5$ ja $y = x - 1$ leikkauspiste on $(2, 1)$.

Tapa 2. Jollei matematiikkaohjelmistoja ole käytettävissä voidaan suorat piirtää myös itse. Ratkaistaan molemmilta suorilta ainakin 3 pistettä. Piirretään pisteet koordinaatistoon ja niiden läpi suora kuvan 2.5 mukaisesti. Luetaan suorien leikkauspiste koordinaatistosta.

x	$y = -2x + 5$	(x, y)
-1	$y = -2 \cdot (-1) + 5 = 7$	$(-1, 7)$
0	$y = -2 \cdot 0 + 5 = 5$	$(0, 5)$
1	$y = -2 \cdot 1 + 5 = 3$	$(1, 3)$

x	$y = x - 1$	(x, y)
-1	$y = -1 - 1 = -2$	$(-1, -2)$
0	$y = 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$y = 1 - 1 = 0$	$(1, 0)$



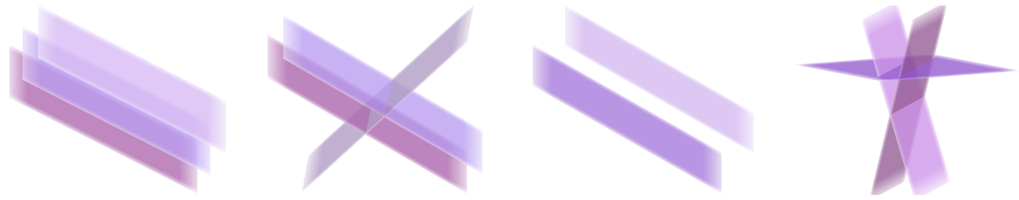
Kuva 2.5. Suorat piirrettynä pisteiden avulla.

Leikkauspisteeksi saadaan taas $(2, 1)$.

Tarkastellaan seuraavaksi kolmen muuttujan lineaariyhtälön ryhmää

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases}$$

jossa kuvaajat ovat tasoja xyz-koordinaatistossa. Yhtälöryhmän ratkaisu on se kohta, jossa kaikki kolme tasoa leikkaavat. Huomataan siis taas, että on ainoastaan kolme mahdollisuutta: ei ratkaisuja, yksi ratkaisu tai äärettömän paljon ratkaisuja. [1, s. 4] Kuvassa 2.6 on esitelty kaikki mahdolliset kolmen muuttujan lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisut.

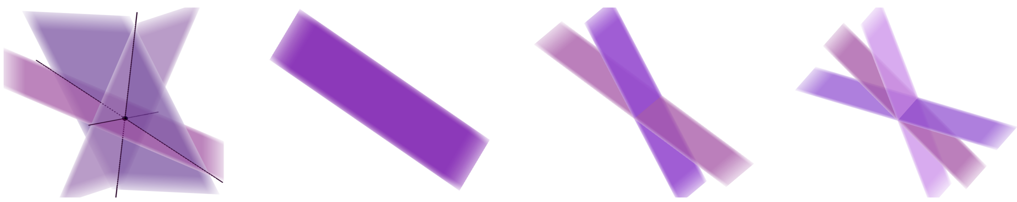


Ei ratkaisua. Kolme yhdensuuntaista tasoa, ei yhteistä leikkausta.

Ei ratkaisua. Kaksi yhdensuuntaista tasoa, ei yhteistä leikkausta.

Ei ratkaisua. Kaksi identtistä tasoa, jotka ovat yhdensuuntaiset kolmannen kanssa, ei yhteistä leikkausta.

Ei ratkaisua. Kolmas taso yhdensuuntainen toisten tasojen leikkaussuoran kanssa, ei yhteistä leikkausta.



Yksi ratkaisu. Tasojen leikkaus on piste.

Ääretön määrä ratkaisuja. Kaikki tasot ovat identtisiä, leikkaus on taso.

Ääretön määrä ratkaisuja. Kaksi tasoista ovat identtisiä, leikkaus on suora.

Ääretön määrä ratkaisuja. Leikkaus on suora.

Kuva 2.6. Kolmen muuttujan lineaarisen yhtälöryhmän kaikki mahdolliset ratkaisut.

Seuraavassa kappaleessa todetaan, että itse asiassa jokaisella lineaarisella yhtälöryhmällä on joko nolla, yksi tai äärettömän monta ratkaisua. Ei ole muita mahdollisuuksia.

2.7.3 Lineaariyhtälön matriisiesitys

Yhtälöryhmän yhtälöiden ja muuttujien määrän noustessa, myös niiden algebraalinen ratkaiseminen hankaloituu. Ratkaisun laskemista voidaan helpottaa yksinkertaistamalla sekä yhtenäistämällä merkintöjä. On olemassa muutamia tapoja esittää yllä esitetty yhtälöryhmä (2.3) matriisin avulla.

Määritelmä 2.5. Yhtälöryhmän *kerroinmatriisi* saadaan muodostettua yhtälöryhmän kertoimien avulla. Yhtälöryhmän (2.3) kerroinmatriisi on

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Olkoon

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Täten yhtälöryhmä (2.3) voidaan kirjoittaa yhtenä matriisiyhtälönä

$$Ax = b.$$

[11, s. 159]

Määritelmä 2.6. Yhtälöryhmää $Ax = b$, jossa on m lineaariyhtälöä ja n tuntematonta, sanotaan *homogeeniseksi*, jos $b = 0$. Muutoin yhtälöryhmää kutsutaan epähomogeeniseksi.

Jokaisella homogeenisellä yhtälöryhmällä on ainakin yksi ratkaisu, nollavektori. Tätä ratkaisua kutsutaan *triviaaliksi ratkaisuksi*. [1, s. 17]

Lause 2.7. *Olkoon K lineaarisen yhtälöryhmän $Ax = b$ ratkaisujen joukko, ja olkoon K_H vastaavan homogeenisen yhtälöryhmän $Ax = 0$ ratkaisujen joukko. Tällöin yhtälöryhmän $Ax = b$ mille tahansa ratkaisulle s pätee*

$$K = \{s\} + K_H = \{s + k : k \in K_H\}.$$

Todistus. Olkoon s jokin yhtälöryhmän $Ax = b$ ratkaisu. Osoitetaan siis, että $K = \{s\} + K_H$. Jos $w \in K$, niin $Aw = b$. Täten

$$A(w - s) = Aw - As = b - b = 0.$$

Näin ollen $w - s \in K_H$. Siis on olemassa $k \in K_H$, siten että $w - s = k$. Tästä seuraa, että $w = s + k \in \{s\} + K_H$, jonka takia

$$K \subseteq \{s\} + K_H.$$

Tarkastellaan vielä päinvastoin. Oletetaan nyt, että $w \in \{s\} + K_H$. Nyt siis $w = s + k$ jollekin $k \in K_H$. Silloin $Aw = A(s + k) = As + Ak = b + 0 = b$, joten $w \in K$. Näin ollen $\{s\} + K_H \subseteq K$ ja saadaan $K = \{s\} + K_H$. □
[11, s. 162]

Määritelmä 2.8. Olkoon matriisi A neliömatriisi eli $n \times n$-matriisi. Jos on olemassa saman kokoinen matriisi B, jolle pätee

$$AB = BA = I_n,$$

niin tällöin matriisin A sanotaan olevan *kääntyvä* ja matriisia B sanotaan matriisin A *käänteismatriisiksi* ja merkitään

$$B = A^{-1}.$$

Jos tällaista matriisia B ei ole olemassa, sanotaan matriisin A olevan *singulaarinen*. [1, s. 43]

Tarkastellaan seuraavaksi yhtälöryhmän mahdollisia ratkaisuja.

Lause 2.9. *Olkoon $Ax = b$ yhtälöryhmä, jossa on n lineaariyhtälöä ja n tuntematonta. Yhtälöryhmällä on vain ja ainoastaan yksi ratkaisu täsmälleen silloin, kun se on kääntyvä. Ratkaisu on aina $A^{-1}b$.*

Todistus. Oletetaan, että A on kääntyvä. Sijoittamalla $A^{-1}b$ yhtälöön saadaan $A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = b$. Joten $A^{-1}b$ on ratkaisu. Jos s on mielivaltainen ratkaisu, niin $As = b$. Kerrotaan yhtälön molemmat puolet käänteismatriisilla A^{-1}, jolloin saadaan $s = A^{-1}b$. Näin ollen yhtälöryhmällä on ainoastaan yksi ratkaisu: $A^{-1}b$. □
[11, s. 163]

Lause 2.10. *Jokaisella lineaarisella yhtälöryhmällä on joko nolla, yksi tai äärettömän monta ratkaisua. Ei ole muita mahdollisuuksia.*

Todistus. Jos $Ax = b$ on yhtälöryhmä, yksi seuraavista pätee: (a) yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, (b) yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu. (c) yhtälöryhmällä on enemmän kuin yksi ratkaisu. Täytyy siis osoittaa, että yhtälöryhmällä on ääretön määrä ratkaisuita kohdassa c. Oletetaan, että yhtälöryhmällä $Ax = b$ on enemmän kuin yksi ratkaisu, ja olkoon $x_0 = x_1 - x_2$, missä x_1 ja x_2 ovat kaksi erillistä ratkaisua. Koska ratkaisut x_1 ja x_2 ovat erit, vektori x_0 ei ole nollavektori. Sen lisäksi

$$Ax_0 = A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0.$$

Olkoon k jokin skalaari. Tällöin

$$\begin{aligned} A(x_1 + kx_0) &= Ax_1 + A(kx_0) = Ax_1 + k(Ax_0) \\ &= b + k0 = b + 0 = b. \end{aligned}$$

Näin ollen $x_1 + kx_0$ on yhtälöryhmän $Ax = b$ ratkaisu. Koska matriisi x_0 ei ole nollamatriisi ja skalaarille k on ääretön määrä mahdollisuuksia, on yhtälöryhmällä $Ax = b$ ääretön määrä ratkaisuja. □

[1, s. 61]

Määritelmä 2.11. Yhtälöryhmän *täydennetty matriisi* saadaan muodostettua yhdistämällä kerroinmatriisi sekä yhtälöryhmän oikeanpuoleinen vektori. Yhtälöryhmän (2.3) täydennetty matriisi on

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Eli saadaan muodostettua matriisi pelkästän yhtälönryhmän lukujen avulla.

[1, s. 6]

Esimerkki 2.12. Muodostetaan yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 \qquad\quad = 7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ \ \ 5x_1 - x_2 + 5x_3 \ = 6 \end{cases}$$

täydennetty matriisi. Täydennetyksi matriisiksi saadaan

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

2.7.4 Lineaariyhtälöiden ratkaiseminen

Lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseen on monia erilaisia tapoja. Tässä kappaleessa esitellään niistä muutama.

Elementaariset rivioperaatiot

Määritelmä 2.13. Algebrallisia operaatioita, joiden avulla ratkaistaan matriisimuodossa oleva yhtälöryhmä, kutsutaan *elementaarisiksi rivioperaatioksi.* Niitä ovat seuraavat laskutoimitukset:

1. Rivin kertominen jollain nollasta eroavalla vakiolla.
2. Kahden rivin paikan vaihtaminen keskenään.
3. Jonkin muun rivin tai sen monikerran lisääminen toiseen riviin.

[1, s. 7]
Seuraavaksi esitetään kuinka rivioperaatioiden ja täydennetyn matriisin avulla saadaan ratkaistua lineaarinen yhtälöryhmiä.

Gaussin ja Gauss-Jordanin eliminointimenetelmät

Tässä osassa esitellään systemaattinen tapa lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseksi. Siinä tiettyjen rivioperaatioiden avulla täydennetty matriisi saadaan yksinkertaistettuun muotoon, josta yhtälöryhmän ratkaisu on helppoa nähdä.

Määritelmä 2.14. Matriisin sanotaan olevan *redusoidussa porrasmuodossa*, kun sille pätevät seuraavat kohdat:

1. Jos rivi sisältää nollasta eroavan alkion, on vasemman puoleisimman oltava numero 1. Tätä lukua kutsutaan *johtavaksi alkioksi.*
2. Jos matriisi sisältää rivejä, jotka koostuvat pelkästään nollista, tulee niiden olla ryhmäytyneenä yhteen matriisin pohjalla.
3. Kahdessa peräkkäisessä nollasta eroavan alkion sisältävässä rivissä alemmassa rivissä olevan johtavan alkion tulee olla kauempana matriisin vasemmasta laidasta kuin ylemmässä rivissä olevan johtavan alkion.
4. Jokainen sarake, joka sisältää johtavan alkion, sisältää muutoin pelkästään nollia.

Matriisin, jolle pätee vain kolme ensimmäistä kohtaa, sanotaan olevan *porrasmatriisi*.

[1, s. 11]

Esimerkki 2.15. Seuraavat matriisit ovat redusoidussa porrasmuodossa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ja seuraavat matriisit ovat porrasmuodossa mutteivät redusoidussa muodossa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gaussin eliminaatiomenetelmässä pyritään saamaan täydennetty matriisi porrasmuotoon, kun taas *Gauss-Jordanin eliminaatiomenetelmässä* täydennetty matriisi muutetaan redusoiduksi porrasmatriisiksi.

Täydennetty matriisi saadaan muutettua porrasmatriisiksi ja siitä redusoiduksi porrasmatriisiksi seuraavien vaiheiden avulla.

1. Etsitään matriisin vasemmanpuoleisin sarake, joka ei koostu pelkästään nollista.

2. Jos on tarpeen, vaihdetaan ylimmän rivin ja jonkun toisen rivin paikkaa, jotta saadaan sarakkeen ylimmäksi alkioksi jokin nollasta eroava alkio.

3. Jos nyt sarakkeen ensimmäisenä oleva alkio on a, kerrotaan koko rivi luvulla $1/a$, jotta saadaan ensimmäiseksi alkioksi 1 eli johtava alkio.

4. Lisätään sopiva määrä ensimmäisen rivin moninkertoja alla oleviin riveihin niin, että jokainen johtavan alkion alapuolella olevista alkioista on nolla

5. Jätetään ylin rivi huomiotta ja aloitetaan uudestaan kohdasta 1 jäljelle jäävän osamatriisin kanssa. Tällä tavalla jatketaan niin kauan kuin koko matriisi on porrasmuodossa. Jotta näin saadusta porrasmatriisista saadaan vielä redusoitu, tehdään vielä vaihe 6.

6. Aloitetaan alimmasta rivistä, joka ei sisällä pelkästään nollia ja lähdetään työskentelemään ylöspäin. Lisätään jokaisen rivin moninkertoja sen rivin yläpuolella oleviin riveihin niin, että saadaan johtavan alkion yläpuolelle pelkästään nollia.

[1, s. 14]

Esimerkki 2.16. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ -3x - 4y + z = 0 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

Gaussin eliminaatiomenetelmän avulla. Yhtälöryhmän täydennetty matriisi on

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ratkaistaan matriisi rivioperaatioiden avulla.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+3r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -10 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{10}r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{11}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{5}{7}r_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{7} \end{bmatrix}$$

Saadaan siis

$$\begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ y + \dfrac{1}{5}z = -\dfrac{3}{5} \\ z = -\dfrac{11}{7}. \end{cases}$$

Sijoitetaan z keskimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} y + \frac{1}{5} \cdot (-\frac{11}{7}) &= -\frac{3}{5} \\ y - \frac{11}{35} &= -\frac{3}{5} && || + \frac{11}{35} \\ y &= -\frac{21}{35} + \frac{11}{35} \\ y &= -\frac{10}{35} \\ y &= -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

Sijoitetaan y ja z ylimpään yhtälöön.

$$
\begin{aligned}
x - 2 \cdot (-\frac{2}{7}) - (-\frac{11}{7}) &= 2 \\
x + \frac{4}{7} + \frac{11}{7} &= 2 \\
x + \frac{15}{7} &= 2 \qquad\qquad || - \frac{15}{7} \\
x &= -\frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

Ratkaisuksi saadaan siis

$$
\begin{cases}
x = -\frac{1}{7} \\
y = -\frac{2}{7} \\
z = -\frac{11}{7}.
\end{cases}
$$

Gauss-Jordanin eliminaatiomenetelmässä on kaksi erillistä vaihetta.

1. Edestäpäin suuntautuvassa vaiheessa täydennetty matriisi muutetaan yläkolmiomatriisiksi, jonka jokaisen rivin ensimmäinen nollasta eroava alkio on 1 ja se esiintyy sarakkeessa edeltävän rivin ensimmäisen nollasta eroavan alkion oikealla puolella.

2. Takaapäin suuntautuvassa vaiheessa yläkolmiomatriisi muunnetaan redusoidun porrasmatriisin muotoon muuttamalla ensimmäinen nollasta eroava alkio sarakkeen ainoaksi nollasta eroavaksi alkioksi.

Vrt. [11, s. 175-176]

Esimerkki 2.17. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$
\begin{cases}
x - 2y - 2z = 3 \\
3x - y + z = 1 \\
-x + 5y + 5z = 5
\end{cases}
$$

Gauss-Jordanin eliminaatiomenetelmän avulla. Yhtälöryhmän täydennetty matriisi on

$$
\begin{bmatrix}
1 & -2 & -2 & 3 \\
3 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 5 & -5 & 5
\end{bmatrix}.
$$

Ratkaistaan matriisi rivioperaatioiden avulla.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-3r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & -8 \\ -1 & 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & -8 \\ 0 & 3 & -7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 3 & -7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{56}{5} & \frac{64}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{5}{56}r_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-\frac{7}{5}r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

Saadusta matriisista voidaan suoraan lukea yhtälön ratkaisu, joka on

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{7} \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{8}{7}. \end{cases}$$

3 Tutkimustehtävä ja tutkimusongelmat

Tämän tutkimuksen tehtävänä oli kehittää heikosti matematiikassa suoriutuville oppilaille sopivia kielentämistehtäviä sekä selvittää mitä mieltä oppilaat ovat matematiikan kielentämisestä. Tehtäviä suunniteltaessa pyrittiin huomioimaan luvun 2 teoreettinen viitekehys. Tehtävät liittyivät yhtälön käsitteeseen, sen ratkaisuun ja yhtälöparin ratkaisemiseen. Tähän pro gradu -tutkielmaan liittyvää tutkimusta tehtiin erään Länsi-Suomen alueella olevan koulun osa-aikaisessa erityisopetuksessa. Tutkimuksessa pyritään selvittämään heikosti matematiikkaa osaavien oppilaiden mielipide niin suullisesta kuin kirjallisestakin kielentämisestä. Tarkastelun kohteena on myös heidän oppimisprosessinsa niin opettajan, oppilaan kuin tutkijankin näkökulmasta ja pyrkimys sen avulla selvittää mahdollisimman tehokkain tapa hyödyntää kielentämistä.

Tutkimuksessa haluttiin vastata seuraaviin tutkimuskysymyksiin:

1. Minkälaista oppimista havaittiin kielentämistehtävien avulla?

2. Mitä mieltä matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavat oppilaat olivat kielentämisestä?

3. Millä tavoilla kielentämistä pystytään hyödyntämään matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavien oppilaiden kanssa parhaiten?

Tutkimuksen keskiössä on oppilaiden mielipiteet kielentämisestä ja sen toimivuudesta.

4 Tutkimuksen lähtökohdat ja toteutus

Tässä luvussa esitellään tutkimuksen lähtökohtia, toteutusta ja aineiston keruu- sekä analysointimenetelmiä. Tutkimus on kvalitatiivinen ja empiirinen tutkimus. Tehtyjä havaintoja lähestytään tutkimusongelmien näkökulmasta sekä havaintojen pohjalta tehdään johtopäätöksiä. Empiirisessä tutkimuksessa teoria tukee havainnoista saatuja tuloksia. [47] Kvalitatiivisessa tutkimuksessa taas pyritään kuvaamaan eri metodien avulla sellaista aineistoa, jota ei voida määrällisesti analysoida. Tutkimuksessa lähdetään liikkeelle yleensä jostain ilmiöstä tai menetelmästä ja aineistona voi olla esimerkiksi haastatteluita ja havaintoja. [10]

Tutkimusstrategiana käytetään tapaustutkimusta, sillä tutkimuksessa tarkastellaan yksittäisiä tapauksia. Tapaustutkimus on empiiristä tutkimusta, jossa tutkimuksen kohteena on jokin nykyajan ilmiö todellisessa elämäntilanteessa, sen omassa ympäristössään. Yleensä tapaustutkimuksessa tutkitaan yhtä tapahtumaa, mutta myös useamman tapauksen tutkimukset ovat mahdollisia. Kohteeksi voi valikoitua tyypillisiä ja edustavia tapauksia tai ainutkertaisia ja poikkeavia. Tapaustutkimus ei yleensä ole yleistettävissä vaikkakin yksilöitä yhdistäviä piirteitä voidaan havaita. [50]

4.1 Tutkimuksen toteutus ja aineiston keruu

Ideana matematiikan kielentämisen tutkiminen tuli minulle luokanopettaja ystävältäni. Hän tutki matematiikan kirjallista kielentämistä alakouluissa. Matematiikan kielentämiseen päädyin lopulta luettuani Joutsenlahden ja Tossavaisen artikkelin "Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa" (2018). Ajatus matematiikan tekemisestä hyvin erillä tavalla kuin on totuttu, innosti minua. Olen myös aina ollut kiinnostunut niistä oppilaista, joiden on vaikeaa oppia matematiikkaa syystä tai toisesta. Halusinkin siis tutkia olisiko kielentäminen näille oppilaille hyvä tapa jäsentää omaa ajatusmaailmaansa ja millaisia seikkoja tulisi ottaa huomioon kielentämistehtäviä tehdessä.

Tutkimus tehtiin syksyllä 2019 länsisuomalaisessa yläkoulussa osa-aikaisessa erityisopetuksessa. Kyseinen yläkoulu valikoitui tutkimuksen kohteeksi aiempien suhteideni takia. Tutkimuslupaa pyydettiin koulun rehtorilta sähköpostitse lähetetyllä kirjeellä (liite A) sekä tutkimukseen osallistuvien oppilaiden huoltajilta paperisella lomakkeella (liite B). Erityisopettaja valikoi tutkimukseen sopivat oppilaat, joita loppujen lopuksi tutkimuksessa oli neljä.

Tutkimusperiodiin kuului kuusi 75 minuutin pituista oppituntia. Jokainen tutkimukseen osallistuva oppilas osallistui ainakin kahdelle oppitunnille. Tuntien aiheena oli yhtälön käsite, sen ratkaiseminen sekä yhtälöparit. Jokaisella tunnilla pyrittiin jossain vaiheessa tekemään minun suunnittelemia kielentämistehtäviä. Osalla tunneista tehtävät olivat parin kanssa tehtäviä suullisia tehtäviä ja osassa kirjallisia. Ohessa esimerkkejä kielentämistehtävätyypeistä.

- Käsitteen määrittely ja sen käyttäminen (liite D)
- Ratkaise itse, ja selitä parille ratkaisu (liite E)
- Selitä, missä virhe (liite F)

Kaikki oppitunnit videoitiin, jonka lisäksi itse olin tutkijan roolissa seuraamassa niitä. Tuntien lisäksi oppilaat osallistuivat alku- ja loppuhaastatteluun.

Haastatteluihin päädyin sen takia, että sen etuna on ennen kaikkea joustavuus. Haastattelijana minulla on mahdollisuus toistaa kysytty asia, oikaista väärinkäsityksiä, selventää kysymyksiä sekä käydä keskustelua haastateltavan kanssa.

Tutkimusjakson alussa tehdyn alkuhaastattelun (liite C) avulla pyrittiin kartoittamaan heidän minäpystyvyyttä, omia asenteitaan matematiikkaa sekä yleensä ryhmätyöskentelyä kohtaan. Alkuhaastattelu sisälsi kymmenen 4-portaista väittämää, joissa vaihtoehdot olivat "täysin samaa mieltä", "jokseenkin samaa mieltä", "jokseenkin eri mieltä" ja "täysin eri mieltä". Väittämien lisäksi haastattelussa oli neljä avointa kysymystä, joista keskustelimme oppilaiden kanssa. Haastattelutilanteessa minä kyselin ja täytin lomaketta ja oppilaat vain vastailivat.

Loppuhaastattelu suoritettiin teemahaastatteluna ja siinä käsiteltiin seuraavia aiheita:

- Mielipiteet matematiikan kielentämisestä, niin suullisesti kuin kirjallisesti,
- Kielentämiseen vaikuttavat seikat sekä
- Eri tehtävätyypit.

Haastattelun aikana näytin oppilaille tunneilla tehtyjä tehtäviä, jolleivat he muistaneet kyseistä tehtävää. Loppuhaastattelut myös nauhoitettiin analysoimista varten. Oppilaiden haastatteluiden ja tuntien lisäksi tutkimusaineistoon kuului myös tutkimusperiodin ajan käytetyt vihot sekä erityisopettajan kanssa tuntien jälkeen käydyt keskustelut.

4.2 Aineiston analysointi

Tunneista saadun kuvamateriaalin perusteella litteroin oppilaiden sekä oppilas-opettaja väliset keskustelut, jotka olivat tutkimuksen kannalta tärkeitä. Litterointi oli siis valikoitu niin, että kuvatut puheet olivat yhteydessä tutkimuksen tavoitteisiin. Tämän lisäksi myös loppuhaastattelut litteroitiin.

Oppituntien aikana puheen luominen niin oppilaiden kuin opettajan ja oppilaan välille oli tärkeintä. Heidän välistä vuorovaikutusta pyrittiin kehittämään ja tekemään oppimisympäristöstä turvallisen.

Ennen aineiston tarkempaa analysointia tutustuin matemaattiseen osaamiseen, kielentämiseen ja matemaattisiin oppimisvaikeuksiin tarkemmin. Vasta tämän jälkeen aloin tutustua kuvattuun materiaaliin. Keskustelimme koko tutkimuksen ajan aktiivisesti tekemistäni kielentämistehtävistä erityisopettajan kanssa, joten pystyin aktiivisesti kehittämään niitä tutkimusperiodin ajan oppilaan osaamisentasoa vastaaviksi. Myös erityisopettaja huomasi tuntien aikana helpottaa antamia tehtäviä, jos koki aiheen muutenkin jo oppilaille hankalaksi. Litteroidun materiaalin ja havaintojen avulla pyrittiin tekemään tutkimuskysymyksiini liittyviä johtopäätöksiä.

Oppilaiden oppimista tutkiessani analysoin erikseen jokaisen tunnin ja heidän oppimisensa sillä tunnilla tietyn kielentämistehtävän avulla. Jos saman tapaisia tehtäviä oli useammalla tunnilla tein oppilaiden oppimisesta yhteenvedon.

Oppilaiden mielipiteitä analysoidessa jaoin heidät tyyppeihin sen mukaan ketä koki kielentämisen mielekkäänä ja hyödyllisenä, raskaana, mutta hyödyllisenä, mielekkäänä, mutta hyödyttömänä sekä raskaana ja hyödyttömänä. Havaintojeni sekä haastatteluiden perusteella analysoin tämän jälkeen minkä takia he kokivat näin.

Tunteja havainnoidessani ja oppilaita haastateltaessa otin ylös oppilaan asenteista, oppimisympäristöstä sekä mielipiteistä sellaisia asioita, joiden koin auttavan hyödyntämään kielentämistä matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavien oppilaiden kanssa parhaiten.

5 Kielentäminen matemaattisia oppimisvaikeuksia omaaville oppilaille

Tutkimukseni tavoitteena oli kehittää matemaattisia kielentämistehtäviä, jotka sopivat heikosti matematiikkaa osaaville, sekä selvittää mitä mieltä he olivat matemaattisesta kielentämisestä. Tutkimukseen osallistui neljä oppilasta, joita merkitsen kirjaimilla A, B, C ja D.

5.1 Minkälaista oppimista havaittiin kielentämistehtävien avulla?

Tärkein tavoitteeni oli kielentämistehtäviä tehdessä, että ne tukisivat oppilaan oppimisprosessia. Oppilailla yhtälön ratkaiseminen ei ollut vielä halussa, joten keskeisimmäksi tavoitteeksi tuli se, että oppilaat tuntien jälkeen osaisivat itsenäisesti ratkaista yhtälöitä. Jorma Joutsenlahden (2003) mukaan myös matemaattisten käsitteiden kielentäminen on osa käsitteen konstruointiprosessia. Selittäessään muille käsitettä ja siihen liittyviä alakäsitteitä, joutuu oppilas pohtimaan käsitteen keskeisiä piirteitä ja prosessoimaan syvemmin sen merkitystä samalla syventäen omaa ymmärrystään asiasta.

Opettaja: *Sanooko oppilas C yhtälö sinulle mitään?*
Oppilas C: *Juu.*
Opettaja: *Osaisitko sä selittää sitä jollain tapaa?*
Oppilas C : *En.*
Opettaja: *Niin. Eli vähän niin kuin tuttua on. Tulee heti mieleen. Jos mä kirjoittaisin jotakin tohon ni minkälaisen mä kirjottaisin? Miltä se näyttää se yhtälö?*
Oppilas C: *Onks ne niitä mis on kaikkii äksii ja näitä.*
Opettaja: *Siin ois äksää. Mitä siin muut vois olla?*
Oppilas C: *Vaik x plus neljä o kuus*

Oheisesta keskustelusta huomataan, että oppilas kokee, ettei osaa selittää mikä yhtälö on, mutta osaa kuitenkin kuvailla omin sanoin millainen se voisi olla. Oppilaan vähäisenkin osaamisen päälle on hyvä lähteä rakentamaan uusia käsitteitä syventämällä heidän ymmärrystä asiasta. On erityisen tärkeää, että oppilasta ohjataan käyttämään matemaattisia käsitteitä oikein sekä annetaan käsitteille määritelmä ja tarkoitus. [22]

“Käsitteen määrittely ja käsitteen käyttö” -kielentämistehtävä oli toisella tunnilla. Oppilaita pyydettiin keksimään yhtälö ja käyttämään ensimmäisellä tunnilla opittuja käsitteitä selittäessään yhtälöä toiselle. Kaikki oppilaista vierastivat alussa ääneen selittämistä. Tilanteen epämielekkyys vaikutti siihen, että heidän oli helpompi oikoa ja olla käyttämättä uusia käsitteitä, sillä he eivät olleet vielä aivan varmoja, milloin niitä tulisi käyttää. Vaikka opettaja kävi huomauttamassa oikeiden käsitteiden käytöstä, heti opettajan lähdettyä käsitteiden käyttö unohtui.Tehtävä tehtiin kahteen kertaan ja oppimista havaittiin niillä henkilöillä, jotka uskalsivat epävarmanakin käyttää uusia käsitteitä. Näillä oppilailla jo toisella kerralla oli huomattavasti helpompi käyttää käsitteitä selittäessä asiaa parille.

“Ratkaise itse, ja selitä parille ratkaisu” -tyyppisiä kielentämistehtäviä tehtiin kolmella eri tunnilla, joiden aiheina olivat yhtälön ratkaisu, yhtälöpari ja yhtälöparin ratkaisu piirtämällä. Näillä tunneilla ajatus sanallisesta selittämisestä oli jo oppilaille tuttu ja jännitys oli osalla jo hieman helpottanut. Useissa tutkimuksissa ollaan havaittu, että vaikka oppilaan perustaidot opittavassa asiassa sekä kognitiiviset työkalut olisivat hyvät, heidän heikko motivaatio tai negatiiviset tunteet matematiikkaa kohtaan estävät heitä oppimista käsiteltävää asiaa sekä heidän on vaikea suoriutua annetuista tehtävistä. [6, 51] Tämä pystyttiin havaitsemaan heikosti matematiikkaa osaavien oppilaiden keskuudessa aiheen vaikeutuessa. Aluksi tehtävien ollessa normaaleja yhtälön ratkaisuun liittyviä tehtäviä oppilaat kielensivät mielekkäästi parille ja myös he itse kokivat ymmärtäneensä asian. Asian hankaloituessa motivaatio tehdä tehtäviä laski sekä aktiivinen osallistuminen tunnin keskusteluihin väheni. Asian hankaloituessa myös ajatuksia oli hankala jäsentää ymmärrettävään muotoon.

“Selitä, missä virhe.”-tyyppisiä kielentämistehtäviä tehtiin viimeisellä tunnilla jonka aiheena oli kertaus. Tällä kertaa oppilaat pääsivät myös kokeilemaan kirjallista kielentämistä. Kirjallinen kielentäminen auttaa oppimaan matematiikkaa, sillä kirjoittaessa oppilas joutuu pohtimaan enemmän ja syvällisemmin ratkaisua kuin ääneen puhuessa. Kirjallisen kielentämisen rauhoittava vaikutus pystyttiin havaitsemaan myös oppilaiden välillä. Innokkaimmat olisivat heti laskun nähdessään halunneet vastata ääneen, mutta koska vastaus tuli ensin kirjoittaa vihkoon, oli muilla oppilailla enemmän aikaa kunnolla prosessoida asia. Pidempi prosessointiaika voi johtua esimerkiksi toiminnanohjauksen ongelmista, mikä on yksi matemaattisten oppimisvaikeuksien selittävistä tekijöistä. [28]

Tehtäviä suunnitellessa tuli olla tarkkana, ettei tehnyt liian haastavia tehtäviä. Koska tehtävät pyrittiin käymään erityisopettajan kanssa ennen tunteja läpi, oli tehtävät sisällöllisesti suurimmaksi osaksi tarpeeksi helppoja.

Tuntien ja tehtävien uudenlainen rakenne hämmensi aluksi. Oppilaat ovat tottuneet tekemään itsenäisesti tehtäviä kirjasta ja useamman tehtävän kerrallaan. Nyt tunneilla oli pääasiallisesti paljon keskustelua sekä vain muutama aiheeseen liittyvä tehtävä.

> *"Joskus oli vähän silleen, et mitä vittuu, et milleen se tehään, et ei oikein tajunnut jotakin, mut sit kuitenki tajuskin helpommin."*
> -Oppilas A

Tutkimusperiodin jälkeen oppilaat olivat lähteneet seuraavalla tunnilla omatoimisesti tekemään tehtäviä yhtälön ratkaisusta ja tehtävät olivat onnistuneet lähes tulkoon ilman ohjeistusta. Voimme siis olettaa, että oppimista on tapahtunut.

5.2 Mitä mieltä matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavat oppilaat olivat kielentämisestä?

Tärkein tavoitteeni oppilaiden mielipiteitä selvittäessä oli, että saisin mahdollisimman selkeän kuvan heidän ajatuksistaan. Tässä kappaleessa avataan heidän matemaattista profiiliaan alkuhaastattelun avulla sekä loppuhaastattelun avulla pyritään kartoittamaan heidän mielipiteitään matemaattisesta kielentämisestä. Seuraavaksi käyn oppilaskohtaisesti läpi alkuhaastattelun tulokset.

Oppilas A: Alkuhaastattelun perusteella hyvin motivoitunut oppimaan matematiikkaa ja innostuu helposti matematiikan tehtävistä. Kuitenkin haastavan tehtävän tullessa vastaan motivaatio laskee nollaan, jollei heti saa apua. Esimerkiksi kotona tai isossa luokassa tehtävät harvoin onnistuvat. Kokee, että opitut asiat unohtuvat helposti mielestä, jolloin uusien asioiden opettelu hankaloituu. Oppilas kertoo tekevänsä tunneilla yleensä yksilöllistettyä matematiikan kirjaa.

Oppilas B: Alkuhaastattelun perusteella oppilas kokee matematiikan ahdistavana. Uuteen asiaan mentäessä jo ahdistuu, koska ei edellistäkään asiaa ymmärtänyt.

Joskus käy niin, että aihe on tuntunut alussa vaikealta vaikka lopulta se ei sitä ollutkaan. Kokee ryhmä- ja parityöskentelyn kuitenkin miellyttävänä. Kokee, että pystyisi oppimaan matematiikkaa, jos olisi vain tarpeeksi aikaa. Oppilas kertoo tekevänsä osittain yksilöllistettyä matematiikan kirjaa.

Oppilas C: Alkuhaastattelun perusteella oppilas kokee olevansa huono matematiikassa eikä pidä siitä. Oppilas ei koe olevansa kykenevä oppimaan matematiikkaa, sillä aina unohtaa sen tunnin asiat.

Oppilas D: Alkuhaastattelun perusteella oppilas ei pidä matematiikasta eikä myöskään hirveästi ryhmätyöskentelystä. Kokee että on kuitenkin melko hyvä oppimaan uusia asioita ja ratkaisemaan tehtäviä.

Tutkimukseen osallistuvien oppilaiden kirjo oli siis yllättävän laaja vaikka otos olikin pieni. Loppuhaastatelussa kysyttiin oppilaiden mielipidettä matematiikan kielentämisestä, niin suullisesta kuin kirjallisesta. Seuraavaksi käyn oppilaskohtaisesti läpi loppuhaastattelun tulokset.

Oppilas A: Koki suullisen kielentämisen aluksi hyvin outona ja mietti ymmärsikö edes aiheesta mitään, koska tunneilla ei tehty perinteisen mallin mukaan tehtäviä. Ensimmäisillä tunneilla oli haastavaa lähteä selittämään, mutta sitten kun ymmärsi paremmin mitä pitää tehdä oli jo hieman helpompaa. Jos oppilas koki aiheen helpoksi, oli kielentäminenkin helpompaa. Itse selittäessä ratkaisua ymmärsi sen paremmin, mutta oppilas koki, että myös toisen selittäminen saattoi auttaa ymmärtämään asiaa. Kokee kuitenkin, ettei kielentämisestä ollut hirveästi hyötyä. Yhä tuntien loputtua koki suullisen kielentämisen outona ajatuksena sekä hänen mielestään kirjallinen kielentäminen oli luonnollisempaa. Usein huomasi suullisessa kielentämisessä sen ongelman, ettei kerennyt kunnolla jäsentämään ajatusta itselleen, kun jo piti selittää sitä seuraavalle ja muiden puhuminen häiritsi omaa keskittymistä.

Oppilas B: Koki suullisen kielentämisen ihan mukavana vaikka aluksi se olikin jännittävää. Oppilaan mielestä hän ymmärsi asian paremmin silloin, kun selitti sitä muille. Tunneilla tehdyt kielentämistehtävät auttoivat hänen mielestään oppimaan ja syventämään oppimaansa. Kirjallinen kielentäminen oli kuitenkin oppilaalle ominaisempaa kuin suullinen kielentäminen ja lähes tulkoon joka tuntinen kielentäminen oli välillä raskasta. Pitää hyvänä ideana normaalien kirjan tehtävien ja kielentämistehtävien yhdistelyä.

Oppilas C: Koki, että olisi mielekkäämpää tehdä tehtäviä yksin. Turhautui helposti, jos pari ei osannutkaan asiaa tai itsellä oli vaikeuksia ymmärtää aihetta. Suullinen kielentäminen oli hänen mielestään miellyttävämpää kuin kirjallinen, sillä tuntui turhalta kirjoittaa pitkiä juttuja turhaan. Oppilas koki myös, että ei kehtaa kyseenalaistaa toisen ratkaisua, jos huomaa siinä jonkin virheen, eikä kehtaa kysyä, jos joku kohta muuten mietityttää. Oppilaan mielestä kielentämisestä ei ollut hyötyä hänen oppimisessaan.

Oppilas D: Ei pitänyt parityöskentelystä ja ääneen selittäminen ei tuntunut kovin kivalta. Koki ymmärtävänsä asian paremmin kun joku muu selitti ratkaisunsa. Oppilas huomasi myös, että aiheen vaikeustasolla oli suuri vaikutus kielentämisen mielekkyyteen.

> *"Joskus ei vaan tee mieli puhua"*
> -Oppilas D

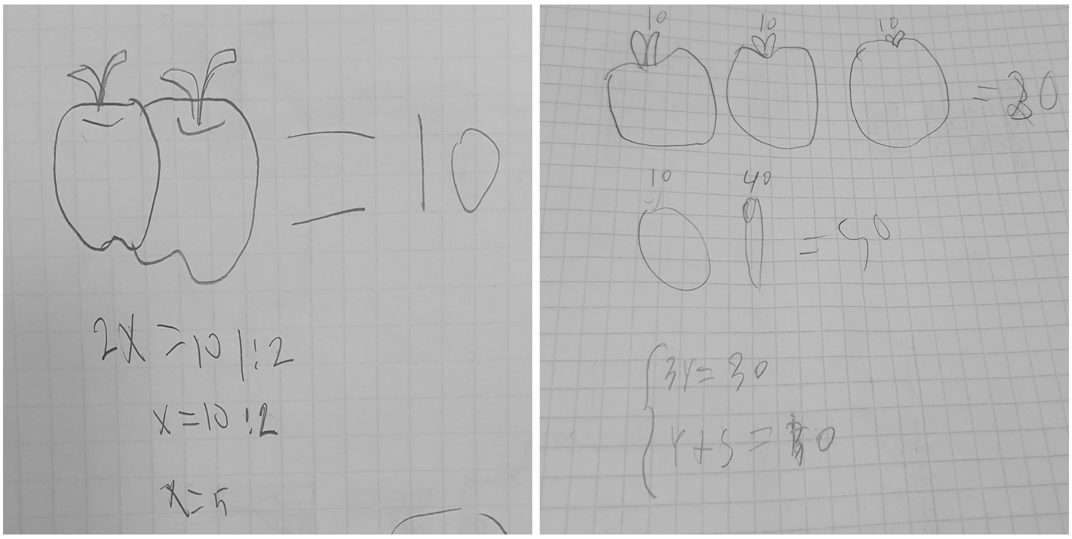
Oppilaiden mielipiteistä voidaan tehdä yhteenveto, että suullinen kielentäminen jännitti suurimpaa osaa. Heidän mielestään opittavalla aiheella oli suuri merkitys siihen, miten kielentäminen onnistui. Osalla valittu pari aiheutti epämielekkyyttä suulliseen kielentämiseen, josta ei päästy eroon tutkimusjakson aikana. Suurin osa koki matematiikan kirjallisen kielentämisen luonnollisempana kuin suullisen kielentämisen.

5.3 Millä tavoilla kielentämistä pystytään hyödyntämään matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavien oppilaiden kanssa parhaiten?

Tavoitteena oli havaintojeni sekä haastatteluiden perusteella miettiä, millä tavoilla kielentämistä pystyttäisiin hyödyntämään parhaiten juurikin matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavien oppilaiden kanssa. Thunbergin ja kollegoiden (2014) mukaan tehostettua tukea tarvitsevia olisi 20 prosenttia koko oppilasmäärästä ja 5 prosenttia tarvitsisi erityistä tukea. Kuitenkin opetus- ja kulttuuriministeriön laatimassa selvityksessä (2014) todetaan, että tehostettua tukea saa ainoastaan 5,1 prosenttia ja erityisen tuen piirissä on 7,6 prosenttia peruskoulun oppilasmäärästä. Näin ollen voidaan olettaa, että osa tehostettua tukea tarvitsevista on yleisopetuksen piirissä. Tulevana matematiikan aineenopettaja haluan ottaa parhaimmalla tavalla myös heidät huomioon tehtäviä laatiessa.

Tunneista oli selkeästi havaittavissa se, että jos aihe on hankala, oli oppilaiden vaikea lähteä kielentämään. Jokaiseen aiheeseen ei välttämättä edes kielentäminen sovi. Opettajan olisi hyvä käyttää kielentämistä tukemaan oppilaan oppimista vasta sitten, kun aihe on hieman tutumpi. Vaikean aiheen kielentäminen voi aiheuttaa ahdistusta oppilaissa, jotka eivät muutenkaan pidä matematiikasta tai ovat jo valmiiksi heikosti motivoituneita. Tätä on vältettävä. Opettajan on siis tarkkaan harkittava onko aihe sellainen, että siitä saa ymmärrettäviä kielentämistehtäviä sekä että oppilailla on myös tarvittavat tiedot ratkaista tehtävät ja kielentää ne.

Opettajan kannattaa ottaa kielentämisen osaksi tuntia ihan pienissäkin määrin. Jorma Joutsenlahden (2003) mukaan, jos opettaja aktiivisesti kannustaa oppilaita käyttämään epäformaalia kieltä eli kertomaan matemaattisista ajatuksistaan omin sanoin, pääsee hän tällöin kaikista lähimmäksi oppilaan ajatuksen kulkua. Näin oppilas tottuu ajatukseen siitä, että matemaattisia ajatuksia voi selittää ääneen ja tilannetta ei tarvitse jännittää. Myös opettajan on helppo huomata mahdolliset ajatusvirheet nopeasti ja välttää näin väärien ajatusmallien syntymisen. Esimerkkinä voin avata eräällä tunnilla käyneen tapahtuman. Sillä tunnilla, jolla tehtiin "yhtälöpari" -kielentämistehtävä (liite E), oppilaiden tuli piirtää vihkoihin samankaltainen yhtälö, jossa käyttää omenaa muuttujana. Oppilas piirsi oheisen yhtälön vihkoon.



Kuva 5.1. Oppilaiden kehittämät yhtälö ja yhtälöpari

Tämän jälkeen parin tuli ratkaista kuinka paljon omenan on oltava. Tässä vaiheessa oppilas sanoi, että niiden on oltava 6 ja 4, koska $6 + 4 = 10$. Yhtälön keksinyt oppilas hieman hämmentyi vastauksesta. Tässä vaiheessa opettaja puuttui tilanteeseen ja muistutti, että kysessä on sama muuttuja, eli molempien omenien on oltava saman verran. Jollei oppilas olisi tässä vaiheessa avannut ajatteluaan ääneen, olisi voinut olla, että hänellä olisi jäänyt koko tunnin asia ymmärtämättä.

Oppimisympäristöllä, opettaja-oppilas-suhteella sekä oppilas-oppilas-suhteella on myös suuri vaikutus suullisessa kielentämisessä. Suullinen kielentäminen sopii parhaiten sellaiseen luokkaan, jossa on turvallista epäonnistua ja uskalletaan kysyä ja kyseenalaistaa.

Kirjallista kielentämistä kannattaa lähteä ujuttamaan hiljalleen tehtävien tekoon. Kun motivaatio tehtävien tekoon on jo muutenkin alhainen, osa oppilaista voi kokea että ns. ylimääräisen kirjoittaminen on hyvin turhauttavaa. Kuitenkin kun siitä tulee rutiinin omaista, kirjoittamisprosessi voi myös selkeyttää ja kehittää matemaattista ajattelua.

Paras tapa hyödyntää kielentämistä matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavien oppilaiden kanssa on siis käyttää molempia kielentämisen muotoja ja pieninä osina tuntia.

6 Pohdintaa

Tutkimukseni on laadullinen tapaustutkimus, joten siinä tutkitaan yksittäisten henkilöiden toimintaa tutkimustilanteessa. Näin ollen tutkimustulokset voivat vaihdella riippuen tutkimuksen otoksesta eli keitä henkilöitä tutkitaan. Osassa samankaltaisissa tutkimuksissa tutkimustulokset voivat kuitenkin olla hyvinkin samankaltaisia, joten ne ovat osittain yleistettävissä.

Tutkimustuloksiin vaikuttaa tutkimukseen valikoituneet oppilaat. Jokainen oppilas on yksilö, joten tutkimustulokset voisivat olla hyvinkin erilaisia, jos tutkimus toistettaisiin eri oppilailla. Toisille oppilaista kielentäminen sopii paremmin kuin toisille. Sen lisäksi esimerkiksi oppilaan matemaattisen oppimisvaikeuden vaikeusaste ja asenteet matematiikka kohtaan vaikuttavat tutkimustuloksiin. Useat tehdyistä tehtävistä olivat myös paritehtäviä, joten myös halukkuus työskennellä parin kanssa ja valittu pari voi vaikuttaa tuloksiin.

Myös tutkijana olen itse osallistunut tuntien suunnitteluun sekä haastatteluihin ja olen tehnyt havaintoja ulkopuolisen näkökulmasta. Olen analysoinut tuntien tapahtumat peilaten omaan kokemukseeni sekä teoriapohjaan. Toisille tutkijoille voi tulla erilainen käsitys tapahtumista sekä he voivat nähdä asiat eri tavalla kuin minä. Keskusteluita voidaan tulkita eri tavoin sekä tunnit ollaan voitu suunnitella eri tavalla. Olen pyrkinyt tukemaan päätelmiäni esittämällä tunneilla tapahtuneita tilanteita ja keskusteluita litteroituna.

Haastatteleminen oli myös välillä hankalaa. Oppilaiden oli hankala sisäistää käsitettä kielentäminen, joten sen käyttämistä olisi pitänyt välttää haastattelutilanteissa. Kuitenkin se oli hankalaa sillä itse olen tottunut jo käyttämään sitä ja ymmärrän mitä se tarkoittaa. Välillä oli myös oltava tarkkana, ettei johdatellut oppilaita vaan, että antoi oppilaan itse kertoa oman mielipiteensä.

Kielentämisestä on hyötyä monille oppilaille, vaikka he itse kokevat sen ylimääräisenä työnä. Aluksi työskentelytavan muuttaminen on raskasta sekä osittain tuntemattomien oppilaiden edessä puhuminen voi jännittää. Ennen puhumaan tottumista monella on pelko, että sanookin jotain väärin tai pari ei ymmärrä omaa selitystä. Jos oppilaalla on vahva kokemus, ettei tästä mitään tule, niin kestää hetken, että siitä tunteesta pääsee eroon. Turvallinen ja hyväksyvä ilmapiiri on tämän takia tärkeää

Suurin osa oppilaista koki kirjallisen kielentämisen luonnollisempana. Johtuuko tämä vain totutusta toimintamallista vai siitä, että todellakin kirjallisesti kielentäessä oppilaat saivat jäsennettyä paremmin ajatuksensa? Kirjoittaessa ei ollut jännitystä ääneen puhumisesta ja kirjoittamaansa sai muokata niin kauan kun se oikeasti kuvasi sitä mitä ajatteli.

Osalla oppilaista asioiden prosessointi tapahtuu myös selvästi helpommin sisäisen puheen avulla. Oppilas ääneen pohtiessaan jäsentää ongelman itselleen luonnollisen kielen avulla, muttei kuitenkaan mahdollisesti luo sellaisia lauserakenteita, että muut voisi ymmärtää ajatuksen kulun. Tämä voi johtaa siihen, että selittäessä oppilas kykenee jo näkemään ongelman ratkaisun. Voiko olla, että osa oppilaista alisuoriutuu tämän takia yleisopetuksen luokassa, koska ei pääse pohtimaan asioita itsekseen ääneen?

Pohdittavaksi jääkin mitä asioita tulee ottaa huomioon kielentäessä yleisopetuksen luokassa niin, että matemaattisia oppimisvaikeuksia omaavat oppilaatkin hyötyisivät siitä. Kielentäminen on hyvin häiriöherkkää. Isossa luokassa kaikkien oppilaiden samanaikainen suullinen kielentäminen voi aiheuttaa enemmän haittaa kuin hyötyä niille kenelle matematiikan osaaminen on heikkoa. Tällöin kirjallinen kielentäminen voisi auttaa, mutta tehtävistä pitäisi tehdä sellaisia, että myös heikosti motivoitunut jaksaa niihin panostaa.

Lähteet

[1] Anton, H. ja Rorres, C. (2014). *Elementary linear algebra - applications version* 11th edition, Wiley.

[2] Aunio, P. ja Niemivirta,M. (2010). *Predicting Children's Mathematical Performance in Grade One by Early Numeracy.* Learning and Individual Differences 20.5: 427–435. Web.

[3] Baddeley, A. (1998). *Working Memory.* Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Series III Sciences de la Vie 321.2-3: 167–173. Web.

[4] Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory.* Englewood Cliff s, NJ: Prentice hall.

[5] Björn, P., Aro, M. ja Koponen, T. (2018). *Matematiikan oppimisvaikeuksien tutkimusperustainen tuki*. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Sifverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 184-201.

[6] Chang, H. ja Sian, B. (2016). *The Math Anxiety-Math Performance Link and Its Relation to Individual and Environmental Factors: a Review of Current Behavioral and Psychophysiological Research.* Current Opinion in Behavioral Sciences 10.C: 33–38. Web.

[7] Chapin, S.H. (2003). *Classroom Discussions: Using Math Talk to Help Students Learn. Grades 1-6.*

[8] Denissen, J.J. A, Zarrett, N.R. ja Eccles, J.S. (2007). *I Like to Do It, I'm Able, and I Know I Am: Longitudinal Couplings Between Domain-Specific Achievement, Self-Concept, and Interest.* Child Development 78.2: 430–447. Web.

[9] Diamond, A. (2014). *Executive Functions.* Annual Review of Psychology 64.1: 135–168. Web.

[10] Eskola, J. ja Suoranta, J. (1998). *Johdatus laadulliseen tutkimukseen.* Tampere: Vastapaino, Print.

[11] Friedberg, S., Insel, A. ja Spence, L. (1997). *Linear algebra* 3rd edition, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.

[12] Friedman, N. ja Miyake, A. (2017). *Unity and Diversity of Executive Functions: Individual Differences as a Window on Cognitive Structure.* Cortex 86: 186–204. Web.

[13] Geary, D.C. (2011). *Consequences, Characteristics, and Causes of Mathematical Learning Disabilities and Persistent Low Achievement in Mathematics.* Journal of Developmental & Behavioral Pediatrics 32.3: 250–263. Web.

[14] Geary, D.C., Hoard, M.K. ja Bailey, D.H. (2012). *Fact Retrieval Deficits in Low Achieving Children and Children With Mathematical Learning Disability.* Journal of Learning Disabilities 45.4: 291–307. Web.

[15] Hannula, M. ja Holm, M. (2018). *Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä.* Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Sifverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 132-154.

[16] Hembree, R. (1990). *The Nature, Effects, and Relief of Mathematics Anxiety.* Journal for Research in Mathematics Education 21.1: 33–46. Web.

[17] Hornung, C., Schiltz, C., Brunner, M. ja Martin, R. (2014). *Predicting First-Grade Mathematics Achievement: The Contributions of Domain-General Cognitive Abilities, Nonverbal Number Sense, and Early Number Competence.* Frontiers in Psychology 5: https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2014.00272/full (luettu 29.3.2020).

[18] Joutsenlahti J. (2003). *Kielentäminen matematiikan opiskelussa.* Teoksessa Virta Arja & Marttila Outi (toim.) (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta (Ainedidaktinen symposium 7.2.2003). Turku: Turun opettajankoulutuslaitos, 188–196. (Turun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisuja B:72).

[19] Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä: 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen ja uskomusten ilmentämänä.* Acta Universitatis Tamperensis 1061.

[20] Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2015). *Kielentämisen käsite ainedidkatisissa tutkimuksissa.* Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim.),

Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista (s.42-62). Suomen ainedidaktisen tutkimusseuran julkaisuja 8. Jyväskylä: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura ry.

[21] Joutsenlahti, J. ja Tossavainen, T. (2017). *Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa*. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Sifverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 410-430.

[22] Juvonen-Nihtinen, M., Lappalainen, U. ja Nevalainen, V. (2004). *Ajattelu ja ongelmanratkaisu.* Teoksessa Ahonen, Timo. et al. Sanat sekaisin?: kielelliset oppimisvaikeudet ja opetus kouluiässä. 3. tark. p. Jyväskylä: PS-kustannus, 2004. Print. 122-149.

[23] Kilpatrick, J., Swafford, J. ja Findell, B. (2001). *Adding It up: Helping Children Learn Mathematics.* Washington, D.C: National Academy Press, Print.

[24] Kramer, A. (2012). *Matematiikan suullinen kielentäminen erityisopetuksessa*, pro gradu-tutkielma, Tampereen yliopisto, Kasvatustieteiden yksikkö.

[25] Lefevre, J. et al. (2010). *Pathways to Mathematics: Longitudinal Predictors of Performance.* Child Development 81.6: 1753–1767. Web.

[26] Mononen, R., Aunio, P., Hotulainen, R., ja Ketonen R. (2013). *Matematiikan osaaminen ensimmäisen luokan alussa [Mathematical performance in the beginning of the first grade].* NMI-Bulletin, 23(4), 12-25.

[27] Mononen, R., Aunio, P., ja Koponen, T. (2014). *Investigating RightStart Mathematics kindergarten instruction in Finland.* Journal of Early Childhood Education Research, 3(1), 2–26.

[28] Mononen, R., Aunio, P., Väisänen, E., Korhonen, J. ja Tapola, A. (2017). *Matemaattiset oppimisvaikeudet*. Jyväskylä: PS-kustannus.

[29] Moschkovich, J. (2010). *Language(s) and learning mathematics.* Teoksessa: Moschkovich, Judit N. Language and Mathematics Education: Multiple Perspectives and Directions for Research. Place of publication not identified: Information Age Pub,: 1-28. Print.

[30] Munakata, Y., Snyder, H.R. ja Chatham, C.H. (2012). *Developing Cognitive Control: Three Key Transitions.* Current Directions in Psychological Science 21.2: 71–77. Web.

[31] Opetushallitus (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.* Helsinki. Saatavissa: http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf. Viitattu: 15.4.2020.

[32] Pajares F. ja Miller M.D. (1994). *Role of self-effi cacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving: a path analysis.* Journal of Educational Psychology, 86 (2), 193–203.

[33] Passolunghi, M.C. (2011). *Cognitive and Emotional Factors in Children with Mathematical Learning Disabilities.* International Journal of Disability, Development and Education: Learning Disabilities: Causes, Consequences and Responses 58.1: 61–73. Web.

[34] Pehkonen, E. ja Tossavainen, T. (2013). *Three kinds of mathematics: scientific mathematics, school mathematics and didactical mathematics.* Far East Journal of Mathematical Education, 11(1), 27–42.

[35] Pintrich, P.R. (2003). *A Motivational Science Perspective on the Role of Student Motivation in Learning and Teaching Contexts.* Journal of Educational Psychology 95.4: 667–686. Web.

[36] Purpura, D.J. ja Ganley, C.M. (2014). *Working Memory and Language: Skill-Specific or Domain-General Relations to Mathematics?* Journal of Experimental Child Psychology 122.2: 104–121. Web.

[37] Praet, M. et al. (2013). *Language in the Prediction of Arithmetics in Kindergarten and Grade 1*. LEARNING AND INDIVIDUAL DIFFERENCES 27: 90–96. Web.

[38] Price, G. ja Ansari, D. (2013). *Dyscalculia: Characteristics, Causes, and Treatments.* Numeracy 6.1. Web.

[39] Räsänen, P. ja Koponen, T. (2010). *Matemaattisten oppimisvaikeuksien neuropsykologisesta tutkimuksesta*. NMI-Bulletin, 20(3), 39-53.

[40] P. Räsänen ja V. Närhi. (2013). *Heikkojen oppijoiden koulupolku*. Teoksessa J. Metsämuuronen (toim.) Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. Helsinki: Opetushallitus, 173-229.

[41] Shalev, R.S. (2004). *Developmental Dyscalculia.* Journal of Child Neurology 19.10: 765–771. Web.

[42] Sternberg, R. (1996). *What is mathematical thinking?* Teoksessa Sternberg, Robert J., and Talia. Ben-Zeev. The Nature of Mathematical Thinking . Mahwah (N.J.): Erlbaum, Print.

[43] Thuneberg, H. et al. (2014). *Conceptual Change in Adopting the Nationwide Special Education Strategy in Finland.* Journal of Educational Change 15.1: 37–56. Web.

[44] Tossavainen, T. ja Sorvali, T. (2003). *Matematiikka, koulumatematiikka ja didaktinen matematiikka.* Tieteessä Tapahtuu, 21(8). Noudettu osoitteesta https://journal.fi/tt/article/view/57245.

[45] Trautwein, U. et al. (2015). *Using Individual Interest and Conscientiousness to Predict Academic Effort: Additive, Synergistic, or Compensatory Effects?* Journal of Personality and Social Psychology 109.1: 142–162. Web.

[46] Tuohilampi L. ja Hannula, M. (2013). *Matematiikkaan liittyiven asenteiden kehitys sekä asenteiden ja osaamisen välinen vuorovaikutus 3., 6. ja 9. luokalla*. Teoksessa J. Metsämuuronen (toim.) Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. Helsinki: Opetushallitus, 231-253.

[47] Tuomi, J. ja Sarajärvi, A. (2018). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi.* Uudistettu laitos. Helsinki: Tammi, Print.

[48] Vygotskij, L.S. (1982). *Ajattelu ja kieli*. Espoo: Weilin+Göös. Print.

[49] World Health Organization (WHO). (2011). *Tautiluokitus ICD-10* (3.painos) Osoitteessa: http://www.julkari.fi/bitstream/handle/10024/80324/15c30d65-2b96-41d7-aca8-1a05aa8a0a19.pdf?sequence=1&isAllowed=y (luettu 28.3.2020).

[50] Yin, R.K. (2014). *Case Study Research: Design and Methods. 5th edition.* Los Angeles: SAGE, Print.

[51] Zeleke, S. (2004). *Differences in Self-Concept Among Children with Mathematics Disabilities and Their Average and High Achieving Peers.* International Journal of Disability, Development and Education 51.3: 253–269. Web.

[52] Zhang, X et al. (2014). *Linguistic and Spatial Skills Predict Early Arithmetic Development via Counting Sequence Knowledge.* Child Development 85.3 (2014): 1091–1107. Web.

Liitteet

A Tutkimuslupa rehtorille

Arvoisa rehtori

Olen Tampereen yliopiston matematiikan aineenopettajaopiskelija ja teen tällä hetkellä pro gradu -tutkielmaani. Työssäni tulen tutkimaan matematiikan kielentämistä sekä kirjallisesti että suullisesti laaja-alaisessa erityisopetuksessa. Kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista oman luonnollisen kielen, matematiikan symbolikielen tai kuviokielen avulla ja sen tavoitteena on syventää oppilaan matemaattista ajattelua.

Lokakuussa 2019 tulisin keräämään aineistoa [redacted] laaja-alaiseen erityisopetukseen. Tutkimukseni on laadullinen tapaustutkimus. Oppilaat pääsevät tekemään suunnittelemiani tehtäviä erityisopettajan ohjauksessa. Tarkoituksena on tutkia kielentämistä yläkoulun erityisopetuksessa, kehittää tähän tarkoitukseen sopivaa oppimateriaalia sekä selvittää oppilaiden mielipiteitä omasta oppimisestaan. Opetustilanteiden taltiointi tapahtuu videokameran avulla ja tutkimuksen aikana oppilaat osallistuvat haastatteluihini. Tutkimukseen on mahdollista osallistua myös ilman videointia.

Tutkimukseen osallistuminen on vapaaehtoista ja oppilaan nimeä tai koulua ei tutkielmassa mainita. Tutkimuksessa saatua aineistoa hyödynnetään vain tässä tutkimuksessa ja sitä käsitellään luottamuksellisesti. Aineisto tullaan hävittämään kahden kuukauden kuluttua tulosten julkaisemisesta.

Pro gradu -tutkielmani ohjaajana toimii dosentti Jorma Joutsenlahti, ([redacted]@[redacted]).

Toivon, että voisin suorittaa pro gradu -tutkielmani tutkimusosan koulussanne.

Ystävällisin terveisin

Katri Thurén

[redacted]

B Tutkimuslupa oppilaiden huoltajille

Hei,

olen Tampereen yliopiston matematiikan aineenopettajaopiskelija ja teen tällä hetkellä pro gradu -tutkielmaani. Työssäni tulen tutkimaan matematiikan kielentämistä sekä kirjallisesti että suullisesti laaja-alaisessa erityisopetuksessa. Kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista oman luonnollisen kielen, matematiikan symbolikielen tai kuviokielen avulla ja sen tavoitteena on syventää oppilaan matemaattista ajattelua.

Loka-marraskuussa 2019 kerään aineistoa [redacted] laaja-alaisessa erityisopetuksessa. Tutkimukseni on laadullinen tapaustutkimus. Oppilaat pääsevät tekemään suunnittelemiani tehtäviä erityisopettajan ohjauksessa. Tarkoituksena on tutkia kielentämistä yläkoulun erityisopetuksessa, kehittää tähän tarkoitukseen sopivaa oppimateriaalia sekä selvittää oppilaiden mielipiteitä omasta oppimisestaan. Opetustilanteiden taltiointi tapahtuu videokameran avulla ja tutkimuksen aikana oppilaat osallistuvat haastatteluihini. Tutkimukseen on mahdollista osallistua myös ilman videointia.

Tutkimukseen osallistuminen on vapaaehtoista ja oppilaan nimeä tai koulua ei tutkielmassa mainita. Tutkimuksessa saatua aineistoa hyödynnetään vain tässä tutkimuksessa ja sitä käsitellään luottamuksellisesti. Aineisto tullaan hävittämään kahden kuukauden kuluttua tulosten julkaisemisesta.

Toivon, että nuorenne saisi osallistua tutkimukseeni ja pyydän Teitä täyttämään oheisen lupalapun.

Pro gradu -tutkielmani ohjaajana toimii dosentti Jorma Joutsenlahti, ([redacted]@[redacted]).

Ystävällisin terveisin

Katri Thurén

[redacted]@[redacted]

____

Oppilaan nimi

Saa osallistua tutkimukseen ☐ **Annan** luvan kuvaamiselle ☐

Ei saa osallistua tutkimukseen ☐ **En anna** lupaa kuvaamiselle ☐

____

Huoltajan allekirjoitus

C Alkuhaastattelu

Alkuhaastattelu

Nimi:____

Väittämä				
Olen hyvä matematiikassa				
Koen onnistuvani tekemään matematiikan tehtäviä tunnilla				
Pidän ryhmätyöskentelystä				
Pidän sanallisista tehtävistä				
Olen hyvä oppimaan uusia asioita				
Olen hyvä keksimään ratkaisuja				
Olen hyvä laskemaan kirjan tehtäviä				
Koen pystyväni saamaan paremman arvosanan matematiikasta				
Uskallan kysyä jollen ymmärrä TAI Haluan ymmärtää matematiikkaa				
Matematiikan opiskelu on mukavaa TAI Pidän matematiikasta				

Mikä matematiikassa on helppoa? Entä vaikeaa?

Matematiikan arvosana?

Pystytkö mielestäsi oppimaan matematiikkaa?

D Käsitteen määrittely ja sen käyttäminen

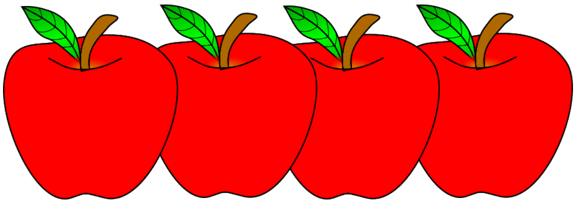
Käsitteenä yhtälö

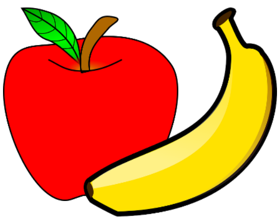
Muodosta yhtälö, jossa on lauseke, joka sisältää kertoimen, kirjainosan sekä vakiotermin ja tuloksen. Ratkaise tekemäsi yhtälö sanallisesti. Tämän jälkeen pyri esittämään parillesi muodostamasi yhtälö hyödyntämällä edellä olevia käsitteitä. Esim. jos muodostettu yhtälö on $2s - 3 = 5$ EI tule sanoa ”kirjoita kaksi s plus viisi on yhtä suuri kuin kolme” VAAN ”Kirjoita lauseke, jossa on kaksi termiä ja jonka kirjainosana on s, sen kertoimena luku kaksi sekä vakioterminä luku miinus kolme. Tämä lauseke on yhtä suuri kuin luku 5”. Tämän jälkeen on parin vuoro ratkaista yhtälö ja kertoa sen jälkeen parille, miten sen teki. Sitten sama toisin päin.

E Yhtälöpari

Mitä numeroita hedelmät kuvaavat?

Ratkaise itse ja selitä parille, miten sait vastauksen.

 $= 32$

 $= 10$

F Mikä ratkaisussa on väärin?

Mikä ratkaisussa on väärin?

Selitä omin sanoin mikä ratkaisussa on väärin. Tämän jälkeen tee viereen oikea ratkaisu.

Väärä ratkaisu	Miksi ratkaisu on väärin?	Oikea ratkaisu
$x+4=12 \quad \vert -4$ $x+4-4=12$ $x=12$		
$45-x=30 \quad \vert -45$ $x=30-45$ $x=-15$		
$3x=9 \quad \vert :3$ $\frac{3x}{3}=\frac{9}{3}$ $1x=2$ $x=2$		
$\frac{x}{2}+5=8 \quad \vert -5$ $\frac{x}{2}+5-5=8-5$ $\frac{x}{2}=3 \quad \vert :2$ $x=\frac{3}{2}$		