ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.87

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ СЕРИИ СЕМЕЙСТВ АНАЛИТИЧЕСКИ ОПИСЫВАЕМЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ СЕТЕЙ СТЕПЕНИ ШЕСТЬ[1]

Э. А. Монахова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Получена серия семейств неориентированных кольцевых циркулянтных сетей степени шесть любого заданного диаметра $d > 1$, которая включает в том числе циркулянтные сети максимального порядка для всех диаметров $d \equiv 0 \pmod 3$ и $d \equiv 2 \pmod 3$. Серия семейств задаётся определяющими соотношениями между порядком графа и его образующими и порождающим параметром p, $1 \leqslant p < d$, при этом образующие и порядки графов являются полиномами третьей степени относительно диаметра графа. Приведены примеры построения новых семейств циркулянтных сетей степени шесть на основе задания функций $p = p(d)$.

Ключевые слова: *неориентированные циркулянтные сети степени шесть, циркулянтные графы заданного диаметра, семейства циркулянтных графов.*

DOI 10.17223/20710410/49/8

A SET OF FAMILIES OF ANALYTICALLY DESCRIBED TRIPLE LOOP NETWORKS DEFINED BY A PARAMETER

E. A. Monakhova

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

E-mail: emilia@rav.sscc.ru

A set of families of undirected triple loop networks of the form $C(N(d,p); 1, s_2(d,p), s_3(d,p))$ with the given diameter $d > 1$ and a parameter $p = 1, 2, \ldots, d-1$ is obtained. For each such family, the order N of every graph in the family and its generators s_2 and s_3 are defined by a cubical polynomial function of the diameter. The found set includes circulant graphs of degree 6 with the largest known orders for any diameters $d \equiv 0 \pmod 3$ and $d \equiv 2 \pmod 3$. Examples of constructing new families of triple loop networks based on the definition of functions $p = p(d)$ are presented.

Keywords: *undirected triple loop networks, circulant graphs of degree 6 with given diameter, families of circulant graphs.*

[1]Исследование выполнено в рамках бюджетного проекта ИВМиМГ СО РАН № 0315-2019-0006.

Введение

Циркулянтные сети (графы) (см. обзоры [1 – 5]) широко изучаются в качестве популярной топологии для мультипроцессорных систем и компьютерных сетей и в ряде других приложений. Актуальным становится их применение в качестве топологии для сетей на кристалле (networks-on-chip) [6 – 8]. Это обусловлено их лучшими структурными характеристиками и высокими показателями масштабируемости при большом количестве узлов по сравнению со стандартными топологиями сетей на кристалле. Важной задачей для сетей на кристалле с циркулянтной топологией является разработка эффективных алгоритмов маршрутизации, связанных с особенностями требований, предъявляемых к используемым ресурсам сетей на кристалле.

Дадим определение циркулянтных сетей. Пусть $n, N \in \mathbb{N}$, $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ — множество целых чисел, $1 \leqslant s_1 < \ldots < s_n \leqslant \lfloor N/2 \rfloor$. Неориентированный *циркулянтный* граф $C(N; s_1, \ldots, s_n)$ имеет множество вершин $V = \mathbb{Z}_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ и множество рёбер $A = \{(v, v \pm s_i \bmod N) : v \in V, i = 1, \ldots, n\}$. Числа $s_1, s_2, \ldots, s_n$ называются образующими графа, N — его порядком, n — размерностью, степень вершин графа равна $2n$. Будем исследовать кольцевые циркулянтные сети вида $C(N; 1, s_2, \ldots, s_n)$ с $s_1 = 1$, изучаемые в литературе как самостоятельный класс графов. Диаметр графа (оценивает максимальную структурную задержку в сети) равен $\mathrm{d}(C(N; S)) = \max\limits_{u,v \in V} \mathrm{d}(u, v)$, где $\mathrm{d}(u, v)$ — длина кратчайшего пути между вершинами u и v.

В литературе известны следующие аналитически описываемые семейства кольцевых циркулянтных сетей степени шесть и диаметра d: графы вида $C(3d^2 + 3d + 1; 1, 3d + 1, 3d + 2)$ [9]; циркулянтные сети с $N = 8d^3/27 + 4d^2/3 + 2d + 1$ [10]; циркулянты с $N = 32\lfloor d/3 \rfloor^3 + 8\lfloor d/3 \rfloor^2 + 2\lfloor d/3 \rfloor$ [11] и диаметром, меньшим или равным d, где $d \geqslant 3$. Получены алгоритмы поиска кратчайших путей [12, 13] для семейства из [9] и эквивалентных графов вида $C(3d^2 + 3d + 1; d, d + 1, 2d + 1)$ [14]. В [15] найдено семейство трёхмерных циркулянтов с порядком $N = 4d^2 - 2d - 2$, где $d \equiv 3, 5 \pmod 6$ — диаметр графов, как решение оптимизационной задачи на максимум при рассмотрении произведения Кронекера двух циркулянтов степеней два и три. В [15] дан алгоритм поиска кратчайших путей для графов найденного семейства. Следует отметить, что образующие графа $C(3d^2 + 3d + 1; 1, 3d + 1, 3d + 2)$, где $d \geqslant 1$, получены в [9] как решение оптимизационной задачи на максимум при укладке (tessellation) трёхмерного графа на плоскости, когда рассматриваются графы диаметра d вида $C(N_{\max} = 3d^2 + 3d + 1; s_1, s_2, s_1 + s_2)$. Заметим, что в большинстве этих работ порядки графов рассматриваемых семейств — это квадратичные функции от диаметра, хотя больший интерес представляет получение семейств с кубической функцией от диаметра, как более плотных и компактных графов. В [16] найдено семейство циркулянтных сетей степени шесть с максимальным порядком среди всех кольцевых циркулянтов заданного диаметра d и приведён аналитический алгоритм поиска кратчайших путей для найденного семейства. В работе [8] для кольцевых циркулянтных сетей степени шесть общего вида предложены различные алгоритмы поиска кратчайших путей и даны оценки требуемых ресурсов при реализации в сетях на кристалле.

В настоящей работе представлено параметрически задаваемое аналитическое описание кольцевых циркулянтных графов степени шесть, которое порождает серию семейств циркулянтных сетей, включающую в том числе семейство графов с максимально возможным порядком для любого заданного диаметра, а также позволяет синтезировать новые семейства с лучшими структурными характеристиками, чем известные в литературе. Интересным приложением полученного результата является возможность решения проблемы поиска кратчайших путей в семействах циркулянтных сетей степени шесть с помощью аналитического метода, общего для всех графов семейства.

1. Теорема о построении серии циркулянтных графов степени шесть

Рассмотрим множество трёхмерных циркулянтных графов вида $C(N; 1, s_2, s_3)$, где $1 < s_2 < s_3 \leqslant \lfloor N/2 \rfloor$. Будем использовать обозначение $D(x)$, $0 \leqslant x < N$, для длины кратчайшего пути из вершины 0 в вершину x. В графе $C(N; 1, s_2, s_3)$ выделим две ближайшие по циклу, образованному образующей s_1, вершины u, v, $u < v$, такие, что значения $D(u)$ и $D(v)$ получены без использования образующих $\pm s_1$. Тогда расстояния из вершины 0 до всех вершин, лежащих между u и v, могут быть вычислены с использованием того факта, что разница между смежными вершинами равна единице.

Лемма 1. Пусть в циркулянтном графе $C(N; 1, s_2, s_3)$ вершины u, v, $u < v$, — ближайшие по циклу, заданному образующей $s_1 = 1$, значения которых $D(u)$ и $D(v)$ получены без использования образующих ± 1. Тогда

$$\max_{u \leqslant x \leqslant v} D(x) = \lfloor (D(u) + D(v) + v - u)/2 \rfloor \tag{1}$$

и достигается в вершине $x = \lfloor (v + u + D(v) - D(u))/2 \rfloor$.

Следующая теорема даёт возможность построения целой серии семейств рассматриваемых графов заданного диаметра, что достигается введением в аналитическое описание графов параметра p, зависящего от диаметра. Эта теорема задаёт один из возможных типов определяющих соотношений между порядком графа и его образующими, когда и порядок графа N, и образующие s_2 и s_3 являются полиномами третьей степени относительно диаметра.

Теорема 1. Для каждого целого $d > 1$ пусть

$$p = 1, 2, \ldots, d - 1. \tag{2}$$

Тогда диаметр циркулянтных графов вида $C(N; 1, s_2, s_3)$, где

$$\begin{cases} N = 8p^3 - (16d + 8)p^2 + (8d^2 + 8d)p + 2d + 1, \\ s_2 = 4p(d - p)^2 + 2p(d - p) + d - 3p, \\ s_3 = s_2 + 4p, \end{cases} \tag{3}$$

равен d.

Доказательство. Рассмотрим циркулянтный граф $C(N; 1, s_2, s_3)$ вида (3). Пусть

$$\begin{gathered} \Delta = s_3 - s_2 = 4p, \\ r = (d - p)\Delta + \Delta/2 + 1. \end{gathered} \tag{4}$$

Согласно (3), порядок графа равен произведению двух нечётных чисел $N = (2(d-p) + 1)r$ и его образующие имеют вид $s_2 = (d - p)r - \Delta/2$, $s_3 = (d - p)r + \Delta/2$.

Поскольку число вершин графа состоит из целого числа интервалов длины r, будем называть их r_i-интервалами на графе, где $0 \leqslant i \leqslant 2(d-p)$ — номер интервала, или кратко $r_i = [ir, ir + r]$. Симметрия функции расстояний $D(x)$ в циркулянтах относительно $N/2$ позволяет в дальнейшем ограничиться значениями $i = 0, 1, \ldots, d-p$. Будем также использовать термин Δ-интервалы для обозначения перемещений (прыжков) по r_i-интервалу на длину Δ из вершин левого или правого концов r_i-интервала. В силу (4) перемещение на величину Δ даёт приращение функции расстояния $D(x)$ на 2. Так как $r = N-(s_2+s_3)$, перемещения в графе на величину r также дают приращение функции расстояния $D(x)$ на 2.

Выделим в рассматриваемом графе две вершины F и $R = N - F$, $F < N/2 < R$, играющие ключевую роль в определении функции расстояний:

$$F = (s_2 + s_3)/2 = (d - p)r.$$

Имеем $R = F + r$, $D(F \pm \Delta/2) = D(R \pm \Delta/2) = 1$. Тогда, выбирая минимальный из двух возможных путей в вершину F (или R) из 0, получим

$$D(F) = D(R) = \begin{cases} 2p+1 & \text{при} \quad 1 \leqslant p < \lceil d/2 \rceil, \\ 2(d-p) & \text{при} \quad \lceil d/2 \rceil \leqslant p \leqslant d-1. \end{cases} \tag{5}$$

Для определения диаметра рассматриваемого графа учитываем следующее. Каждый из интервалов вида

$$[js_2 \bmod N, js_3 \bmod N], \ 1 \leqslant j \leqslant d,$$

состоит из j Δ-интервалов, на концах которых вершины x имеют расстояния до нуля $D(x) = j$. В силу леммы 1 в серединах этих Δ-интервалов находятся вершины с максимумами (равными) расстояний до 0. Аналогичные рассуждения применимы для интервалов вида

$$[N - js_3 \bmod N, N - js_2 \bmod N], \ 1 \leqslant j \leqslant d.$$

Согласно (3) и учитывая, что $N = 2F + r$, для N выполняется условие

$$jF \equiv -2iF \pmod N$$

для нечётных j, где

$$2i + j = 2(d-p) + 1. \tag{6}$$

Рассмотрим r_i-интервал, где $i \in \{0, \ldots, d-p\}$. Имеем

$$-2is_2 \bmod N = i(r+\Delta), \quad -(2i+2)s_3 \bmod N = (i+1)(r-\Delta),$$
$$js_3 \bmod N = ir + j\Delta/2, \quad (j-2)s_2 \bmod N = (i+1)r - (j-2)\Delta/2.$$

Таким образом,

$$D(i(r+\Delta)) = 2i, \quad D((i+1)(r-\Delta)) = 2i+2; \tag{7}$$
$$D(ir + j\Delta/2) = j, \quad D((i+1)r - (j-2)\Delta/2) = j-2. \tag{8}$$

Итак, надо доказать, что для графов вида (3) максимальное расстояние до вершины 0 из любой вершины x, $0 \leqslant x \leqslant \lfloor N/2 \rfloor$, равно d. Для удобства представления будем рассматривать интервал $0 \leqslant x \leqslant R$. Всё множество вершин $\{0, \ldots, R\}$ разобъём на шесть подмножеств V_m, $0 \leqslant m \leqslant 5$, $\sum\limits_{m=0}^{5} |V_m| = (d-p+1)r$, соответственно типам содержащихся в них r_i-интервалов (табл. 1 и 2). Тип r_i-интервала определяется значениями функции $D(x)$ на его концах (например, для множеств V_0, V_1 и V_2 имеем $D(ir) = 2i$,

Таблица 1

Распределение вершин $0 \leqslant x \leqslant R$ графов вида (3) по типам r_i-интервалов при наличии обратной волны из F

Параметр p : $1 \leqslant p < \lceil d/2 \rceil$			
Множество	Тип r_i-интервала	Значения i	Мощность множеств
V_0	$2i, 2i+2$	$0 \leqslant i < \lfloor d/2 \rfloor - p$	$\lvert V_0 \rvert = (\lfloor d/2 \rfloor - p)r$
V_1	$2i, j-2, 2i+2$	$i = \lfloor d/2 \rfloor - p$	$\lvert V_1 \rvert = r$
V_2	$2i, j, j-2, 2i+2$	$\lfloor d/2 \rfloor - p < i < \lfloor d/2 \rfloor$	$\lvert V_2 \rvert = (p-1)r$
V_3	$2i, j, j-2, 2d-1-2i$	$i = \lfloor d/2 \rfloor$	$\lvert V_3 \rvert = r$
V_4	$2d+1-2i, j, j-2, 2d-1-2i$	$\lfloor d/2 \rfloor < i < d-p$	$\lvert V_4 \rvert = (\lceil d/2 \rceil - p - 1)r$
V_5	$2p+1, j, j, 2p+1$	$i = d-p$	$\lvert V_5 \rvert = r$

Таблица 2

Распределение вершин $0 \leqslant x \leqslant R$ графов вида (3) по типам r_i-интервалов при отсутствии обратной волны из F

Параметр p : $\lceil d/2 \rceil \leqslant p \leqslant d-1$			
Множество	Тип r_i-интервала	Значения i	Мощность множеств
V_1	$2i, j-2, 2i+2$	$i = 0,\ p = d/2$	$\lvert V_1 \rvert = \begin{cases} r, & p = d/2, \\ 0, & p \neq d/2 \end{cases}$
V_2	$2i, j, j-2, 2i+2$	$\begin{cases} 0 < i < d-p, & p = d/2, \\ 0 \leqslant i < d-p, & p \neq d/2 \end{cases}$	$\lvert V_2 \rvert = \begin{cases} (p-1)r, & p = d/2, \\ (d-p)r, & p \neq d/2 \end{cases}$
V_5	$2(d-p), j, j, 2(d-p)$	$i = d-p$	$\lvert V_5 \rvert = r$

$D(ir+r) = 2i+2$), а также тем, учитываются или нет значения j и $j-2$ в определении функции расстояния $D(x)$ вершин внутри интервала (учитываются значения, не превышающие d). Для наглядности доказательства теоремы все основные параметры, относящиеся к множествам V_m, $0 \leqslant m \leqslant 5$, суммированы в табл. 1 и 2.

В табл. 1 представлены результаты, когда есть прямая волна расстояний, порождённая r-интервалами из 0, и есть обратная волна расстояний, порождённая r-интервалами из вершины F (см. первое соотношение (5)). В табл. 1 выделяются особые случаи: $V_0 = \varnothing$ при $p = \lfloor d/2 \rfloor$, $V_2 = \varnothing$ при $p = 1$, $V_4 = \varnothing$ при $p = \lceil d/2 \rceil - 1$.

В табл. 2 представлены результаты, когда есть прямая волна расстояний, порождённая r-интервалами из 0, и нет обратной волны расстояний, порождённой r-интервалами из вершины F (см. второе соотношение (5)). В этом случае в графе отсутствуют множества вершин типа V_0, V_3 и V_4, а также $V_1 = \varnothing$ при $p \geqslant (d+1)/2$.

В процессе доказательства далее будем разделять вершины, принадлежащие всем r_i-интервалам из множеств V_m, $0 \leqslant m \leqslant 5$, на три множества (интервала вершин): $r_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, где $\sum\limits_{k=1}^{3} |A_k| = r$. Обозначив через x_l (x_r) номера вершин в A_2, соответствующие левому (правому) концам интервала A_2, получим

$$A_1 = [ir, x_l],\ A_2 = [x_l, x_r],\ A_3 = [x_r, ir+r].$$

1) Пусть $x \in V_0$, где $1 \leqslant p < \lceil d/2 \rceil$, $p \neq \lfloor d/2 \rfloor$ (табл. 1).

Множество вершин V_0 состоит из r_i-интервалов, $0 \leqslant i < q = \lfloor d/2 \rfloor - p$, где $D(ir) = 2i$, $D(ir+r) = 2i+2$ и значения j, $j-2$ не учитываются при расчёте $D(x)$ для вершин $x \in r_i$. Для V_0 определим $x_l = ir + q\Delta$, $x_r = (i+1)r - q\Delta$, $|A_1| = |A_3| = q\Delta$.

Для A_1 имеем $D(x) = 2i$ на концах i Δ-интервалов, затем на концах оставшихся $(q-i)$ Δ-интервалов значения $D(x)$ увеличиваются на 2, достигая значения $D(x_l) = 2q$.

Таким образом, для A_1 функция $D(x)$ достигает максимума, когда $i = q-1$. В силу (1) получаем $\max\limits_{x\in A_1} D(x) = 2\lfloor d/2\rfloor - 1 < d$.

Для A_2 имеем $D(x_l) = D(x_r) = 2(\lfloor d/2\rfloor - p)$. Из вершин x_l и x_r навстречу друг другу идут волны Δ-интервалов, увеличивающих на 2 значения $D(x)$, которые заканчиваются, когда $D(x)$ достигает значений $2\lfloor d/2\rfloor$. В силу (1) получим для всех i $\max\limits_{x\in A_2} D(x) = d$.

Учитывая для r_i-интервала, что, начиная с вершины $x = ir + r$, $D(x) = 2i + 2$ на концах $(i+1)$ Δ-интервалов, получаем, по аналогии с A_1, $\max\limits_{x\in A_3} D(x) = 2\lfloor d/2\rfloor \leqslant d$.

2) Пусть $x \in V_1$, где $1 \leqslant p < \lceil d/2\rceil$ и $p = d/2$.

Множество вершин V_1 состоит из одного r_i-интервала, где $i = \lfloor d/2\rfloor - p$ (см. табл. 1 и 2). Для него $D(ir) = 2i$, $D(ir + r) = 2i + 2$, и при расчёте $D(x)$ для вершин $x \in r_i$ учитываем только $j - 2 \leqslant d$. Определим $x_l = ir + i\Delta$, $x_r = (i + 1)(r - \Delta)$, $|A_1| = i\Delta$, $|A_3| = (i + 1)\Delta$.

Для A_1 имеем $D(x) = 2i$ на концах всех i Δ-интервалов. Таким образом, применяя (1), получим $\max\limits_{x\in A_1} D(x) = \lfloor(2i+2i+\Delta)/2\rfloor = 2\lfloor d/2\rfloor \leqslant d$. Отметим, что $A_1 = \varnothing$ при $p = d/2$.

Для A_2, согласно (7), имеем $D(x_l) = 2i$ и $D(x_r) = 2i+2$. Из вершин x_l и x_r навстречу идут волны Δ-интервалов, увеличивающих на 2 значения $D(x)$. Волны заканчиваются, когда $D(x)$ достигает при нечётных d значения $(d - 1)$ или при чётных d — значения $(d-2)$ при движении из x_l или значения d при движении из x_r. Применяя (1), получим: $\max\limits_{x\in A_2} D(x) = \lfloor(2i + d + \Delta/2 + 1)/2\rfloor = d$ при чётных d; $\max\limits_{x\in A_2} D(x) = \max\{\lfloor(2i + 2i + 2 + {}$ ${}+ \Delta)/2\rfloor, \lfloor(2i + 2 + d - 1 + \Delta/2 + 1)/2\rfloor\} = d$ при нечётных d. Отметим, что и в случае $p = 1$ при чётных d, когда $|A_2| = 3$, $\max\limits_{x\in A_2} D(x) = d$.

Для A_3 имеем $D(x) = 2i + 2$ на концах всех $(i + 1)$ Δ-интервалов, $D(x) = j - 2 = {}$ ${}= 2\lceil d/2\rceil - 1$ в их серединах. Таким образом, применяя (1) и (6), получаем $\max\limits_{x\in A_3} D(x) = {}$ ${}= \lfloor(2i + 2 + j - 2 + \Delta/2)/2\rfloor = \lfloor(2(d - p) + 1 + 2p)/2\rfloor = d$.

3) Пусть $x \in V_2$, где $1 \leqslant p \leqslant d - 1$.

Множество V_2 состоит из r_i-интервалов, где $D(ir) = 2i$, $D(ir + r) = 2i + 2$, и при расчёте $D(x)$ для вершин $x \in r_i$ учитываем значения j и $j-2$. Значения i представлены в табл. 1 и 2. Определение x_l и x_r на r_i-интервале зависит от значений i:

а) при $2i < d - p - 1$: $x_l = i(r + \Delta) + \Delta/2$, $x_r = (i + 1)(r - \Delta) - \Delta/2$, $|A_2| = {}$ ${}= (d - p - 2 - 2i)\Delta + \Delta/2 + 1$;

б) при $2i = 2\lfloor d/2\rfloor - p$: $x_l = i(r + \Delta) + \Delta/2$, $x_r = (i + 1)r - \lfloor j/2\rfloor\Delta$, $|A_2| = 1$;

в) при $2i > d-p$: $x_l = ir+\lceil j/2\rceil\Delta$, $x_r = (i+1)r-\lfloor j/2\rfloor\Delta$, $|A_2| = (d-p-j)\Delta+\Delta/2+1$.

Для A_1 имеем $D(x) = 2i$ на концах i Δ-интервалов и $D(x) = j$ в их серединах во всех случаях *а*–*в*. Для A_3 аналогично имеем $D(x) = 2i + 2$ на концах $(i + 1)$ Δ-интервалов, $D(x) = j - 2$ в их серединах. Таким образом, применяя (1) и (6), получаем $\max\limits_{x\in A_1} D(x) = \max\limits_{x\in A_3} D(x) = \lfloor(2i + j + \Delta/2)/2\rfloor = d$.

Для A_2, согласно (7), имеем $D(x_l - \Delta/2) = 2i$ и $D(x_r + \Delta/2) = 2i + 2$ в случае *а*; согласно (8), $D(x_l - \Delta/2) = j$ и $D(x_r + \Delta/2) = j - 2$ в случае *в*. Из вершин $(x_l - \Delta/2)$ и $(x_r + \Delta/2)$ на множестве A_2 навстречу друг другу идут волны Δ-интервалов, увеличивающих на 2 значения $D(x)$. Учитывая значения $|A_2|$ и применяя (1), получим: $\max\limits_{x\in A_2} D(x) = \lfloor(2(2i + 2) + 2(d - p - 2i - 2) + \Delta/2 + 1)/2\rfloor = d$ в случае *а*; $\max\limits_{x\in A_2} D(x) = \lfloor(2j + 2(d - p - j) + \Delta/2 + 1)/2\rfloor = d$ — в случае *в*.

4) Пусть $x \in V_3$, где $1 \leqslant p < \lceil d/2 \rceil$.

Множество V_3 состоит из r_i-интервала, для которого $i = \lfloor d/2 \rfloor$, $D(ir) = 2i$, значение $D(ir+r) = 2\lceil d/2 \rceil - 1$ формируется обратной волной длины r из вершины F. Поскольку $j = 2(\lceil d/2 \rceil - p) + 1 \leqslant d$, при расчёте $D(x)$ для вершин $x \in r_i$ учитываем j и $j-2$. Определим $x_l = ir + j\Delta/2$, $x_r = (i+1)r - j\Delta/2$, $|A_1| = |A_3| = j\Delta/2$.

Для A_1 имеем $D(x) = 2i$ на концах i Δ-интервалов и $D(x) = j$ в их серединах. Таким образом, применяя (1) и (6) и учитывая значение $|A_1|$, получим $\max\limits_{x \in A_1} D(x) = \lfloor (2i + j + \Delta/2)/2 \rfloor = d$.

Так как в случае $p = 1$ при нечётных d значение $|A_2| = -1$, то для него A_2 не рассматривается. При $p > 1$ для A_2 имеем $D(x_l) = D(x_r) = j$. Из вершин x_l и x_r навстречу идут волны Δ-интервалов, увеличивающих на 2 значения $D(x)$, которые заканчиваются, когда $D(x)$ достигает значений $2\lceil d/2 \rceil - 1$. Из (1) следует $\max\limits_{x \in A_2} D(x) = \lfloor (2j + 2(d - p - j) + \Delta/2 + 1)/2 \rfloor = d$.

Для A_3 имеем $D(x_r) = j$, $D(ir+r) = 2\lceil d/2 \rceil - 1$ и $D(x) = j-2$ для остальных концов Δ-интервалов. Применяя (1), получим $\max\limits_{x \in A_3} D(x) = \max\{2\lceil d/2 \rceil - 1, \lfloor (2(j-2)+\Delta)/2 \rfloor\} = d$.

5) Пусть $x \in V_4$, где $1 \leqslant p < \lceil d/2 \rceil$.

Множество V_4 состоит из r_i-интервалов, $\lfloor d/2 \rfloor < i < d - p$, для которых $D(ir) = (2d + 1 - 2i)$, $D(ir + r) = (2d - 1 - 2i)$ — нечётные значения, образованные обратной волной длины r из вершины F. При расчёте $D(x)$ для вершин $x \in r_i$ учитываем j и $j-2$. Положив $x_l = ir + j\Delta/2$, $x_r = (i+1)r - j\Delta/2$, получим $|A_1| = |A_3| = j\Delta/2$.

Для A_1 имеем $D(x) = j$ на концах всех Δ-интервалов, $D(ir) = 2d + 1 - 2i$. Таким образом, в силу (1) получим $\max\limits_{x \in A_1} D(x) = \max\{\lfloor (2j+\Delta)/2 \rfloor, \lfloor (2d+1-2i+j+\Delta/2)/2 \rfloor\} = \max\limits_{\lfloor d/2 \rfloor < i < d-p} \{2d + 1 - 2i\} \leqslant d$.

Для A_2 имеем $D(x_l) = D(x_r) = j$. Из вершин x_l и x_r навстречу идут волны Δ-интервалов, увеличивающих на 2 значения $D(x)$. Волны заканчиваются, когда $D(x)$ достигает значений $2\lceil d/2 \rceil - 1$. Учитывая $|A_2|$ и применяя (1), получим $\max\limits_{x \in A_2} D(x) = \lfloor (2j + 2(d - p - j) + \Delta/2 + 1)/2 \rfloor = d$.

Для A_3 имеем $D(x_r) = j$, $D(ir + r) = 2d - 1 - 2i$. На концах остальных Δ-интервалов, входящих в A_3, $D(x) = j - 2$. Таким образом, сравнивая с множеством A_1 и применяя (1), получим $\max\limits_{x \in A_3} D(x) < \max\limits_{x \in A_1} D(x) < d$.

6) Пусть $x \in V_5$, где $1 \leqslant p \leqslant d - 1$.

Множество V_5 состоит из r_i-интервала, где $i = d - p$. При расчёте $D(x)$ для вершин $x \in [F, R]$ также учитываем $j = 1$. Используя (5), определяем значения $D(x)$ в вершинах F и R. Делим вершины r_i следующим образом: $A_1 = [F, F + \Delta/2]$, $A_2 = [F+\Delta/2, R-\Delta/2]$, $A_3 = [R-\Delta/2, R]$, $|A_1| = |A_3| = \Delta/2$, $|A_2| = (d-p-1)\Delta+\Delta/2+1$.

Для A_1 и A_3 различаем два случая:

а) $D(F) = D(R) = 2p + 1$. Согласно (1), получаем $\max\limits_{x \in A_1} D(x) = \max\limits_{x \in A_3} D(x) = \lfloor (2p + 1 + 1 + \Delta/2)/2 \rfloor = 2p + 1 \leqslant d$;

б) $D(F) = D(R) = 2(d - p)$. Согласно (1), получаем $\max\limits_{x \in A_1} D(x) = \max\limits_{x \in A_3} D(x) = \lfloor (2(d - p) + 1 + \Delta/2)/2 \rfloor = d$.

Случай, когда $x \in A_2$, сводится к случаю 5, когда $x \in A_2$ и $j = 1$. ■

Из доказательства теоремы 1 следует наличие общей схемы структуры рассмотренных графов, что, вероятно, даст возможность разработки для них общего вида функции расстояний $D(x)$, зависящей от d и параметра p.

2. Способы построения серии семейств циркулянтных сетей степени шесть

Можно выделить два способа получения серии циркулянтных сетей степени шесть.

Первый способ. Пусть параметр p последовательно пробегает значения на всем диапазоне (2) для каждого целого $d > 1$. Тогда получаем бесконечное множество Ψ кольцевых циркулянтных сетей степени шесть и диаметров $d = 2, 3, \ldots$:

$$\Psi = \bigcup_{p=1,2,\ldots,d-1} \bigcup_{d>1} C(N; 1, s_2, s_3),$$

где N, s_2 и s_3 определяются формулами (3). Имеет место следующее свойство порядков графов полученной серии семейств.

Лемма 2. Число вершин N графов вида (3) при всех $d > 1$ и $p = 1, 2, \ldots, d-1$ есть произведение двух взаимно простых нечётных чисел.

Доказательство. Рассмотрим циркулянтный граф $C(N; 1, s_2, s_3)$ вида (3). Здесь $N = qr$, где $q = 2d - 2p + 1$, $r = 4pd - 4p^2 + 2p + 1$. Отсюда следует $r = 2pq + 1$, то есть q и r — взаимно простые числа при всех $d > 1$ и $p = 1, 2, \ldots, d-1$. ■

В табл. 3 дан пример представления значений порядков N графов в виде произведений двух взаимно простых чисел для диаметров $2 \leqslant d \leqslant 8$ и $1 \leqslant p \leqslant d-1$.

Таблица 3

Представление порядков N графов множества Ψ в виде произведения двух взаимно простых чисел

d	p						
	1	2	3	4	5	6	7
2	$N = 3 \times 7$						
3	$N = 5 \times 11$	3×13					
4	$N = 7 \times 15$	5×21	3×19				
5	$N = 9 \times 19$	7×29	5×31	3×25			
6	$N = 11 \times 23$	9×37	7×43	5×41	3×31		
7	$N = 13 \times 27$	11×45	9×55	7×57	5×51	3×37	
8	$N = 15 \times 31$	13×53	11×67	9×73	7×71	5×61	3×43

С помощью системы Wolfram Mathematica 10 был получен фрагмент одного из возможных построений семейств циркулянтных сетей из множества Ψ. Диаметр графов изменялся от $d = 2$ до 25, а параметр p — от $p = 1$ до $p = d - 1$. В табл. 4 приведены описания найденных трёхмерных циркулянтных графов вида $C(N; 1, s_2, s_3)$: диаметры графов $3 \leqslant d \leqslant 10$, соответствующие им значения $1 \leqslant p \leqslant d - 1$, порядки графов N и образующие s_2 и s_3. На рис. 1 показан график зависимости N от p и d для полученного фрагмента циркулянтных графов из множества Ψ.

Решим теперь задачу оптимизации для циркулянтных графов из множества Ψ: на множестве графов Ψ заданного диаметра $d > 1$ найти функцию $p = p(d)$, которая задаёт максимум функции $N = N(p)$ при всех $d > 1$.

Таблица 4

Параметры описания графов множества Ψ при $3 \leqslant d \leqslant 10$

d	p	N	s_2	s_3	d	p	N	s_2	s_3	d	p	N	s_2	s_3	d	p	N	s_2	s_3
3	1	55	20	24	6	3	301	123	135	8	3	737	329	341	9	7	355	128	156
3	2	39	9	17	6	4	205	74	90	8	4	657	284	300	9	8	147	33	65
4	1	105	43	47	6	5	93	21	41	8	5	497	203	223	10	1	741	349	353
4	2	105	38	46	7	1	351	160	164	8	6	305	110	134	10	2	1173	548	556
4	3	57	13	25	7	2	495	221	229	8	7	129	29	57	10	3	1365	631	643
5	1	171	74	78	7	3	495	214	226	9	1	595	278	282	10	4	1365	622	638
5	2	203	83	91	7	4	399	163	179	9	2	915	423	431	10	5	1221	545	565
5	3	155	56	68	7	5	255	92	112	9	3	1027	468	480	10	6	981	424	448
5	4	75	17	33	7	6	111	25	49	9	4	979	437	453	10	7	693	283	311
6	1	253	113	117	8	1	465	215	219	9	5	819	354	374	10	8	405	146	178
6	2	333	144	152	8	2	689	314	322	9	6	595	243	267	10	9	165	37	73

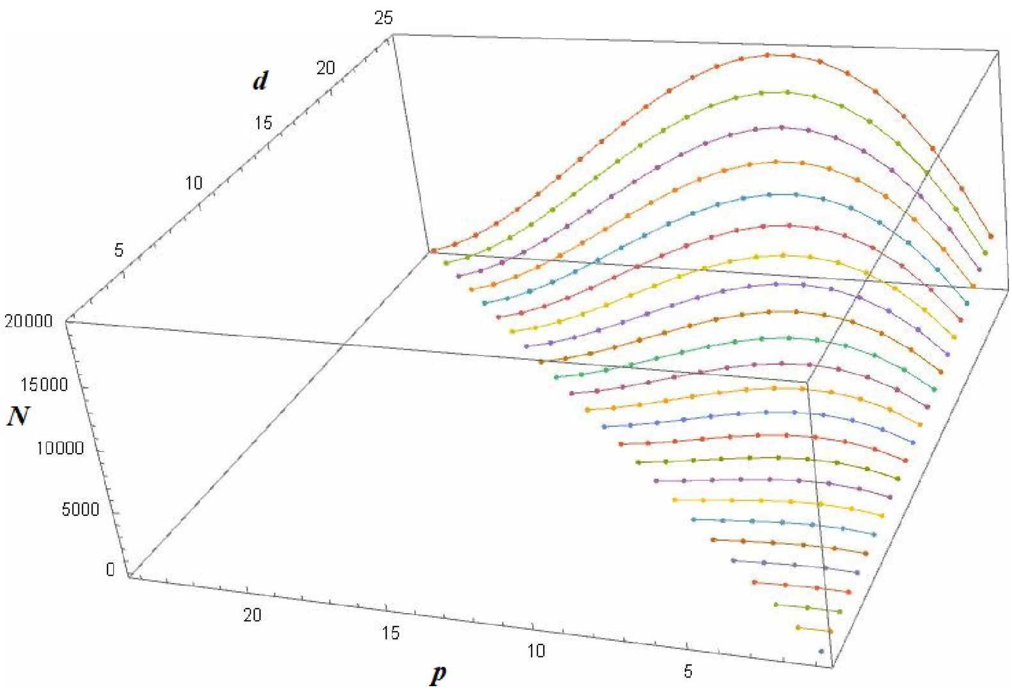

Рис. 1. График зависимости порядка N циркулянтов из Ψ для $d = 2, \ldots, 25$ и $p = 1, \ldots, d-1$

Теорема 2. Для любого целого $d > 1$ максимум $N = N(p)$, определяемого формулами (3), достигается при

$$p(d) = p^* = \begin{cases} \lfloor d/3 \rfloor, & \text{если } \ d \equiv 0 \pmod 3 \text{ или } \ d \equiv 1 \pmod 3, \\ \lceil d/3 \rceil, & \text{если } \ d \equiv 2 \pmod 3 \text{ или } \ d \equiv 1 \pmod 3. \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим циркулянтный граф $C(N; 1, s_2, s_3)$ вида (3). Функция N — кубический полином относительно p для любого заданного d. Надо найти такую целочисленную функцию $p(d)$, при которой значение N равно максимуму для любого $d > 1$. Для этого вычислим производную N по p и приравняем её нулю: $\dfrac{dN}{dp} = 24p^2 - 16(2d+1)p + 8d(d+1) = 0$. Полученное квадратное уравнение относительно p имеет коэффициенты $a = 24$, $b = -(32d + 16)$, $c = 8d^2 + 8d$. Дискриминант $\delta = b^2 - 4ac = 16^2(d^2 + d + 1) > 0$. Следовательно, N имеет один локальный максимум, когда $p_1 = (2d + 1 - \sqrt{d^2 + d + 1})/3$ (второе решение $p_2 = (2d + 1 + \sqrt{d^2 + d + 1})/3 \geqslant d$ не подходит). Так как $d < \sqrt{d^2 + d + 1} < d + 1$ и соответственно $d/3 < p_1 < (d + 1)/3$, взяв ближайшее целое, получим для любого $d > 1$ значения $p(d)$, равные (9). Подставляя найденные значения p в (3), получим (10) (см. далее), а также соответствующие значения образующих максимального графа. ■

Второй способ. Если в качестве p взять любую целочисленную функцию от d, удовлетворяющую условию $1 \leqslant p(d) < d$, то можно синтезировать новые бесконечные семейства циркулянтных сетей. Ниже представлены два примера полученных таким способом семейств циркулянтных сетей степени шесть, принадлежащих Ψ.

Пример 1. Пусть $p(d) = \lceil d/2 \rceil$, где $d > 1$. Тогда

$$C(N; 1, s_2, s_3) = \begin{cases} C(d^3 + 2d^2 + 2d + 1; 1, (d^3 + d^2 - d)/2, (d^3 + d^2 + 3d)/2) & \text{при чётных } d, \\ C(d^3 + d^2 + d; 1, (d^3 - 3)/2 - d, (d^3 - 3)/2 + d + 2) & \text{при нечётных } d. \end{cases}$$

Новое семейство из примера 1 по соотношению N/d лучше семейств, найденных в [9, 10, 14, 15].

Пример 2. Пусть $p(d) = p^*$, где p^* определяется соотношением (9). Тогда семейство циркулянтных графов $C(N; 1, s_2, s_3)$ диаметра $d > 1$ с максимальным N и образующими, представленными в виде полиномов третьей степени от d, описывается следующим образом:

$$N(d) = \begin{cases} \frac{32}{27}d^3 + \frac{16}{9}d^2 + 2d + 1, & \text{если } d \equiv 0 \pmod 3, \\ 32\lfloor d/3 \rfloor^3 + 48\lfloor d/3 \rfloor^2 + 22\lfloor d/3 \rfloor + 3, & \text{если } d \equiv 1 \pmod 3, \\ 32\lfloor d/3 \rfloor^3 + 80\lfloor d/3 \rfloor^2 + 70\lfloor d/3 \rfloor + 21, & \text{если } d \equiv 2 \pmod 3), \end{cases} \tag{10}$$

$$(s_2(d), s_3(d)) = \begin{cases} \left(\frac{16}{27}d^3 + \frac{4}{9}d^2,\ s_2 + \frac{4}{3}d\right), & \text{если } d \equiv 0 \pmod 3, \\ \left(\frac{16}{27}d^3 + \frac{4}{9}d^2 - \frac{2}{3}d + \frac{17}{27},\ s_2 + \frac{4}{3}d - \frac{4}{3}\right) \text{ или} & \\ \left(\frac{16}{27}d^3 + \frac{4}{9}d^2 - \frac{4}{3}d - \frac{46}{27},\ s_2 + \frac{4}{3}d + \frac{8}{3}\right), & \text{если } d \equiv 1 \pmod 3, \\ \left(\frac{16}{27}d^3 + \frac{4}{9}d^2 - \frac{2}{9}d - \frac{29}{27},\ s_2 + \frac{4}{3}d + \frac{4}{3}\right), & \text{если } d \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Семейство из примера 2 по соотношению N/d превосходит семейства, полученные в [9–11, 14,15]. Для всех диаметров $d \equiv 0 \pmod 3$ и $d \equiv 2 \pmod 3$ максимальный порядок $N(d)$, равный (10), совпадает с максимумом N, найденным в [16], а при $d \equiv 1 \pmod 3$ оказывается меньше на величину $4(2\lfloor d/3 \rfloor + 1)$. Отметим, что при $d \equiv 1 \pmod 3$ существуют два набора образующих третьей степени от d, которые задают максимум $N(d)$, равный (10).

Заключение

Получена серия параметрически описываемых бесконечных семейств кольцевых циркулянтных сетей степени шесть, включающая графы максимального порядка для заданного диаметра. Это является новым результатом в теории циркулянтных сетей, дающим возможность синтеза ранее неизвестных семейств с меняющимся диаметром, а также при фиксированном диаметре $d > 1$ построения серии из $d - 1$ графов. Ранее были известны только отдельные бесконечные семейства циркулянтов. Другая особенность полученного результата — наличие общей схемы структуры графов получающихся семейств — даёт возможность разработки для них общих аналитических методов поиска кратчайших путей, что подтверждено на примере семейства из [17], являющегося частным случаем параметрически описываемых бесконечных семейств. Получение новых серий семейств сетей, построенных на других типах определяющих соотношений между порядком и образующими графа, и эффективных аналитических алгоритмов парной маршрутизации для них является одним из направлений будущей работы и представляет интерес с практической точки зрения, так как циркулянтные графы степени шесть известны как одна из перспективных топологий для сетей на кристалле.

Автор выражает благодарность О. Г. Монахову за экспериментальные результаты, проведённые с помощью системы Wolfram Mathematica 10.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахова Э. А.* Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. 2011. №3. С. 92–115.
2. *Monakhova E. A.* A survey on undirected circulant graphs // Discrete Math. Algorithms Appl. 2012. No. 4. `https://www.researchgate.net/publication/267143246_A_survey_on_undirected_circulant_graphs`.
3. *Perez-Roses H.* Algebraic and computer-based methods in the undirected degree/diameter problem — A brief survey // Electr. J. Graph Theory Appl. 2014. No. 2(2). P. 166–190.
4. *Bermond J.-C., Comellas F., and Hsu D. F.* Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distributed Comput. 1995. No. 24. P. 2–10.
5. *Hwang F. K.* A survey on multi-loop networks // Theor. Comput. Sci. 2003. No. 299. P. 107–121.
6. *Romanov A., Amerikanov A., and Lezhnev E.* Analysis of approaches for synthesis of networks-on-chip by using circulant topologies // J. Physics: Conf. Ser. 2018. V. 1050. P. 1–12.
7. *Romanov A. Yu.* Development of routing algorithms in networks-on-chip based on ring circulant topologies // Heliyon. 2019. V. 5. No. 4. P. 1–23.
8. *Романов А. Ю., Ведмидь Е. А., Монахова Э. А.* Проектирование сетей на кристалле с топологией кольцевой циркулянт с тремя образующими: разработка алгоритмов маршрутизации // Информационные технологии. 2019. №25(9). С. 522-530.
9. *Yebra J. L. A., Fiol M. A., Morillo P., and Alegre I.* The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations // Ars Combinatoria. 1985. No. 20B. P. 159–172.
10. *Wong C. K. and Coppersmith D.* A combinatorial problem related to multimodule memory organizations // J. Assoc. Comput. Mach. 1974. No. 21. P. 392–402.
11. *Chen S. and Jia X.-D.* Undirected loop networks // Networks. 1993. No. 23. P. 257–260.
12. *Barriere L., Fabrega J., Simo E., and Zaragoza M.* Fault-tolerant routings in chordal ring networks // Networks. 2000. V. 36(3). P. 180–190.
13. *Thomson A. and Zhou S.* Gossiping and routing in undirected triple-loop networks // Networks. 2010. No. 55(4). P. 341–349.
14. *Liestman A. L., Opatrny J., and Zaragoza M.* Network properties of double and triple fixed-step graphs // Int. J. Found. Comp. Sci. 1998. V. 9. P. 57–76.
15. *Jha P. K.* A family of efficient six-regular circulants representable as a Kronecker product // Discr. Appl. Math. 2016. V. 203. P. 72–84.
16. *Monakhova E.* Optimal triple loop networks with given transmission delay: Topological design and routing // Intern. Network Optimization Conf. (INOC'2003), Evry/Paris, France, 2003. P. 410–415.

17. *Монахова Э. А., Монахов О. Г.* Динамический алгоритм парной маршрутизации для аналитически задаваемых семейств циркулянтных сетей степени шесть // Сб. статей XIX Междунар. науч.-технич. конф. «Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике». Пенза: ПДЗ, 2019. С. 30–37.

REFERENCES

1. *Monakhova E. A.* Strukturnye i kommunikativnye svoystva tsirkulyantnykh setey [Structural and communicative properties of circulant networks]. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 2011, no. 3, pp. 92–115. (in Russian)
2. *Monakhova E. A.* A survey on undirected circulant graphs. Discrete Math. Algorithms Appl., 2012, no. 4. `https://www.researchgate.net/publication/267143246_A_survey_on_undirected_circulant_graphs`.
3. *Perez-Roses H.* Algebraic and computer-based methods in the undirected degree/diameter problem — A brief survey. Electr. J. Graph Theory Appl., 2014, no. 2(2), pp. 166–190.
4. *Bermond J.-C., Comellas F., and Hsu D. F.* Distributed loop computer networks: A survey. J. Parallel Distributed Comput., 1995, no. 24, pp. 2–10.
5. *Hwang F. K.* A survey on multi-loop networks. Theor. Comput. Sci., 2003, no. 299, pp. 107–121.
6. *Romanov A., Amerikanov A., and Lezhnev E.* Analysis of approaches for synthesis of networks-on-chip by using circulant topologies. J. Physics: Conf. Ser., 2018, vol. 1050, pp. 1–12.
7. *Romanov A. Yu.* Development of routing algorithms in networks-on-chip based on ring circulant topologies. Heliyon, 2019, vol. 5, no. 4, pp. 1–23.
8. *Romanov A. Yu., Vedmid E. A., and Monakhova E. A.* Proektirovanie setej na kristalle s topologiej kol'cevoj cirkulyant s tremya obrazuyushchimi: razrabotka algoritmov marshrutizacii [Designing networks-on-chip based on triple loop (circulant) networks: routing algorithm development]. Informacionnye Tekhnologii, 2019, no. 25(9), pp. 522–530. (in Russian)
9. *Yebra J. L. A., Fiol M. A., Morillo P., and Alegre I.* The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations. Ars Combinatoria, 1985, no. 20B, pp. 159–172.
10. *Wong C. K. and Coppersmith D.* A combinatorial problem related to multimodule memory organizations. J. Assoc. Comput. Mach., 1974, no. 21, pp. 392–402.
11. *Chen S. and Jia X.-D.* Undirected loop networks. Networks, 1993, no. 23, pp. 257–260.
12. *Barriere L., Fabrega J., Simo E., and Zaragoza M.* Fault-tolerant routings in chordal ring networks. Networks, 2000, no. 36(3), pp. 180–190.
13. *Thomson A. and Zhou S.* Gossiping and routing in undirected triple-loop networks. Networks, 2010, no. 55(4), pp. 341–349.
14. *Liestman A. L., Opatrny J., and Zaragoza M.* Network properties of double and triple fixed-step graphs. Int. J. Found. Comp. Sci., 1998, vol. 9, pp. 57–76.
15. *Jha P. K.* A family of efficient six-regular circulants representable as a Kronecker product. Discr. Appl. Math., 2016, vol. 203, pp. 72–84.
16. *Monakhova E.* Optimal triple loop networks with given transmission delay: Topological design and routing. Intern. Network Optimization Conf. (INOC'2003), Evry/Paris, France, 2003, pp. 410–415.
17. *Monakhova E. A. and Monakhov O. G.* Dinamicheskij algoritm parnoj marshrutizacii dlya analiticheski zadavaemyh semejstv cirkulyantnyh setej stepeni shest' [A dynamic algorithm of two-terminal routing for analytically described families of degree six circulant networks]. Proc. XIX Intern. Conf. "Problemy Informatiki v Obrazovanii, Upravlenii, Ekonomike i Tekhnike", Penza, PDZ Publ., 2019, pp. 30–37. (in Russian)