ИСТОРИЧЕСКИЕ ОЧЕРКИ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯМ

УДК 519.7

О ЗНАЧЕНИИ РАБОТ В. М. ХРАПЧЕНКО[1]

С. Б. Гашков*, И. С. Сергеев**

**Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия;*
***ФГУП «Научно-исследовательский институт «Квант», г. Москва, Россия*

Работа содержит обзор результатов основных исследований, выполненных Валерием Михайловичем Храпченко, одним из пионеров отечественной теоретической кибернетики.

Ключевые слова: *глубина схем, задержка схем, метод Храпченко, нижние оценки сложности, параллельный сумматор, симметрические функции.*

DOI 10.17223/20710410/48/10

ON THE MEANING OF WORKS BY V. M. KHRAPCHENKO

S. B. Gashkov*, I. S. Sergeev**

**Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;*
***FSUE "Research Institute "Kvant", Moscow, Russia*

E-mail: sbgashkov@gmail.com, isserg@gmail.com

The paper surveys main works and results by Valerii Mikhailovich Khrapchenko, who stands among the pioneers of national theoretical cybernetics. Mathematical results by V. M. Khrapchenko can be related to the following five directions: 1) synthesis of parallel adders; 2) relations between the complexity and depth of Boolean formulae; 3) low bounds for complexity of Boolean formulae; 4) synthesis of formulae for symmetric Boolean functions; 5) relation between depth and delay of schemes. Method of low bounds by V. M. Khrapchenko comes into many courses of lectures and into all the main monographies on the complexity of Boolean functions. The description of parallel adder by V. M. Khrapchenko is given in many books attended to rapid arithmetics.

Keywords: *depth, circuit delay, Khrapchenko method, lower complexity bounds, parallel adder, symmetric functions.*

Валерий Михайлович Храпченко (1936–2019) родился в семье известного учёного-литературоведа, впоследствии академика АН СССР Михаила Борисовича Храпченко и музыкального педагога Тамары Эрастовны Цытович. Окончил Московский энергетический институт, факультет автоматики и вычислительной техники. С 1959 по 1966 г. работал в Институте электронных управляющих машин и учился там в аспирантуре.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ № 19-04-00294а.

Рис. 1. В. М. Храпченко

Ранние работы В. М. Храпченко [1, 2], относящиеся к тематике построения вычислительных машин и их алгоритмического обеспечения, привлекли внимание Сергея Всеволодовича Яблонского и Олега Борисовича Лупанова, лидеров советской дискретной математики и математической кибернетики. С 1966 г. Храпченко переходит к ним в отдел теоретической кибернетики Института прикладной математики, получившего позднее имя М. В. Келдыша. В этом отделе Валерий Михайлович проработал всю оставшуюся жизнь, свыше 50 лет.

Особенно близко Валерий Михайлович сошелся с О. Б. Лупановым, которого считал своим учителем. Под его влиянием научные интересы Храпченко сместились в теоретическую плоскость, в частности, обратились к проблематике нижних оценок сложности, тем не менее Валерий Михайлович всегда находил задачи, имеющие непосредственную связь с электроникой: как быстро складывать и умножать числа, как сократить время вычислений в схеме и т. п. Знавший Олега Борисович как никто другой, Храпченко недавно написал его биографию [22], содержащую множество малоизвестных подробностей.

В. М. Храпченко часто выступал с докладами на еженедельных семинарах «Математические вопросы кибернетики» и «Синтез управляющих систем» под управлением С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова в Московском университете. По мнению многих участников, он был самым популярным докладчиком. К семинарам Валерий Михайлович всегда тщательно готовился и рассказывал так доходчиво, что было понятно каждому.

Математические результаты В. М. Храпченко можно отнести к пяти направлениям: синтез параллельных сумматоров [3, 13, 19], соотношения между сложностью и глубиной булевых формул [3, 12, 14], нижние оценки сложности формул [5, 6, 8, 9, 18, 21], синтез формул для симметрических булевых функций [7, 9, 10], соотношения между глубиной и задержкой схем [11, 13, 16, 20].

Далее функционалы сложности и глубины формул над базисом B обозначаются через L_B и D_B. Определения см. в [29, 31, 47, 53, 65, 68].

1. Параллельные сумматоры

Одной из первых практических задач теории сложности стал синтез схем параллельных сумматоров. Обозначим булев оператор сложения n-разрядных двоичных чисел через Σ_n. По существу, время работы сумматора Σ_n определяется способом вычисления системы переносов, которая при введении подходящих обозначений принимает вид

$$f_k = y_1 \vee y_2x_1 \vee y_3x_2x_1 \vee \ \ldots \ \vee y_kx_{k-1} \cdot \ldots \cdot x_1, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Имеет место соотношение $D_B(\Sigma_n) \leqslant D_B(f_n) + O(1)$ в произвольном полном булевом конечном базисе B. Оценка $D_B(f_n) = O(\log n)$ доказывается тривиально, но такая значимая базовая операция, как сложение, нуждалась в более точном знании. В своей первой ставшей широко известной работе [3] (1967 г.) Храпченко получил асимптотически точный результат $D_{B_0}(\Sigma_n) \sim \log_2 n$ в стандартном базисе $B_0 = \{\vee, \wedge, ^{-}\}$, вытекающий из аккуратной верхней оценки

$$D_{B_0}(f_n) \leqslant \log_2 n + \sqrt{2\log_2 n} + O(1). \tag{2}$$

Оценка получается рекурсивно применением формул вида

$$\begin{gathered} f_{kr} = f_r(\tilde{x}_1) \vee (x_1 \cdot \ldots \cdot x_r) f_r(\tilde{x}_2) \vee (x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2r}) f_r(\tilde{x}_3) \vee \ldots \\ \ldots \vee (x_1 \cdot \ldots \cdot x_{(k-1)r}) f_r(\tilde{x}_k), \end{gathered} \tag{3}$$

где $\tilde{x}_i$ — подходящие группы переменных.

Более того, Валерий Михайлович показал, что для любого конечного булева базиса B выполнено $D_B(\Sigma_n) \sim \tau_B \log_2 n$, где константу τ_B можно определить из асимптотического соотношения $D_B(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) \sim \tau_B \log_2 n$. При этом значение константы всегда находится в пределах $0 < \tau_B \leqslant 2$. Примером базиса, для которого $\tau_B = 2$, является базис B_S из единственной функции «штрих Шеффера» $x \,|\, y$.

Прямое применение формул, доставляющих оценку (2), приводит к сумматору нелинейной сложности. Используя более гибкую конструкцию, ценой небольшого ухудшения глубины Храпченко построил сумматор с глубиной $\log_2 n + O(\sqrt{\log n})$ и линейной сложностью $(12 + o(1))n$. Аналогично сумматор сложности $O(n)$ и глубины $(\tau_B + o(1)) \log_2 n$ строится и в произвольном базисе.

Чуть позже оценка (2) была также выведена Р. Брентом [43], но полученная им оценка сложности сумматора глубины $(1 + o(1)) \log_2 n$ имела вид $O(n \log n)$. В работе [25] показано, что оценку глубины сумматора линейной сложности можно понизить до $\log_2 n + \sqrt{(2 + o(1)) \log_2 n}$ (в базисе B_0 оценка сложности, как и в [3], имеет вид $(12 + o(1))n$).

В 2008 г. М. И. Гринчук [26] усилил оценку Храпченко до $D_{B_0}(\Sigma_n) \leqslant \log_2 n + \log_2 \log n + O(1)$. Фактически он установил сложность функций f_n в монотонном базисе $B_M = \{\vee, \wedge\}$. При совмещении его верхней оценки с нижней оценкой Б. Комменц-Вальтера [44] получается

$$D_{B_M}(f_n) = \log_2 n + \log_2 \log n \pm O(1).$$

Комбинируя методы работ [25] и [26], оценку глубины сумматора линейной сложности можно указать в виде $\log_2 n + O(\log^2 \log n)$. Недавно в развитие этой линии результатов Ш. Хелд и С. Шпиркл [51] построили сумматоры глубины $\log_2 n + O(\sqrt{\log n})$ и линейной сложности с дополнительным ограничением 2 на ветвление выходов элементов.

Другие известные формы параллельных сумматоров, например префиксные, обладают глубиной и сложностью асимптотически бо́льшими, чем у параллельных сумматоров Храпченко и Гринчука, хотя при малых значениях n могут иметь преимущество.

С позиции нижних оценок Б. Комменц-Вальтер и Ю. Саттлер [45] установили

$$D_{B_0}(f_n) \geqslant \log_2 n + (1 - o(1)) \log_2 \log \log n. \tag{4}$$

Заметив, что $D_{B_0}(f_n) \leqslant D_{B_0}(\Sigma_n) + O(1)$, Храпченко в работе [19] доказал в качестве следствия, что нижняя оценка (4) справедлива и для глубины сумматора $D_{B_0}(\Sigma_n)$. Этот результат — первая и пока единственная нетривиальная нижняя оценка глубины сложения в стандартном базисе.

Формулы метода Храпченко, на которых достигается оценка (1), не используют специфику булевой алгебры и поэтому могут применяться для вычисления выражений вида

$$y_1 + y_2x_1 + y_3x_2x_1 + \ldots + y_nx_{n-1} \cdot \ldots \cdot x_1 \tag{5}$$

над арифметическим базисом $\{+, \cdot\}$ в произвольном кольце (см. (3)), в отличие от формул метода Гринчука. Частным случаем выражений (5) являются многочлены одной переменной: положим $x_1 = \ldots = x_{n-1} = x$, а y_i будем считать коэффициентами. Так схема Храпченко превращается в способ вычисления значения многочлена в точке за $\log_2 n + \sqrt{2\log_2 n} + O(1)$ параллельных шагов. В начале 1970-х годов К. Маруяма [56], Я. Мунро и М. Патерсон [58] повторно обнаружили этот способ. Позже С. Р. Косараю [55] доказал, что глубина вычисления в обсуждаемой задаче не может быть меньше $\log_2 n + \sqrt{(2 - o(1))\log_2 n}$. Таким образом, в общей алгебраической постановке метод Храпченко является оптимальным в более сильном смысле, чем в булевой области.

2. Глубина и сложность формул

Исследования глубины удобнее производить в модели формул, так как глубина функции при реализации схемами и формулами в одном и том же базисе одинакова, но при этом формула является более простым объектом (в графическом представлении — деревом). Тривиально выполняется соотношение $D_B(f) \geqslant \log_k L_B(f)$, если базис B состоит из не более чем k-местных функций. Но именно Храпченко в 1967 г. первым отметил, что неравенство выполняется и в другую сторону:

$$D_B(f) = O(\log L_B(f)) \tag{6}$$

справедливо для любого булева полного конечного базиса B. К сожалению, результат Храпченко нашел отражение только в одном абзаце отчёта [4]. Поэтому приоритет часто отдают П. Спире, доказавшему соотношение (6) для базиса B_0 в [66].

Базисы, для которых выполнено (6), принято называть равномерными. Следуя работе Храпченко [14], для характеризации равномерности базиса B удобно ввести величину (равную константе или ∞)

$$c_B = \overline{\lim_{N\to\infty}} \max_{L_B(f)=N} \frac{D_B(f)}{\log_2 N}.$$

Определение означает, что для любой выражаемой в базисе B функции f выполнено $D_B(f) \leqslant (c_B + o(1))\log_2 L_B(f)$, а также существует бесконечная последовательность функций f_k, для которой $D_B(f_k) \geqslant (c_B - o(1))\log_2 L_B(f_k)$.

В новых терминах результат [4] можно сформулировать как $c_B < \infty$ для булевых конечных полных базисов. На самом деле, рассуждение проходит для любых полных конечных базисов, не обязательно булевых. Доказательство $c_B < \infty$ для неполных булевых конечных базисов оказалось трудной задачей. Прошло 20 лет, прежде чем А. Б. Угольников [39] и М. Рагаз [64] независимо решили её. Они же построили примеры неравномерных базисов ($c_B = \infty$) в трёхзначной логике.

За пионерскими работами [4, 66] последовала серия результатов, посвящённых оценкам констант равномерности различных базисов, в основном булевых или арифметических. Любопытно, что первая нетривиальная нижняя оценка фактически получена Храпченко в более ранней работе [3] для базиса $B_S = \{x \mid y\}$. Из доказанной в [3] нижней оценки $D_{B_S}(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) \geqslant 2\log_2 n$ и тривиальной верхней оценки $L_{B_S}(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) = O(n)$ следует $c_{B_S} \geqslant 2$. Позднее У. МакКолл [57] повторил этот результат и получил несколько верхних и нижних оценок констант равномерности для других булевых базисов.

В работе [12] Храпченко получил остающуюся рекордной по сей день оценку $c_{B_0} < 1{,}73$ для константы равномерности стандартного базиса, усилив результат [62]. Доказательство проведено традиционным для подобных задач способом параллельного перестроения формул, но с более глубоким просчётом вариантов.

Чуть позже в работе [14] Храпченко рассмотрел ещё один достаточно популярный в булевой теории сложности базис $B_3 = \{xy \vee xz \vee yz, \bar{\ }, 0, 1\}$. Для константы равномерности этого базиса ему удалось получить близкие оценки $1 \leqslant c_{B_3} < 1{,}45$. Отметим, что такое же отношение между оценками константы равномерности известно и для базиса B_S: $2 \leqslant c_{B_S} < 2{,}89$ (верхняя оценка доказана в [57]). Потом ещё сильнее были сближены оценки для монотонного арифметического базиса $B_A = \{+, \cdot\}$: $1{,}5 \leqslant c_{B_A} \leqslant 2$ (нижняя оценка доказана в [46], а верхняя — в [55]).

Следует заметить, что среди результатов исследований констант равномерности простых булевых или арифметических базисов есть всего несколько нетривиальных нижних оценок, две из них принадлежат Храпченко. Точные значения констант до сих пор не найдены ни для одного из «интересных» базисов. В частности, не решена проблема получения нетривиальных нижних оценок констант равномерности достаточно выразительных полных базисов вроде B_0 или арифметического базиса $\{+, -, \cdot\}$.

3. Нижние оценки сложности формул

Примерно в 1970 г. Храпченко получил свой самый известный результат — метод нижней оценки сложности формул в стандартном базисе, который описывается соотношением

$$L_{B_0}(f) \geqslant \frac{|R(N_0, N_1)|^2}{|N_0| \cdot |N_1|}, \tag{7}$$

где N_0 и N_1 — произвольные множества нулей и соответственно единиц функции f, а $R(A, B)$ — множество пар ($\alpha \in A$, $\beta \in B$) булевых наборов, различающихся ровно в одном разряде.

Максимально возможную оценку $L_{B_0}(l_n) \geqslant n^2$ метод даёт для линейных функций $l_n = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma$, где $\sigma \in \mathbb{B} = \{0, 1\}$. Первоначально Храпченко получил новую нижнюю оценку сложности линейной функции [5], а затем превратил доказательство в общий метод [6][2]. Строго говоря, оценка доказывалась в модели параллельно-последовательных контактных схем (π-схем). Но по существу π-схема — это альтернативный способ изображения формулы.

Результат [5] даёт практически окончательный ответ о сложности линейной функции, так как простой способ синтеза [42] при произвольном n приводит к оценке $L_{B_0}(l_n) < (9/8)n^2$, а при $n = 2^k$ — просто к $L_{B_0}(l_n) \leqslant n^2$. Таким образом, задача о сложности линейной функции, известная как проблема С. В. Яблонского [42], после

[2] В работе [21] Храпченко привёл укороченное доказательство неравенства (7) — примерно так оно обычно излагается на лекционных курсах в Московском университете.

работ Храпченко свелась к закрытию остающегося небольшого зазора между нижней и верхней оценками.

До появления метода Храпченко сложность линейной функции оценивалась снизу как $\Omega(n^{3/2})$ методом Б. А. Субботовской [38], а максимальные известные нижние оценки сложности для конкретных функций имели порядок величины $n^2/\log n$ (метод Э. И. Нечипорука [30]; впрочем, этот метод работает в любом полном базисе). Впоследствии А. Е. Андреев [24] предложил обобщение метода Субботовской — метод сжатия формул при случайных подстановках аргументов — и для сложности специально сконструированной функции получил нижнюю оценку вида $n^{2{,}5-o(1)}$. Но до работы Андреева оценки метода Храпченко оставались рекордными.

В качестве следствия из (7) Храпченко установил [6], что сложность почти всех симметрических функций по порядку не меньше чем n^2, в частности, квадратичные оценки имеют место для функции голосования и многих пороговых функций, для элементарных симметрических функций, вообще для любых функций, принимающих разные значения на соседних слоях в центральной части булева куба, и также для определителя булевой матрицы. В работе [8] Храпченко показал, что (7) влечёт квадратичные нижние оценки для двоичных разрядов функций вещественного аргумента с непрерывной и не равной тождественно нулю второй производной. В частности, не менее чем квадратичную сложность имеют двоичные разряды произведения, частного, многих аналитических функций. В работе А. К. Пулатова [33] метод Храпченко применяется для вывода нижних оценок сложности характеристических функций некоторых кодов.

Метод получил развитие. К. Л. Рычков [34] предложил описание метода Храпченко в терминах покрытий двудольных графов (см. также [53]) и получил следующее обобщение неравенства (7):

$$L_{B_0}(f) \geqslant \frac{|R_t(N_0, N_1)|^2}{\left(1 + C^1_{n-1} + \ldots + C^t_{n-1}\right)|N_0| \cdot |N_1|}, \tag{8}$$

где n — число аргументов функции f, либо у множества N_0 (нулей функции), либо у N_1 (единиц функции) попарные расстояния между наборами не меньше $2t + 1$, а $R_t(A, B)$ — множество пар ($\alpha \in A$, $\beta \in B$) наборов с расстоянием не более $t + 1$. Указанная модификация метода позволила получать высокие, вплоть до квадратичных, нижние оценки для характеристических функций произвольных плотно упакованных кодов. Позднее уже Храпченко [18] применил метод Рычкова (8) для оценки сложности характеристических функций БЧХ-кодов.

К. Л. Рычков продолжил исследования проблемы Яблонского и доказал соотношение $L_{B_0}(l_n) \geqslant n^2 + 2 + (n \bmod 2)$ при $5 \leqslant n \neq 2^k$ [35]. Очень нетривиально полученное Д. Ю. Черухиным [41] доказательство оценки $L_{B_0}(l_6) = 40$ (см. также [36]). Как следствие, при $n \leqslant 8$ формулы Яблонского оптимальны. Кроме того, С. В. Здобнову [27] удалось показать, что метод Яблонского оптимален при всех n в ограниченном классе формул — изображаемых π-схемами без нулевых цепей.

М. Патерсон (см. [68]) предложил обобщающий метод Храпченко принцип формальных мер сложности. Формальная мера сложности определяется как функционал $\mu : (\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}) \to \mathbb{R}_+$ со свойствами: (1) $\mu(x_i) = 1$, $i = 1, \ldots, n$; (2) $\mu(\overline{f}) = \mu(f)$; (3) $\mu(f \vee g) \leqslant \mu(f) + \mu(g)$. Из определения следует, что $L_{B_0}(f) \geqslant \mu(f)$. Методу Храпченко соответствует мера

$$\mu(f) = \max_{N_0 \subset f^{-1}(0),\, N_1 \subset f^{-1}(1)} \frac{|R(N_0, N_1)|^2}{|N_0| \cdot |N_1|}.$$

Впоследствии разными авторами было предложено ещё несколько мер сложности, но ни одна из них не позволяет получать сверхквадратичные нижние оценки [53].

Пожалуй, еще бо́льшую ценность, чем соотношение (7), представляет способ рассуждения в методе Храпченко. Это один из первых методов в теории нижних оценок сложности, основанных на двойственной природе нулей и единиц функции. Так, в методе Храпченко единицам ставятся в соответствие цепи, а нулям — тупиковые сечения π-схемы, объекты двойственной природы. Впоследствии указанный тип рассуждения стал широко распространен: например, двойственность нулей и единиц лежит в основе методов получения нижних оценок сложности монотонных схем и схем ограниченной глубины [53]. По существу, из двойственности вырастает концепция коммуникационной сложности. Неудивительно, что метод Храпченко допускает естественное описание в терминах коммуникационной сложности. Такую интерпретацию предложили М. Карчмер и А. Вигдерсон [54], получив альтернативное доказательство аналога соотношения (7) для глубины формул.

На пути, указанном А. Е. Андреевым [24], для специально сконструированных булевых функций к настоящему времени получены нижние оценки формульной сложности вида $n^{3-o(1)}$ [50, 67, 48]. Однако, например, для симметрических булевых функций более чем квадратичные нижние оценки до сих пор неизвестны.

К направлению нижних оценок сложности можно отнести и заметку Храпченко [9]. В ней он конкретизировал результат Э. Шпекера [52], показав, что все симметрические функции n переменных, за исключением 16 штук, имеют нелинейную формульную сложность $\Omega(n\alpha(n))$ в произвольном полном базисе, где $\alpha(n)$ — очень медленно растущая функция. Одновременно такое следствие было получено М. Патерсоном [59] с формулировкой для бинарных базисов. Позже П. Пудлак [63] показал, что нижняя оценка справедлива при $\alpha(n) = \log\log n$, и по порядку она уже неулучшаема. Тем не менее Д. Ю. Черухину [40] удалось доказать, что почти все симметрические функции имеют сложность $\Omega(n\log n)$ (но функций-исключений для этой оценки больше 16). Результаты [63, 40] справедливы в любом полном базисе.

4. Формулы для симметрических булевых функций

Закономерно, что Храпченко заинтересовался вопросом, с какой сложностью можно вычислять симметрические функции формулами. В силу равномерности булевых формул с вопросом о сложности формул тесно связан вопрос о глубине.

Напомним, что значения симметрической булевой функции определяются арифметической суммой аргументов. Симметрические функции играют важную роль в практике вычислений: симметрическими являются функция голосования и другие простые пороговые функции, периодические функции, разряды булева оператора C_n сложения n битов.

Обозначим через S_n класс симметрических функций n переменных. Любая функция $f \in S_n$ может быть представлена как $h(C_n(x_1,\ldots,x_n))$, где h — некоторая функция $\log_2 n$ аргументов. С начала 1960-х годов известно, что $D_{B_0}(C_n) = O(\log n)$ [32]. При объединении этого результата с известными уже в то время методами синтеза произвольных функций (метод каскадов, асимптотически оптимальные методы [29, 31]) получаются оценки $D_B(S_n) = O(\log n)$ и $L_B(S_n) = n^{O(1)}$ в любом полном базисе B.

Тем не менее работа Храпченко [7] стала первой, в которой оценка $L_B(S_n) = n^{O(1)}$ получена явно (автор отдельно отметил, что результат справедлив и в k-значной логике). Но основным содержанием работы [7] стали аккуратные оценки сложности оператора C_n и класса S_n в базисе B_0: $L_{B_0}(C_n) = O(n^{4{,}62})$, $L_{B_0}(S_n) = O(n^{4{,}93})$. Сложность пороговых и элементарных симметрических функций оценивается так же, как сложность C_n.

Для реализации оператора C_n Храпченко использовал метод компрессоров [32]. (k, l)-Компрессор — это схема, преобразующая k чисел в $l < k$ чисел с сохранением суммы. Многоразрядный компрессор составляется из параллельных копий одноразрядных компрессоров и поэтому имеет глубину $O(1)$, независимо от длины слагаемых чисел. Таким образом, при помощи дерева (k, l)-компрессоров можно преобразовать n слагаемых в l штук с глубиной $O(\log n)$ и формульной сложностью $n^{O(1)}$. Храпченко сконструировал специальный (7, 3)-компрессор и описал эффективный способ построения дерева из таких компрессоров.

Важнейшее приложение метода компрессоров — реализация умножения n-разрядных чисел; основной интерес здесь представляет глубина вычисления. Действительно, путём попарного перемножения битов произведение чисел сводится к сложению n чисел (школьный способ умножения). Поэтому для глубины оператора M_n умножения n-разрядных чисел справедлива оценка $D_B(M_n) \leqslant D_B(C_n) + D_B(\Sigma_n) + O(1)$. Напомним, что через Σ_n обозначается оператор сложения n-разрядных чисел. В работе [10] Храпченко, используя другую конструкцию (7, 3)-компрессора, получил оценки $D_{B_0}(C_n) \lesssim 5.12 \log_2 n$ и, с учётом $D_{B_0}(\Sigma_n) \sim \log_2 n$ [3], оценку $D_{B_0}(M_n) \lesssim 6{,}12 \log_2 n$.

Отметим, что позднее Э. Гроув в работе [49] (см. [61]) доказал, что разница между глубиной сведения многократного сложения, возникающего при умножении n-разрядных чисел, к обычному сложению двух чисел и глубиной оператора C_n на самом деле имеет величину $o(\log n)$.

За работой Храпченко [7] последовала серия результатов разных авторов с уточнениями верхних оценок $L_B(C_n)$ и $L_B(S_n)$, преимущественно в базисе $B = B_2$ всех двуместных булевых функций. Промежуточный итог подвели работы М. Патерсона, Н. Пиппенджера и У. Цвика [60, 61], которые установили оптимальный в асимптотическом смысле способ размещения компрессоров в схеме. Применительно к компрессорам Храпченко новый метод влечёт оценки $L_{B_0}(C_n) = O(n^{4{,}60})$, $L_{B_0}(S_n) = O(n^{4{,}85})$ и $D_{B_0}(C_n) \leqslant (5{,}07 + o(1)) \log_2 n$. Авторы [60, 61] также предложили несколько новых приёмов конструирования и использования компрессоров, усилив указанные оценки до $L_{B_0}(C_n) = O(n^{4{,}57})$ и $D_{B_0}(C_n) \leqslant (4{,}95 + o(1)) \log_2 n$.

И. С. Сергеев [37] предложил использовать для вычисления суммы битов $\sigma = x_1 + \ldots + x_n$ остатки $\sigma \bmod 2^k$ и $\sigma \bmod 3^l$ (младшие компоненты оператора C_n и аналогичного оператора сложения в троичной системе счисления), а также приближённое значение $\sigma^* \approx \sigma$, получив наилучшие известные в настоящее время оценки: $L_{B_0}(C_n) = O(n^{3{,}91})$, $L_{B_0}(S_n) = O(n^{4{,}01})$, $D_{B_0}(C_n) \leqslant (4{,}14 + o(1)) \log_2 n$, $D_{B_0}(S_n) \leqslant (4{,}24 + o(1)) \log_2 n$.

5. Глубина и задержка схем

Последняя серия работ Храпченко посвящена любопытной проблеме, которую до него, видимо, никто не осознавал. Речь идёт о том, насколько точно глубина схем соответствует понятию задержки в физическом смысле. Храпченко определил задержку $T(S)$ схемы S как минимальное время, достаточное для установления правильного значения на выходах схемы при любых значениях входов, считая, что задержки функциональных элементов равны единице.

Несмотря на то, что всегда выполнено $D_B(f) = T_B(f)$, равенство может не выполняться для конкретной схемы, в частности для минимальной схемы, реализующей функцию f. В работах [11, 13] Храпченко удалось построить последовательность таких функций f_k, что для всех реализующих их минимальных схем S справедливо $D_{B_0}(S) \sim 2T_{B_0}(S)$.

В работах [16, 20] этот результат удалось усилить. Сначала Храпченко построил последовательность минимальных схем S_k со свойством $T_{B_0}(S_k) < \log_2 D_{B_0}(S_k) + 6$ [16]. В завершающей работе цикла [20] он снял последнее ограничение, предъявив последовательность функций f_k, все минимальные схемы S_k которых[3] удовлетворяют условию $T_{B_0}(S_k) < \log_2 D_{B_0}(S_k) + 14$. Этот результат является окончательным в силу легко проверяемого неравенства: $T_{B_0}(S) \geqslant \log_2 D_{B_0}(S)$ для любой минимальной схемы S [16].

В [13] Храпченко также построил схему n-разрядного сумматора в стандартном базисе, имеющего задержку $(1 + o(1)) \log_2 n$ и сложность $(11 + o(1))n$. Тем самым около n элементов удалось сэкономить при переходе от требования асимптотически минимальной глубины к асимптотически минимальной задержке (см. выше).

Эти результаты Храпченко открывают новое направление исследований — минимизация сложности функций при ограничении на задержку. Проблема особенно содержательна в случаях, когда аналогичное ограничение глубины не позволяет построить достаточно простую схему.

Впрочем, дальнейшего развития исследования задержки в смысле Храпченко пока не получили. Но если смотреть шире, то движение в направлении более точного моделирования физических характеристик схем, в русле которого находятся работы Храпченко, продолжается. Например, С. А. Ложкин и Б. Р. Данилов [28] ввели в рассмотрение модель схем, в которой задержка функциональных элементов зависит от значений на их входах, и получили асимптотически точные результаты о глубине вычисления булевых функций в этой модели. Заметим, что задержка схемы в этой модели зависит от значений переменных на входах, как и в случае задержки Храпченко.

Заключение

В. М. Храпченко внимательно следил за работами в области нижних оценок сложности и подготовил очень подробный обзор для Кибернетического сборника в 1984 г. [15]. В работах [17, 23] он представил авторский взгляд на творчество двух крупных специалистов в теории синтеза и сложности — Р. Г. Нигматуллина и О. Б. Лупанова — математиков, которых Валерий Михайлович хорошо знал.

Метод Храпченко нижних оценок сложности формул вошёл во многие лекционные курсы и во все основные монографии по сложности булевых функций [31, 47, 53, 65, 68]. Описание параллельного сумматора Храпченко приводится в работах, уделяющих внимание быстрой арифметике [65, 68]. В [47, 68] доказывается соотношение (6), связывающее глубину и сложность формул, но приоритет Храпченко авторам не был известен.

Валерий Михайлович был одним из главных действующих лиц в разработке теории синтеза и сложности в самые активные годы становления этого научного направления во второй половине XX века, его результаты, как и его незаурядная личность, оставили яркий след в памяти всех, кто был с ним знаком.

Авторы благодарны Стасису Юкне за знакомство с текстом и ряд замечаний, способствовавших улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Храпченко В. М.* Об одном способе преобразования многорядного кода в однорядный // Доклады АН СССР. 1963. Т. 148. № 2. С. 296–299.

[3] На самом деле, каждая функция f_k имеет единственную минимальную схему.

2. *Храпченко В. М.* Об оценке погрешности двоичного умножения // Проблемы кибернетики. Вып. 10 / ред. А. А. Ляпунов. М.: Наука, 1963. С. 165–177.
3. *Храпченко В. М.* Об асимптотической оценке времени сложения параллельного сумматора // Проблемы кибернетики. Вып. 19 / ред. А. А. Ляпунов. М.: Наука, 1967. С. 107–120.
4. *Яблонский С. В., Козырев В. П.* Математические вопросы кибернетики // Информационные материалы Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР. Вып. 19а. М., 1968. С. 3–15.
5. *Храпченко В. М.* О сложности реализации линейной функции в классе П-схем // Математические заметки. 1971. Т. 9. № 1. С. 35–40.
6. *Храпченко В. М.* Об одном методе получения нижних оценок сложности П-схем // Математические заметки. 1971. Т. 10. № 1. С. 83–92.
7. *Храпченко В. М.* О сложности реализации симметрических функций формулами // Математические заметки. 1972. Т. 11. № 1. С. 109–120.
8. *Храпченко В. М.* Квадратичная нижняя оценка сложности, основанная на непрерывности второй производной // Проблемы кибернетики. Вып. 26 / ред. А. А. Ляпунов. М.: Наука, 1973. С. 203–206.
9. *Храпченко В. М.* О сложности реализации симметрических функций алгебры логики формулами в конечных базисах // Проблемы кибернетики. Вып. 31 / ред. С. В. Яблонский. М.: Наука, 1976. С. 231–234.
10. *Храпченко В. М.* Некоторые оценки для времени умножения // Проблемы кибернетики. Вып. 33 / ред. С. В. Яблонский. М.: Наука, 1978. С. 221–227.
11. *Храпченко В. М.* Глубина и задержка схемы // Доклады АН СССР. 1978. Т. 241. № 6. С. 1281–1284.
12. *Храпченко В. М.* О соотношении между сложностью и глубиной формул // Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем. Вып. 32. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. С. 76–94.
13. *Храпченко В. М.* Различие и сходство между задержкой и глубиной // Проблемы кибернетики. Вып. 35 / ред. С. В. Яблонский. М.: Наука, 1979. С. 141–168.
14. *Храпченко В. М.* О соотношении между сложностью и глубиной формул в базисе, содержащем медиану // Методы дискретного анализа в изучении булевых функций и графов. Вып. 37. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1981. С. 77–84.
15. *Храпченко В. М.* Нижние оценки сложности схем из функциональных элементов (обзор) // Кибернетический сборник. Вып. 21 / ред. О. Б. Лупанов. М.: Мир, 1984. С. 3–54.
16. *Храпченко В. М.* Новые соотношения между глубиной и задержкой // Дискретная математика. 1995. Т. 7. № 4. С. 77–85.
17. *Храпченко В. М.* Работы Р. Г. Нигматуллина по нижним оценкам сложности // Дискретный анализ и исслед. опер. Сер. 1. 2000. Т. 7. № 1. С. 18–31.
18. *Храпченко В. М.* Квадратичная нижняя оценка сложности формул над базисом $\{\&, \vee, {}^{-}\}$ для БЧХ-кодов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 16 / ред. Н. А. Карпова. М.: Физматлит, 2007, С. 239–241.
19. *Храпченко В. М.* Об одной из возможностей уточнения оценок для задержки параллельного сумматора // Дискретный анализ и исслед. опер. Сер. 1. 2007. Т. 14. № 1. С. 86–93.
20. *Храпченко В. М.* Принципиальное расхождение между глубиной и задержкой // Дискретная математика. 2008. Т. 20. № 3. С. 51–72.
21. *Храпченко В. М.* Упрощенное доказательство одной нижней оценки сложности // Дискретная математика. 2013. Т. 25. № 2. С. 82–84.
22. *Храпченко В. М.* Математик Олег Борисович Лупанов (1932–2006) // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17. № 2. С. 6–20.

23. *Храпченко В. М.* Методы Лупанова и их значение для формирования теории синтеза схем // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17. № 2. С. 184–195.
24. *Андреев А. Е.* Об одном методе получения более чем квадратичных эффективных нижних оценок сложности π-схем // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 1987. № 1. С. 70–73.
25. *Гашков С. Б., Гринчук М. И., Сергеев И. С.* О построении схем сумматоров малой глубины // Дискретный анализ и исслед. опер. Сер. 1. 2007. Т. 14. № 1. С. 27–44; 2008. Т. 15. № 4. С. 92–93.
26. *Гринчук М. И.* Уточнение верхней оценки глубины сумматора и компаратора // Дискретный анализ и исслед. опер. Сер. 1. 2008. Т. 15. № 2. С. 12–22.
27. *Здобнов С. В.* О сложности линейной функции в классе П-схем без нулевых цепей // Комбинаторно-алгебр. методы и их применение. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1987. С. 27–34.
28. *Ложкин С. А., Данилов Б. Р.* О задержке схем из функциональных элементов в модели с произвольным распределением задержек элементов базиса по входам и входным наборам // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2013. № 4. С. 25–33.
29. *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984. 138 с.
30. *Нечипорук Э. И.* Об одной булевской функции // Доклады АН СССР. 1966. Т. 169. № 4. С. 765–767.
31. *Нигматуллин Р. Г.* Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991. 240 с.
32. *Офман Ю. П.* Алгоритмическая сложность дискретных функций // Доклады АН СССР. 1962. Т. 145. № 1. С. 48–51.
33. *Пулатов А. К.* Нижняя оценка сложности схемной реализации для одного класса кодов // Дискретный анализ. 1974. Вып. 25. С. 56–61.
34. *Рычков К. Л.* Модификация метода В. М. Храпченко и применение ее к оценкам сложности П-схем для кодовых функций // Методы дискретного анализа в теории графов и схем. Вып. 42. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1985. С. 91–98.
35. *Рычков К. Л.* О нижних оценках сложности параллельно-последовательных контактных схем, реализующих линейные булевы функции // Сибирский журнал исслед. опер. 1994. Т. 1. № 4. С. 33–52.
36. *Рычков К. Л.* О нижних оценках формульной сложности линейной булевой функции // Сибирские электр. матем. известия. 2014. Т. 11. С. 165–184.
37. *Сергеев И. С.* О сложности и глубине формул для симметрических булевых функций // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2016. № 3. С. 53–57.
38. *Субботовская Б. А.* О реализации линейных функций формулами в базисе $\vee, \&, ^-$ // Доклады АН СССР. 1961. Т. 136. № 3. С. 553–555.
39. *Угольников А. Б.* О глубине и полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // Математические заметки. 1987. Т. 42. № 4. С. 603–612.
40. *Черухин Д. Ю.* Нижние оценки формульной сложности симметрических булевых функций // Дискретный анализ и исслед. опер. Сер. 1. 2000. Т. 7. № 3. С. 86–98.
41. *Черухин Д. Ю.* К вопросу о логическом представлении счётчика чётности // Неформальная наука. 2008. № 2. С. 14–23.
42. *Яблонский С. В.* Реализация линейной функции в классе П-схем // Доклады АН СССР. 1954. Т. 94. № 5. С. 805–806.
43. *Brent R.* On the addition of binary numbers // IEEE Trans. Comp. 1970. V. C-19. No. 8. P. 758–759.

44. *Commentz-Walter B.* Size-depth tradeoff in monotone Boolean formulae // Acta Inf. 1979. V. 12. P. 227–243.
45. *Commentz-Walter B. and Sattler J.* Size-depth tradeoff in non-monotone Boolean formulae // Acta Inf. 1980. V. 14. P. 257–269.
46. *Coppersmith D. and Schieber B.* Lower bounds on the depth of monotone arithmetic computations // Proc. 33rd Symp. Foundations of Computer Sci. (Pittsburgh, 1992). Washington: IEEE CS, 1992. P. 288–295.
47. *Dunne P. E.* The Complexity of Boolean Networks. San Diego: Academic Press, 1988. 512 p.
48. *Gál A., Tal A., and Trejo Nuñez A.* Cubic formula size lower bounds based on compositions with majority // Electr. Colloq. Comput. Complexity. 2018. TR18–160.
49. *Grove E.* Proofs with Potential. Ph.D. thesis. Univ. of California, Berkeley, 1993.
50. *Håstad J.* The shrinkage exponent of de Morgan formulas is 2 // SIAM J. Comput. 1998. V. 27. No. 1. P. 48–64.
51. *Held S. and Spirkl S. T.* Binary adder circuits of asymptotically minimum depth, linear size, and fan-out two // ACM Trans. Algorithms. 2017. V. 14. No. 1. P. 4:1–4:18.
52. *Hodes L. and Specker E.* Length of formulas and elimination of quantifiers I // Contributions to Mathematical Logic. Amsterdam: North Holland, 1968. P. 175–188.
53. *Jukna S.* Boolean function complexity. Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 2012. 618 p.
54. *Karchmer M. and Wigderson A.* Monotone circuits for connectivity require super-logarithmic depth // SIAM J. Discrete Math. 1990. V. 3. No. 2. P. 255–265.
55. *Kosaraju S. R.* Parallel evaluation of division-free arithmetic equations // Proc. 18th Symp. Theory of Comput. (Berkeley, 1986). NY: ACM, 1986. P. 231–239.
56. *Maruyama K.* On the parallel evaluation of polynomials // IEEE Trans. Comp. 1973. V. C-22. No. 1. P. 2–5.
57. *McColl W. F.* Some results on circuit depth. Theory of computation. Report No. 18. Coventry: Univ. of Warwick, 1977.
58. *Munro I. and Paterson M.* Optimal algorithms for parallel polynomial evaluation // J. Comp. System Sci. 1973. V. 7. P. 189–198.
59. *Paterson M. S.* An introduction to Boolean function complexity // Astérisque. 1976. V. 38–39. P. 183–201.
60. *Paterson M. S., Pippenger N., and Zwick U.* Optimal carry save networks // LMS Lecture Notes Series. Boolean function complexity. V. 169 / ed. M. S. Paterson. Cambridge University Press, 1992. P. 174–201.
61. *Paterson M. and Zwick U.* Shallow circuits and concise formulae for multiple addition and multiplication // Comput. Complexity. 1993. V. 3. P. 262–291.
62. *Preparata F. P. and Muller D. E.* Efficient parallel evaluation of Boolean expressions // IEEE Trans. Comp. 1976. V. C-25. No. 5. P. 548–549.
63. *Pudlák P.* Bounds for Hodes — Specker theorem // Logic and Machines: Decision Problems and Complexity. LNCS. 1984. V. 171. P. 421–445.
64. *Ragaz M.* Parallelizable algebras // Arch. Math. Logic. 1986/87. V. 26. P. 77–99.
65. *Сэвидж Дж. Э.* Сложность вычислений. М.: Факториал, 1998. 368 с.
66. *Spira P. M.* On time-hardware complexity tradeoffs for Boolean functions // Proc. 4th Hawaii Symp. System Sci. N. Hollywood: Western Periodical Company, 1971. P. 525–527.
67. *Tal A.* Shrinkage of de Morgan formulae from quantum query complexity // Electr. Colloq. on Comput. Complexity. 2014. TR14–048.
68. *Wegener I.* The complexity of Boolean functions. Stuttgart: Wiley–Teubner, 1987. 470 p.

REFERENCES

1. *Khrapchenko V. M.* On a method of transforming a multiserial code into a uniserial one // Soviet Phys. Dokl., 1963, vol. 8, pp. 8–10.
2. *Khrapchenko V. M.* Ob otsenke pogreshnosti dvoichnogo umnozheniya [On the bounding of an error in binary multiplication]. Problemy Kibernetiki, vol. 10, ed. A. A. Lyapunov, Moscow, Nauka Publ., 1963, pp. 165–177. (in Russian)
3. *Khrapchenko V. M.* Ob asimptoticheskoi otsenke vremeni slozheniya parallel'nogo summatora [Asymptotic estimation of addition time of a parallel adder]. Problemy Kibernetiki, vol. 19, ed. A. A. Lyapunov, Moscow, Nauka Publ., 1967, pp. 107–120. (in Russian)
4. *Yablonskii S. V. and Kozyrev V. P.* Matematicheskie voprosy kibernetiki [Mathematical problems of cybernetics]. Information materials of Scientific council of Acad. of Sci. USSR on complex problem “Kibernetika”, vol. 19a, Moscow, 1968, pp. 3–15. (in Russian)
5. *Khrapchenko V. M.* On the complexity of the realization of the linear function in the class of Π-circuits. Math. Notes Acad. of Sci. USSR, 1971, vol. 9, no. 1, pp. 21–23.
6. *Khrapchenko V. M.* A method of obtaining lower bounds for the complexity of Π-schemes. Math. Notes Acad. of Sci. USSR, 1971, vol. 10, no. 1, pp. 474–479.
7. *Khrapchenko V. M.* The complexity of the realization of symmetric functions by formulae. Math. Notes Acad. of Sci. USSR, 1972, vol. 11, no. 1, pp. 70–76.
8. *Khrapchenko V. M.* Kvadratichnaya nizhnyaya otsenka slozhnosti, osnovannaya na nepreryvnosti vtoroi proizvodnoi [A quadratic complexity lower bound based on the continuity of the second derivative]. Problemy Kibernetiki, vol. 26, ed. A. A. Lyapunov, Moscow, Nauka Publ., 1973, pp. 203–206. (in Russian)
9. *Khrapchenko V. M.* O slozhnosti realizatsii simmetricheskikh funktsii algebry logiki formulami v konechnykh bazisah [On the complexity of realization of symmetric Boolean functions by formulas over finite bases]. Problemy Kibernetiki, vol. 31, ed. S. V. Yablonskii, Moscow, Nauka Publ., 1976, pp. 231–234. (in Russian)
10. *Khrapchenko V. M.* Nekotorye otsenki dlya vremeni umnozheniya [Some bounds for the time of multiplication]. Problemy Kibernetiki, vol. 33, ed. S. V. Yablonskii, Moscow, Nauka Publ., 1978, pp. 221–227. (in Russian)
11. *Khrapchenko V. M.* Depth and delay in a network. Soviet Math. Dokl., 1978, vol. 19, pp. 1006–1009.
12. *Khrapchenko V. M.* O sootnoshenii mezhdu slozhnost'yu i glubinoi formul [On a relation between the complexity and the depth of formulae]. Metody Diskretnogo Analiza v Sinteze Upravlyayushchikh Sistem, vol. 32, Novosibirsk, Math. Instit. Siber. Branch Acad. Sci. USSR, 1978, pp. 76–94. (in Russian)
13. *Khrapchenko V. M.* Razlichie i shodstvo mezhdu zaderzhkoi i glubinoi [A difference and a similarity between depth and delay]. Problemy Kibernetiki, vol. 35, ed. S. V. Yablonskii, Moscow, Nauka Publ., 1979, pp. 141–168. (in Russian)
14. *Khrapchenko V. M.* O sootnoshenii mezhdu slozhnost'yu i glubinoi formul v bazise, soderzhashchem medianu [On the relation between the complexity and the depth of formulae in a base containing median]. Metody Diskretnogo Analiza v Izuchenii Bulevykh Funktsii i Grafov, vol. 37, Novosibirsk, Math. Instit. Siber. Branch Acad. Sci. USSR, 1981, pp. 77–84. (in Russian)
15. *Khrapchenko V. M.* Nizhnie otsenki slozhnosti skhem iz funktsional'nykh elementov (obzor) [Lower complexity bounds for the circuits of functional elements (the survey)]. Kibernetichesk. Sbornik, vol. 21, ed. O. B. Lupanov, Moscow, Mir Publ., 1984, pp. 3–54. (in Russian)
16. *Khrapchenko V. M.* New inequality relations between depth and delay. Discrete Math. Appl., 1995, vol. 5, no. 6, pp. 547–555.

17. *Khrapchenko V. M.* Raboty R. G. Nigmatullina po nizhnim otsenkam slozhnosti [Works by R. G. Nigmatullin on the lower complexity bounds]. Diskretn. Analiz i Issled. Oper., Ser. 1, 2000, vol. 7, no. 1, pp. 18–31. (in Russian)
18. *Khrapchenko V. M.* Kvadratichnaya niznyaya otsenka slozhnosti formul nad bazisom $\{\&, \vee, ^{-}\}$ dlya BCH-kodov [A quadratic lower bound for the complexity of formulae over the base $\{\&, \vee, ^{-}\}$ for BCH-codes]. Matematicheskie Voprosy Kibernetiki, vol. 16, ed. N. A. Karpova, Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, pp. 239–241. (in Russian)
19. *Khrapchenko V. M.* On one of the possibilities of sharpening estimates for the delay of a parallel adder. J. Appl. Industr. Math., 2008, vol. 2, no. 2, pp. 211–214.
20. *Khrapchenko V. M.* The fundamental difference between depth and delay. Discrete Math. Appl., 2008, vol. 18, no. 4, pp. 391–412.
21. *Khrapchenko V. M.* A simplified proof of a lower complexity estimate. Discrete Math. Appl., 2013, vol. 23, no. 2, pp. 171–174.
22. *Khrapchenko V. M.* Matematik Oleg Borisovich Lupanov (1932–2006) [Mathematician Oleg Borisovich Lupanov (1932–2006)]. Chebysh. Sbornik, 2016, vol. 17, no. 2, pp. 6–20. (in Russian)
23. *Khrapchenko V. M.* Metody Lupanova i ih znachenie dlya formirovaniya teorii sinteza skhem [Lupanov methods and their significance for the development of the circuit synthesis theory]. Chebysh. Sbornik, 2016, vol. 17, no. 2, pp. 184–195. (in Russian)
24. *Andreev A. E.* On a method for obtaining more than quadratic effective lower bounds for the complexity of π-schemes. Moscow University Math. Bulletin, 1987, vol. 42, no. 1, pp. 63–66.
25. *Gashkov S. B., Grinchuk M. I., and Sergeev I. S.* Circuit design of an adder of small depth. J. Appl. Industr. Math., 2008. vol. 2, no. 2, pp. 167–178.
26. *Grinchuk M. I.* Sharpening an upper bound on the adder and comparator depths // J. Appl. Industr. Math., 2009, vol. 3, no. 1, pp. 61–67.
27. *Zdobnov S. V.* O slozhnosti lineinoi funktsii v klasse Π-skhem bez nulevykh tsepei [On the complexity of linear function in the class of Π-schemes without null chains]. Kombinatorno-Algebr. Metody i ih Primenenie, Gor'kyi, Gork. Univ. Publ., 1987, pp. 27–34. (in Russian)
28. *Lozhkin S. A. and Danilov B. R.* Network delay in a model with inputs of functional elements. Moscow Univ. Comput. Math. and Cybern., 2013, vol. 37, no. 4, pp. 180–188.
29. *Lupanov O. B.* Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem [Asymptotic Estimates for the Complexity of control systems]. Moscow, MSU Publ., 1984. 138 p. (in Russian)
30. *Nechiporuk E. I.* On a Boolean function. Soviet Math. Dokl., 1966, vol. 7, no. 4, pp. 999–1000.
31. *Nigmatullin R. G.* Slozhnost' bulevykh funktsiy [The Complexity of Boolean Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 240 p. (in Russian)
32. *Ofman Y. P.* On the algorithmic complexity of discrete functions. Soviet Phys. Dokl., 1963, vol. 7, pp. 589–591.
33. *Pulatov A. K.* Nizhnyaya otsenka slozhnosti skhemnoi realizatsii dlya odnogo klassa kodov [A lower bound for the circuit complexity of a class of codes]. Diskretnyi Analiz, vol. 25, Novosibirsk, Math. Instit. Siber. Branch Acad. Sci. USSR, 1974, pp. 56–61. (in Russian)
34. *Rychkov K. L.* Modifikatsiya metoda V. M. Khrapchenko i primenenie ee k otsenkam slozhnosti Π-skhem dlya kodovykh funktsii [A modification of Khrapchenko's method and its application to lower bounds for Π-schemes of code functions]. Metody Diskretnogo Analiza v Teorii Grafov i Skhem, vol. 42, Novosibirsk, Math. Instit. Siber. Branch Acad. Sci. USSR, 1985, pp. 91–98. (in Russian)
35. *Rychkov K. L.* O nizhnikh otsenkah slozhnosti parallel'no-posledovatel'nykh skhem, realizuyushchikh lineinye bulevy funktsii [Lower bounds on the complexity of parallel-

sequential switching circuits that realize linear Boolean functions]. Sibirsk. Zh. Issled. Oper., 1994, vol. 1. no. 4, pp. 33–52. (in Russian)

36. *Rychkov K. L.* O nizhnikh otsenkah formul'noi slozhnosti lineinoi bulevoi funktsii [On the lower bounds of formula complexity of the linear Boolean function]. Sibirsk. Elektr. Matem. Izv., 2014, vol. 11, pp. 165–184. (in Russian)
37. *Sergeev I. S.* Complexity and depth of formulas for symmetric Boolean functions. Moscow University Math. Bulletin, 2016, vol. 71, no. 3. pp. 127–130.
38. *Subbotovskaya B. A.* Realizations of linear functions by formulas using $\{\vee, \&, \neg\}$. Soviet Math. Dokl., 1961, vol. 2, pp. 110–112.
39. *Ugol'nikov A. B.* Depth and polynomial equivalence of formulas for closed classes of two-valued logic. Math. Notes Acad. of Sci. USSR, 1987, vol. 42, no. 4, pp. 832–837.
40. *Cherukhin D. Y.* Nizhnie otsenki formul'noi slozhnosti simmetricheskikh bulevykh funktsii [Lower bounds for the formula complexity of symmetric Boolean functions]. Diskretn. Analiz i Issled. Oper., Ser. 1, 2000, vol. 7, no. 3. pp. 86–98. (in Russian)
41. *Cherukhin D. Y.* K voprosu o logicheskom predstavlenii schetchika chetnosti [To the problem of the logic representation of parity]. Neformal'naya Nauka, 2008, no. 2, pp. 14–23. (in Russian)
42. *Yablonskii S. V.* Realizatsiya lineinoi funktsii v klasse Π-skhem [Realisation of the linear function in the class of Π-schemes]. Dokl. Akad. Nauk USSR, 1954, vol. 94, no. 5, pp. 805–806. (in Russian)
43. *Brent R.* On the addition of binary numbers. IEEE Trans. Comp., 1970, vol. C-19, no. 8, pp. 758–759.
44. *Commentz-Walter B.* Size-depth tradeoff in monotone Boolean formulae. Acta Inf., 1979, vol. 12, pp. 227–243.
45. *Commentz-Walter B. and Sattler J.* Size-depth tradeoff in non-monotone Boolean formulae. Acta Inf., 1980, vol. 14, pp. 257–269.
46. *Coppersmith D. and Schieber B.* Lower bounds on the depth of monotone arithmetic computations. Proc. 33rd Symp. Foundations of Computer Sci. (Pittsburgh, 1992). Washington, IEEE CS, 1992, pp. 288–295.
47. *Dunne P. E.* The Complexity of Boolean Networks. San Diego, Academic Press, 1988. 512 p.
48. *Gál A., Tal A., and Trejo Nuñez A.* Cubic formula size lower bounds based on compositions with majority. Electr. Colloq. on Comput. Complexity, 2018, TR18–160.
49. *Grove E.* Proofs with Potential. Ph.D. thesis. Univ. of California, Berkeley, 1993.
50. *Håstad J.* The shrinkage exponent of de Morgan formulas is 2. SIAM J. Comput., 1998, vol. 27, no. 1, pp. 48–64.
51. *Held S. and Spirkl S. T.* Binary adder circuits of asymptotically minimum depth, linear size, and fan-out two. ACM Trans. Algorithms, 2017, vol. 14, no. 1, pp. 4:1–4:18.
52. *Hodes L. and Specker E.* Length of formulas and elimination of quantifiers I. Contributions to Mathematical Logic, Amsterdam, North Holland, 1968, pp. 175–188.
53. *Jukna S.* Boolean Function Complexity. Berlin; Heidelberg, Springer Verlag, 2012. 618 p.
54. *Karchmer M. and Wigderson A.* Monotone circuits for connectivity require super-logarithmic depth. SIAM J. Discrete Math., 1990, vol. 3, no. 2, pp. 255–265.
55. *Kosaraju S. R.* Parallel evaluation of division-free arithmetic equations. Proc. 18th Symp. Theory of Comput. (Berkeley, 1986). NY, ACM, 1986, pp. 231–239.
56. *Maruyama K.* On the parallel evaluation of polynomials. IEEE Trans. Comp., 1973, vol. C-22, no. 1, pp. 2–5.
57. *McColl W. F.* Some results on circuit depth. Theory of computation. Report No. 18, Coventry, Univ. of Warwick, 1977.

58. *Munro I. and Paterson M.* Optimal algorithms for parallel polynomial evaluation. J. Comp. System Sci., 1973, vol. 7, pp. 189–198.

59. *Paterson M. S.* An introduction to Boolean function complexity. Astérisque, 1976, vol. 38–39, pp. 183–201.

60. *Paterson M. S., Pippenger N., and Zwick U.* Optimal carry save networks. LMS Lecture Notes Series. Boolean Function Complexity, vol. 169, ed. M. S. Paterson, Cambridge University Press, 1992, pp. 174–201.

61. *Paterson M. and Zwick U.* Shallow circuits and concise formulae for multiple addition and multiplication. Comput. Complexity, 1993, vol. 3, pp. 262–291.

62. *Preparata F. P. and Muller D. E.* Efficient parallel evaluation of Boolean expressions. IEEE Trans. Comp., 1976, vol. C-25, no. 5, pp. 548–549.

63. *Pudlák P.* Bounds for Hodes — Specker theorem. Logic and Machines: Decision Problems and Complexity, LNCS, 1984, vol. 171, pp. 421–445.

64. *Ragaz M.* Parallelizable algebras. Arch. Math. Logic, 1986/87, vol. 26, pp. 77–99.

65. *Savage J. E.* The Complexity of Computing. New York, Wiley, 1976. 391 p.

66. *Spira P. M.* On time-hardware complexity tradeoffs for Boolean functions. Proc. 4th Hawaii Symp. System Sci., N. Hollywood, Western Periodical Company, 1971, pp. 525–527.

67. *Tal A.* Shrinkage of de Morgan formulae from quantum query complexity. Electr. Colloq. on Comput. Complexity, 2014, TR14–048.

68. *Wegener I.* The Complexity of Boolean Functions. Stuttgart, Wiley–Teubner, 1987. 470 p.