

LECTURE NOTES

# Grundlagen der Geophysik

Prof. Dr. Torsten Dahm



Helmholtz Centre Potsdam

**GFZ German Research Centre  
for Geosciences**

DOI: 10.2312/GFZ.2.1.2015.001

Recommended citation: Dahm, Torsten (2015): Grundlagen der Geophysik. Potsdam :  
Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ (Lecture Notes).

doi: 10.2312/GFZ.2.1.2015.001



Kontakt: T. Dahm: Deutsches GeoforschungsZentrum GFZ

Telegrafenberg, 14473 Potsdam

E-mail: [torsten.dahm@gfz-potsdam.de](mailto:torsten.dahm@gfz-potsdam.de)

Universität Potsdam

Institut für Erd- und Umweltwissenschaften

Karl-Liebknecht-Str. 24-25, 14476 Potsdam-Golm

# Grundlagen der Geophysik

Lecture Notes

**Torsten Dahm**

GFZ - Deutsches Geoforschungszentrum

Universität Potsdam





## **Vorwort**

Die vorliegenden Lecture Notes wurden im Rahmen von Vorlesungen und Praktika zwischen 1999 und 2014 an den Universitäten Frankfurt, Hamburg und Potsdam entwickelt, insbesondere als Zusatzmaterial meines Moduls *Einführung in die Geophysik* an der Universität Hamburg. Ziel dieser Vorlesung war die breite Einführung in die Grundlagen der Geophysik, von der großskaligen, globalen Geophysik bis zur kleinskaligen oberflächennahen und angewandten Geophysik. Das Manuskript ist vom Niveau her für Anfangsemester in einem Diplom- oder Bachelor-Studiengang in der Geophysik/Ozeanographie, den Geowissenschaften oder der Physik geeignet.

Die Theorie-Kapitel sind auf wenige wichtige Formeln und elementare Ableitungen beschränkt. Meßinstrumente, Meßverfahren und Anwendungen werden ausführlich besprochen und durch Beispiele vertieft.

Der erste Teil beginnt mit der Entstehung der Erde und der Planeten. Der innere Aufbau der Erde und die Dynamik der Erde folgen im dritten Kapitel. Unterkapitel sind hier bereits die globale Plattentektonik, der Wärmehaushalt der Erde und die Entstehung des Erdmagnetfeldes. Im vierten Kapitel folgt das Schwerfeld der Erde und die Ansätze der angewandten Gravimetrie. Der Stoff des fünften Kapitels umfasst die Geomagnetik und den remanenten Gesteinsmagnetismus. In den folgenden Kapiteln wird in weitere Verfahren der angewandten Geophysik eingeführt. Die Gleichstromelektrik wird ebenso behandelt wie Verfahren, die mit elektromagnetischen Wellen arbeiten. Dabei wird auch die Arbeitsweise des Bodenradar und der Magnetotellurik beschrieben. Im vorletzten Kapitel wird in seismische Verfahren eingeführt, die in der angewandten Geophysik eine wichtige Rolle spielen. Hierbei werden nötige Grundlagen der Theorie elastischer Wellen ebenso wie praktische Aspekte der geometrischen Ausbreitung von Raumwellen durch die Erde kurz beschrieben. Das letzte Kapitel ist den Erdbeben und der Seismologie gewidmet. Begleitende Übungsaufgaben sind auf Anfrage erhältlich.

## **Danksagung**

Die vorlesungsbegleitenden Übungen wurden von mehreren studentischen Tutoren und Doktoranden entwickelt, insbesondere von Martin Thorwart, Daniela Kühn, Marion Miensopust, Sonja Hofmann, Martin Hensch, Barbara Golebiowski und Hanna Beyer. Alle Tutoren haben zur Verbesserung des Skriptes beigetragen. Eine modifizierte Version des Kapitels 5.3 wurde ursprünglich als Praktikumsbeschreibung zusammen mit Stefan Buske entwickelt. Für das Korrekturlesen danke ich insbesondere Dr. Daniela Kühn, Dr. Rudi Widmer-Schmidrig, Prof. Heiner Villinger (Kapitel 3), Prof. Marion Jegen (Kapitel 5.1 und 5.2), Prof. Rainer Kind (Kapitel 5 und 6). Die Titelseite ist von Roman Dahm entworfen (Foto von Joel Ruch). Besonderer Dank geht an meine Frau Julia und meine Söhne Roman und Adrian für ihr fortwährendes Verständnis für mein Projekt.

Torsten Dahm. Potsdam, den 29 April 2015.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Entstehung und Aufbau der Erde</b>	<b>6</b>
2.1	Planeten . . . . .	6
2.2	Der Aufbau der Erde . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Geodynamik &amp; Plattentektonik</b>	<b>27</b>
3.1	Plattentektonik . . . . .	27
3.2	Plattengrenzen . . . . .	39
3.3	Vertikale Bewegungen . . . . .	56
3.4	Temperatur, Wärme, Konvektion und Geodynamo . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Potenzialfelder in der Geophysik</b>	<b>73</b>
4.1	Kurzeinstieg . . . . .	73
4.2	Das Schwerfeld . . . . .	76
4.3	Gesteinsmagnetismus und Magnetostatik . . . . .	109
4.4	Elektrostatische Felder und Gleichstromelektrik . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Wellenfelder und Wellenfeldverfahren</b>	<b>152</b>
5.1	Grundlagen zu Schwingungen und Wellen . . . . .	152
5.2	Magnetotellurik . . . . .	164
5.3	Georadar . . . . .	169
5.4	Seismische Wellenfelder und seismische Verfahren . . . . .	178
<b>6</b>	<b>Erdbeben</b>	<b>245</b>
6.1	Parameter von Erdbeben . . . . .	246
6.2	Bodenerschütterungen und seismische Gefährdung . . . . .	265
6.3	Magnitude-Häufigkeit, b-Werte, Omoris Gesetz . . . . .	274
6.4	Charakteristische Beben und Bebenintervall . . . . .	276
6.5	Bebenwahrscheinlichkeit . . . . .	280

<b>A Nomenklatur, Konstanten</b>	<b>290</b>
<b>B Minerale und Gesteine</b>	<b>294</b>
<b>C Geochronologie</b>	<b>298</b>
C.1 Grundlagen . . . . .	299
C.2 $C^{14}$ -Datierung . . . . .	299
C.3 Die Uran-Thorium-Blei Methode . . . . .	300
C.4 Erdzeitalter . . . . .	300
<b>D Koordinaten und Darstellung von Daten</b>	<b>302</b>
D.1 Koordinatensysteme . . . . .	302
D.2 Projektionen und Plotten von Daten und Karten . . . . .	305
<b>E Beispiele für Schwereanomalien</b>	<b>312</b>
E.1 Kugelförmige Erde mit homogener Dichte . . . . .	312
E.2 Halbunendliche Platte . . . . .	313
<b>F Elektrische Polarisierung</b>	<b>315</b>
<b>G Die Erdbebenmagnitude</b>	<b>318</b>
<b>H Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>321</b>
H.1 Grundlagen der Statistik . . . . .	321
H.2 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	326
H.3 Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktionen . . . . .	327
H.4 Verknüpfung von Ereignissen . . . . .	329

# 1 Einführung

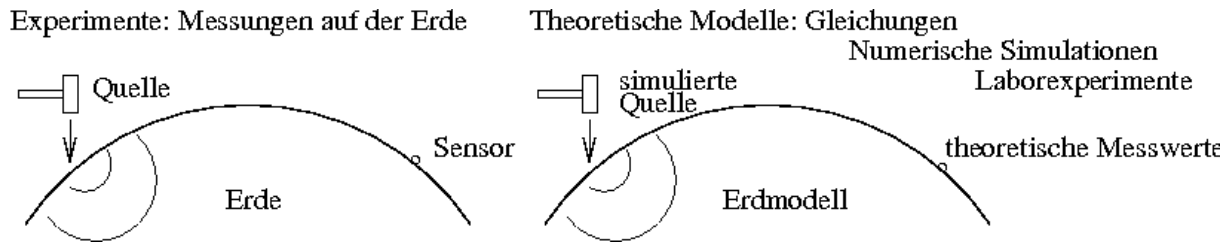


Abbildung 1.1: **Feldexperimente** und **theoretische Erdmodelle** sind wesentliche Aspekte der Geophysik. Idealisierte Erdmodelle werden durch theoretische Beziehungen beschrieben und so gewählt, dass Messdaten bestmöglichst erklärt werden.

Die Geophysik beschäftigt sich mit dem Aufbau der festen Erde und den Kräften und Prozessen, die die Erde beeinflussen oder gar verändern. Sie ergänzt und erweitert die klassischen Fächer Geologie und Physik für das Studium der festen Erde. Die Seismologie ist die größte Teildisziplin der Geophysik mit einem wichtigen, eigenständigen Schwerpunkt in der Untersuchung von seismischen Quellen und von Erdbeben- und Vulkanprozessen.

Tabelle 1.1: Einige Parameter zur Beschreibung der Eigenschaften von Gesteinen.

Par.	Einheit	Eigenschaft
$\rho$	$kg\ m^{-3}$	Gesteins-(Massen-)dichte
$\chi$	–	magnetische Suszeptibilität (Magnetisierbarkeit)
$M_\chi$	$A\ m^{-1}$	Magnetisierung (Dichte des magn. Moments)
$\sigma$	$\Omega^{-1}\ m^{-1}$	elektrische Leitfähigkeit
$\epsilon_r$	–	relative Dielektrizität
$\mathcal{N}$	$MPa$	Schermodul
$\mathcal{K}$	$MPa$	Kompressionsmodul
$v_p$	$m\ s^{-1}$	Kompressionswellengeschwindigkeit (P-Wellen-Geschw.)
$v_s$	$m\ s^{-1}$	Scherwellengeschwindigkeit (S-Wellen-Geschwindigkeit)
$\kappa_h$	$W\ K^{-1}\ m^{-1}$	Wärmeleitfähigkeit
$T_h$	$K$	Temperatur
$P$	$N\ m^{-2}$	Druck

In der Art und Weise, wie die Erde untersucht wird, steht die Geophysik sehr eng bei der (Experimental-) Physik. Auf der einen Seite stehen wiederholbare Messungen, z.B. von Kräften oder Bewegungen (Abb. 1.1), wobei in den allermeisten Fällen die geophysikalischen Meßgrößen auf der Erdoberfläche gesammelt werden. Auf der anderen Seite stehen abgeleitete Eigenschaften und Parameter von Gesteinen (Erdmodelle) oder den

Prozessen, die durch theoretische Beziehungen und Gleichungen formuliert werden und zur Erklärung der Messdaten nötig sind. Zum Beispiel kann ein Dichtemodell der Erde dafür stehen, die gemessene Erdanziehungskraft an der Oberfläche zu erklären.

Die Zusammensetzung und Struktur der Erde betrifft die Frage nach dem Ort, der Zusammensetzung und den Eigenschaften der Gesteine im Erdinnern. Während die Geologie und Petrologie vor allem die Chemie, Mineralogie, das Aussehen und den Zustand von Gesteinen untersucht, um daraus Aussagen über z.B. Entstehung und Geschichte abzuleiten, interessieren sich Geophysikerinnen und Geophysiker vor allem für die physikalischen Eigenschaften der Gesteine. Die physikalischen Eigenschaften sind wichtig, um Vorhersagen zu treffen über das Verhalten der Gesteine bei Beanspruchung. Beispiele sind die Dämpfung von Bewegungsenergie bei Erdbeben, die Stabilität von Hangrutschungen bei Regen, oder die Ergiebigkeit von ölführenden Sedimentschichten einer Lagerstätte. Ebenso erlauben die zerstörungsfreien, indirekte Untersuchungsmethoden der Geophysik die Bestimmung der physikalischen Eigenschaften der Gesteine tief unter der Erdoberfläche, sodass Gesteinsformationen den Tiefen zugeordnet werden können.

Parameter zur Charakterisierung der Erde sind z.B. die Gesteinsdichte, die Magnetisierbarkeit (magnetische Suszeptibilität oder magnetische Permeabilität), die spezifische elektrische Leitfähigkeit, die elastischen Moduln, die Viskosität oder die Porösität und Permeabilität von Gesteinen (vgl. Tab. 1.1). In der Regel hängen alle Eigenschaften von Temperatur und Druck (Spannung) und evtl. Porenwasser im Erdinnern ab.

Die Prozesse auf und in der Erde betreffen Kräfte und Bewegungen. Beispiele sind die Entstehung des Erdmagnetfelds, die Richtung der Dislokation auf der Bruchfläche eines Erdbebens, oder die Umwandlung von Gesteinen durch die Änderung der Tiefenlage der Gesteinschichten. Welche Kräfte sind zur Beschreibung der geophysikalischen Prozesse wichtig? Wenn man zurück auf die elementaren Kräfte geht, dann sind das die Massenanziehungskraft (Gravitation), die atomaren Bindungskräfte, und "elektromagnetische Kräfte", die z.B. elektrische Ströme und Magnetfelder beeinflussen können. Praktisch hat man es in der Geophysik mit ganz unterschiedlichen Ausprägungen und Phänomenen dieser Elementarkräfte zu tun.

Ähnlich wie in der Physik unterteilt man die Geophysik häufig aufgrund der unterschiedlichen Meßgrößen; z.B. **Schwereuntersuchungen** (**Gravimetrie**, d.h. Messung von Massenanziehung), **Geothermik** (Messung der Temperatur), **Geoelektrik** (Messung elektrischer Feldstärke und Ströme), **Magnetik** (Messung magnetischer Feldstärke), **Elektromagnetik** und **Magnetotellurik** (Messung zeitabhängiger elektrischer und magnetischer Felder), und die **Seismologie** und **Seismik** (Messung der Bodenbewegung und Deformation). Diese wichtigen Teilgebiete werden in der Vorlesung behandelt. Die Einteilung nach Messgrößen hat aber auch Nachteile. Zum einen werden nicht alle Disziplinen in der Geophysik abgedeckt, und zum anderen besteht die Gefahr,



die vorhandenen Zusammenhänge zwischen den Gebieten zu übersehen. In einigen Lehrbüchern findet man andere Einteilungen, wie z.B. die **Allgemeine** und **Angewandte Geophysik**. In der Allgemeinen beschäftigt man sich mit den allgemeinen Aspekten der Erde (z.B. Aufbau der Erde, Dynamik der Erde), in der Angewandten mehr mit Fragestellungen und Methoden, die Bedeutung für die Industrie haben. Auch diese Einteilung wird der Forschung in der Geophysik nicht gerecht, da sich Fragestellungen der Allgemeinen und Angewandten Geophysik häufig nicht trennen lassen.

Dieses Skript beginnt mit grundsätzlichen Aussagen zur Entstehung und dem Aufbau der Erde. Danach wird die Dynamik der Erde, die **Geodynamik**, umrissen. Dann kommen, in klassischer Weise, die einzelnen Teilgebiete der Geophysik, d.h. Gravimetrie, Geothermik, Elektrik und Magnetik, und schliesslich die Seismologie. Um den Stoff verfolgen zu können, sollten Grundlagen in der Mathematik (Differential- und Integralrechnung, Vektorrechnung) und Physik vorhanden sein. Anhang A zu diesem Skript listet Konstanten, elementare Größen und die verwendete Nomenklatur. Die weiteren Anhänge ergänzen direkt den Lehrstoff.

Vorlesung und Lecture Notes bauen auf folgende Lehrbücher auf:

Berckhemer, H., 1990: *Grundlagen der Geophysik*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt.

Fowler, C.M.R., 2004: *The solid earth, 2nd edition*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Stacey, F.D., 1992: *Physics of the Earth*. Brookfield Press, Kenmore, Brisbane, Australia.

Telford, W.M., W.P. Gerald, R.E. Sheriff: *Applied Geophysics*, 2nd edition, Cambridge University Press, 1992.

## 2 Entstehung und Aufbau der Erde

### 2.1 Das Planetensystem und die Entstehungsgeschichte

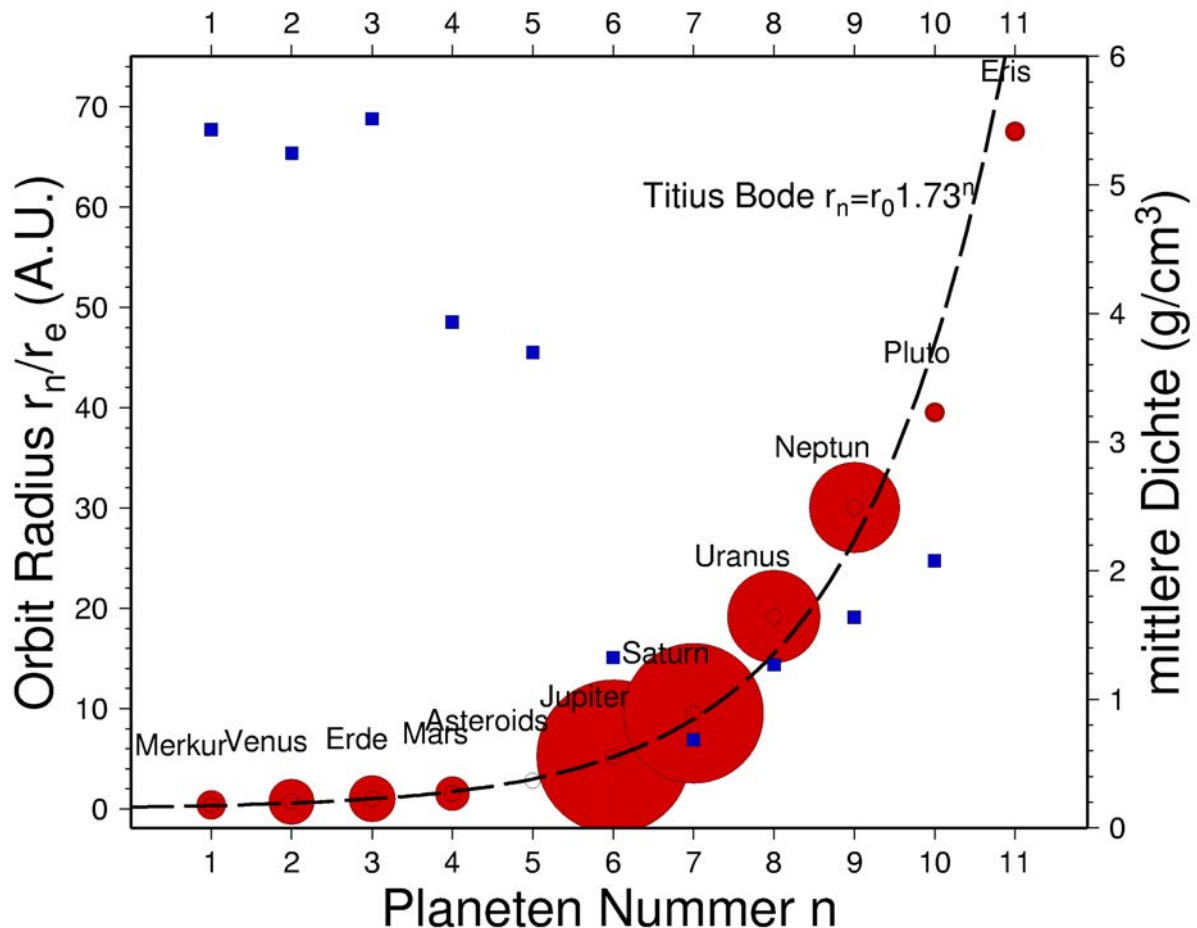


Abbildung 2.1: Radien der Planetenbahnen des Sonnensystems (Kreise) als Funktion der Planeten Nummer  $n$ . Die Größe der farbigen Kreise skaliert mit dem Wurzel des Planetenradius. Die gestrichelte Linie gibt die Vorhersage der empirischen Titius-Bode Beziehung  $r_n = r_0 x^n$  für  $x = 1.73$  und  $r_0 = 1/x^3$  an. Die Quadrate geben die mittlere Massendichte der Planeten an. A.U. ist die Astronomische Einheit (Unit), wobei  $1 \text{ A.U.} = 1.496 \cdot 10^8 \text{ km}$  der Abstand Erde - Sonne ist.

Die Bewegung von Planeten gegenüber dem starren Fixsternhimmel wurde seit dem Altertum beobachtet und galt bis ins 16. Jahrhundert als eines der Hauptprobleme der Wissenschaft. Aristoteles (etwa 350 v. Chr.) und Claudius Ptolemäus (150 n.Chr.) prägten über Jahrtausende das astronomische Weltbild der Wissenschaft, indem sie zwei prinzipielle Grundformen der Bewegung postulierten, (1) die kreisförmige Bewegung als vollkommene, himmlische Bewegungsbahn und (2) die geradlinige Bewegung als unvollkommene Bewegung auf der Erde. Beide Bewegungen wurde durch

Tabelle 2.1: Parameter der Planeten des Sonnensystems. Planeten n=1-5 sind terrestrische Planeten, n=6-9 sind gasförmige Riesenplaneten und n=10-11 werden als Zwergplaneten bezeichnet.  $\langle r \rangle_o$  ist der mittlere Orbitradius in Vielfachen des Abstands Erde-Sonne (A.U.).  $e = \sqrt{r_a^2 - r_b^2}/r_a$  ist die numerische Bahnexzentrizität und  $\delta$  die Bahnneigung gegen die Ekliptik,  $\frac{m}{m_E}$  die Masse in Vielfachen der Erdmasse,  $\frac{r}{r_E}$  der Radius in Vielfachen des Erdradius,  $\langle \rho \rangle$  und  $\rho_{P_0}$  ist die mittlere Dichte für den aktuellen und für den Druck Null.  $n_S$  gibt die Anzahl der bekannten Satelliten an. Aus Stacey (1992).

n		$\langle r \rangle_o$ A.U.	$e$	$\delta$ (°)	$\frac{m}{m_E}$	$\frac{r}{r_E}$	$\langle \rho \rangle$ kg/m <sup>3</sup>	$\rho_{P_0}$	$n_S$
1	Merkur	0.387	0.206	7	0.055	0.3830	5430	5280	0
2	Venus	0.723	0.007	3	0.815	0.9499	5245	3990	0
3	Erde	1	0.016	-	1	1	5515	4064	1
4	Mars	1.524	0.093	2	0.107	0.532	3935	3730	2
5	Asteroiden	$\approx 2.8$	-	-	-	-	3700	3700	-
6	Jupiter	5.201	0.048	1	317.9	10.973	1327	-	16
7	Saturn	9.538	0.055	2	95.18	9.140	688	-	20
8	Uranus	19.18	0.047	1	14.54	3.98	1272	-	15
9	Neptun	30.06	0.010	2	17.15	3.86	1640	-	8
10	Pluto	39.52	0.248	17	0.0022	0.18	2080	2070	1
11	Eris	67.5	-	-	-	$\approx 0.18$	-	-	1

eine **geozentrische Himmelsmechanik**<sup>1</sup> erklärt. Aristarch aus Samos (etwa 320 - 250 v.Chr.) hatte bereits versucht die Bewegung von Sonne, Mond und Planeten alternativ durch ein **heliozentrisches System**<sup>2</sup> zu deuten. Er war seiner Zeit damit weit voraus doch blieb leider unbeachtet, denn erst im 16. Jahrhundert kam Nikolaus Kopernikus (1473-1543) unabhängig auf die gleichen Erkenntnisse wie Aristarch und formulierte ein heliozentrisches Weltbild und leitete damit eine geistige, weltanschauliche und astronomische Revolution ein. Die Theorie des Kopernikus vereinfachte die Bahngleichungen des Ptolemäus erheblich, brachte aber noch keine Steigerung der Bahnkurven-Vorhersage, da Kopernikus immer noch von konstanten Bahngeschwindigkeiten ausging. **Johannes Kepler** (1571-1630) wertete Marsbeobachtungen von Tycho Brahes (1546-1601) aus und kam zu dem Ergebnis, dass die Planetenbahnen weder kreisförmig noch mit konstanter Bahngeschwindigkeit durchlaufen werden. Kepler leitete drei empirische Gesetze zur Beschreibung der Planetenbahnen ab<sup>3</sup>, und **Isaac**

<sup>1</sup> *Gaea*, die Erde steht im Mittelpunkt

<sup>2</sup> *Helios*, die Sonne ist die Weltmitte

<sup>3</sup> (1) Planetenbahnen sind Ellipsen, wobei ein Brennpunkt die Sonne ist. (2) der von Sonne zu dem Planeten gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. (3) Quadrate der siderischen Umlaufdauer zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenz ihrer mittleren Entfernung

**Newton** gelang es 1687 die Kepler'schen Gesetze der Planetenbahnen auf das physikalische Gesetz der **Gravitationskraft**  $\mathbf{F}_g$  zwischen Sonne und Planeten zurückzuführen,

$$\mathbf{F}_g = -G_E \frac{m_H m^*}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{mit } G_e = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg} \quad .$$

$G_E$  ist die universelle Gravitationskonstante,  $r$  der radiale Abstand zwischen Sonne mit der Masse  $m_H$  und Planeten der Masse  $m^*$ , und  $\hat{\mathbf{r}}$  ist der Einheitsvektor in radialer Richtung vom Zentrum bei  $m_H$ <sup>4</sup>. Newton verallgemeinerte damit die Keplersche Planetenbewegung auf beliebige Massenpunkte und zeigte, dass Bahnkurven stets **Kegelschnitte** sind (Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln). Nicht geschlossene Bahnkurven sind für Himmelskörper ebenso möglich wie die von Kepler beobachteten Ellipsenkurven.

Das heliozentrische Weltbild des Kopernikus legte nahe, dass die Entstehung der Erde nicht unabhängig von der Entstehung unserer Sonne und des Planetensystems gesehen werden kann. Die Planeten und die Erde haben sich vor etwa  $4.6 \cdot 10^9$  Jahren ( $4.6 \text{ Ga} = 4.6$  Milliarden Jahre) gebildet. Insgesamt umkreisen heutzutage zehn Planeten die Sonne: **Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun, Pluto, Eris** (mit wachsendem Abstand). Zusätzlich gibt es den **Asteroidengürtel** zwischen Mars und Jupiter, d.h. eine Ansammlung vieler kleiner Körper und Massen auf eng benachbarten Umlaufbahnen. Auffällig ist, dass alle Planeten die Sonne in ein und derselben Ebene und im gleichen Umlaufsinn umkreisen. Die vier inneren Planeten werden aufgrund ihrer Dichte und ihres chemischen Aufbaus als „terrestrische“ Planeten bezeichnet. Der Asteroidengürtel hat eine Dichteverteilung ähnlich zu den terrestrischen Planeten. Die terrestrischen Planeten sind viel kleiner und dichter als die vier „Riesenplaneten“ (giant planets) Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun. Die Riesenplaneten sind an der Oberfläche gasförmig; sie werden als Gasplaneten bezeichnet. Die zwei äußeren Planeten Pluto und Eris sind klein und leicht und werden seit 2006 Zwergplaneten genannt.

Abbildung 2.1 zeigt die Radien der Planetenbahnen (vgl. auch Tabelle 2.1). Der Abstand zwischen benachbarten Planeten wächst systematisch mit dem Radius<sup>5</sup>. Das ist kein Zufall und hat mit der Entstehung des Planetensystems zu tun. Auffällig ist auch, dass im Bahnradius des Asteroidengürtels aufgrund der Systematik ein weiterer Planet auftreten sollte. Der Asteroidengürtel wird heute als „gestoppter“ oder im Aufbau befindlicher terrestrischer Planet angesehen. Der Asteroidengürtel ist deshalb besonders interessant

zur Sonne,  $T_1^2/T_2^2 = a_1^3/a_2^3$ .

<sup>4</sup>Beide Massen ziehen sich gegenseitig an; die Definition der Richtung hängt davon ab, welche Masse als Quelle des Kraftfeldes oder Zentrum betrachtet wird

<sup>5</sup> Die empirische Titius-Bode Beziehung ist ursprünglich  $r_k = a + b \cdot 2^k$ , mit  $a = 0.4, b = 0.3$ . Ein modernerer Ansatz ist ein Potenzgesetz zu verwenden,  $r_k = r_0 x^k$ , wobei  $\log r_k/r_3 = \log x^k - \log x^3 = -\log x^3 + \log x \cdot k$  gilt.

und gibt viele Hinweise auf die Entstehung der Erde und der Planeten. Da Gesteine des Asteroidengürtels in Form von Meteoriten hin und wieder auf die Erde fallen, können wir das Alter des Planetensystems und den ursprünglichen Zustand der terrestrischen Planeten direkt auf der Erde untersuchen.

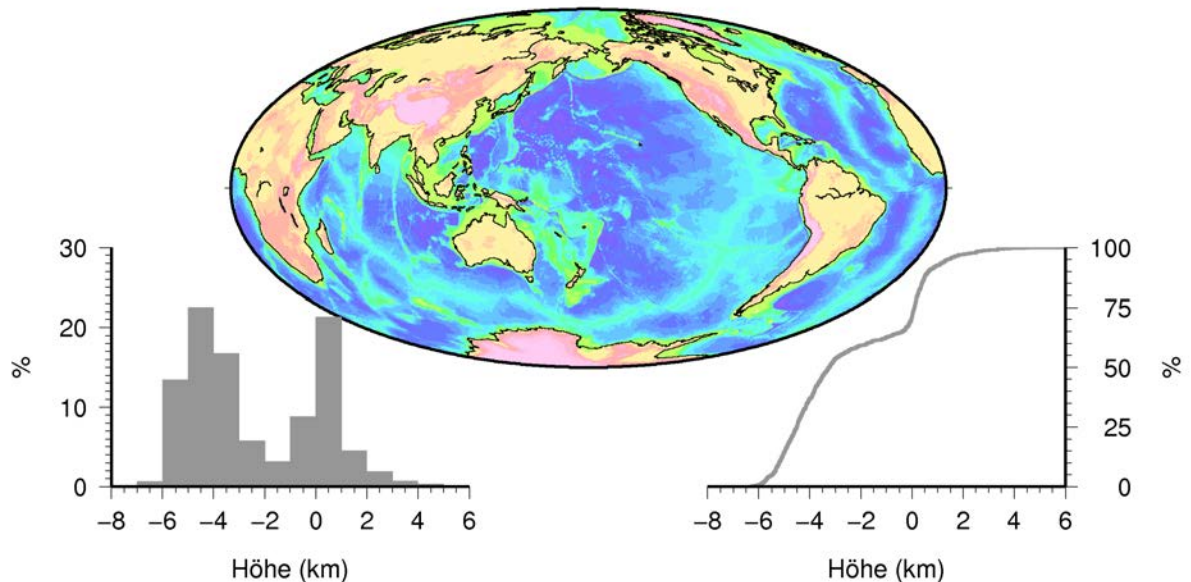


Abbildung 2.2: Verteilung der Höhe (Topographie und Bathymetrie, World Digital Elevation Model ETOPO5) der Erdoberfläche. *Links:* Häufigkeitsverteilung (Histogramm) gibt die Anzahl von „Einheitsflächen“ (hier  $5^\circ \times 5^\circ$ ) in 1 km Höhenintervallen an. *Rechts:* Kumulative Höhenverteilung durch Summation der Häufigkeiten in den einzelnen Höhenintervallen. Charakteristisch für die Erde ist die bimodale Verteilung, die kontinentale und ozeanische Gebiete repräsentiert.

Wie ist also die Erde entstanden? Das Thema wird hier nur kurz angerissen (mehr Details in [Stacey, 1992](#)). Man glaubt, dass vor etwas mehr als 4.6 Ga die Sonne in der Ebene der heutigen Planetenbahnen von einem Staub- und Materie-Nebel umkreist wurde. Die Sonne hatte zusätzlich eine besondere Aktivitätsphase, in der sie ein starkes Magnetfeld und Partikelwinde erzeugt hat (ähnlich zur heute beobachteten Aktivität des Sterns T-Tauri, oder dem im September 2008 mit dem Hubble Teleskop beobachteten Zusammenstoß der beiden Galaxien des System Arp 147). Für das Magnetfeld spricht auch, dass Meteoritenfunde aus dem Asteroidengürtel bis heute ihre Magnetisierung seit dem Ursprung des Planetensystems erhalten haben. Ähnlich wie in einer Zentrifuge wurden im solaren Urnebel geladene und ungeladene Teilchen und schwere und leichte Teilchen in unterschiedlichen Abständen zur Sonne angehäuft. Im Ergebnis entstanden vier „schwere“ terrestrische Planeten innen und gasförmige Planeten außen. Im Abstand der heutigen Erde hat sich evtl. besonders viel Wasser- und Sauerstoff angehäuft.

Im Laufe der Zeit haben sich dann in regelmässiger wachsenden Abständen zur Sonne

Materieklumpen gebildet, zuerst kleine, die dann weiter und weiter gewachsen sind. Die Massenanziehungskraft (Gravitationskraft) war und ist für das Wachsen der Planeten verantwortlich. Kleine Körper, die in der Nähe der größeren Körper vorbeifliegen, werden durch Gravitation angezogen und fallen schliesslich auf die größeren Körper — der größere Körper wächst ständig auf Kosten der kleineren. Das nennt man **gravitative Akkretion**. Dieser Vorgang findet bis heute statt. Es fallen täglich Mikrometeoriten auf die Erde – die meisten verglühen allerdings bereits in der Erdatmosphäre. Die gravitative Akkretion kann auch erklären, warum die Planeten die Sonne in derselben Richtung umlaufen und warum die Bahnradialen systematisch wachsen. Die Anordnung der Planetenbahnen wurde festgelegt, nachdem sich die ersten größeren Körper gebildet hatten (**Planetoiden**, etwas 10 - 100 km Durchmesser). Wie gut und wie schnell die kleinen benachbarten Körper eingefangen und angezogen wurden, hängt auch von der Anziehungskraft der Sonne selbst ab. Diese wird mit wachsendem Abstand zur Sonne kleiner. Deshalb war der „Einflußradius“ der Planetoiden weit entfernt von der Sonne größer als nahe bei der Sonne. Das ist letztlich dafür verantwortlich, dass der Abstand der Planeten untereinander systematisch wächst. Die genaue theoretische Beschreibung des Prozesses ist allerdings kompliziert und wird heute mit Hilfe von numerischen Simulationen auf Großrechnern untersucht und simuliert.

Auch spielt die Erde unter den terrestrischen Planeten eine Sonderrolle. Sie scheint der einzige Planet zu sein, der einen großen Anteil an Wasser besitzt. Deshalb gibt es auf der Erde eine sauerstoffreiche Atmosphäre und Ozeane. Das Wasser ist vermutlich auch verantwortlich für die Ausbildung von leichter, kontinentaler Kruste und die Zerteilung der Erdoberfläche in kontinentale und ozeanische Gebiete mit unterschiedlichem Niveau über dem Meeresspiegel (Abb. 2.2). Die Erde unterscheidet sich auch durch ihr starkes Magnetfeld von anderen Planeten sowie durch ihren relativ großen und einzigen natürlichen Satelliten (Mond<sup>6</sup>).

Die Meteoritenfunde auf der Erde sind in mehrerer Hinsicht wichtig für das Verständnis unserer Erde. Meteoriten sind Eisen- oder Steinkörper, die auf elliptischen Bahnen um die Sonne kreisen und hin und wieder auf die Erde fallen (etwa 500 Objekte pro Jahr). Sie stammen aus dem Asteroidengürtel hinter dem Mars und sind durch Kollisionen auf „erd-kreuzende“ Bahnkurven gelenkt worden (Abb. 2.3). Da sie in ihrer Zusammensetzung relativ ursprünglich sind und eine einfache Geschichte haben, geben sie wichtige Informationen über die chemische Zusammensetzung der terrestrischen Planeten und der Erde im Innern, sowie über das Alter der Planeten und der Erde. Man findet Meteoriten unterschiedlicher Zusammensetzung: Solche, die hauptsächlich aus Eisen und geringen

---

<sup>6</sup> Zur Entstehung des Erdmondes gibt es bis heute kontroverse Vorstellungen. Ein „populäres“ Modell besagt, dass sich der Mond durch Akkretion des Auswurfmaterials nach einem Super-Impakt auf der Erde gebildet hat. Der ungewöhnlich große Erdmond ist also vielleicht rein zufällig entstanden.



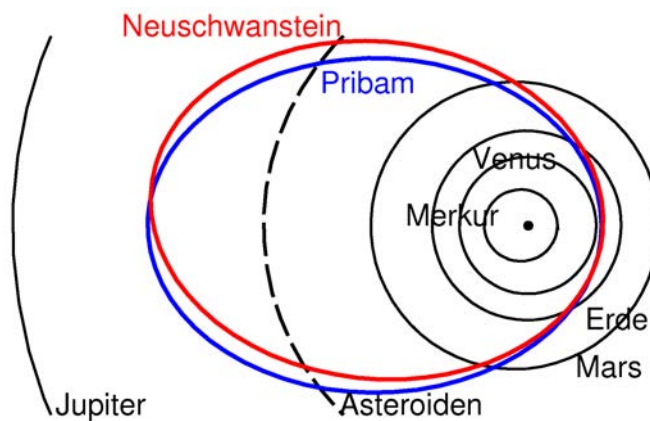


Abbildung 2.3: Aus Fotografien berechnete Bahnkurven der Meteoriten Pribram (April 1959 bei Pribram in der Tschechei) und Neuschwanstein (April 2002 bei Neuschwanstein in Süddeutschland) im Vergleich zu den Bahnkurven der benachbarten Planeten und des Asteroidengürtels. Die Meteoriten können nur von bahnkreuzenden Planeten stammen, d.h. vom Mars oder dem Asteroidengürtel. Die Herkunft von Meteoriten aus dem Asteroidengürtel wird damit nahezu evident.

Anteilen an Nickel (10%), Sulfiden und Graphit (< 1%) bestehen (Eisenmeteoriten) und solche mit geringem Eisenanteil (Steinmeteoriten). Die **Eisenmeteorite** unterscheiden sich deutlich von Gesteinen der Erdkruste und sind deshalb besonders einfach als "kosmische Materialien" erkennbar. Man geht heute davon aus, dass der Erdkern eine ähnliche Zusammensetzung hat wie die Eisenmeteorite.

**Steinmeteorite** enthalten häufig auch Eisenanteile (z.B. in Form von Magnetit oder Nickel-Eisenverbindungen), vor allem aber Minerale wie Olivin, Pyroxen und Plagioklas, zum Teil auch das Eisensulfid Troilit. (Anhang B gibt eine kurze Zusammenfassung zur Einteilung der Minerale und Gesteine). In ihrem Mineralbestand und ihrer Textur ähneln sie den Gesteinen des Erdmantels. Man findet voll auskristallisierte Steinmeteorite (Achondrite), und solche mit einer auf der Erde nicht vorkommenden Struktur (Chondrite, kleine kugelige Struktur. Kügelchen nennt man Chondren). Die Chondrite werden als ursprüngliches Material angesehen, aus dem sich die terrestrischen Planeten gebildet haben. Vor allem in Chondriten hat man remanente Magnetisierung aus der Zeit der Entstehung des Planetensystems gefunden. Achondrite werden als Fragmente größerer Planetoiden angesehen, die sich bereits weiter in Richtung der terrestrischen Planeten entwickelt hatten.

Neben der chemischen Zusammensetzung sind Meteoritenfunde wichtig für die Altersbestimmung der Erde. Untersuchung des radioaktiven Zerfalls an Bleisotopen aus Meteoriten ergaben ein Entstehungsalter von etwa  $4.55 \text{ Ga}$ <sup>7</sup>. Die ältesten Gesteine der Erde

<sup>7</sup> heute verwendete Methoden nutzen den radioaktiven Zerfall von  $K^{40}$  und  $Rb^{87}$

wurden auf ein Entstehungsalter von etwa 4 *Ga* datiert<sup>8</sup>. Da die Erdgesteine einem ständigen Recyclingprozess unterworfen und deshalb nicht repräsentativ für die Entstehung der Erde sind, geht man von einem Entstehungsalter der Erde von 4.55 *Ga* aus. In Anhang C ist die Altersdatierung mittels radioaktiver Elemente kurz beschrieben.

Man hat heute folgende Vorstellungen zur stofflichen Entwicklung der Erde. Der Aufschlag eingefangener Planetoiden hat die junge Erde bis zur partiellen Schmelze aufgeheizt. Seither kühlt die Erde langsam ab. In flüssigem Zustand sind die schweren Schmelzanteile abgesunken, d.h. vor allem das Eisen ist nach innen gewandert. Das hat zur Bildung eines flüssigen **Erdkerns** geführt, wahrscheinlich schon innerhalb der ersten 100 Millionen Jahre (100 *Ma*). In Analogie zur Zusammensetzung von Eisenmeteoriten und basierend auf Dichtemodellierungen für den Erdkern, geht man für den Erdkern von einer Eisen-Nickel-Legierung (ca. 90% *Fe*, 9% *Ni*) mit einem oder mehreren zusätzlichen leichteren Elementen aus (Silicium *Si*, Schwefel *S*, oder Sauerstoff *O*). Der Erdkern und die Erde kühlen seit ihrer Entstehung ab. Im flüssigen Erdkern findet bis heute ein Ausfrierungsprozess statt. Das ausgefrorene, kristalline Eisen setzt sich aufgrund der größeren Dichte im inneren Kern ab. Dadurch ist ein **fester innerer Kern** innerhalb des flüssigen äußeren Kerns entstanden<sup>9</sup>. Das Ausfrieren des inneren Kerns begann nach thermischen Modellrechnungen erst vor 2 - 3 *Ga* und hält mit einer Wachstumsrate von etwa 250 *m/Ma* bis heute an.

Der Erdkern ist für das **Magnetfeld der Erde** verantwortlich. Im flüssigen äußeren Kern findet Konvektionsbewegung statt (**Konvektionsströmung**). Konvektionsströmungen findet man in vielen Bereichen der Physik, z.B. auch bei dem Experiment eines beheizten Öltopfs. Die ständige Wärmezufuhr am Topfboden hält die Konvektionsströme „am Laufen“. Die Energiequellen im Erdkern sind der Wärmeverrat des Kerns, die latente Kristallisationswärme, und die freiwerdende potentielle Energie beim Ausfrieren und Absinken des Nickeleisens und möglicherweise radioaktiver Zerfall. Die Konvektionsgeschwindigkeiten im äußeren Kern können bis etwa 10 Kilometer pro Jahr (10 *km/a*) betragen. Da der Kern aus elektrisch gut leitendem Eisen besteht, wirkt die Kernkonvektion wie ein Dynamo (**Geodynamo**), der das Magnetfeld der Erde erzeugt. Man glaubt, dass die Kernkonvektion und das Erdmagnetfeld vor 4.4 *Ga* eingesetzt haben. Die ältesten paläomagnetischen Funde von Erdgestein sind allerdings nur 3.5 *Ga* alt.

Die Erde hat heute nicht nur einen schweren Kern, sondern auch eine leichte Kruste. Die Trennung und der Aufstieg des leichten Materials aus dem Mantelgestein (**chemische**

---

<sup>8</sup> Das bisher älteste bekannte Stück Erdkruste wurde an den Ufern der Hudson Bay in Kanada entdeckt (Science, 2008, 321, 1828) und besteht aus stark metamorphen Vulkaniten und Sedimenten.

<sup>9</sup> Die Existenz eines festen inneren Kerns wurde 1936 von der Geophysikerin Inge Lehmann durch ihre Beobachtung von elastischen Raumwellen durch den Kern postuliert, konnte aber erst Anfang der 70er Jahre mit rein seismologischen Daten bewiesen werden. Gewisse Obertöne im Eigenschwingungsspektrum der Erde lassen sich nicht mit einem flüssigen inneren Kern erklären.

**Fraktionierung**, vor allem Entzug von Mineralphasen und Einsprenglingen, und **Differentiation**, vor allem Auskristallisation) und die Bildung der Kruste ist schwieriger zu verstehen. Es ist ein Prozess, der bis heute anhält. Möglich ist das, weil im Erdmantel bis heute langsame Konvektion stattfindet. Das ist erstmal verwirrend, da der Erdmantel heute als fest und nicht als flüssig angesehen wird. Beide Begriffe sind eigentlich falsch, der Erdmantel ist hoch-zähflüssig (**hochviskos**). Elastische Wellen, die von Erdbeben oder chemischen Explosionen angeregt werden, durchlaufen den Mantel wie einen festen Körper. Nur extrem lang wirkende Kräfte können im Mantel unter gewissen Voraussetzungen langsame Bewegungen erzeugen wie in einer zähen Flüssigkeit. Ein Beispiel dafür sind die Kräfte durch die gespeicherte thermische Energie der Erde, die langsame Konvektionsströme im Mantel aufrechterhalten. Die **Konvektionsgeschwindigkeiten im Mantel** (bis etwa  $10\text{ cm/a}$ ) sind um den Faktor  $10^{-6}$  kleiner als im äußeren Kern. Sie gestalten unsere Erdoberfläche aber doch in entscheidender Weise. Zum einen machen sie die ständige Absonderung von ozeanischer Kruste möglich, und zum anderen bilden sie die Antriebskräfte der horizontalen Bewegungen der Gesteinsschollen an der Erdoberfläche, der sogenannten **Plattentektonik**. Die Plattentektonik und die Bildung neuer ozeanischer Kruste sind verantwortlich dafür, dass es Kontinente und kontinentale Kruste auf der Erde gibt. Die Erde ist womöglich der einzige Planet unseres Sonnensystems, der eine kontinentale Kruste gebildet hat und bildet. Die Bildung der kontinentalen Kruste ist ein relativ komplizierter Prozess der Zwei-Stufen-Differentiation, der im nächsten Kapitel genauer behandelt wird.

## 2.2 Der Aufbau der Erde

### 2.2.1 Elementare Größen

Die Entstehungsgeschichte der Erde hat aufgezeigt, wie es zum **Schalenaufbau der Erde** gekommen ist (Abb. 2.4). In erster Näherung sind die Erde und ihre inneren Schalen kugelförmig. Der mittlere Erdradius ist  $r_E = 6371\text{ km}$  und wurde bereits 190 v.Chr. von Eratosthenes aus Alexandria aus Messungen abgeschätzt<sup>10</sup>. Ein ellipsoidisches Erdmodell wurde durch die Beobachtung der Abplattung des Jupiters an den Polen (Cassini, 1666) und aufgrund physikalischer Vorhersagen der Schwereabplattung durch Newton 1687 postuliert. Die vergleichenden Gradmessungen in Lappland und am Äquator in Peru

<sup>10</sup> Eratosthenes (276-195 v.Chr.) gilt als der Begründer der wissenschaftlichen Geodäsie. Basierend auf den Vorschlägen von Pythagoras (geb. 582 v.Chr.) und Aristoteles (384-322 v.Chr.) einer kugelförmigen Erde führte er erstmalig eine Radiusbestimmung zwischen Assuan (damals Syene) und Alexandria durch (16% Abweichung zum heutigen Wert, vgl. Torge, 1975). Die eingeführte Technik der Gradmessung wurde bis in die Neuzeit verwendet, z.B. Posidonius (60 v.Ch., 11% Abweichung), Kalifat v. Bagdad (827 n.Chr., 10%), Snellius in Holland (1615, 3.4%), Picard bei Paris (1670, 0.1%) und Gauss zwischen Göttingen und Altona (1821-25).

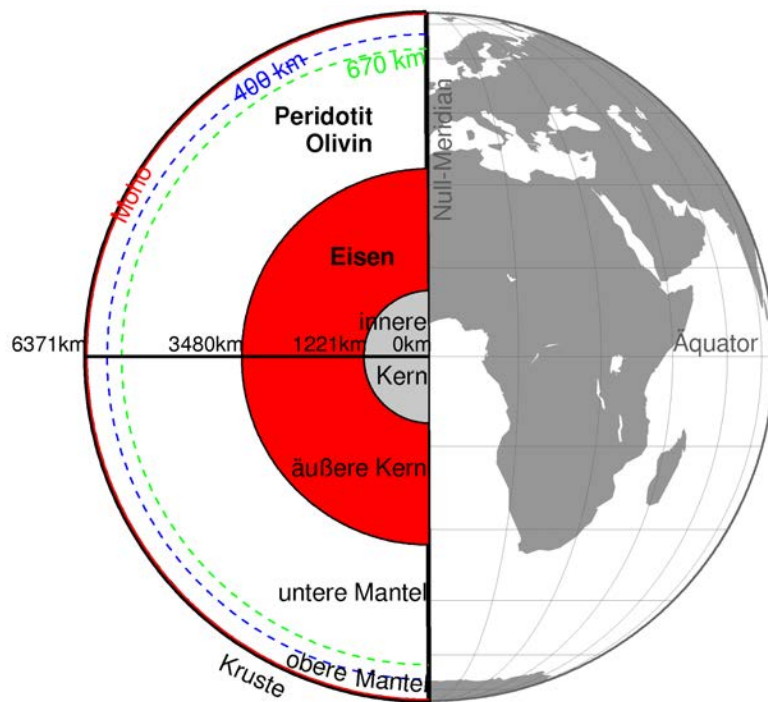


Abbildung 2.4: Der Kugelschalenaufbau der Erde und Definition von Äquator und Null-Meridian. Der äußere Kern ist in flüssigem und der innere Kern in festem Aggregatzustand. Die Kruste-Mantel Grenze wird durch die Moho (Mohorovicic) Diskontinuität bestimmt. Die 400km und 670km Manteldiskontinuitäten begrenzen die Übergangszone im Mantel und trennen den oberen vom unteren Mantel.

in 1735-42 durch Bouguer, Celsius, Clairant u.a. bewiesen, dass die Erde an den Polen abgeplattet ist<sup>11</sup>. Die mittlere Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche von  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  wurde erstmals von Galileo etwa 1590 bestimmt<sup>12</sup>.

Die erste genaue Bestimmung der Gravitationskonstante  $G_E = 6.67260 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ , und mit der Kenntnis von  $g$  und  $r_E$  dann auch der Erdmasse  $m_E = 5.9737 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  und der mittlere Dichte der Erde,  $\langle \rho \rangle = 5515 \text{ kg/m}^3$ , gelang in 1798 durch das legendäre Michell / Cavendish Experiment<sup>13</sup>.

<sup>11</sup> Die Abplattung an den Polen wurde von Newton 1687 aus der Gleichgewichtsfigur einer homogenen, flüssigen rotierenden Erde postuliert. Eine mögliche Abplattung am Äquator deutete sich hingegen aufgrund von älteren, geodätischen Gradmessungen an und wurde von dem französischen Wissenschaftler Cassini und seinen Anhängern vorgeschlagen. Die französische Akademie Royal de Science finanzierte die beide Expeditionen, um die Kontroverse zu klären

<sup>12</sup> Galileo (1564-1642) hat in seinem Werk *De Motu* (veröffentlicht in 1634 in Leyden) Experimente zwischen 1589 und 1592 zur Bewegung von Massen im freien Fall, auf der schrägen Ebene und zu Pendeln beschrieben. Die Bestimmung von  $g$  gelang durch Pendelversuche ( $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ ). Die Legende erzählt, dass Galileo auch die Flugzeit von Massen vom schiefen Turm in Pisa vermessen und benutzt habe.

<sup>13</sup> Cavendish hatte mit einem Torsionspendel von Michell die Gravitationskonstante  $G_E$  bis auf wenige Prozent genau bestimmt. Über  $g = G_E \frac{m_E}{r_E^2}$  und  $\rho = \frac{3}{4\pi} \frac{g}{G_E r_E}$  konnte er dadurch die erste genaue Bestimmung

Foucault hat 1851 in Paris durch einen Pendelversuch anschaulich demonstriert, dass die Erde rotiert. Die Rotation der Erde gibt die Tageslänge und damit unsere Zeiteinheit vor. Ein **mittlerer Sonnentag** hat  $24\text{ h}$  und  $86400\text{ s}$ <sup>14</sup>. Ein Sonnentag wird durch die Rotation der Erde bis zur gleichen Winkelstellung gegenüber der Sonne definiert, so wie er z.B. mit einer Sonnenuhr gemessen wird. Ein **Sterntag** hingegen definiert die Zeit, bis zu der die Erde die gleiche Winkelstellung gegenüber dem Fixsternhimmel einnimmt. Ein Sterntag hat  $86164.1\text{ s}$ . Die **Rotationsgeschwindigkeit der Erde** muss über den Sterntag berechnet werden, also  $\omega = 2\pi/(1\text{Sterntag}) = 2\pi/86164.1\text{ s}$ .

Die **Weltzeit** (UTC) wird als Westeuropäische Zeit oder Greenwich-Zeit definiert. In anderen Längengraden wird eine lokale Zonenzeit eingeführt, die einem mittleren Meridian der Zone zugeordnet ist und immer um ein ganzzahliges Vielfaches einer Stunde gegenüber der Weltzeit verschoben ist. In unserer Julianischen Zeitrechnung hat ein **tropisches Jahr**  $365.242199$  mittlere Sonnentage und  $366.242199$  mittlere Sterntage. Seit der Kalenderreform von Papst Gregor XIII im Jahr 1582 wurde eine differenzierte Schaltjahrregel eingeführt, bei der in der Regel alle 4 Jahre ein Schaltjahr mit 366 Tagen ist, bis auf die Jahre, die durch 100 ohne Rest teilbar sind, mit Ausnahme der Jahre, die durch 400 ohne Rest teilbar sind.

Das Trägheitsmoment der rotierenden Erde war Anfang des 20. Jahrhunderts aus der astronomisch vermessenen Präzessionsbewegungen der Erde<sup>15</sup> bekannt,  $J_C = 0.3308 m_E r_E^2 = 8.043 \cdot 10^{37}\text{ kg m}^2$ .

Die Bestimmung des Kernradius  $r_C = 3480\text{ km}$  ( $2891\text{ km}$  Tiefe) und des Radius des inneren Kerns  $r_I = 1221.5\text{ km}$  ( $5149.5\text{ km}$  Tiefe) gelang erst Anfang des 20. Jahrhunderts durch Beno Gutenberg und Inge Lehmann. Parameter der Erde sind in Tabelle 2.2 zusammengefaßt.

Tabelle 2.2: Elementare Parameter der Erde

$r_E$ (km)	$m_E$ (kg)	$\langle\rho\rangle$ ( $\text{kg/m}^3$ )	$J_C$ ( $\text{kgm}^2$ )	$T$ (s)
polar 6356.751	$5.9737 \cdot 10^{24}$	5515	polar $8.0363 \cdot 10^{37}$	siderial 86164.10
äquat. 6378.136			äquat. $8.0100 \cdot 10^{37}$	solar 86400
mittl. Kugel 6371				

mung der mittleren Dichte der Gesamterde erreichen. Cavendish hatte sein Experiment als "weighting the earth" bezeichnet.

<sup>14</sup> In 1967 wurde die Atomsekunde als starres, physikalisches Zeitmaß eingeführt. Ein Atomzeit-Sonnenntag hat etwas mehr als  $86400\text{ s}$ , so dass etwa einmal im Jahr eine Schaltsekunde eingeführt werden muss, um ein Auseinanderlaufen der Atomuhr gegen die Erduhr zu vermeiden.

<sup>15</sup> Die Erde führt eine Kreisbewegung (Präzession) mit einem Öffnungswinkel von  $23.5^\circ$  und einer Periode von 25 733 Jahren durch (**Platonisches Jahr**). Ursache ist das Drehmoment auf die "Äquatorwulst" der Erde durch die Anziehungskraft der Sonne.

## 2.2.2 Die stoffliche und seismische Struktur

Die Seismologie und die Bestimmung der **seismische Wellengeschwindigkeiten** aus Erdbebenbeobachtungen haben vor allem zur Kenntnis des Erdinneren beigetragen. Seismische Geschwindigkeiten sind, im Vergleich zu anderen Parametern des Erdinneren, am besten bekannt. Es gibt zwei Arten von elastischen Wellen, die sich durch das Erdinnere ausbreiten, **Kompressions-** und **Scherwellen**. Beide Wellentypen werden in Kapitel 5.4.1 noch genauer behandelt. Kompressionswellen breiten sich wie Schallwellen im Wasser (oder Luft) aus. Die Partikelbewegung ist in Ausbreitungsrichtung der Welle. Scherwellen haben dagegen eine Partikelbewegung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Die Bewegungsform ist wie bei einem gespannten Seil oder einer Saite, die an einem Ende gezupft wird. Scherwellen sind immer langsamer als Kompressionswellen<sup>16</sup> und können in Flüssigkeiten nicht existieren (die Scherfestigkeit oder der Schermodul der Flüssigkeit ist Null).

Die Geschwindigkeit der Kompressionswellen wird häufig mit  $v_p$  oder  $\alpha$  angegeben, die der Scherwellen mit  $v_s$  oder  $\beta$ , wobei gilt:

$$v_p = \sqrt{\frac{\mathcal{K} + \frac{4}{3}\mathcal{N}}{\rho}} \quad \text{und} \quad v_s = \sqrt{\frac{\mathcal{N}}{\rho}} \quad , \quad (2.1)$$

wobei  $\rho$  die Gesteinsdichte,  $\mathcal{N}$  der Schermodul und  $\mathcal{K}$  der Kompressionsmodul des Gesteins ist. In den meisten Fällen gilt für Gestein  $v_p = \sqrt{3}v_s$ . Die elastischen Moduln werden später im Skript noch genauer behandelt.

**Die Erdkruste:** Die Kruste ist relativ heterogen. Sie ist fest, im oberen Teil relativ spröde, im unteren Teil etwas weicher (**duktiler**). Man muß deutlich zwischen ozeanischer und kontinentaler Kruste unterscheiden. Die **ozeanische Kruste** besteht, abgesehen von der dünnen Sedimentschicht an der Oberfläche, aus **basaltischen Spaltenintrusionen** und **massigen Gabbrokörpern**. Sie ist mit einer mittleren Mächtigkeit von etwa 6-7 km relativ dünn. Die **kontinentale Kruste** ist deutlich dicker (zwischen 15 und 60 km) und läßt sich häufig in obere und untere Kruste unterteilen. Früher wurde die kontinentale Ober- und Unterkruste in eine **sialische** Granit- und **simatische** Gabbrozone<sup>17</sup> unterteilt; diese Einteilung ist etwas zu vereinfachend. Die **Oberkruste** besteht vor allem aus  $SiO_2$ -reichen "sauren" Quarziten, Gneisen und Graniten (siehe auch Anhang B). Die **Unterkruste** hat einen Chemismus und eine Mächtigkeit ähnlich der ozeanischen Kruste. Sie besteht aus „**intermediären**“, „**basischen**“ Granatgranuliten, Amphiboli-

<sup>16</sup> In porösen Gesteinen, die aus einer festen Matrix und einem fluidgefüllten Porenraum bestehen, kann die Wellenausbreitung komplizierter sein. Ebenso in anisotropen Gesteinen.

<sup>17</sup> Sial kommt von *Si* und *Al* als Hauptelemente, Sima von *Si* und *Mg*.



ten und Gabbros. Tabelle 2.3 gibt eine Übersicht zur chemischen Zusammensetzung von wichtigsten Krustengesteinen und Basalten. Die Grenze zwischen Ober- und Unterkruste wird als **Conrad-Schichtgrenze** (Conrad-Diskontinuität) bezeichnet, weil dort sowohl die Gesteinsdichte, als auch die Geschwindigkeit der seismischen Wellen sprunghaft ansteigt. Die Dichte steigt von etwa 2600 auf 2900  $kg/m^3$ , die Geschwindigkeiten von etwa 5800 auf 6800  $m/s$  (Kompressionswellen) und von etwa 3200 auf 3900  $m/s$  (Scherwellen) an. Allerdings ist die Conrad-Diskontinuität nicht überall und immer ausgebildet, weshalb sie heute nicht mehr als „globale Schichtgrenze“ eingestuft wird.

Tabelle 2.3: Mittlere Zusammensetzung (Massenprozent, nur die wichtigsten Oxide gelistet) repräsentativer Krustengesteine (vgl. Stacey, 1992). MORB steht für *Mid-Ocean Ridge Basalt* und OIB für *Ocean Island Basalt*.

	Granit	Ryolit	Klastische Sedimente	kont. Kruste	Andesit	Eklogit	MORB	OIB
$SiO_2$	77.9	74.2	70.4	61.7	59.2	46.2	47.5	49.4
$Al_2O_3$	14.5	14.5	14.3	15.8	17.1	15.8	13.5	13.9
$Fe_2O_3 + FeO$	2.5	1.9	5.3	6.4	6.9	11.1	9.5	12.4
$MgO$	0.5	0.3	2.3	3.6	3.0	13.7	14.2	8.4
$CaO$	1.4	0.1	2.0	5.4	7.1	9.8	11.3	10.3
$Na_2O$	3.1	3.0	1.8	3.3	3.5	1.6	1.8	2.1
$K_2O$	3.9	3.7	3.0	2.5	1.8	0.4	0.06	0.4

**Der Mantel:** Unter der Kruste beginnt der Mantel, der ebenfalls fest ist. Der Erdmantel stellt den volumenmäßig (84%) und massenmäßig (68%) größten Anteil in der Erde dar. Man geht von einem peridotitartigem Gestein aus (**olivinreiche Peridotite** und **Dunite**, siehe auch Anhang B), mit den Hauptmineralien Olivin (Mischung aus Forsterit  $Mg_2SiO_4$  und Fayalit  $Fe_2SiO_4$ , auch  $(Mg, Fe)_2SiO_4$  geschrieben), Plagioklas (Mischung aus Albit  $NaAlSi_3O_8$  und Anorthit  $CaAl_2Si_2O_8$ ) und Pyroxen (Orthopyroxen  $(Mg, Fe)SiO_3$  und Klinopyroxen  $(Ca, Mg, Fe, Al_2)(Al, Si)_2O_6$ ). Der Olivin stellt den größten Anteil. Die Grenze zwischen Kruste und Mantel stellt dann eine chemische Grenzschrift dar (**Mohorovicic-Diskontinuität**, kurz „**Moho**“). Sie wird weltweit beobachtet durch den deutlichen Anstieg der seismischen Geschwindigkeiten von 6800 auf 8100  $m/s$  (Kompressionswellen) und von 3900 auf 4490  $m/s$  (Scherwellen). Die Gesteinsdichte steigt von 2900 auf 3380  $kg/m^3$ .

Der Erdmantel wird traditionell in einen oberen und einen unteren Mantel unterteilt, wobei die Grenze entweder in 1000 oder in 660  $km$  Tiefe gelegt wird. Der **obere Mantel** selbst kann aufgrund der seismischen Geschwindigkeiten in drei Bereiche gegliedert werden (vgl. Abb. 2.5); in einen Bereich mit **normaler adiabatischer Geschwindigkeitszunahme** zwischen etwa 30 und 100  $km$  Tiefe, einen **Bereich erniedrigter Scherwellengeschwindigkeit** zwischen etwa 100 und 200  $km$  Tiefe (unter Ozeanen ausgeprägter

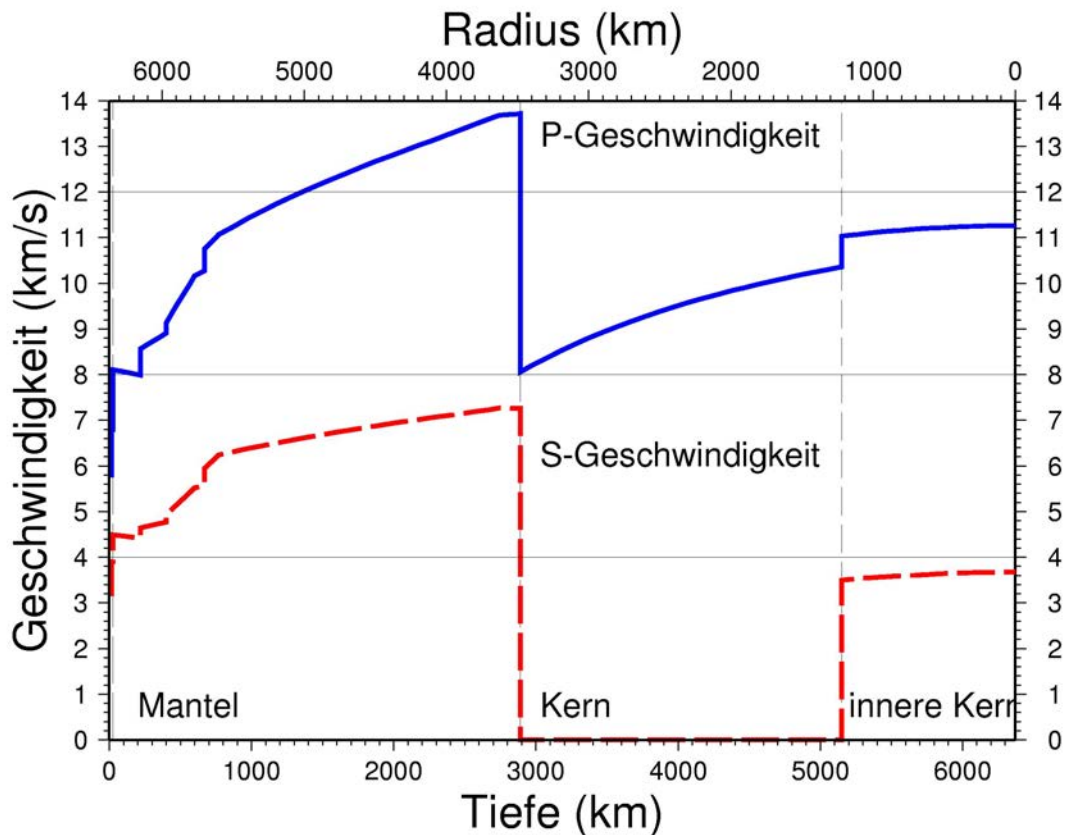


Abbildung 2.5: Kompressions- (P) und Scherwellengeschwindigkeit (S) in der Erde als Funktion der Tiefe (PREM Modell Dziewonski and Anderson, 1981).

als unter Kontinenten, wird auch **Gutenbergkanal** genannt), und in eine **Übergangszone** mit starker Geschwindigkeitszunahme zwischen 400 und 670 *km* Tiefe.

Die obersten 70 *km* des Mantels (etwa 30 - 100 *km* Tiefe) werden der **starrten Lithosphäre** zugeordnet (die Lithosphärenplatte geht also von 0 bis etwa 100 *km*), und der Gutenbergkanal einer relativ weichen **Asthenosphäre**.

Die Feinstruktur der Übergangszone zeigt zwei Bereiche starker Geschwindigkeitszunahmen in 410 und 660 *km* Tiefe. Sie werden mit zwei **fest-fest-Phasenübergängen des Olivin** (Olivin-Spinell und Spinell-, „Postspinell“) assoziiert.

Die annähernd konstante Geschwindigkeitszunahme im **unteren Mantel** steht in Übereinstimmung mit der erwarteten Zunahme durch Druck- und Temperaturanstieg und läßt auf eine homogene Struktur des unteren Mantels schließen. Etwa 100 - 200 *km* oberhalb der Kern-Mantel-Grenze kann ein signifikantes Abflachen der Geschwindigkeitskurve beobachtet werden. Dieser dünnen Schicht hat man seit etwa 1970 den Namen **D''** gegeben. Diese Zone wird seit etwa 1990 intensiv untersucht, da man dort stärkere laterale Heterogenitäten vermutet als sonst im unteren Mantel. In 2004 wurde im Labor ein Pha-

senübergang von Perovskit zu Post-Perovskit für den Druck und die Temperatur der  $D''$  entdeckt, der die Ursache für die Geschwindigkeitsänderung der  $D''$  sein kann.

**Der Kern:** An der Kern-Mantel-Grenze in 2900  $km$  Tiefe fällt die Kompressionswellen-Geschwindigkeit von etwa 14 auf 8  $km/s$  ab, und die Scherwellen-Geschwindigkeit springt von 7 auf nahezu 0  $km/s$  (Abb. 2.5). Der extrem große Geschwindigkeitssprung entsteht an einer scharfen Grenze, die den festen Mantel vom flüssigen äußeren Kern trennt. Im äußeren Kern nimmt die Kompressionswellen-Geschwindigkeit wieder langsam zu und erfährt einen kleinen sprunghaften Anstieg an der Grenze zum festen inneren Kern in 5120  $km$  Tiefe. Die Scherwellen-Geschwindigkeit im inneren Kern ist wieder größer als Null und wird auf etwa 3  $km/s$  bestimmt, mit relativ großen Unsicherheiten. Für den Kern geht man, wie oben bereits erläutert, von einer  $Fe-Ni$ -Legierung aus (etwa 90%  $Fe$ , 9%  $Ni$ ), mit einem oder mehreren zusätzlichen leichteren Elementen ( $Si$  oder  $S$  oder  $O$ ).

### 2.2.3 Dichteverteilung in der Erde

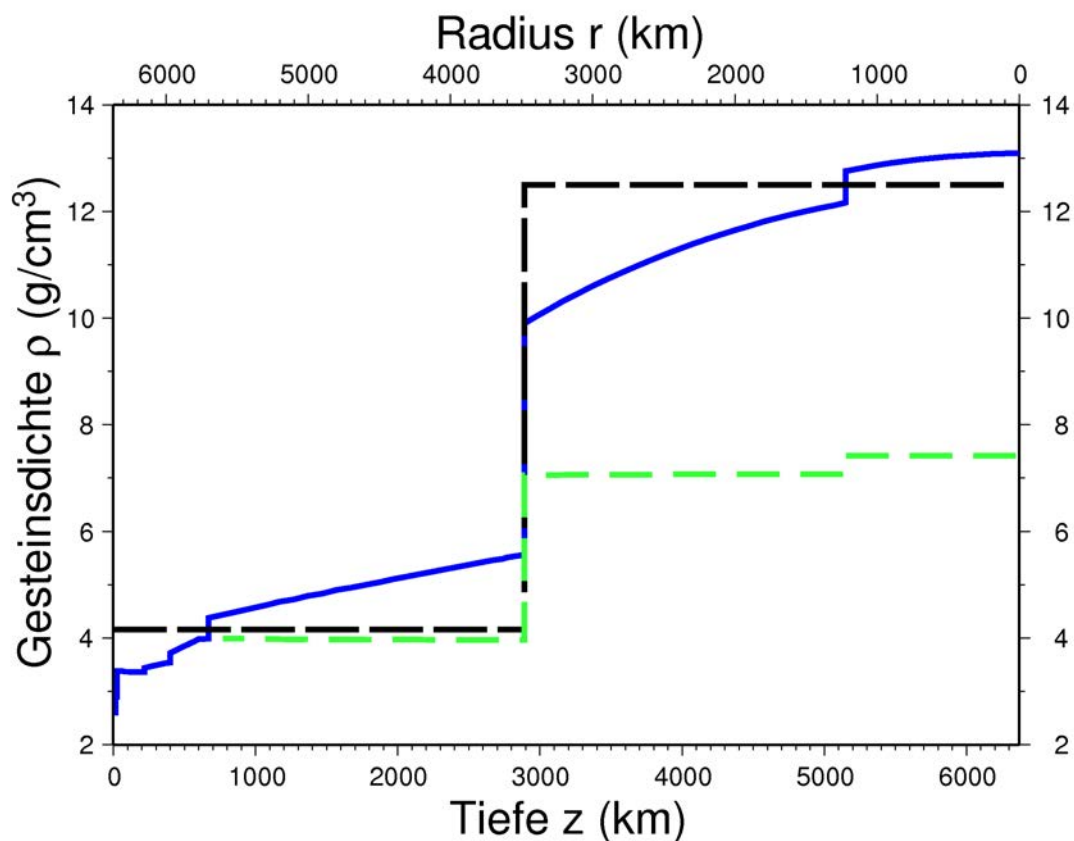


Abbildung 2.6: Dichteverteilung in der Erde. Das Dichtemodell aus der Integration der Adams-Williams Gleichung ist als durchgezogene Linie gezeigt (aus PREM Modell). Die schwarz gestrichelte Linie gibt die mittlere Dichte für Mantel und Kern an, die  $m_E$  und  $J_C$  der Erde erklärt (Wiechert-Ansatz). Die grün gestrichelte Linie gibt für den oberen Mantel und den Kern die auf einen Druck von 1 *GPa* rückgerechnete Dichte an (zum Vergleich: Dichte von Eisen:  $6.6 - 7.8 \text{ g/cm}^3$ ).

Abb. 2.6 zeigt Dichteverteilung in der Erde. Die Dichte kann nur für Proben aus der Kruste direkt im Labor bestimmt werden. Für Gesteine im Erdinneren und unter hohem Druck und Temperatur muss sie indirekt erschlossen werden. Jede Dichteverteilung  $\rho(r)$  in der Erde muss zwei Bedingungen genügen:

1. Die Gesamtmasse  $m_E$  der Erde ist<sup>18</sup>

$$m_E = 5.9737 \cdot 10^{24} \text{ kg} = 4\pi \int_0^{r_E} \rho(r) r^2 dr \quad , \quad (2.2)$$

<sup>18</sup> aus  $\rho = dm/dV$  folgt  $m_E = \int \rho dV$  und in Kugelkoordinaten für radialsymmetrische Dichteverteilungen nach der Integration über die Länge  $\Phi$  und die Poldistanz  $\Theta$  die obige Formel

wobei  $r_E = 6371 \text{ km}$  der Erdradius ist<sup>19</sup>.

2. Das Trägheitsmoment  $J_C$  der Erde um die Rotationsachse<sup>20</sup> ist definiert durch das Integral über die Massenelemente  $dm = \rho dV$  multipliziert mit dem Quadrat ihres senkrechten Abstands  $d$  von der Rotationsachse<sup>21</sup>, <sup>22</sup>,

$$J_C = 0.3308 m_E r_E^2 = \int_V d^2 \rho dV = \frac{8\pi}{3} \int_0^{r_E} \rho(r) r^4 dr \quad . \quad (2.3)$$

Wenn die Dichte konstant  $\rho_0$  wäre, dann würde sich aus (2.2)  $m_E = \frac{4}{3}\pi r_E^3 \cdot \rho_0$  ergeben, also die mittlere Dichte der Erde multipliziert mit dem Volumen der Erdkugel. Daraus errechnet man die mittlere Dichte der Erde zu  $5515 \text{ kg/m}^3$ . Die Dichte von Gesteinen des oberen Mantels (Peridotit bei einem Druck von  $1 \text{ GPa}$  und einer Temperatur von  $600^\circ \text{ C}$ ) ist etwa  $3300 \text{ kg/m}^3$ . Das ist bereits ein Hinweis, dass die Dichte im Erdinnern stark zunehmen muss.

Das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel ist  $\frac{8\pi}{15}\rho_0 r_E^5 = 0.4 m_E r_E^2$ . Es ist deutlich größer als  $J_C$ , was wiederum auf eine Massenkonzentration zum Zentrum hin schliessen lässt.

Aus der Gesamtmasse und dem Trägheitsmoment der Erde läßt sich also ableiten, dass die Dichte zum Zentrum zunehmen muss. Das ist auch die Voraussetzung für eine gravitativ stabil geschichtete Erde. Die zwei Randbedingungen erlauben aber nur, zwei Parameter einer vereinfachten Funktion für  $\rho(r)$  zu bestimmen (vgl. Abb.2.6). Die Hinzunahme von "Randbedingungen" durch die seismischen Geschwindigkeiten kann das Problem theoretisch lösen; allerdings gibt es keine einfache Beziehung, nach denen sich die Dichte direkt und hypothesenfrei aus seismischen Geschwindigkeiten ableiten lässt<sup>23</sup>. Man hat sich seit den 60-er Jahren mit zwei Ansätzen beholfen, (a) der Ableitung von **empirischen Geschwindigkeits-Dichte-Beziehungen**, und (b) der stückweisen Integration der Differentialgleichungen für homogene Erdschalen (**Adams-Williams-Beziehung** und **Bullen-Modell**).

<sup>19</sup> Neben dem Experiment von Cavendish kann  $m_E$  aus der Messung des Abstands und der Umlaufzeit von Satelliten berechnet werden.

<sup>20</sup> Da die Erde keine Kugelgestalt hat, sondern infolge der Rotation an den Polen abgeplattet ist und am Äquator einen Äquatorwulst hat, gibt es zwei Trägheitsmomente, das **polare Trägheitsmoment**  $J_C$  ( $8.043 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2$ ) und das **äquatoriale Trägheitsmoment**  $J_A$  ( $8.017 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2$ ).

<sup>21</sup> das Trägheitsmoment einer Punktmasse  $m$  im Abstand  $d$  zur Drehachse ist  $J = md^2$ . Die Einheit ist  $\text{kg m}^2$ . Bei einem ausgedehnten Körper mit inhomogener Dichteverteilung wird über jedes Massenelement  $dm$  integriert.

<sup>22</sup>Für den senkrechten Abstand wurde  $d = r \sin \theta$  eingesetzt,  $V = dx dy dz$  in Kugelkoordinaten ausgedrückt und dann teilweise integriert.

<sup>23</sup> Eine Ausnahme ist die Theorie der Eigenschwingungen der Erde.

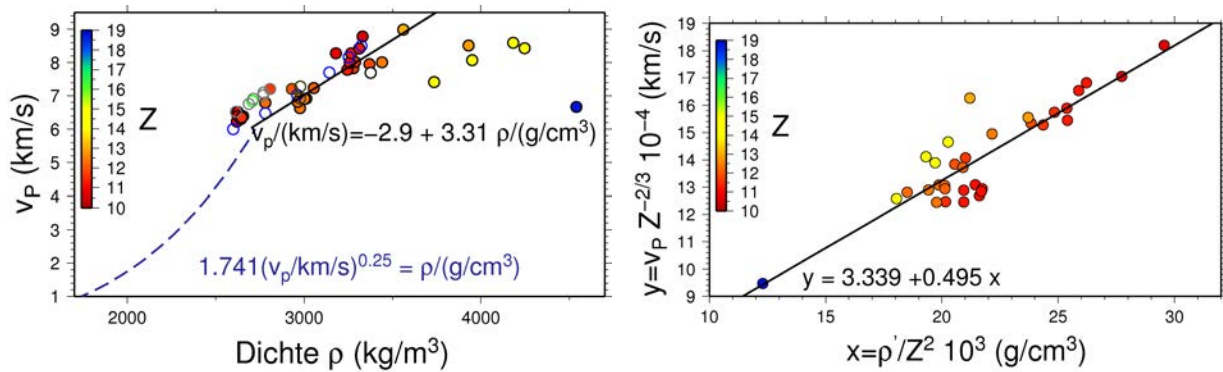


Abbildung 2.7: Empirische Geschwindigkeits-Dichte-Beziehungen für die Kruste und den oberen Mantel. Die geplotteten Geschwindigkeiten  $v_p$  (Kreise) wurden bei einem Druck von  $\approx 1 \text{ GPa}$  im Labor gemessen (entspricht etwa 33 km Tiefe), wobei Gesteine der Unterkruste und des oberen Mantels ausgesucht wurden (Feldspate, Plagioglas, Granite, Diabase, Eklogite, Dunite, Garnet, Mafische Gesteine, Serpentin-Olivin, Daten aus Knopoff, 1967; Birch, 1961). Die gestrichelte Linie gibt einen mittleren, empirischen Zusammenhang für Sedimente der Oberkruste (nach Garder et al., 1974 (siehe Mavko et al., 2003)). Die durchgezogenen Linien geben Beziehungen für Gesteine der Unterkruste an; links für die Annahme eines mittleren Atomgewichts von  $m \approx 21.5$ , und rechts für die reduzierte Auftragung nach Knopoff (1967).  $Z$  ist das repräsentative Atomzahl, und  $\rho'$  ist die auf die Tiefe von  $\approx 33 \text{ km}$  umgerechnete Gesteinsdichte.

(a) **Empirische Geschwindigkeits-Dichte-Beziehungen** werden aus Labormessungen an Sedimenten und Gesteinen der unteren Kruste und des oberen Mantels abgeleitet (Abb. 2.7). Mittlere Geschwindigkeiten und Gesteinsdichten hängen von der Mineralzusammensetzung der Gesteine, der Porosität (druckabhängig) und Fluidsättigung und der Geometrie des Porenraums ab. Birch (1961) führte z.B. Messungen an unterschiedlichen Gesteinen bis zu Drücken von  $1 \text{ GPa}$  durch (entspricht etwa  $33 \text{ km}$  Tiefe), und schlug eine zusätzliche Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom mittleren Atomgewicht  $\bar{m}$  vor (für die meisten Gesteine ist  $\bar{m} = 21.5 \pm 1.5$ ). Knopoff (1967) verbesserte die empirischen Beziehungen und führte eine Abhängigkeit zur repräsentativen Atomzahl  $Z$  ein (siehe Abb. 2.7). Empirische Beziehungen für Sedimentgesteine in geringeren Tiefen sind für die angewandte Geophysik und die Rohstoffexploration besonders nützlich. Gebräuchliche Beziehungen basieren häufig auf Untersuchungen von Castagna und Gardner und sind z.B. in Mavko et al. (2003) zusammengestellt.

Empirische Dichte-Geschwindigkeitsbeziehungen sind dann notwendig, wenn z.B. Informationen nur über die P-Wellen Geschwindigkeiten vorliegen. Sie sind aber im Einzelfall mit großen Unsicherheiten behaftet (vgl. Abb. 2.7) und sollten nicht in Tiefenbereiche außerhalb des durch Labormessungen abgedeckten Bereichs extrapoliert werden.



(b) **Die Adams-Williams-Beziehung und das Bullen-Dichtemodell** wurden in den 60-er Jahren aufgestellt. Die Dichte hängt allgemein vom Gestein, der Kristallstruktur, dem Druck  $P$  und der Temperatur  $T_c$  ab. Geht man von einer homogenen Zusammensetzung des Mantels aus, dann gilt dort  $\rho = \rho(P, T_c) = \rho(P, S)$ . Anstelle der intensiven Variablen "Temperatur" kann man auch die extensive (mengenartige) Variable "Entropie  $S$ " betrachten. Bullen nahm an, dass sich die Dichte im homogenen Mantel nur isentrop oder adiabatisch ändert, d.h.  $S$  bleibt über  $r$  (oder die Tiefe) konstant<sup>24</sup>. Damit gilt  $\frac{d\rho}{dr} \approx \frac{d\rho}{dP} \frac{dP}{dr}$ . Mit der Definition des adiabatichen Kompressionsmoduls  $\mathcal{K} = \rho \frac{dP}{d\rho}$ <sup>25</sup>, und unter hydrostatischem Druck einer flüssigen Erde unter Eigengravitation,  $dP/dr = -\rho(r) b(r) = -\rho(r) G_E \frac{m(r)}{r^2}$ <sup>26</sup>, erhält man die Adams-Williams-Gleichung

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \approx \rho \frac{d\rho}{\rho dP} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{\rho}{\mathcal{K}} b(r) = -\frac{G_E m(r)}{\Phi_v r^2} \quad (2.4)$$

mit  $\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$  .

Die Variable  $\Phi_v$  in (2.4) wird aus den seismischen Geschwindigkeiten bestimmt,  $\Phi_v = \frac{\mathcal{K}}{\rho} = v_p^2 - 4v_s^2/3$ .  $\Phi_v$  wird **seismischer Parameter** oder **hydrodynamische Schallgeschwindigkeit** genannt.

Die zweite Gleichung in (2.4) nutzt aus, dass die Gravitationsbeschleunigung  $b(r)$  im Innern der Erdkugel nur durch diejenigen Massen bestimmt wird, die unterhalb des Aufpunktes in  $r$  ( $r < r_E$ ) liegen. Kugelschalen, die ausserhalb des Aufpunktes liegen, tragen nichts zu  $b$  bei (siehe Anhang D)<sup>27</sup>.

Nicht berücksichtigte Effekte in der Adams-Williams-Gleichung sind Dichteänderung durch die Änderung der stofflichen Zusammensetzung oder der Kristallstruktur (Phasenübergänge, z.B. in der Übergangszone im Mantel).

Zur Lösung von (2.4) unterteilt man die Erde in viele dünne, homogene Kugelschalen, über die das System gekoppelter Gleichungen integriert wird (d.h. innerhalb der dünnen

<sup>24</sup> Bei isentroper (adiabatischer) Temperaturerhöhung wird keine Wärme erzeugt. Würde man die Gravitation in einer Erde unter konstantem Druck und konstanter Temperatur plötzlich einschalten, dann würde bei adiabaticher Kontraktion des Gesteins der Druck und die Temperatur in der Tiefe ansteigen, ohne dass dabei Wärmeenergie entsteht. In einem anderen Experiment bewirkt die Temperaturabnahme bei einer adiabatichen Konvektions-Aufströmung einen exakten Temperatenausgleich, so dass das Gestein im aufströmenden Plume immer das gleiche  $T_c$  hat als die Umgebung. Bei thermischer Konvektion mit  $Ra > Ra_C$  ist  $T_c$  immer leicht größer als in der Umgebung.

<sup>25</sup>  $dP = -\mathcal{K} \frac{dV}{V} = +\mathcal{K} \frac{d\rho}{\rho}$ ,  $dV/V$  ist die relative Volumenänderung mit  $dV/V = -d\rho/\rho$

<sup>26</sup> Aus der Hydrostatik ist der Zusammenhang zwischen Druck und der Höhe  $h$  der darüberliegenden Wassersäule bekannt,  $P = \rho b h$ . Für die differentielle Druckänderung mit der Tiefe gilt entsprechend  $dP = -\rho(r) b(r) dr$

<sup>27</sup>  $b(r) = \frac{G_E m(r)}{r^2} = \frac{G_E}{r^2} \int_0^r 4\pi \rho(r') (r')^2 dr'$  oder  $\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi \rho(r) r^2$ .

Kugelschale sei  $\rho$  konstant). Bullen hat die Adams-Williams-Gleichungen ausgehend von einer Obere-Mantel-Dichte von  $3300 \text{ kg/m}^3$  integriert. Es stellte sich heraus, dass die Voraussetzung für die Anwendung von (2.4) nicht überall im Mantel erfüllt sein konnte, wenn der Kern dichter als der Mantel ist und gleichzeitig die Gesamtmasse und das Trägheitsmoment der Erde erklärt werden sollen. Bullen hat daraufhin an den Übergangszonen in  $410$  und  $670 \text{ km}$  im oberen Mantel einen Dichtesprung zugelassen. Das so erhaltene Dichtemodell wurde **Bullen Modell** genannt und traf schon sehr gut das heute verfeinerte Dichtemodell aus Abb.2.6. Die heutigen Dichtemodelle wurden auch unter Zuhilfenahme von Eigenschwingungsmessungen hypothesenfrei bestimmt und verfeinert (Masters and Gubbins, 2003). Unsicherheiten von 1% werden im Erdmantel für mittlere Dichten über Tiefenintervalle zwischen  $100 - 150 \text{ km}$  erreicht, im festen inneren Kern erst ab Mittelungen über etwa  $400 \text{ km}$  Tiefe.

#### 2.2.4 Druck und Gravitationsbeschleunigung

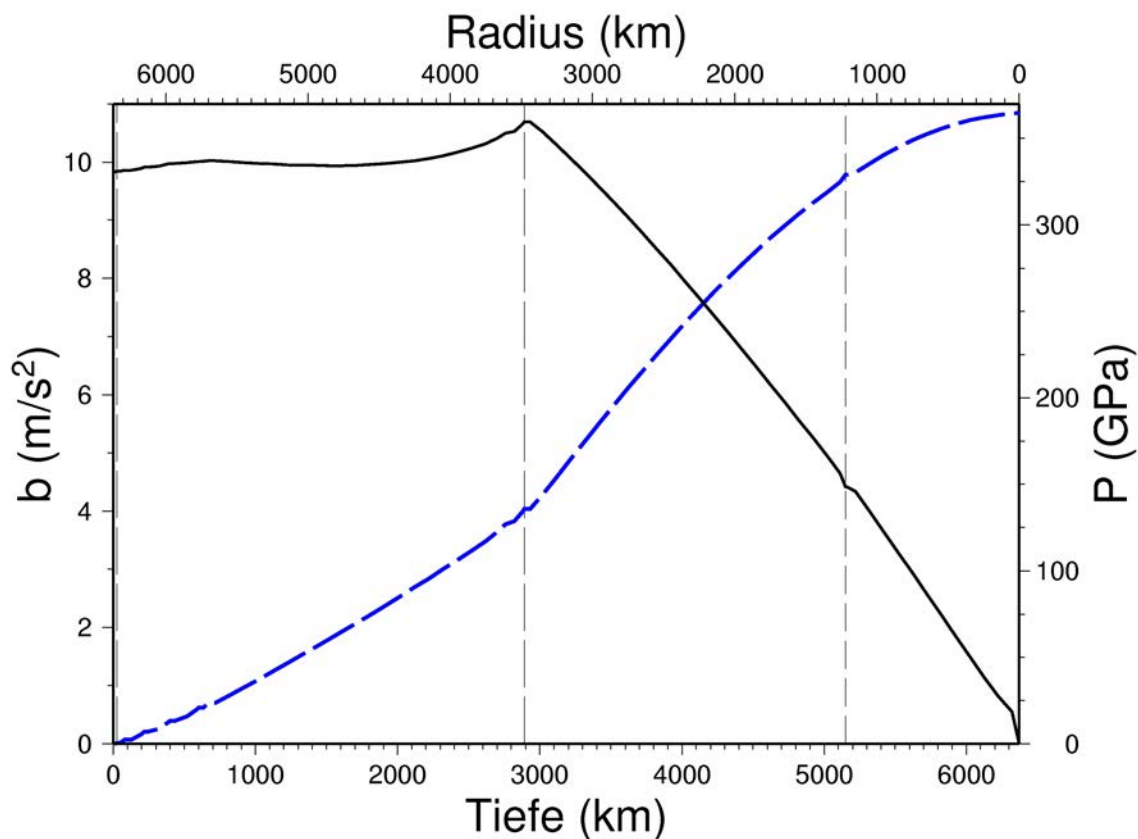


Abbildung 2.8: Gravitationsbeschleunigung  $b$  und Druck  $P$  in der Erde als Funktion der Tiefe.  $b$  entspricht für eine nicht-rotierende Erde der Schwerebeschleunigung  $g$ .

Nachdem  $\rho(r)$  bekannt ist, kann aus

$$b(r) = \frac{G_E m(r)}{r^2} = \frac{G_E}{r^2} \int_0^r 4\pi \rho(r') (r')^2 dr' \quad (2.5)$$

die Gravitationsbeschleunigung  $b(r)$  in der Erde berechnet werden. Der Druck im Erdinnern kann bei bekanntem  $\rho$  und  $b$  aus

$$P = \int_r^{r_E} \rho(r') b(r') dr' \quad (2.6)$$

berechnet werden. Abb. 2.8 zeigt  $b$  und  $P$  in der Erde als Funktion der Tiefe. Die Gravitationsbeschleunigung ist im gesamten Mantel etwa  $10 \text{ m/s}^2$ . Das ist beachtlich, da  $b$  im Innern einer homogenen Kugel linear mit der Tiefe abnehmen würde. Der Hauptgrund für die annähernd konstante Beschleunigung im Mantel ist der Effekt durch den Kern mit viel grösserer Dichte als der Mantel. Im Kern selbst nimmt  $b$  dann allerdings wie zu erwarten fast linear ab bis auf den Wert Null im Mittelpunkt.

Der Druck nimmt im Erdinnern ständig zu bis auf einen Maximalwert von etwa  $360 \text{ GPa}$ . Als Faustformel ist die Druckzunahme in der Kruste etwa  $P [\text{MPa}] \approx \rho b z = 30 [\text{MPa/km}] \cdot z [\text{km}]$ . In  $10 \text{ km}$  wirken etwa  $300 \text{ MPa}$  ( $= 3 \text{ kbar}$ )<sup>28</sup> und in  $33 \text{ km}$  etwa  $1 \text{ GPa}$ .

Aus den Kurven für seismische Geschwindigkeiten und Dichte in der Erde kann der Verlauf des Kompressions- und Schermoduls berechnet und als Funktion des Drucks dargestellt werden (Gleichung 2.1 und Abb. 2.9). Allgemein gilt (für  $S = \text{const.}$ );  $1/\mathcal{K} := \frac{-1}{V} \frac{dV}{dP} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP}$ <sup>29</sup>. Für Fluide oder Gesteine an der Erdoberfläche ist das Kompressionsmodul  $\mathcal{K}$  in der Regel konstant. Für ideale Gase ist  $\mathcal{K} = P$ , also direkt proportional zum Druck (vgl. Boyle Mariottesches Gesetz). Abb.2.9 zeigt, dass  $\mathcal{K}$  für Gesteine im unteren Mantel und Kern nahezu linear mit dem Druck anwächst, z.B. mit  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}' P = 210 \text{ GPa} + 3.35135 P$ . Setzt man die lineare Beziehung (Approximation) in die Definitionsgleichung für  $\mathcal{K}$  ein und integriert, erhält man eine Beziehung zur Berechnung der Dichte unter dem reduzierten Druck z.B. an der Erdoberfläche (vgl. Stacey und Abb.2.6),

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{1}{\rho} d\rho = \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}' P} dP$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}' P_2}{\mathcal{K}_0 + \mathcal{K}' P_1} \right)^{1/\mathcal{K}'} = \left( \frac{\mathcal{K}_2}{\mathcal{K}_1} \right)^{1/\mathcal{K}'}$$

$\rho_2$  ist die Dichte unter dem Druck  $P_2$  und  $\rho_1$  die unter dem reduzierten Druck  $P_1$ .

<sup>28</sup>  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ kgm/m}^2 \text{ s}^2$ .  $1 \text{ MPa} = 10 \text{ bar}$

<sup>29</sup> Der Kehrwert des Kompressionsmoduls,  $1/\mathcal{K}$ , wird Kompressibilität genannt

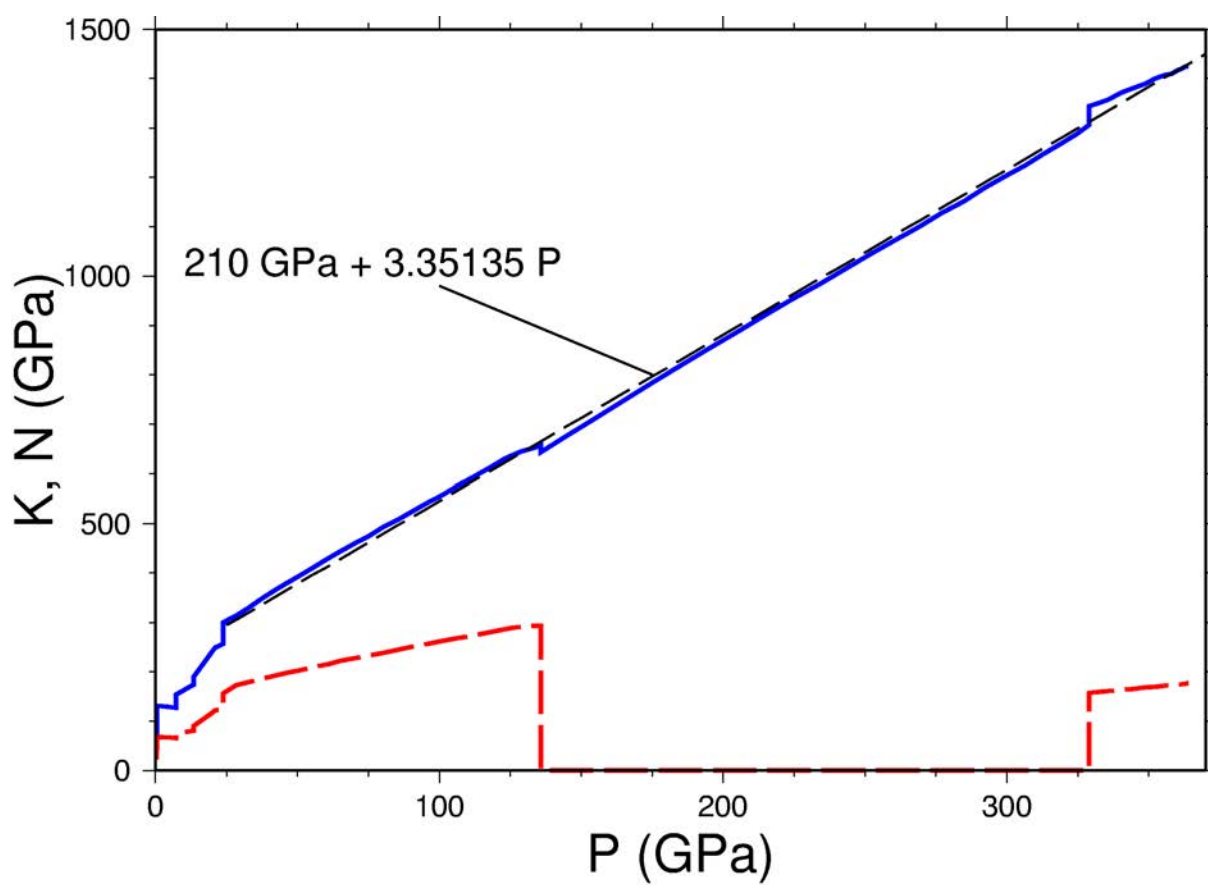


Abbildung 2.9: Kompressionsmodul  $\mathcal{K}$  (durchgezogene Linie) und Schermodul  $\mathcal{N}$  (gestrichelte Linie) als Funktion des Drucks  $P$  (PREM Modell).

### 3 Dynamik der Erde und Plattentektonik

Die Erdmassen in der Erde sind in ständiger Bewegung. Das betrifft nicht nur die offensichtliche Erosion und Sedimentation aufgrund der Wasser- und Windeinwirkung, sondern auch die Bewegung der Gesteinsblöcke und der Fluide im Untergrund aufgrund interner Kräfte. Diese inneren Bewegungen und Prozesse sind zum Beispiel eine Ursache für Erdbeben und Vulkanausbrüche. Im Folgenden wird die Kinematik und Dynamik der Lithosphäre behandelt und anschliessend die Bewegungen im Erdmantel, die als die wichtigsten Antriebskräfte der Lithosphärenkinematik angesehen werden.

#### 3.1 Bewegungen der Lithosphäre und Plattentektonik

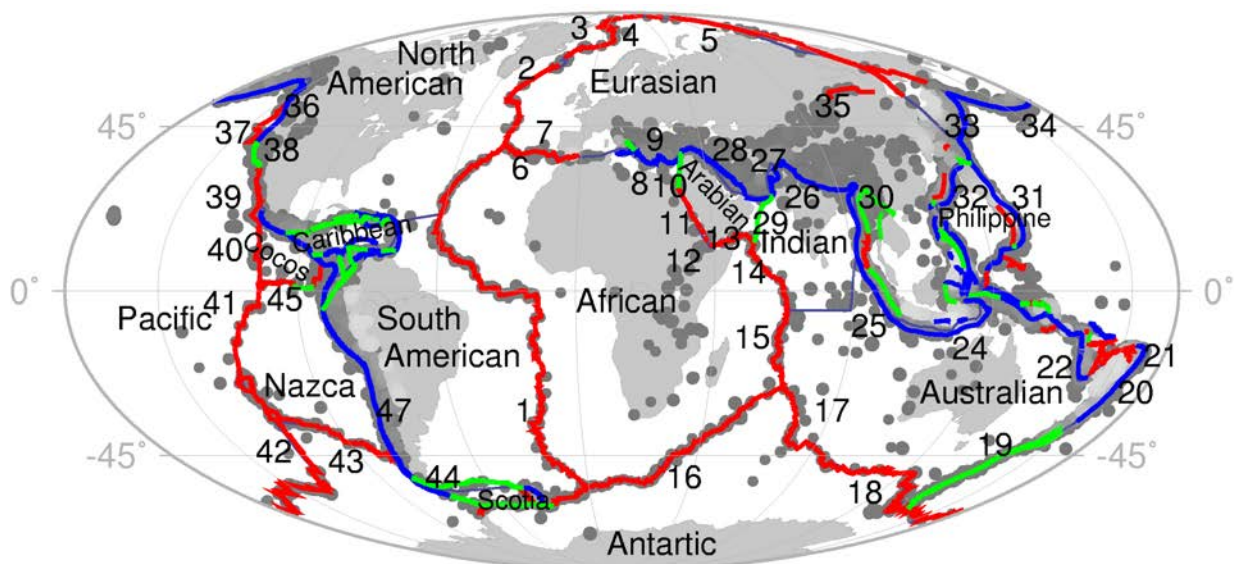


Abbildung 3.1: Tektonische Großplatten, Plattengrenzen (rot=ridge, blau=trench, grün=fault) und Seismizität (graue Punkte, USGS Katalog). Mollweide Projektion mit zentralem Meridian bei  $15^\circ E$ . 1 = Mid Atlantic Ridge, 2 = Reykjanes Ridge, 3 = Kolbeinsey Ridge, 4 = Mohns Ridge, 5 = Gakkel Ridge, 6 = Terceira Rift, 7 = Gloria Fault, 8 = Hellenic Subduction, 9 = North Anatolean Fault, 10 = Dead Sea Transform Fault, 11 = Red Sea Ridge, 12 = East African Rift, 13 = Gulf of Aden, 14 = Carslberg Ridge, 15 = Central Indian Ridge, 16 = Southwest Indian Ridge, 17 = Southeast Indian Ridge, 18 = McQuarie Ridge, 19 = McQuarie Fault Zone, Puysegur Trench & Alpine Fault, 20 = Kermadec Trench, 21 = Tonga Trench, 22 = New Hebrides Trench, 24 = Java Trench, 25 = Sumatra Trench, 26 = Himalaya Arc, 27 = Hindu Kush, 28 = Caucasus Arc, 29 = Owen Fracture Zone, 30 = Xianshuihe, 31 = Marianne Trench, 32 = Ryukyu Trench, 33 = Kurile Trench, 34 = Aleuten Trench, 35 = Lake Baikal Ridge, 36 = Cascade Arc & Queen Charlotte Transform, 37 = Juan de Fuca Ridge, 38 = San Andreas Fault, 39 = Middle America Trench, 40/41 = East Pacific Rise, 42 = Pacific Antarctic Ridge, 43 = Chile Rise, 44 = Shackleton & Scotia Sea FZ, 45 = Galapagos Rise, 47 = Peru Chile Trench.

Tabelle 3.1: Dimensionen von tektonischen Großplatten (nach Forsyth and Uyeda, 1975).

Platte	$A$ (ozeanisch/kontinental) ( $10^6 \text{ km}^2$ )	Umfang (Ridge/subd. Slab) ( $10^2 \text{ km}$ )
Pazifisch	108 (108/-)	499 (152/124)
Afrikanisch	79 (48/31)	418 (230/10)
Eurasisch	69 (18/51)	421 (90/-)
Indisch-Australisch	60 (45/15)	420 (124/91)
N-Amerikanisch	60 (24/36)	388 (146/12)
Antarktisch	59 (44/15)	356 (208/-)
S-Amerikanisch	41 (21/20)	305 (87/5)
Nazca	15 (15/-)	187 (76/53)
Philippinisch	5.4 (5.4/-)	103 (-/41)
Arabisch	4.9 (0.5/4.4)	98 (30/-)
Karibisch	3.8 (3.8/-)	88 (-/-)
Cocos	2.9 (2.9/-)	88 (40/25)

In den 1960-er Jahren wurde das Modell der **globalen Plattentektonik** aufgestellt und verifiziert. Der Begriff **Tektonik** ist die Lehre von der Deformation der Gesteine und der strukturellen Entwicklung der äußeren Bereiche der Erde. Die globale Plattentektonik ist ein Modell, das die Bewegung und die Tektonik starrer Platten an der Erdoberfläche beschreibt (siehe Abb. 3.1 und Tab. 3.1 zur Einteilung der Großplatten). Die entscheidenden Prozesse finden dabei an den Plattenrändern statt. Die Plattentektonik ist vor allem ein Modell für die ozeanischen Bereiche und nicht ohne Modifikationen auf die kontinentalen Bereiche zu übertragen. Da das Modell eine so große Bedeutung in der Geophysik und Geologie hat, folgt erstmal ein kurzer geschichtlicher Abriss.

Relativ kurz nach der geographischen Erkundung Amerikas ist die Ähnlichkeit der Ostküste Südamerikas und der Westküste Afrikas aufgefallen. 1756 schrieb der Theologe Theodor Lilienthal vom Auseinanderbrechen Afrikas und Amerikas während einer biblischen Katastrophe. Alexander von Humboldt hat 1840 auf die geometrische und geologische Übereinstimmung der beiden Küsten hingewiesen, sie allerdings nicht durch ein Auseinanderdriften, sondern durch eine Art Erosion durch einen gigantischen Strom zu erklären versucht. 1858 hat der Amerikaner Antonio Snider-Pellegrini bereits die Rekonstruktion eines Superkontinents versucht, und postuliert, dass dieser auseinandergebrochen sei. Alfred Wegener hat 1912 erstmals seine **Theorie der Kontinentaldrift** vorgestellt. Er postulierte, dass leichte, feste (spröde) Kontinente in einem dichteren und duktilen Ozeanboden schwimmen und sich horizontal bewegen können. Bis dahin waren unter Geologen vertikale Bewegungen in der Erdkruste bekannt und akzeptiert, große



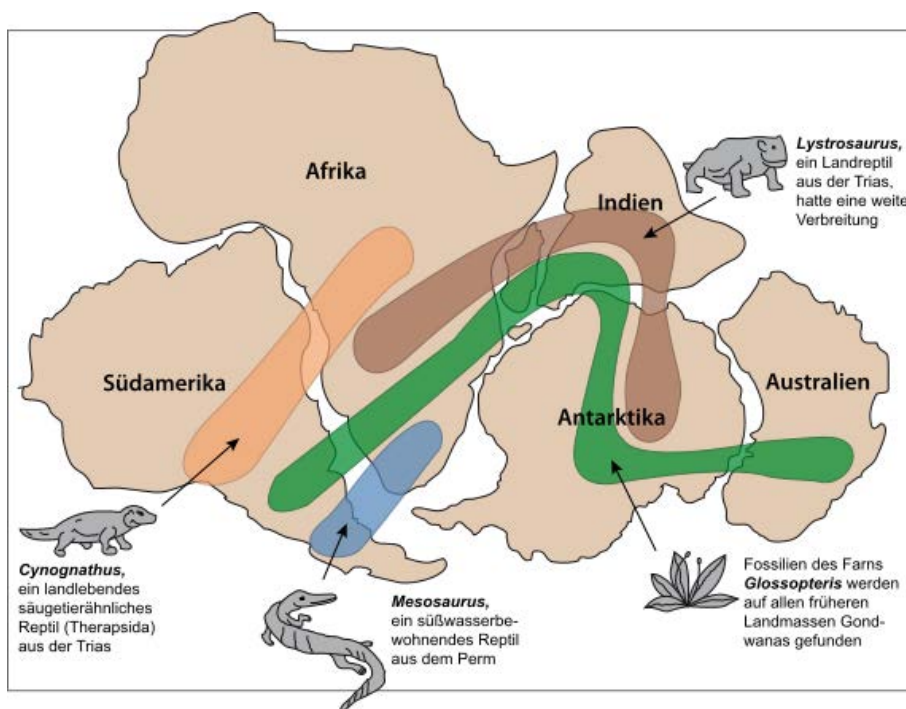


Abbildung 3.2: Die Verteilung von Fossilien und Fauna auf den südlichen Kontinenten des Superkontinents Pangea vor etwa 250 Millionen Jahren (modifiziert von USGS, <http://pubs.usgs.gov/publications/text/historical.html>; siehe Wegner, 1929)

horizontale Bewegungen und Verschiebungen aber außer jeder Diskussion. Der Ozeanboden riss nach Wegeners Vorstellungen gewissermaßen vor dem Kontinent auf, und schloss sich hinter ihm wieder. Mit seiner Theorie konnte er die unterschiedliche Höhenlage zwischen Kontinent und Ozeanboden erklären (Abb. 2.2), die Verteilung von Flora und Fauna zu früheren Zeiten beiderseits des Atlantiks (vgl. Abb. 3.2), sowie beobachtete Spuren von glazialen Geschiebe während des Perm und Devon (225-395 Ma) auf der südlichen Hemisphäre (Abb. 3.3). Wegener konnte keinen schlüssigen Antriebsmechanismus für seine Kontinentalverschiebung präsentieren und nicht die für das Durchpflügen der Ozeane nötige, niedrige Ozeanboden-Viskosität beweisen. Er hatte die Korioliskraft oder astronomische Ursachen als Antriebsmechanismus postuliert und unrealistisch große Bewegungsraten von mehreren Metern pro Jahr abgeschätzt. Obgleich Arthur Holmes in 1928 alternative Antriebsmechanismen vorschlug, wurde Wegeners Theorie nicht allgemein anerkannt.

Erst Mitte des 20. Jahrhunderts gab es neue wichtige Beobachtungen, die Wegeners Modell wieder ins Gespräch brachten. Auf den Kontinenten hatte man die Richtung der Magnetisierung von erstarrten, vulkanischen Ergussgesteinen untersucht<sup>30</sup>. Die erstarrten

<sup>30</sup> Die ersten Messungen wurden von Brunhes 1906 im Massif Central (Frankreich) in Lava-Flüssen und gebackenem Ton durchgeführt





Abbildung 3.3: Spuren glazialer Geschiebe (Pfeile) während des Perms und Devons (225 - 395 *Ma*) lassen sich auf dem Superkontinent Pangaea einem gemeinsamen Glazialsystem mit radial angeordneter Drift zuordnen (Rekonstruktion, modifiziert aus [Stacey, 1992](#)).

Gesteine mit remanenter Magnetisierung konservieren gewissermaßen das Magnetfeld zur Zeit ihrer Entstehung. Wenn sich die Zeit der Ausbrüche feststellen läßt, hat man einen Meßpunkt des beim Ausbruch vorhandenen Magnetfeldes (**Paläomagnetfeld**). Man stellte fest, dass die Richtungen zum Paläo-Nordpol in geologischen Zeiträumen stark schwankten. Eine einfache Erklärung wäre eine magnetische Polwanderung. Allerdings ergaben die Messungen auf unterschiedlichen Kontinenten unterschiedliche scheinbare Polwanderungskurven (Abb. 3.4). Werden die Kontinente relativ zueinander verschoben, dann läßt sich eine übereinstimmende Polwanderungskurve rekonstruieren.

Eine ganze Reihe weiterer wichtiger und entscheidender Beobachtungen kamen durch die Erkundung und Vermessung der Ozeanböden seit etwa 1960. Man erkannte, dass in ozeanischen Bereichen langgestreckte untermeerische Gebirgsketten und Tiefseegräben mit einer Gesamtlänge von etwa 70000 *km* und einer lateralen Ausdehnung bis zu 1500 *km* vorhanden sind (33% des Seebodens, 23% der Erdoberfläche), sogenannte **mitteleozanische Rücken** (mid-ocean ridges, teilw. auch mittelozeanische "Schwellen" genannt). Die mittelozeanischen Rücken werden an einigen Stellen durch Verwerfungs- (**transform faults**) und Bruchzonen (**fracture zones**) durchschert. Ebenso fand man, meist an der Grenze zu Kontinenten, Tiefseegräben mit Wassertiefen bis zu 10900 *m* Tiefe (Mariannen-Graben). Die Kartierung der Magnetisierung der Ozeanböden ergab ein magnetisches Streifenmuster parallel zu den mittelozeanischen Rücken (Abb. 3.5). Das magnetische Streifenmuster war anfangs völlig unerklärbar. Aufgrund anderer Messungen hatte man aber herausgefunden, dass das Erdmagnetfeld in geologischen Zeiträumen

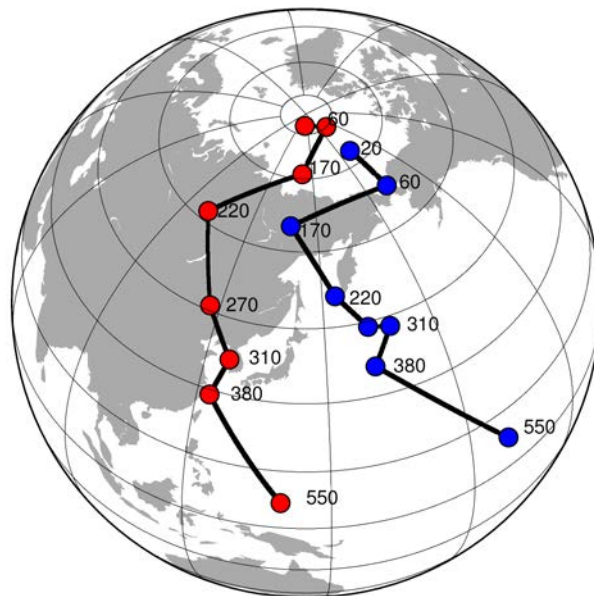


Abbildung 3.4: Scheinbare Polwanderkurven für Nordamerika (rote Kreise) und die Russische Plattform (blaue Kreise). Die Zahlen geben die Zeit vor heute in Millionen Jahren (Daten aus [Turcotte and Schubert, 2002](#), Tab. 1-5).

häufig einen Polwechsel durchlaufen hat. Die Polwechsel können wie Zeitmarken in den paläomagnetischen Aufzeichnungen angesehen werden. [Dietz \(1961\)](#); [Isacks et al. \(1968\)](#); [Vine \(1966\)](#) haben zur Interpretation des Magnetstreifenmusters zuerst das Konzept des "sea floor spreading" formuliert. Damit war der erste Schritt zum Modell der globalen Plattentektonik gemacht, die fehlenden Puzzle-Steine sind dann schnell erkannt worden.

Sea floor spreading findet an mittelozeanischen Rücken, einer sogenannten **divergierenden Plattengrenze**, statt. Dort tritt heisses, flüssiges Mantelmaterial (**basaltische Magmen**) an die Oberfläche und bildet neue ozeanische Kruste. Entlang mittelozeanischen Rücken findet man an vulkanischen Zentren Hydrothermalfelder und Fluidaustrittsstellen (z.B. "black smoker"). Die gesamte ozeanische Lithosphäre driftet auseinander, während entlang der Rückenachse ständig neues Material nachfließt und erstarrt.

Beim Erstarren wird das Magnetfeld mit der jeweiligen Polarität in der oberen ozeanischen Kruste eingefroren, was bei gleichförmigem Auseinanderdriften nach mehreren Magnetpolwechsel zu einem zur Rückenachse symmetrischen Muster der remanenter Gesteinsmagnetisierung führt. Die Magnetisierung der ozeanischen Kruste überlagert das heutige Magnetfeld, so dass die magnetischen Anomalien ein parallel zum Rücken verlaufendes Streifenmuster bilden, welches zur Rekonstruktion der Driftraten genutzt werden kann (Abb. [3.6](#) und [3.5](#)).

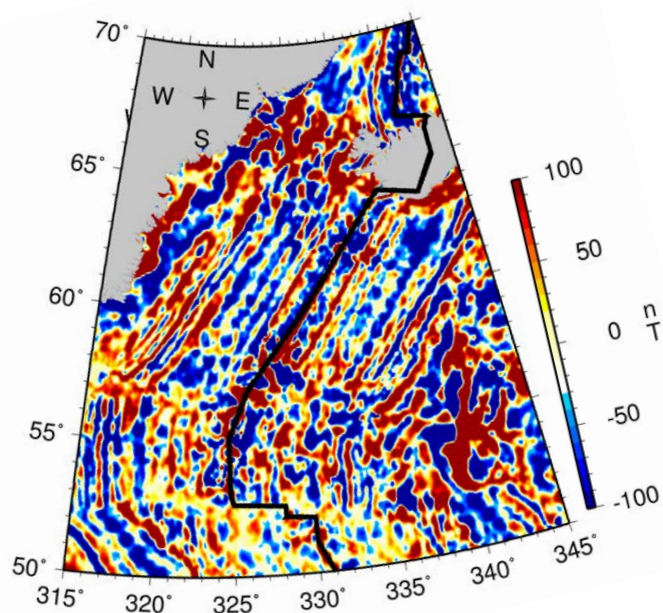


Abbildung 3.5: Die magnetische Anomalien im Nordatlantik gegenüber dem reduzierten Mittelwert des Magnetfeldes bilden ein Streifenmuster parallel zur Achse des mittelozeanischen Rückens. Daten stammen aus dem Projekt World Digital Magnetic Anomaly Map (WDMAM Korhonen et al., 2007). Transverse Mercator Projektion für einen zentralen Meridian bei  $340^\circ$ .

Die Lithosphärenplatte ist relativ starr und fest. Sie bewegt sich gegenüber der Asthenosphäre, d.h. der weichen duktileren Zone unterhalb der Lithosphäre. Die Asthenosphäre ist der Tiefenbereich im oberen Mantel, in dem die Scherwellengeschwindigkeit stark erniedrigt ist. Das wurde durch partielle Schmelzen und eine erniedrigte Viskosität gedeutet, was gut zu den Vorstellungen der Plattentektonik passt.

Die Lithosphäre ist also nahe zum Rücken relativ jung, dünn und heiss, und wird mit wachsender Entfernung zum Rücken älter (Abb. 3.7), dicker und kälter. Da die Lithosphärenplatte damit auch immer schwerer wird, sinkt sie mit wachsender Entfernung zum Rücken tiefer und tiefer in den Mantel ein, so dass die Wassertiefe mit wachsender Entfernung zum Rücken ebenfalls ansteigt (Abb. 3.8 und Kapitel 3.4.2). Ebenso kann man beobachten, dass die Sedimentschichtdicke mit wachsender Entfernung zum Rücken anwächst.

Den divergierenden steht die **konvergierende Plattengrenze** gegenüber, an der sich

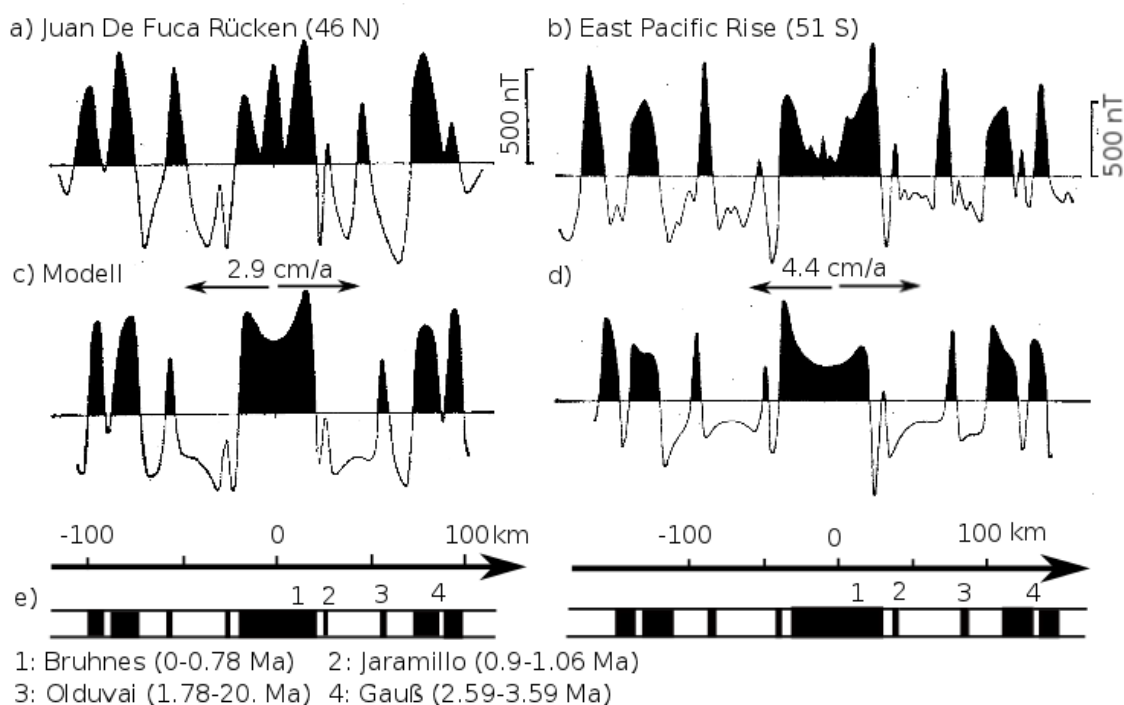


Abbildung 3.6: Magnetische Anomalien (positive Werte schwarz eingefärbt) über den Juan De Fuca Rücken (a, Nordpazifik, 46°N) und East Pacific Rise (b, Südpazifik, 51°S). Anomalien von  $\pm 500 \text{ nT}$  betragen etwa 1% des Erdmagnetfeldes. c) und d) sind Modell-Vorhersagen für unterschiedliche konstante Spreizungsgeschwindigkeiten (modifiziert von Vine, 1966). e) Schema normaler (schwarz) und verpolter (weiß) Krustenmagnetisierung durch die magnetischen Polaritätsepochen 1-4.

in der Regel eine **Subduktionszone** und in Konsequenz ein **Tiefseegraben** befindet. Die alte ozeanische Kruste kann so weit abkühlen, dass die gesamte Lithospärenplatte aufgrund ihrer größeren Dichte von selbst in den Mantel abtaucht. An der Eintauchstelle entsteht ein Tiefseegraben. Die Spur und Geometrie der abtauchenden Platte kann häufig bis in 670 km Tiefe durch eine Anhäufung von Erdbeben verfolgt werden (Abb. 3.9). Der im Mantel liegende Erdbebengürtel entlang der Subduktion wird **Wadati-Benioff-Zone** genannt (im oberen Bereich bis etwa 100 km Tiefe auch seismogene Zone). Die Subduktion muss aber nicht immer und überall von Erdbeben begleitet sein; so kann die Platte teilweise auch tiefer als 670 km in den Mantel eintauchen, obwohl dort keine Erdbeben mehr beobachtet werden.

Die Tiefseegräben und Subduktionszonen werden teilweise von Inselbögen begleitet (z.B. "Ozeanlithosphäre-Ozean-Subduktion"), die in der Regel hinter der Subduktionszone in einem "Back-Arc Becken" in der überliegenden Platte entstehen und vulkanischen Ursprungs sind (z.B. Santorini im Ägäischen Becken, die Äolischen Inseln im Tyrrhenischen Becken, das Andaman Becken im Indischen Ozean oder das Lau Becken hinter der Tonga Kermadec Subduktion im Pazifik). Tiefseegräben und hintergelagerte Inseln

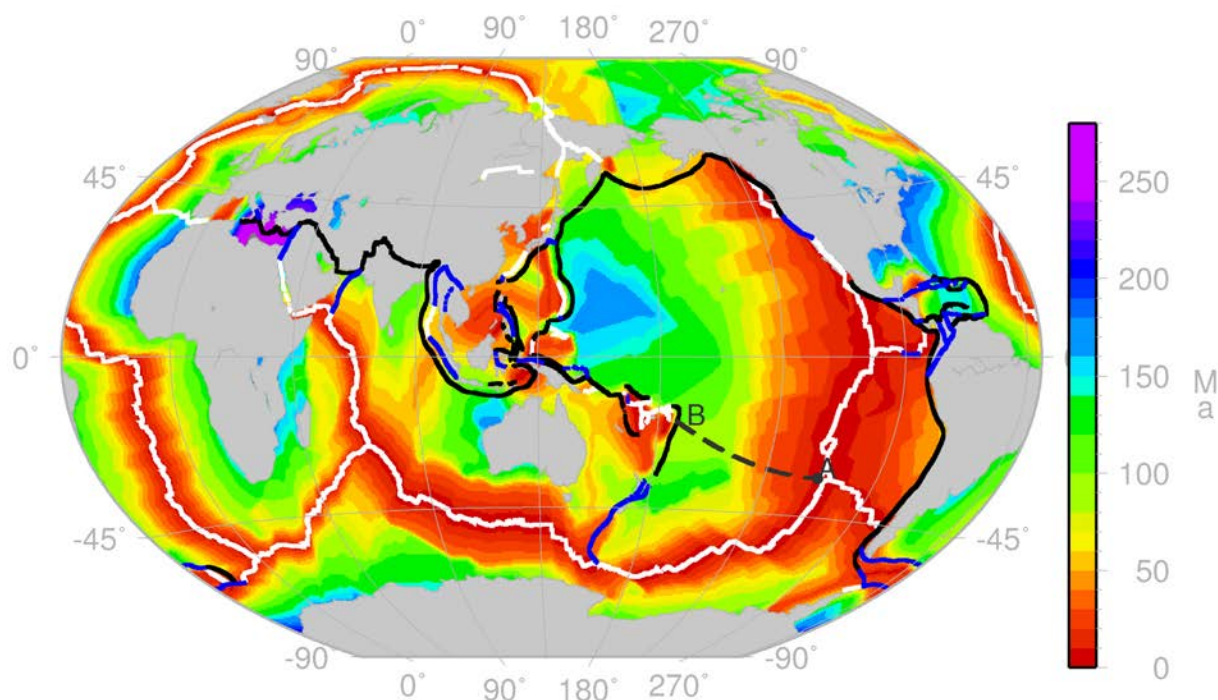


Abbildung 3.7: Alter der Ozeane nach Müller et. al., 1997: J.Geophys.R., 102:3211-3214 (Winkel Projektion).

sind in der Regel bogenförmig (z.B. Aleuten Bogen, Sumatra u.a.). Ein einfaches, mechanisches Modell erklärt die Bogenform durch die Steifheit der abtauchenden Platte und den Abtauchwinkel, ähnlich zu der Form einer Delle in einem Tischtennisball. Die genauere Analyse zeigt aber, dass die Gründe zur Entstehung der Bogenform komplexer sein müssen.

Weitere Strukturen einer Subduktionszone sind der Sedimentkeil zwischen überliegender und subduzierter Platte, ein mögliches Forearc Sedimentbecken bei ozeanischen Subduktionszonen zwischen Sedimentkeil und vulkanischem Bogen, sowie der Outer Bulge parallel und vorgelagert zum Tiefseegraben, d.h. eine langwellige untermeerische Erhebung von mehreren hundert Metern Höhe durch das elastische Verbiegen der abtauchenden Platte.

In einigen Fällen beobachtet man auch ein schnelleres Abtauchen der Platte in den Mantel als die horizontale Bewegung entfernt von der Subduktionszone vorgibt. Als Folge findet ein **roll-back** der subduzierten Platte statt, was wiederum in dem Bereich der überliegenden Platte (back-arc oder behind arc) zu tektonischen Dehnungsspannungen führt und möglicherweise zur Bildung sogenannter **back-arc-basins** oder **behind arc spreading** (z.B. Japan See oder Tyrrenisches Meer). Eine alternative Erklärung zur Bildung von back-arc-basins geht von sekundärer, kleinräumiger Mantelkonvektion im Bereich des überliegenden Mantelkeils aus.



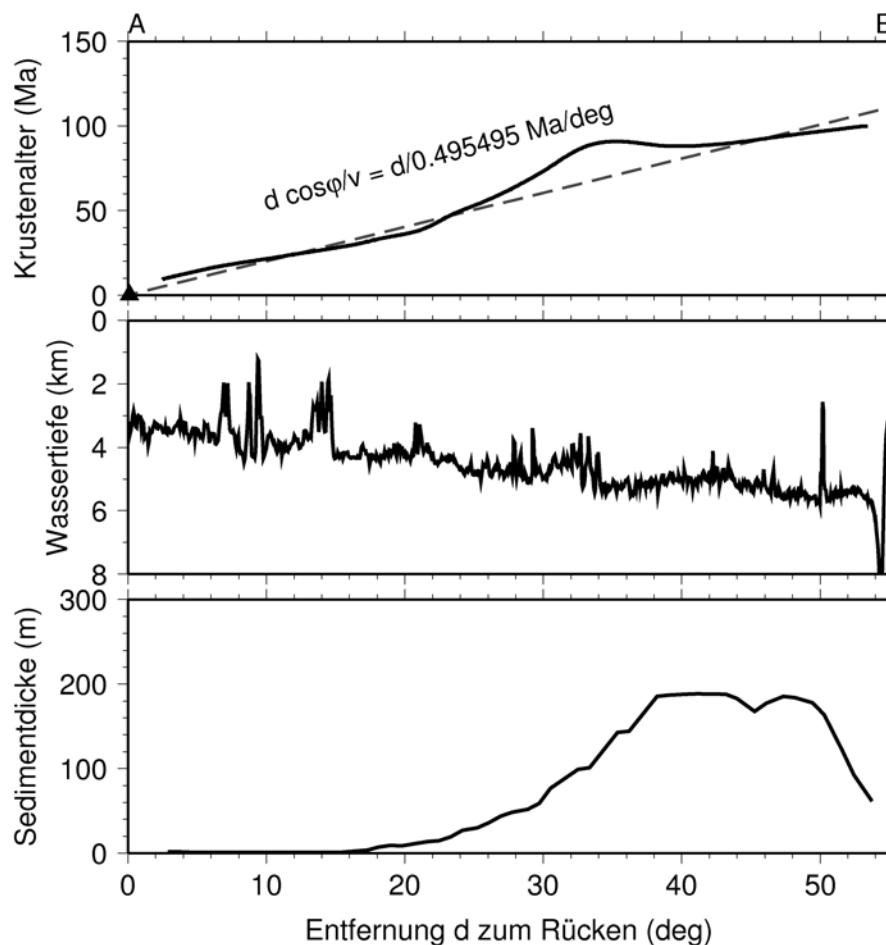


Abbildung 3.8: Krustenalter, Wassertiefe und Sedimentdicke entlang eines Profils vom East Pacific Rise (A) bis zur Tonga Kermadec Subduktionszone (B, siehe Profil A - B in Abb. 3.7).

Während im Bereich eines Backarc Beckens die überliegende Lithosphärenplatte unter tektonischer Dehnungsspannung steht, kann diese z.B. im Bereich einer Ozean-Kontinent Subduktionszone (z.B. Anden oder Cascade Range) auch unter horizontaler Kompression stehen, wodurch sich Gebirgsketten und Vulkangürtel bilden können. In anderen Fällen glaubt man, dass die subduzierte Platte abgebrochen ist und sich die überliegende Platte deshalb nach oben hebt (evtl. Appenninen). Ebenso kann eine Subduktion möglicherweise auch zur Ruhe kommen und an anderer, vorgelagerter Stelle, evtl. neu einsetzen (evtl. Südspanien). Solch eine inaktive Subduktion verursacht dann z.B. keine signifikante Seismizität.

Die Plattentektonik erklärt prinzipiell unterschiedliche Typen von Vulkanismus und Magmatismus. Magmen an mittelozeanischen Rücken werden häufig als Mid Ocean Ridge Basalts (MORB) klassifiziert (Tab. 2.3), obgleich auch hier teilweise Heterogenität in der Zusammensetzung besteht (siehe z.B. Wilson, 1989). Diese werden als nahezu primäre

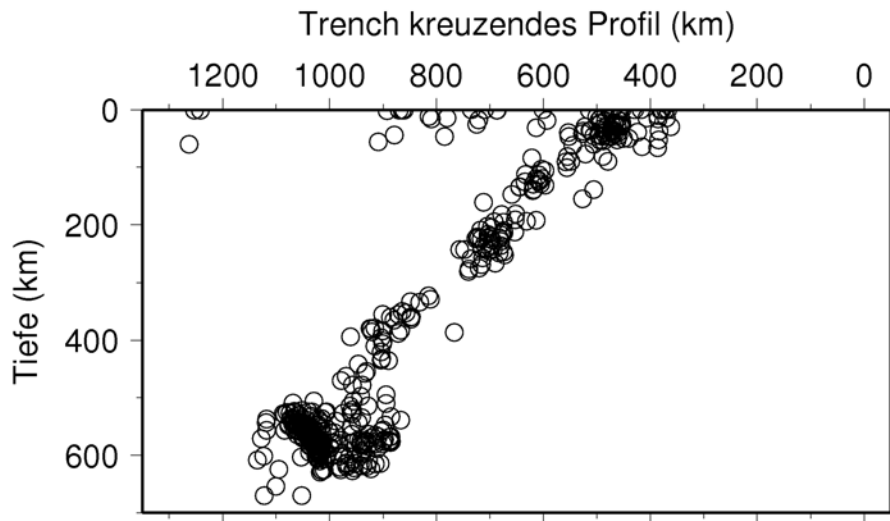


Abbildung 3.9: Tiefenschnitt entlang eines Profils senkrecht zur Streichrichtung des Tonga-Kermadec Tiefseegrabens bei  $20^{\circ}$  S und  $191^{\circ}$  E (siehe B in Abb. 3.12 für Lage des Profils). Die offenen Kreise stellen die Hypozentren von Erdbeben dar (GEOFON 2010-2014, Relokalisierung von N. Nooshiri, GFZ). Der in die Tiefe einfallende Erdbebengürtel wird als Wadati-Benioff-Zone bezeichnet und markiert die Lage der abtauchenden Lithosphärenplatte.

Magmen angesehen, die ihren Ursprung in der Asthenosphäre haben. Es handelt sich um basaltische, eher dünnflüssige Magmen, die zu einem i.d.R. effusiven und nicht explosiven Vulkanismus führen. Magmen an Ozeaninseln wie z.B. Hawaii (Ocean Island Basalts, vgl. Tab. 2.3) unterscheiden sich etwas von MORB und haben ihren Ursprung evtl. noch tiefer im Mantel. Vulkane an Subduktionszonen haben hingegen eher siliziumreiche Magmen, welche zähflüssiger und gasreicher sind und eher zu explosivem Vulkanismus führen. Beim Abtauchen in den Mantel werden Sedimente und Seewasser mitsubduziert. Diese Anteile lösen sich in größerer Tiefe von der subduzierten Platte, wandern teilweise in den Mantelkeil oberhalb der Subduktion und führen dort zur partiellen Aufschmelzung des Mantels. Die Schmelzen steigen weiter in die Unterkruste auf, in der sie aufgrund ihrer Dichte und der kompressiven tektonischen Spannungen länger verweilen und weiter fraktionieren. So entsteht auch neue kontinentale Unterkruste (vgl. Abb. 3.10). Die aufsteigenden Fluide setzen also eine Produktionskette in Gang, an deren Ende saure, siliziumreiche Schmelzen stehen, die in vulkanischen Gürteln wieder an die Oberfläche dringen (andesitischer Vulkanismus, Abb. 3.10). Die Vulkanketten liegen in einem Bereich, in dem die abtauchende Platte eine Tiefe von etwa  $150\text{ km}$  erreicht hat.

Subduktionszonen sind also Regionen auf der Erde, an denen neue kontinentale Kruste entsteht. Die sauren, siliziumreichen Gesteine bilden die Basis kontinentaler Kruste. Die Erde ist wahrscheinlich der einzige Planet des Sonnensystems, der kontinentale Kruste



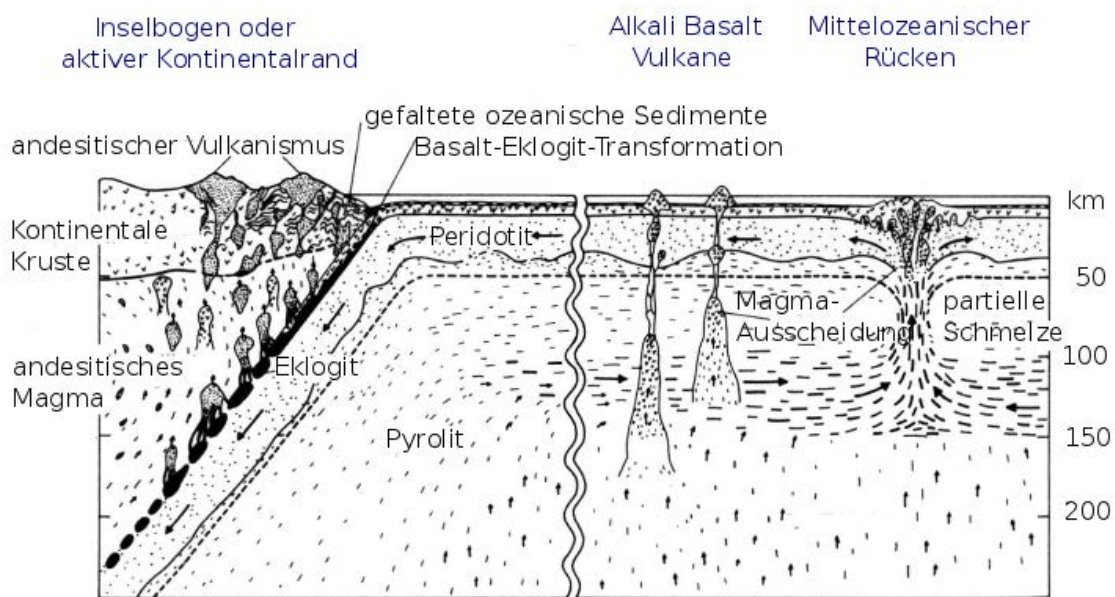


Abbildung 3.10: Geodynamisch-Petrologisches Modell zur Magmenfraktionierung an mittelozeanischen Rücken, vulkanischen Ozeaninseln und Subduktionszonen. Pyrolit bezeichnet ein synthetisches Modellgestein des oberen Mantel aus etwa  $1/4$  Basalt und  $3/4$  Dunit (Olivin, Pyroxen, siehe z.B. Ringwood, 1975; Wilson, 1989). Daraus entstehen bei partieller Aufschmelzung basaltische Magmen. Modifiziert aus Berckheimer (1990).

bildet; die wichtigen "Katalysatoren" dafür sind Meeresbodensedimente und Seewasser, der wichtige Prozess die Plattentektonik und die Subduktion ozeanischer Kruste. Die Produktionsrate für ozeanische Kruste ist heutzutage etwa  $3 \text{ km}^2/\text{a}$  bei einer Krustendicke von etwa  $5 \text{ km}$ , also eine Volumenrate von etwa  $15 \text{ km}^3/\text{a}$ . Die kontinentale Kruste wächst um etwa  $1.8 \text{ km}^3/\text{a}$ , wobei etwa  $0.5 \text{ km}^3/\text{a}$  erodiert werden und sich als marine Sedimente ablagern. Die Netto-Produktionsrate für kontinentale Kruste ist also nur  $1.3 \text{ km}^3/\text{a}$ . Der Zwei-Stufen Prozess zur Bildung kontinentaler Kruste könnte dafür verantwortlich sein, dass wir heute keine kontinentalen Krustengesteine aus der ersten Zeit der Bildung der Erde finden (ältesten Gesteine etwa  $4 \text{ Ga}$ , Erde  $4.6 \text{ Ga}$  alt). Die ozeanische Kruste befindet sich in jedem Fall maximal nur etwa  $10^8$  Jahre an der Oberfläche, bevor sie in Subduktionszonen reassimiliert wird. Es gibt also keine ozeanische Kruste, die älter als etwa  $180 \text{ Ma}$  ist (Abb. 3.7).

Die Plattentektonik erklärt eine Vielzahl von globalen morphologischen und geophysikalischen Erscheinungen an der Oberfläche, z.B (Abb. 3.11):

- Die Entstehung mittelozeanischer Schwellen / Rücken.
- Die Entstehung von Tiefseegräben.
- Die Entstehung von ozeanischen Fracture Zones.

- Die Magnetstreifenmuster am Ozeanboden.
- Die scheinbare magnetische Polwanderung während der Erdgeschichte.
- Die globale Verteilung der flachen Erdbeben in Erdbebengürteln.
- Die Lokation von Tiefherdbeben in Wadati-Benioff-Zonen.
- Vulkanketten in der überliegenden Platte (Subduktionszonenvulkanismus).
- Lineare vulkanische Inselketten ausgehend von Hot Spots.
- Die Entstehung von Backarc-Becken und vulkanischen Inselbögen.
- Die Gebirgsbildung in kontinentalen Kollisionszonen.

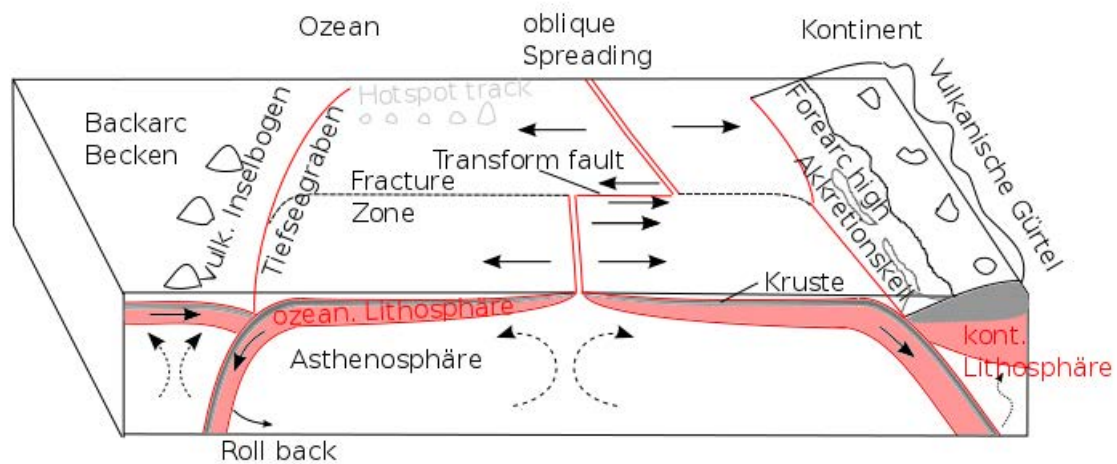


Abbildung 3.11: Schematisches Modell der Plattentektonik. Divergente Plattengrenzen (Rücken, hier normal und oblique spreading), Transform fault und 2 Typen von Subduktionszonen (Ozean-Kontinent und Ozean-Ozean). An der ozeanischen Subduktionszone entstehen vulkanische Inselbögen im Bereich des Backarc Basin, an der Ozean-Kontinent Plattengrenze bilden sich vulkanische Gürtel und Gebirgsketten im Hinterland aus. Kontinent-Ozean Kollision ist außerdem von der Bildung eines Akkretionskeils aus Sedimenten und einer Sedimenterhebung vor dem vulkanischen Gürtel (fore-arc oder outer-arc highs) charakterisiert.

### 3.2 Plattengrenzen

Nach dem Modell der Plattentektonik findet die Deformation vor allem an Plattengrenzen statt; innerhalb der relativ starren Platten gibt es nur wenig oder keine Deformation<sup>31</sup>. Die Plattengrenzen können sich mechanisch verhaken, so dass sich Spannungen aufbauen, die ruckartig durch Erdbeben wieder abgebaut werden. Erdbeben treten vor allem an Plattengrenzen auf und umgekehrt werden aktive Plattengrenzen häufig aufgrund der Erdbeben-Seismizität erkannt und entdeckt (Abb. 3.12).

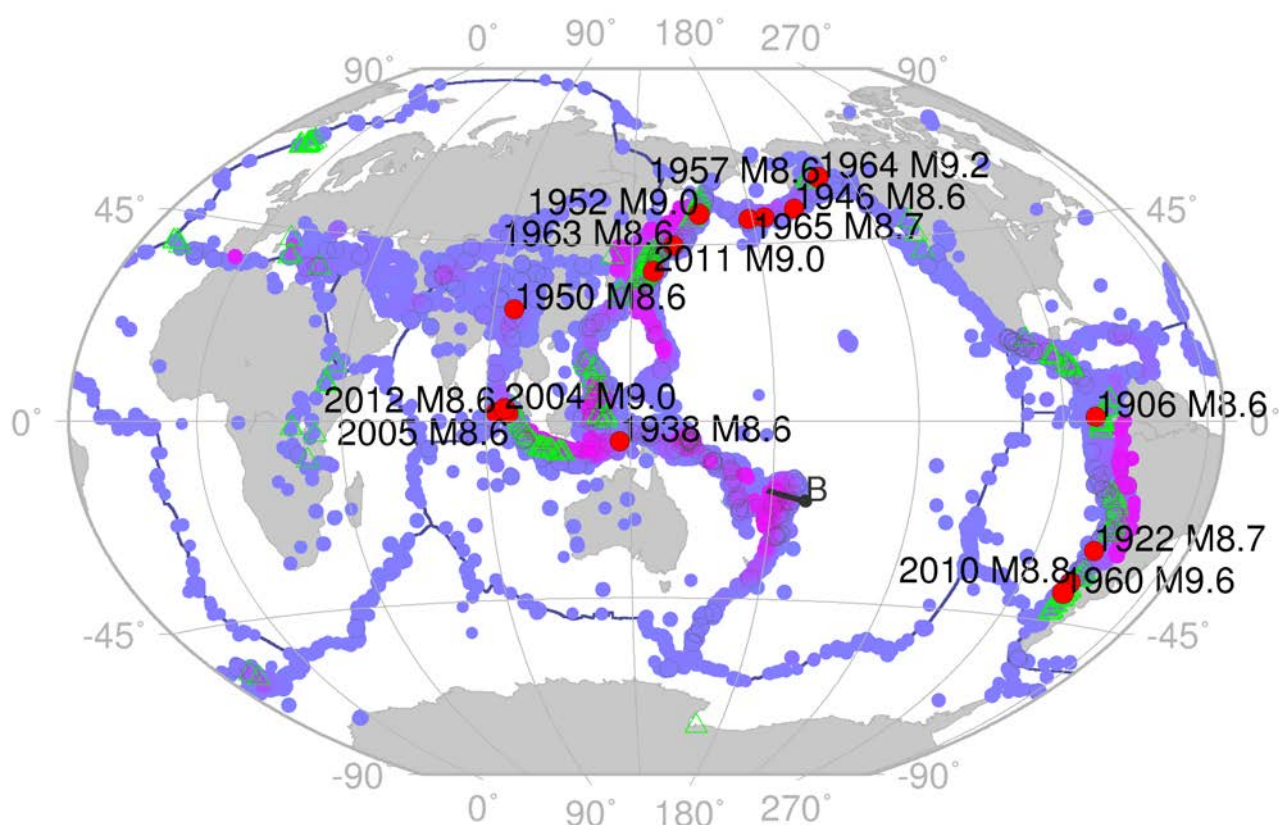


Abbildung 3.12: Globale Verteilung von Erdbeben seit 1900 (Kreise, Daten aus [Engdahl and Villasenor, 2002](#)). Die Größe der Kreise skaliert mit dem seismischen Moment, Farben geben die Bebtiefe zwischen 0 (blau) und 670 km (violett) an. Schwarze offene Kreise zeigen Beben mit  $M > 7.5$ , rot gefüllte Kreise solche mit  $M > 8.5$ . Plattengrenzen sind graue durchgezogene Linien (unterlegt). Grüne, offene Dreiecke markieren historisch aktive Vulkane. Winkel Projektion mit einem zentralen Meridian bei 140°.

Die genauere Analyse ergibt drei Grundtypen von Erdbeben an Plattengrenzen; Abschiebungen, Aufschiebungen und Blattverschiebungen (wird später im Skript erläutert).

<sup>31</sup> Einige Regionen werden heute als diffuse Plattengrenzen bezeichnet, da dort die Deformationen nicht auf wenige Hauptverwerfungen beschränkt ist. Beispiele sind Zentralasien oder der Indische Ozean im Bereich des Ninetyeast Ridge.

Die drei Grundtypen für Erdbeben Mechanismen (vgl. Kapitel 6.1.3) können den drei Grundtypen von Plattengrenzen zugeordnet werden; **divergente Plattengrenzen** an mittelozeanischen Rücken, **konvergente Plattengrenzen** an Subduktionszonen (zeigen auch Abschiebungen) und transformatorische Scher-Plattengrenzen an **transformation faults** oder **transform faults**. Bekannte Beispiele für die letzteren sind die San Andreas oder die Nordanatolische Verwerfung (siehe Abb. 3.1)

Im Folgenden geht es darum, Beispiele von Plattengrenzen zu zeigen und zu erläutern, wie sich Platten auf der Erde bewegen. Wichtige Zusammenhänge kann man bereits in **Flache-Erde Modellen** (ebene Erde) verstehen. Zur Beschreibung sind Geometrie und **relative Geschwindigkeit** notwendig. Andere Phänomene sind allerdings nur durch die Bewegung starrer Platten auf der Kugeloberfläche verständlich. Um diese Bewegungen zu quantifizieren, müssen **Rotationspole** und **relative Winkelgeschwindigkeiten** eingeführt werden. Typisch für die Kugelerde ist auch, dass dort Plattengrenzen gekrümmt sind.

### 3.2.1 Plattengrenzen im flache Erde Modell

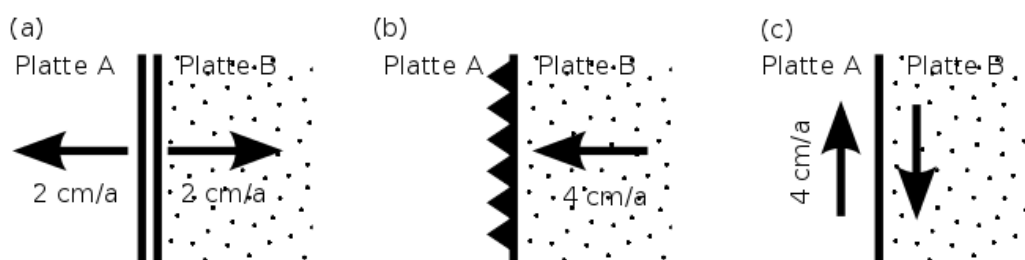


Abbildung 3.13: Die drei möglichen Grundtypen von Plattengrenzen: (a) divergente (konstruktive) Plattengrenzen an mittelozeanischen Rücken (Ridge), (b) konvergente (destruktive) Plattengrenzen an Subduktionszonen bzw. Tiefseeergräben (Trench), und (c) transform faults (konservative Plattengrenzen). Die Typen werden durch unterschiedliche Linien und Bewegungspfeile charakterisiert. Bei der konvergenten Plattengrenze (b) zeigen die Zacken in die Richtung, in der die Platte B abtaucht. In allen drei Fällen beträgt die Relativbewegung an den Plattengrenzen  $4\text{ cm/a}$ .

Es gibt drei Grundtypen für Plattengrenzen; **divergente (konstruktive)** Plattengrenzen an mittelozeanischen Rücken, **konvergente (destruktive)** Plattengrenzen an Subduktionszonen und **transform faults (konservative Plattengrenzen)**. Abb. 3.13 zeigt, wie diese Grundtypen schematisch dargestellt werden (vgl. auch Abb. 3.1).

Die Zacken an der konvergenten Plattengrenze zeigen in die Richtung, in der die Platte abtaucht. Die Pfeile geben die relative Geschwindigkeit der Platten an. Im Fall (a) be-

wegen sich beide Platten mit  $2\text{ cm/a}$  auseinander, und an der Plattengrenze selbst wird neuer Ozeanboden erzeugt. Die Relativgeschwindigkeit der Platte A bezüglich Platte B ist  $4\text{ cm/a}$ . Im Fall der destruktiven Plattengrenze (b) ist A in Ruhe und B bewegt sich mit  $4\text{ cm/a}$  auf A zu. A taucht unter B ab, d.h. wird an der Subduktionszone in den Mantel "verschluckt". Die Doppelpfeile im Fall (c) verdeutlichen Scherbewegung an der Transform Fault. Die Relativgeschwindigkeit zwischen Platte A und B ist hier ebenfalls  $4\text{ cm/a}$ ).

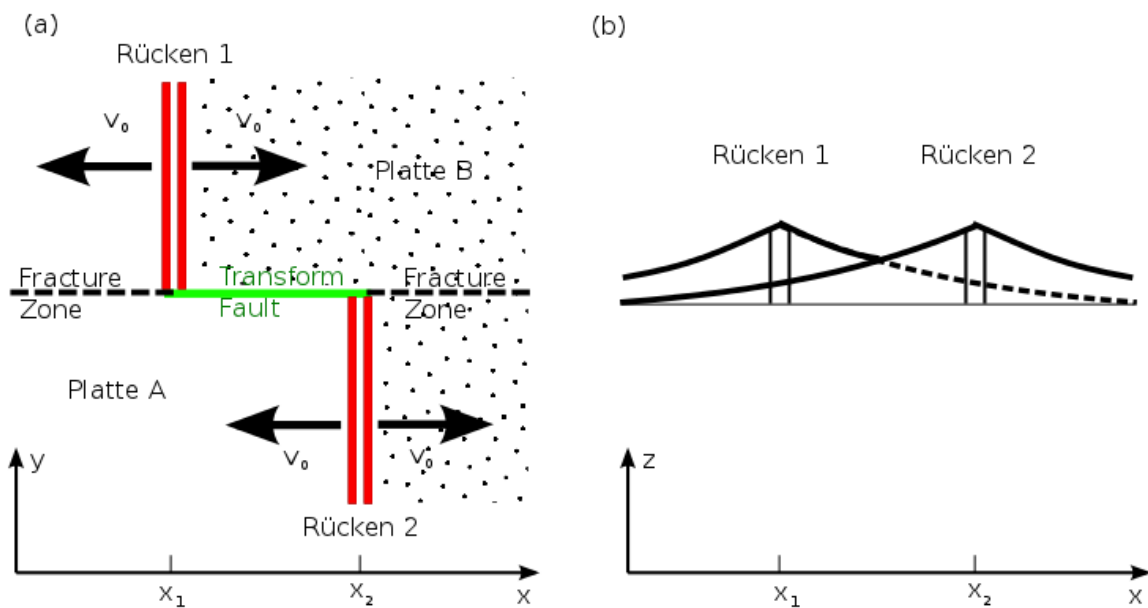


Abbildung 3.14: Skizze zur Erklärung des Zusammenhangs zwischen einer Transform Fault und Fracture Zone (a) und des Topographiesprungs über die Fracture Zone als Funktion des Abstands zum Rücken (b).

Die Plattengrenzen in Abb. 3.13 sind erstmal nicht allseitig begrenzt. Auf der Erdkugel ist jedoch jede Platte durch unterschiedliche Plattengrenzen allseitig begrenzt. Einzelne Plattengrenztypen müssen dann auch ein Ende haben, an dem sie verzweigen oder in einen anderen Typ übergehen. Ein gutes Beispiel findet man an mittelozeanischen Rücken. Dort liegen häufig Transform Faults zwischen zwei versetzten Segmenten eines divergenten Rückens (Abb. 3.14). Die konservative Plattengrenze (Fault) verbindet zwei konstruktive Plattengrenzen (Ridges). Hier wird auch der Begriff **Fracture Zones** in Abb. 3.11 klarer. Eine Fracture Zone ist die Fortsetzung einer Transform Fault zwischen zwei versetzten Rückensegmenten über den Bereich der Rift Zone hinaus. Entlang der Transform Fault bewegen sich Platte A und B mit der doppelten Speizungsrate  $2v_0$  gegeneinander, während sie entlang der Fracture Zone in der Regel keine (große) horizontale Scherbewegung ausführen. Die Fracture Zone kann daher als inaktive oder "fossile" Transform Fault bezeichnet werden. Morphologisch zeichnet sich die Fracture Zone



durch einen Sprung in der Topographie aus. Das erklärt sich durch das unterschiedliche Alter der angrenzenden Lithosphärenplatten A und B, was wiederum zu unterschiedlichen Temperaturen beidseitig der Fracture Zone und dadurch zu einer unterschiedlichen Absenkung der Platten führt. Da die Absenkung keine lineare Funktion des Plattenalters ist (Abb. 3.8), muss entlang der Fracture Zone eine vertikale Ausgleichsbewegung stattfinden, die jedoch deutlich geringer ist als z.B. die Spreizungsrate am Rücken.

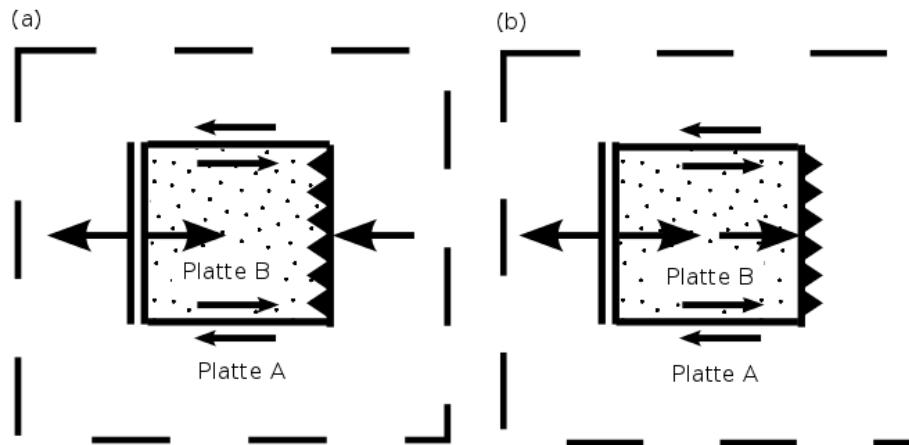


Abbildung 3.15: Beispiel für eine allseitig begrenzte Platte B, die in Platte A eingebettet ist.

Abb. 3.15 zeigt ein Beispiel für eine allseitig begrenzte Platte (B), also ein ganzheitliches Modell. Am westlichen Ende wird neuer Ozeanboden erzeugt, am östlichen vernichtet. Die divergente und konvergente Plattengrenze wird durch eine transformatorische Plattengrenze verbunden. Im Fall (a) subduziert Platte A unter B; B muss also am östlichen Ende länger und länger werden. Im Fall (b) subduziert B unter A; B kann nicht länger werden, aber kürzer, falls die Subduktionsgeschwindigkeit größer als die Spreadingrate ist. Das wichtige Ergebnis hier ist, dass Platten in ihrer Größe wachsen oder auch schrumpfen können. Genau das beobachtet man auch auf der Erde. Man kennt heute eine Vielzahl von ozeanischen Platten, die in Zukunft verschwinden werden oder bereits verschwunden sind. Kontinentale Kruste, die auf so einer Platte sitzt und leichter ist, kann aber in der Regel nicht oder nur in geringem Volumen subduziert oder "verschluckt" werden. Die Folge einer solchen "Kollision" sind häufig Gebirgsbildungen (Orogene).

Man erkennt bereits an den einfachen Beispielen der flachen Erde, dass Plattentektonik geometrisch kompliziert sein kann. Platten können verschwinden oder wachsen, und Plattengrenzen sind nicht ortsfest. Die instantanen, relativen Geschwindigkeiten müssen aus Kontinuitätsgründen einem einfachen Gesetz genügen; ihre vektorielle Summe muss Null ergeben. Hat man zwei Platten A und B mit den Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_{AB}$  (A relativ zu B) und  $\mathbf{v}_{BA}$  (B relativ zu A), dann müssen beide Relativgeschwindigkeiten gleich groß

und entgegengesetzt gerichtet sein,

$$\mathbf{v}_{AB} + \mathbf{v}_{BA} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{v}_{AB} = -\mathbf{v}_{BA} \quad . \quad (3.1)$$

Die Relativgeschwindigkeiten  $\mathbf{v}_{AB}$  und  $\mathbf{v}_{BA}$  sind beide für die Plattengrenze zwischen A und B definiert, wobei immer eine der beiden Platten in Ruhe gehalten wird.

Im Fall von drei Platten A, B, und C gilt mit den entsprechend definierten Relativgeschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_{AB} + \mathbf{v}_{BC} + \mathbf{v}_{CA} = 0 \quad . \quad (3.2)$$

Wichtig ist hierbei, dass die Indizes "im gleichen Sinn" durchlaufen werden. Beachte, dass es sich um Relativgeschwindigkeiten jeweils bezogen auf eine der drei Plattengrenzen hält. Später wird gezeigt, dass ein vergleichbares Gesetz für die Platten auf der sphärischen Erde gilt, dort allerdings für Winkelgeschwindigkeiten.

### 3.2.2 Tripelpunkte

Eine weitere Beobachtung auf der Erde sind **Tripelpunkte (triple junction)**. An einem Tripelpunkt stossen drei Plattenränder aneinander. Da es drei Typen von Plattengrenzen gibt (R=Ridges, T=Trenches oder Subduktionszonen, F=Transform Faults), gibt es theoretisch 10 Typen von Tripelpunkten, die durch Buchstabenfolgen unterschieden werden (RRR, TTT, FFF, RRF, ...). Unterscheidet man für Trenches noch welche der beiden Platten unter die andere abtaucht, dann findet man 16 unterschiedliche Typen von Tripelpunkten (z.B. Abb.2.16 in Fowler, 2005). Drei Beispiele sind in Abb. 3.16-I schematisch dargestellt. Interessant ist vor allem die Frage, ob ein Tripelpunkt stabil oder instabil ist. Ein RRR Tripelpunkt ist in jeder Geometrie stabil, während ein FFF Tripelpunkt instabil ist und also generell nicht existieren kann. In der Regel sind RRT und RRF Tripelpunkte ebenso instabil. Andere Typen sind unter bestimmten Geometrien stabil (siehe Tabelle 3.2). Man spricht von einem **stabilen Tripelpunkt**, wenn die geometrische Konfiguration zeitlich stabil bleibt, wobei der Bezugspunkt in den Tripelpunkt gelegt wird. Stabil heisst, dass die Winkel zwischen den Plattenrändern und die Plattenrandtypen erhalten bleiben. Der stabile Tripelpunkt kann sich aber durchaus entlang einer Plattengrenze bewegen. Umgekehrt ist der Tripelpunkt instabil, wenn er seine Konfiguration ändert. Zum Beispiel wenn sich die Winkel der Plattengrenzen zueinander ändern. Ein instabiler Tripelpunkt kann nur eine kurze Zeit existieren, bevor er sich zu einer anderen Geometrie entwickelt. Instabile Tripelpunkte beeinflussen die lokale Tektonik und Deformation, und können z.B. zur Bildung neuer Plattengrenzen oder



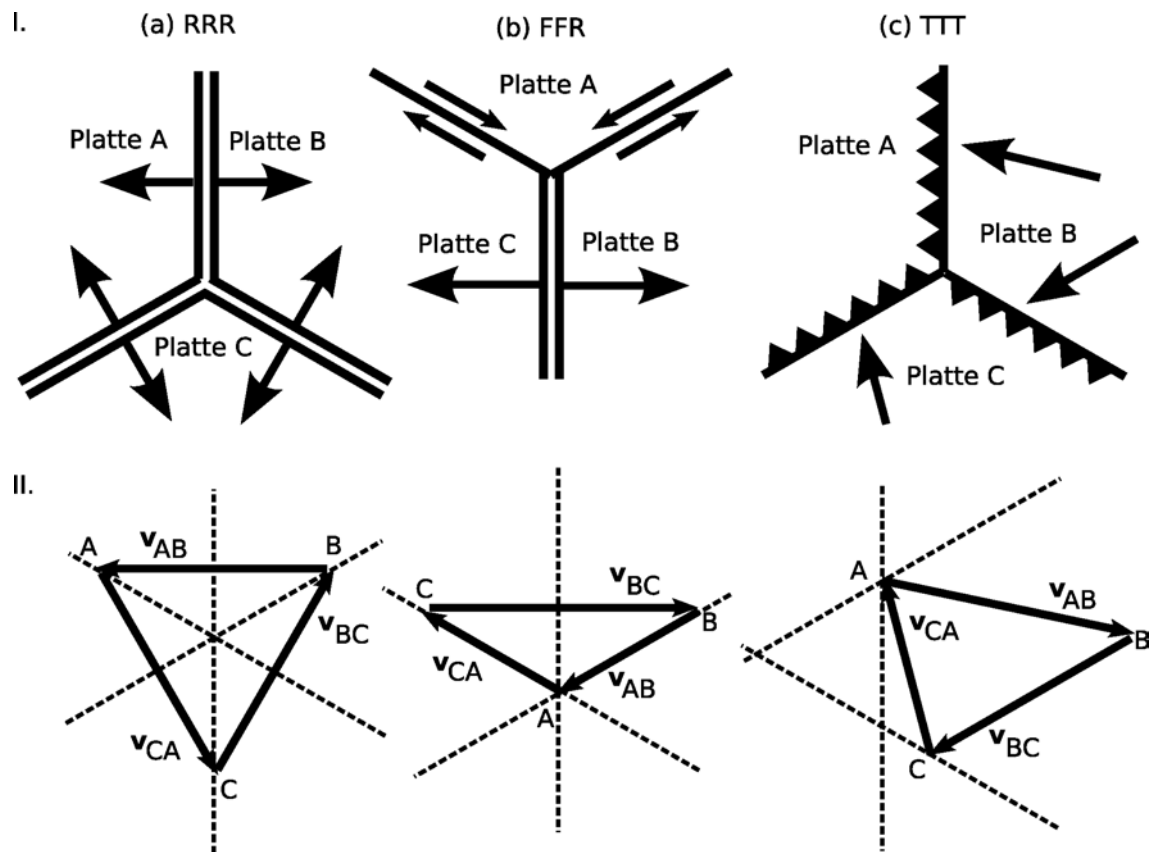


Abbildung 3.16: I: Drei Beispiele für Tripelpunkte: RRR (a), RFF (b), und TTT (c). Die Platten sind mit A, B und C gekennzeichnet. Plattengrenzen sind winkeltreu gezeichnet, Geschwindigkeitspfeile geben Relativgeschwindigkeiten an. II: Geschwindigkeitsdreiecke zu den drei Tripelpunkten in (a), (b) und (c). Geschwindigkeitsdreieck und Hilfslinien (gestrichelt) werden zur Untersuchung der Stabilität eines Tripelpunktes genutzt (siehe Text). Schneiden sich alle drei Hilfslinien in einem gemeinsamen Punkt, dann ist der Tripelpunkt stabil. In der Skizze ist (a) und (b) stabil, der Tripelpunkt (c) ist instabil.

neuer Becken (Randmeere) beitragen oder die Verlagerung einer Plattengrenze begünstigen. Versteht man also die Mechanik eines instabilen Tripelpunktes, dann kann man vorhersagen wo sich z.B. ein Randmeer öffnet oder in welche Richtung sich eine Verwerfungszone in Zukunft verlagern wird. Solche Aussagen sind u.a. wichtig zur Einschätzung der Erdbebengefährdung.

Es gibt ein einfaches geometrisches Verfahren, um die Stabilität eines Tripelpunktes zu testen. Beispiele sind in Abb. 3.16-II zu sehen. Man zeichnet zuerst das Geschwindigkeitsdreieck für die drei beteiligten Platten.  $v_{AB}$  gibt nach der hier verwendeten Konvention die Geschwindigkeit von Platte A relativ zu B an; B wird festgehalten. Die vektorielle Summe der Geschwindigkeiten muss Null ergeben und den Ecken des Dreiecks wird A, B und C zugeordnet ("Platten-Punkte", z.B. der Vektor  $v_{AB}$  zeigt von B nach A wenn sich

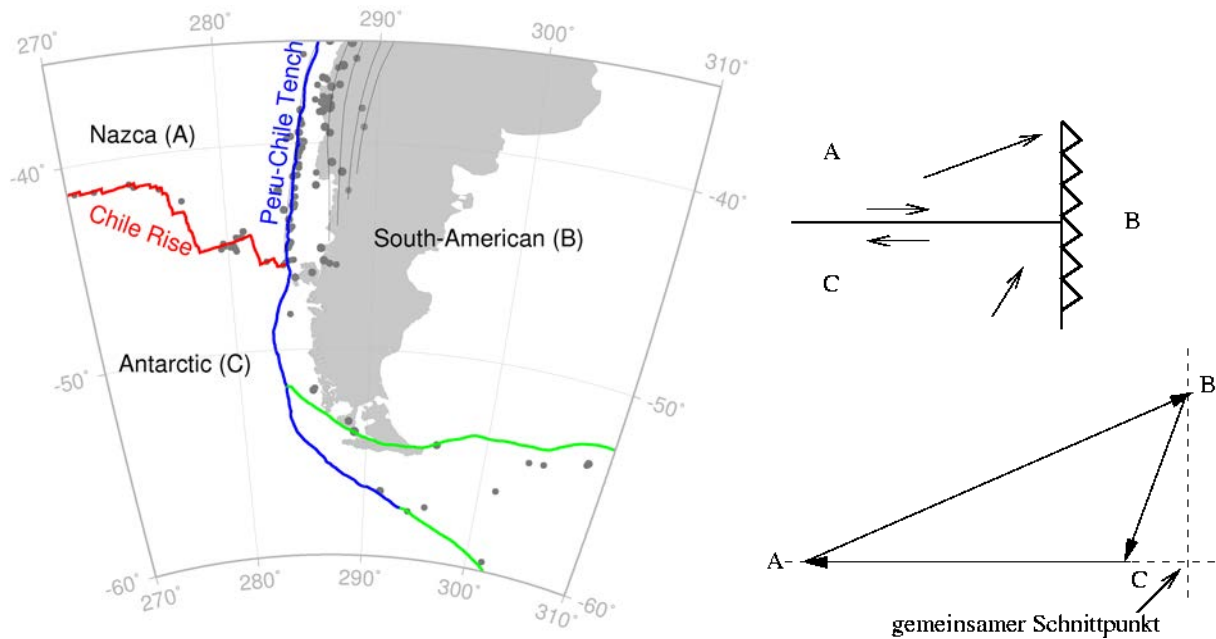


Abbildung 3.17: Tripelpunkt Chile Rücken (rot) - Anden Trench (blau) (TTF-Typ). Transverse Mercator Projektion mit einem zentralen Meridian bei 278°.

durch die Plattenbewegung ein Punkt auf A von B entfernt). Jedem Geschwindigkeitspfeil kann ein (ruhender) Bezugspunkt der Plattengrenze entsprechend dem Plattengrenzen-typ zugeordnet werden. Der jeweilige Plattenrand wird durch den Bezugspunkt unter dem entsprechenden Azimuth gestrichelt eingezeichnet. Der Azimuth kann direkt aus der Geometrie des Tripelpunktes übernommen werden. Die gestrichelte Gerade geht für die drei unterschiedlichen Typen durch unterschiedliche Plattenrand-Punkte; für einen Ridge mit symmetrischer Spreadingrate wird der Plattenrand durch die Mitte des Geschwindigkeitsvektors gezeichnet, für einen Trench durch den Platten-Punkt, unter dem die aufschiebende Platte subduziert wird. Das ist immer der Platten-Punkt, in dessen Richtung die schwarzen Zacken zeigen. Für Transform Verwerfungen geht die gestri-

Tabelle 3.2: Beispiele für Tripelpunkte.

Typ	stabil ?	Ort
RRR	ja	Afar, Azoren, Galapagos, Indische Ozean, Rivera, Rodrigues,
TTT	?	Boso (off coast Japan)
TTF	ja	Chile Rücken - Anden Trench
FFT	nein	Mendocino Tpkt., Kamchatka-Aleuten
FFR	ja	Osterinsel, Bouvet Tpkt.
RTF	?	Rivera Tpkt.

chelte Linie immer durch die beiden beteiligten Platten-Punkte. Ein Tripelpunkt muss immer auf dem Plattenrand liegen, kann aber entlang des Plattenrandes wandern. Treffen sich nun alle drei gestrichelten Geraden in einem gemeinsamen Punkt, dann ist der Tripelpunkt stabil. Ansonsten ist er instabil, da die Konfiguration nicht erhalten bleiben kann, wenn der Tripelpunkt für beliebige Zeitinkremente auf allen drei Plattengrenzen gleichzeitig liegen soll.

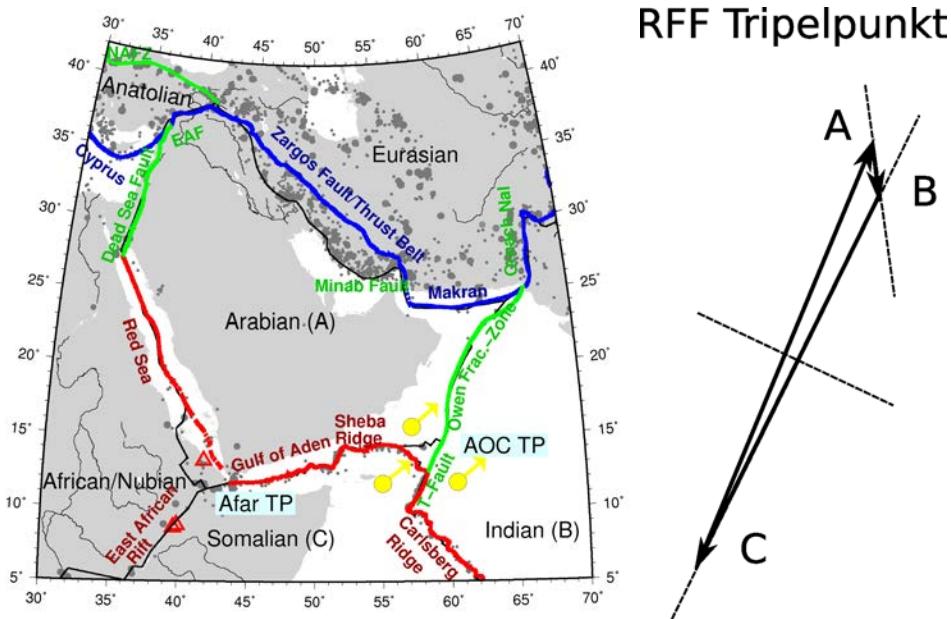


Abbildung 3.18: Plattengrenzen der Arabischen, Indischen und Somalischen Platte und Geschwindigkeitsdreieck des Aden-Owen-Carlsberg (AOC) Tripelpunkts (RFF-Typ). Die Geschwindigkeitsvektoren um den AOC Tripelpunkt sind auf ein NNR System (no-net-rotation) bezogen. Cassini Projektion für einen Projektionspol bei  $50^\circ E$  und  $30^\circ N$ .

### Beispiel 3.1 (Stabiler TTF Tripelpunkt: Chile Rücken - Anden Trench)

Sowohl die Nazca (A) wie die Antarktischen Platte (C) im Südpazifik subduzieren beide unter die Südamerikanischen Platte (B), wobei sich ihre Relativgeschwindigkeiten unterscheiden ( $v_{AB} \approx 8 \text{ cm/a}$  und  $v_{CB} \approx 2 \text{ cm/a}$  in etwa  $50^\circ$  unterschiedlicher Richtung, siehe Abb. 3.17). Am Chile Tripelpunkt liegt zwischen A und C eine Transform Fault mit einer Relativ-Scherung von etwa  $6.5 \text{ cm/a}$ , welche die unterschiedlichen Subduktionsraten und -richtungen kompensiert. Die Subduktionszonen des TTF Tripelpunkts liegen kolinear, die Transform Verwerfung steht senkrecht dazu. Die Konstruktionszeichnung in Abb. 3.17 zeigt, dass der Tripelpunkt stabil ist. Obgleich er stabil ist wandert der Tripelpunkt mit einer Geschwindigkeit von etwa  $1 \text{ cm/a}$  entlang der Plattengrenze nordwärts. Die langsame Nordwärtsbewegung des Tripelpunktes konnte aus magnetischen Streifenmustern am Ozeanboden rekonstruiert und bestätigt werden. Da der Chile Rücken aus Rücken- und Transform-Verwerfungs-Segmenten in kurzer Folge besteht, ist mit

fortdauernder Subduktion in Zukunft ein Wechsel der Konfiguration des Tripelpunktes zu erwarten. Ähnliche Wechsel wurden für die Vergangenheit rekonstruiert.

**Beispiel 3.2 (Instabile FFR und FFT Tripelpunkte)** Der Aden-Owen-Carlsberg (AOC) Tripelpunkt liegt zwischen der Arabischen, Somalischen und Indischen Platte (Abb. 3.18). Die Owen Fracture Zone nördlich und die Transform Fault südlich des AOC verlaufen nicht exakt kollinear auf einer Linie. Am AOC trifft nahezu senkrecht der Speizungsrücken der Aden-Sheba Zone auf die Owen Fault zone. Obgleich die Spreizungs- und Relativgeschwindigkeiten klein sind ( $v_{BA} \approx 2.8 \text{ mm/a}$  in  $N357^\circ O$ ,  $v_{CB} \approx 22.5 \text{ mm/a}$  in  $N26.2^\circ O$ ,  $v_{CA} \approx 22.5 \text{ mm/a}$  in  $N22.8^\circ O$ ), ist der Tripelpunkt nicht stabil (Abb. 3.18 und Fournier et al., 2010). Als Folge verändert sich die Geometrie der Plattengrenze am AOC und Teile der Arabischen Platte assimilieren an die Indische Platte.

Der Mendocino Tripelpunkt am nördliche Ende der San Andreas Transform Fault ist ein weiteres Beispiel für einen derzeit instabilen Tripelpunkt. Er liegt zwischen der Juan de Fuca, der Pazifischen und der Nordamerikanischen Platte. Die Juan de Fuca Platte subduziert unter Nordamerika, und verschiebt sich in einer Transform Fault auf Länge des Tripelpunktes relativ zur Pazifischen Platte. Es handelt sich um einen FFT Tripelpunkt, der instabil ist, da die Cascade Subduktionszone nicht kollinear mit der San Andreas Verwerfung verläuft.

### 3.2.3 Plattengrenzen auf der Erdkugel

Auf der Kugeloberfläche ist die Bewegung von Platten komplizierter. Die Bewegung einer starren Platte auf einer Kugel kann durch eine Rotation um eine Achse durch den Kugelmittelpunkt dargestellt werden (Theorem von Euler: Theoria Motus Corporum Solidorum seu Rigidorum, 1765). In Abb. 3.19 bewegt sich Platte A relativ zu B. Die Rotationsachse durchstößt die Erdoberfläche im Pol P. Die Rotationsbewegung wird durch die Richtung der Rotationsachse und eine instantane Winkelgeschwindigkeit angegeben. Beide Größen werden in dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_{AB}$  vereint. Der Vektor  $\boldsymbol{\omega}_{AB}$  zeigt in Richtung der Rotationsachse der Drehung (Drehung nach rechte Hand Regel). Die Komponenten des Vektors werden in der Regel durch zwei Winkel, Azimuth und Poldistanz (oder Breite), und den Betrag der Vektorlänge in Radialrichtung angegeben (siehe Gleichung D.1).

Der Betrag  $|\boldsymbol{\omega}_{AB}|$  kann benutzt werden, um die relative Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  an jedem Punkt in oder am Rand der Platte zu berechnen. Abb. 3.20a zeigt einen Querschnitt durch Kugelmittelpunkt, Rotationspol P und den betrachteten Messpunkt X auf der Platte A. Der "Polwinkel  $\Theta$ " gibt die in Grad gemessene Entfernung zwischen P und X an, und  $|\mathbf{r}_E| \sin \Theta'$  ist der Abstand von X zur Rotationsachse. Für den Betrag der Tangentialgeschwindigkeit gilt damit

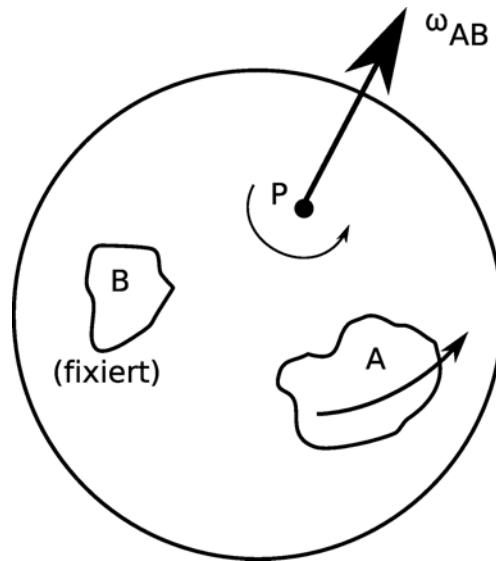


Abbildung 3.19: Die relative Bewegung einer starren Platte auf der Kugeloberfläche kann durch die Rotation um eine Achse beschrieben werden. Dazu wird die vektorielle Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_{AB}$  als Parameter eingeführt (z.B. durch Angabe des Betrags  $\omega_{AB} = |\boldsymbol{\omega}_{AB}|$  und der geographischen Koordinaten des Rotationspols).

$$|\mathbf{v}| = |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{r}_E| \sin \Theta' \quad . \quad (3.3)$$

In der Regel sind die geographischen Koordinaten  $\theta_P$  (Breite) und  $\phi_P$  (Länge) des Rotationspols, der Betrag  $\omega$  der Rotationsgeschwindigkeit und die Koordinaten  $\theta_X$  und  $\phi_X$  bekannt, nicht aber der Polwinkel  $\Theta'$ . Um den Betrag  $v$  der Geschwindigkeit und den Azimuth  $\beta$  (gegenüber Nord gemessen, im Uhrzeigersinn) der Plattengeschwindigkeit am Punkt  $X$  zu bestimmen müssen Formeln der sphärischen Trigonometrie benutzt werden. Das führt auf (Abb. 3.20b, Herleitung siehe Gubbins, 1992; Fowler, 2005; Stein and Wysession, 2003):<sup>32</sup>

$$\begin{aligned} v &= \omega r_E \sin \Theta' \\ \beta &= 90^\circ + \beta' \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit

$$\begin{aligned} \cos \Theta' &= \sin \theta_X \sin \theta_P + \cos \theta_X \cos \theta_P \cos(\phi_P - \phi_X) \\ \beta' &= \tan^{-1} \left[ \frac{-\cos \theta_P \sin(\phi_P - \phi_X)}{\sin \theta_P \cos \theta_X - \cos \theta_P \sin \theta_X \cos(\phi_P - \phi_X)} \right] \quad . \end{aligned}$$

<sup>32</sup> Die Formel für  $\Theta$  kann Rundungsfehler bei kleinen Entfernungen oder an Antipodenpunkten führen. Rundungsfehler werden durch die **Vincenty-Formel** vermieden,  $\tan \Theta = \frac{\sqrt{(\cos \Theta_P \sin(\phi_P - \phi_X))^2 + (\cos \theta_X \sin \theta_P - \sin \theta_X \cos \Theta_P \cos(\phi_P - \phi_X))^2}}{\sin \theta_X \sin \theta_P + \cos \theta_X \cos \Theta_P \cos(\phi_P - \phi_X)}$

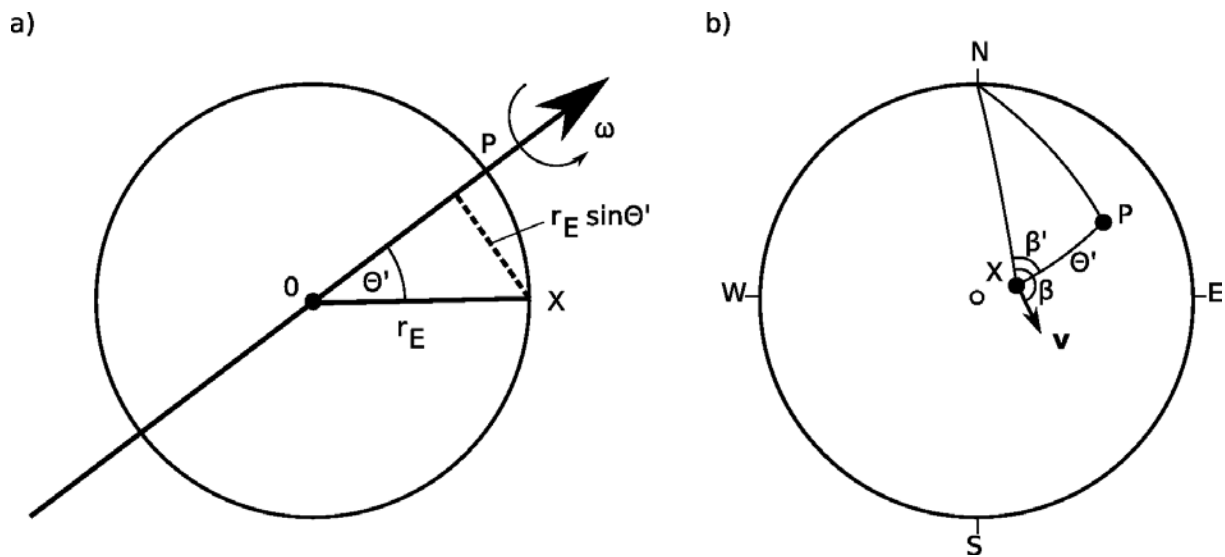


Abbildung 3.20: (a) Querschnitt durch die Erdkugel. Skizze zur Berechnen der Tangentialgeschwindigkeit  $v$  aus der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und dem "Polwinkel  $\Theta'$ ". (b) Perspektivische Ansicht auf die Erdkugel; Skizze zur Anwendung von Gleichung (3.4).  $P$  ist der Rotationspol,  $X$  der Untersuchungspunkt am Plattenrand, für den die Geschwindigkeit  $v$  und der Azimuth  $\beta$  der Bewegungsrichtung bestimmt werden soll.

$\beta'$  ist der Azimuth der Großkreisrichtung zum Rotationspol  $P$ ,  $\beta$  ist der Azimuth der lokalen Plattengeschwindigkeit  $v$ . Die Entfernung des Bogenmaßes kann leicht über  $x = 2\pi r_E / 360^\circ \cdot \Theta' \approx 111.2 \cdot \Theta' \text{ km}/^\circ$  in Kilometer umgerechnet werden. Die Gleichung für  $\Theta'$  und  $\beta'$  ist eine "Standardaufgabe der Geodäsie" und ist auch in anderen Zusammenhängen wichtig<sup>33</sup>.

Die Bewegung der Platten auf der Kugel hat noch andere Eigenschaften. Die Breitenkreise um den Rotationspol sind Kleinkreise, die Längengrade sind Großkreise (Abb. 3.21a). Läuft eine Plattengrenze über den Rotationspol hinaus, dann ändert sich ihr Typ, z.B. von divergent auf konvergent (Abb. 3.21b). Ein Beispiel ist der Übergang des Gakkel Rückens in den Moma Rücken. Abb. 3.22a zeigt, wie Transform Faults und Rücken relativ zum Pol angeordnet sind. Transform Faults liegen auf Kleinkreisen konzentrisch um den Rotationspol. Rücken und Subduktionszonen streichen nicht immer entlang von Großkreisen, sondern zeigen häufig auch schräge Spreizung (oblique spreading) oder schräge Subduktion (oblique subduction). Dann entsteht zusätzlich zur Öffnung / Konvergenz eine Scherungskomponente. Aus der Beobachtung einer oder mehrerer Transform Faults entlang von Kleinkreissegmenten kann die Lage des Rotationspols abgeschätzt werden. Abb. 3.22b gibt ein Beispiel für die Anatolische Mikroplatte.

Zur experimentellen Bestimmung der relativen Winkelgeschwindigkeiten der Platten und

<sup>33</sup> Wäre  $X$  das Epizentrum eines Erdbebens und  $P$  eine seismische Station, dann gibt  $\Theta' = \Delta$  die **Epizentralentfernung** (Winkel) und  $\beta'$  den Azimuth der Station an

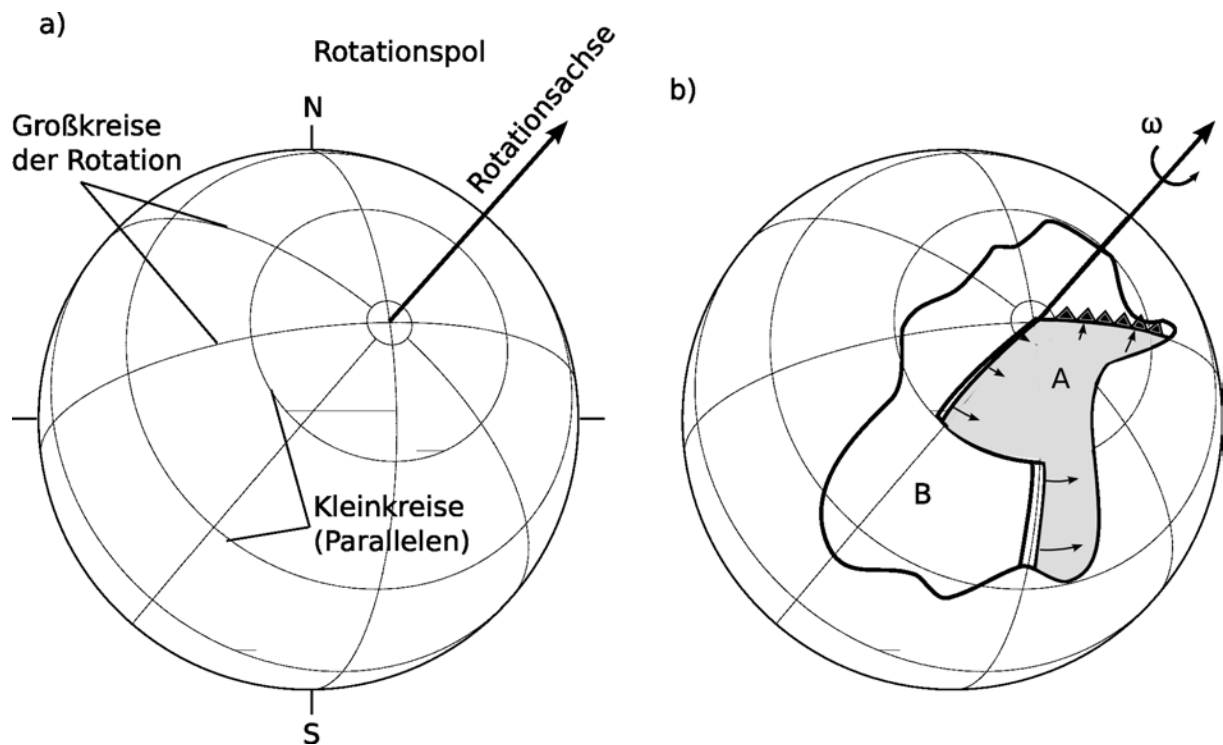


Abbildung 3.21: (a) Die Bewegung der starren Platte auf der Kugel kann durch Klein- und Großkreise beschrieben werden. (b) Die Relativbewegung zwischen A und B nimmt mit der Entfernung zum Pol zu. Der Typ der Plattengrenze kann je nach Lage und Bewegungsmuster von divergent auf transcurrent (Transform Fault) auf konvergent wechseln.

ihrer Rotationspole gibt es verschiedene Ansätze, die kombiniert werden können.

1. Die direkte Messung der Verschiebung der Plattenränder gegeneinander. Die ersten Messungen dieser Art gelangen mit **VLBI (Very long baseline interferometry)**. Dabei werden die Radiosignale entfernter Quasare durch Radioteleskope an Orten auf unterschiedlichen Platten empfangen, z.B. in Nordamerika und Europa. Aus der Interferenz des Signals bestimmt man die relative Lage beider Orte zueinander, und die Veränderungen mit der Zeit. Eine VLBI Station in Deutschland ist Wetzell.

In den letzten Jahren haben satellitengestützte Messungen wie **DGPS (Differential Global Positioning System)** oder **SAR (Synthetic Apertur Radar)** eine Genauigkeit im cm-Bereich erreicht, und werden zur Messung der Plattenbewegung eingesetzt.

2. Durch die Messung und Auswertung magnetischer Anomalien entlang von mittelozeanischen Rücken
3. Durch die Auswertung der Richtung von Transformverwerfungen. Die relative Bewegung der Platte ist parallel zu den Transformverwerfungen, die Verwerfungen



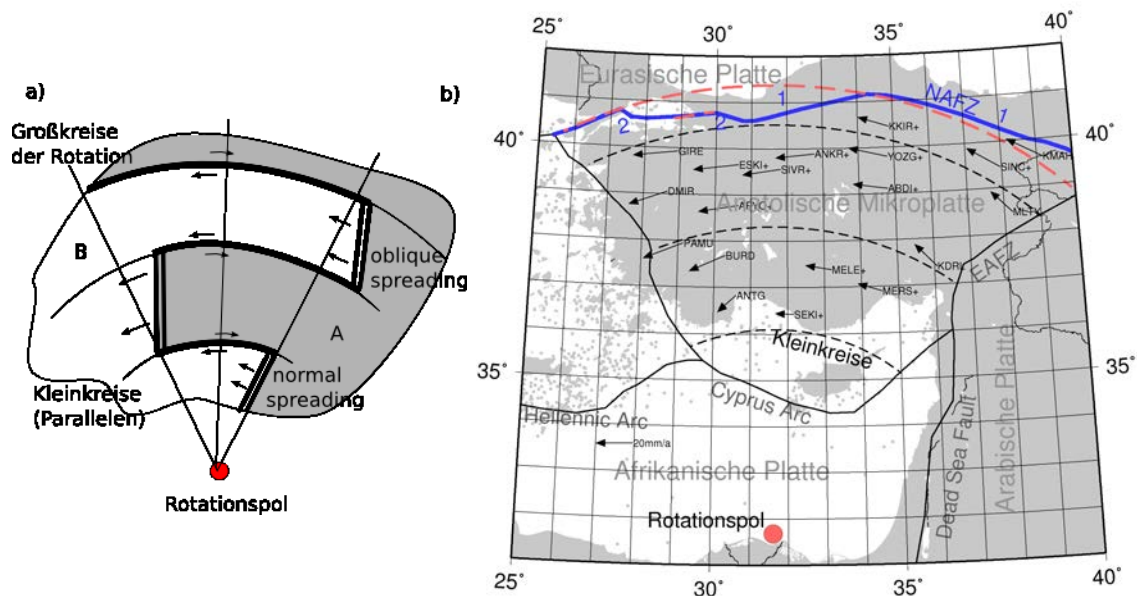


Abbildung 3.22: (a) Skizze zur Orientierung von Transform Faults und Rücken im Vergleich zu Klein- und Großkreisen der Rotationsbewegung zwischen Platte A und B. (b) Rotationspol (rot) und Kleinkreise der Rotation (gestrichelt) der Anatolischen Mikroplatte relativ zu Eurasischen Platte. GPS-basierte Relativbewegungen sind zusätzlich eingezeichnet. Die betroffene Nordanatolische Transform Fault (NAFZ nach Bird, 2003, blau) liegt nicht durchgehend auf dem Kleinkreis der Bewegung, sondern weist Schrägversetze mit Kompressions- (1) und Dehnungszonen (2) auf. In solchen Dehnungszonen einer Transform Fault entstehen häufig kleine Becken (pull apart basins, z.B. Marmara Meer).

liegen immer auf Kleinkreisen zentriert um den Rotationspol. Der Rotationspol muss daher auf Großkreisen liegen, die senkrecht zu den Transformverwerfungen stehen. Überdeckt die Transformverwerfung einen signifikanten Anteil der Bogenelements eines Rotations-Kleinkreises, dann kann der Rotationspol allein aus der Geometrie der gekrümmten Transformverwerfung(en) rekonstruiert werden.

4. Erdbeben-Herdflächenlösungen zeigen die räumliche Orientierung von Bruchflächen (Plattenrändern) und die Relativbewegung auf diesen Flächen. Aus vielen solcher Herdlösungen von Plattenrandbeben lässt sich die Orientierung der relativen Verschiebung ermitteln und damit der Rotationspol. Der Betrag der relativen Winkelgeschwindigkeit kann nicht berechnet werden. Zusätzlich zu Herdlösungen können direkte Messungen der Verschiebungsrichtungen an aufgeschlossenen Verwerfungen verwendet werden (**Fault Striations**).

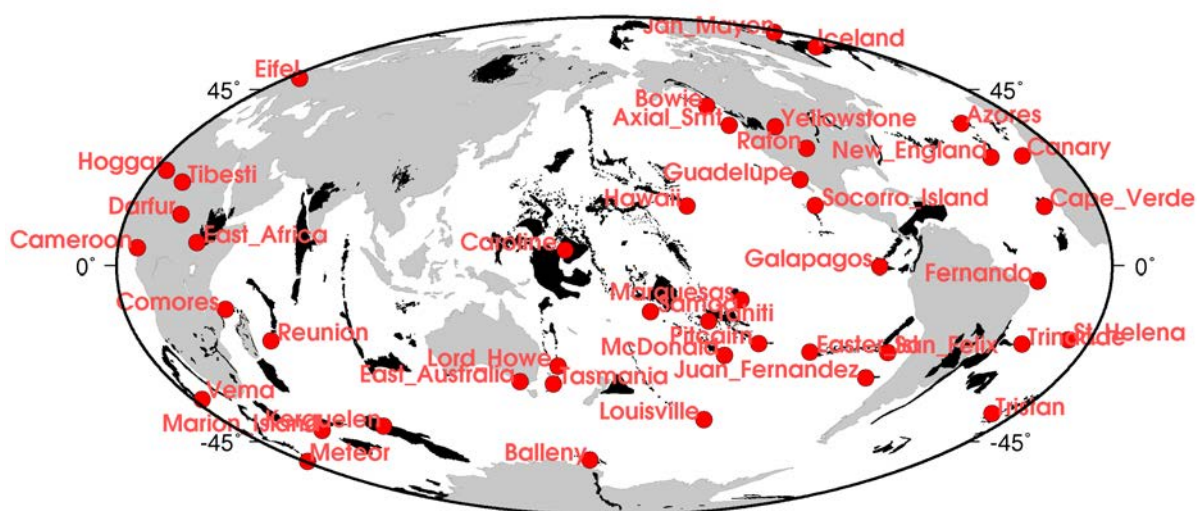


Abbildung 3.23: Globale Verteilung von Hotspots (rote Kreise, Daten von Steinberger, 1999, JGR) und großen Flutbasalte (schwarz gefüllte Polygone). Hammer Projektion mit einem zentralen Meridian bei 180°.

### 3.2.4 Absolute Plattenbewegung und Referenzsysteme

Bisher wurden relative Plattenbewegungen betrachtet. Für die Untersuchung lokaler Deformationen und der Stabilität eines Tripelpunktes ist das ausreichend. Für die Untersuchung und Rekonstruktion der absoluten Bewegung der Kontinente in der geologischen Vergangenheit sind jedoch absolute Rotationsgeschwindigkeiten nötig, die sich auf ein globales Referenzsystem wie z.B. das **Hotspot Referenzsystem** beziehen. **Hotspot Vulkane** sind Intraplattenvulkane. Ein prominenter Hotspot Vulkan im pazifischen Ozean sind die hawaiianischen Inseln mit den aktuellen vulkanischen Zentren Mauna Loa und Kilauea (vgl. Abb. 3.23). Man glaubt, dass Hotspot Vulkane wie Hawaii ihre Entstehung im unteren Erdmantel haben, und dass sich von dort Mantelgestein mit erhöhter Temperatur in "dünnen schmalen Fingern" (hotspots) relativ schnell nach oben bewegt. Die Bereiche anomaler Temperatur werden auch als **Mantelplume** bezeichnet und stellen eine spezielle Form der thermischen Konvektion dar<sup>34</sup>. Ein Mantelplume hat eine Quellregion (**root**), einen Stamm (**stem**) und einen pilsförmigen Kopf (**head**). Im obersten Bereich des Plumes ab etwa 100 - 200 km Tiefe findet durch Dekompression und die erhöhte Temperatur des Gesteins im Plume partielles Aufschmelzen statt, was zu Bildung von magmatischen Reservoirs und schließlich zu Vulkanismus führen kann. Heutzutage werden nur Plume Tails beobachtet. Man geht allerdings davon aus, dass sich beim ersten Aufsteigen des Plume-Kopfes bis in die Lithosphäre große Flutbasaltablagerungen gebildet haben (**Large Igneous Provinces**, LIPS, vgl. Abb. 3.23). Ebenso wird postuliert, dass die ersten Plattengrenzen vor etwa 3 Ga durch aufsteigende Plume-Köpfe

<sup>34</sup>Neuere Modelle gehen von thermisch-geochemischen Plumes aus.

gebildet wurden.

Man nimmt an, dass sich die Quellregion des Plumes im unteren Mantel relativ langsam gegenüber dem oberen Mantel und den tektonischen Platten bewegt. Die Aufstiegs- geschwindigkeit des Plumes ist ebenfalls relativ schnell, sodass dieser nur wenig durch die horizontale Mantelströmung ("Mantelwind") abgelenkt wird. Plumes können somit als Bezugssystem für die Plattenbewegung verwendet werden. Diese Vorstellung wird durch zwei Beobachtungen gestützt; zum einen findet man Hotspot Inselketten, die in der überreitenden Platte wie eine "Spur" die Bewegung der Platte konserviert haben. Das Alter der Vulkaninseln der Hotspot Kette nimmt mit der Entfernung zum aktuellen Hotspot zu (Abb.3.24). Zum anderen veränderte sich die Position der Hotspots in sich un-

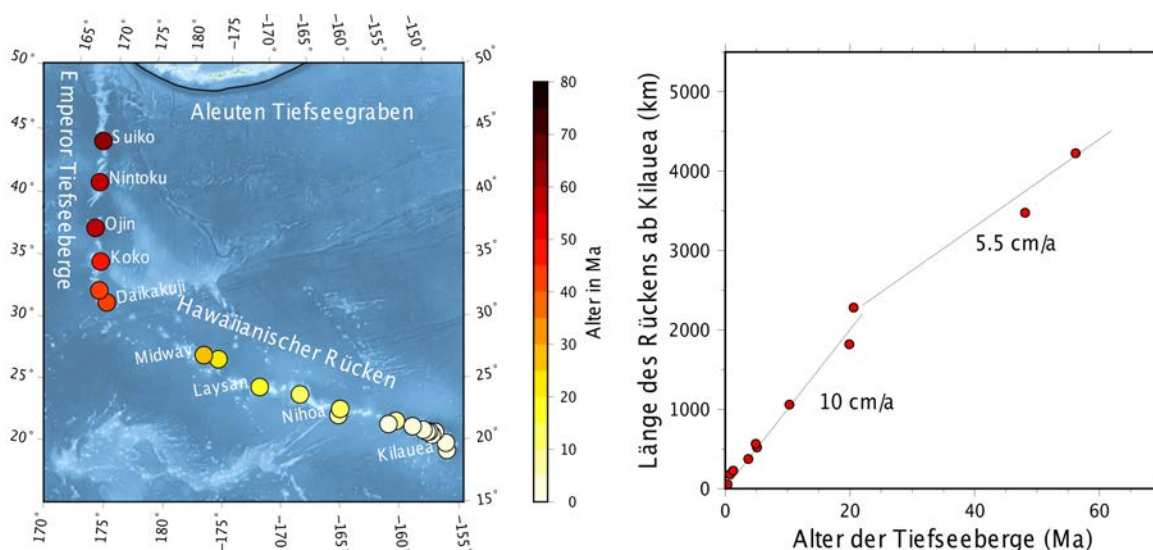


Abbildung 3.24: Links: Alter der vulkanischen Tiefseeberge (seamounts, farbige Kreise) entlang des Hawaiianischen und Emperor Rückens (Stereographische Projektion für einen Pol bei  $187^\circ E$  und  $35^\circ N$ ). Die Tiefe (Bathymetrie) des Pazifischen Ozeans ist in blauen Farben erkennbar. Rechts: Entfernung der vulkanischen Tiefseeberge zu Kilauea entlang des Rückens als Funktion ihres Alters. Die Richtungsänderung zwischen beiden Rücken zwischen 25 und 40 *Ma* geht mit der einer scheinbaren Änderung der Plattengeschwindigkeit einher.

terschiedlich bewegenden, tektonischen Platten über die Erdgeschichte nur wenig relativ zueinander, was ein weiterer Hinweis auf einen Ursprung im tiefen Mantel deutlich unterhalb der Lithosphäre ist. Die genauen Messungen heutzutage haben allerdings ergeben, dass doch Relativbewegungen zwischen Hotspots in der Größenordnung bis zu  $1\text{ cm/a}$  auftreten. Dennoch wird das Hotspot System als Referenzsystem benutzt. Tabelle 3.3 gibt die Rotationsgeschwindigkeiten der wichtigsten Großplatten im Hotspot Referenzsystem an. Beachte, dass Rotationspol und Winkelgeschwindigkeit zur Bestimmung der Relativbewegung an einer vorgegebenen Plattengrenze zwei benachbarten Platten mit

Hilfe von (3.5) und der Addition von Rotationsvektoren abgeleitet werden müssen (siehe z.B. Fowler, 2005).

Tabelle 3.3: Rotationsgeschwindigkeiten der wichtigsten Großplatten relativ zum Hawaii Hotspot, berechnet aus der Bewegung der Pazifischen Platte nach De Mets et al. (1990) (aus Stacey, 1992).

Platte	Pol Lat. $\theta$ ( $^{\circ}$ N)	Pol Lon. $\phi$ ( $^{\circ}$ E)	$\omega$ ( $10^{-6}$ deg/a)
Pazifisch	-55	144	0.75
Afrikanisch	36	-132	0.37
Antarktisch	31	-156	0.39
Arabisch	68	-26	0.42
Australisch	46	52	0.50
Karibisch	12	-138	0.37
Cocos	22	-124	1.72
Eurasisch	25	-150	0.40
Indisch	69	-14	0.42
Nazca	41	-122	0.86
N-Amerikanisch	-4	-134	0.35
S-Amerikanisch	-11	-158	0.35
Juan De Fuca	-35	85	0.54
Philippinisch	-46	-55	0.85

Die bisherigen Betrachtungen zur Stabilität von Tripelpunkten bleiben lokal auch auf der Kugel Erde gültig. Ähnlich wie im kartesischen Fall für Tripelpunkte gilt auf der Kugel, dass sich die vektorielle Summe der relativen Winkelgeschwindigkeiten für den Fall von drei aneinandergrenzenden Platten auslöscht, wenn die Relativgeschwindigkeiten zyklisch zugeordnet sind<sup>35</sup>.

$$\boldsymbol{\omega}_{AB} + \boldsymbol{\omega}_{BC} + \boldsymbol{\omega}_{CA} = 0 \quad . \quad (3.5)$$

Im kartesischen Fall lagen alle drei Geschwindigkeitsvektoren in Gleichung (3.2) in der Horizontalebene. Die drei Winkelgeschwindigkeiten in (3.5) liegen alle auf einem Großkreis, also in der Ebene, die durch zwei Rotationspole und den Erdmittelpunkt aufgespannt wird. Gleichung (3.5) ermöglicht es die Koordinaten des Rotationspols und

<sup>35</sup> Gilt nur für infinitesimale Rotationen, was für plattentektonische Probleme gut erfüllt ist

die Rotationsgeschwindigkeit zwischen Platte A und B auszurechnen, wenn Pole und Winkelgeschwindigkeiten jeweils bezüglich einer dritten Platte C gegeben sind.

Definieren wir gedanklich Hawaii als Mikroplatte C, dann sind alle Angaben in Tabelle 3.3 bezüglich der Platte C gegeben. Will man zum Beispiel die Relativbewegung der Arabischen Platte (A) gegen die Eurasische Platte (B) berechnen, also  $\omega_{AB}$  aus  $\omega_{BC}$  und  $\omega_{AC} = -\omega_{CA}$  bestimmen, dann gilt

$$\omega_{AB} = +\omega_{AC} - \omega_{BC} \quad .$$

Die drei Vektoren der Winkelgeschwindigkeit können durch ihre kartesische Komponenten  $(X, Y, Z)$  in einem geozentrischen System mit  $x$ - $y$  in der Äquatorebene ( $x$  geht durch den Meridian bei Greenwich) und  $z$  durch den geographischen Nordpol ausgedrückt werden. Mit (D.2) folgt

$$\begin{aligned} X_{AB} &= X_{AC} - X_{BC} = \omega_{AC} \cos \theta_{AC} \cos \phi_{AC} - \omega_{BC} \cos \theta_{BC} \cos \phi_{BC} \\ Y_{AB} &= Y_{AC} - Y_{BC} = \omega_{AC} \cos \theta_{AC} \sin \phi_{AC} - \omega_{BC} \cos \theta_{BC} \sin \phi_{BC} \\ Z_{AB} &= Z_{AC} - Z_{BC} = \omega_{AC} \sin \theta_{AC} - \omega_{BC} \sin \theta_{BC} . \end{aligned}$$

Für den Betrag der Winkelgeschwindigkeit und die geographischen Koordinaten des Rotationspols folgt

$$\omega_{AB} = \sqrt{X_{AB}^2 + Y_{AB}^2 + Z_{AB}^2}, \quad \phi_{AB} = \tan^{-1} \frac{Y_{AB}}{X_{AB}} \quad \text{und} \quad \theta_{AB} = \sin^{-1} \frac{Z_{AB}}{\omega_{AB}} .$$

Beachte die Mehrdeutigkeit der inversen Tangensfunktion. In Tabelle 3.3 findet man  $\omega_{AC} = 0.42 \cdot 10^{-6} \text{ deg/a}$ ,  $\phi_{AC} = -26^\circ$ ,  $\theta_{AC} = 68^\circ$ , und  $\omega_{BC} = 0.40 \cdot 10^{-6} \text{ deg/a}$ ,  $\phi_{BC} = -150^\circ$ ,  $\theta_{BC} = 25^\circ$ . Damit ergibt sich für die Relativbewegung der Arabischen gegenüber der Eurasischen Platte  $\omega_{AB} = 0.55 \cdot 10^{-6} [^\circ/a]$ ,  $\phi_{AB} = 21^\circ E$ ,  $\theta_{AB} = 24^\circ N$ . Mit Hilfe von (3.4) kann nun z.B. die relative Konvergenz in der Makran Subduktionszone am Ort des 27 November 1945, Balochistan Erdbebens ( $M8.1, \phi = 63.0^\circ E, \theta = 24.5^\circ N$ ) berechnet werden zu  $v_{AB} \approx 4 \text{ cm/a}$ , Azimuth  $\beta \approx 12^\circ$ .

### 3.3 Vertikale Bewegungen in der Kruste

In der Erdkruste gibt es unterschiedliche Prozesse, die zu vertikalen Ausgleichsbewegungen führen. Ein Prozess wurde bereits erwähnt; die ozeanische Kruste und Lithosphäre wird mit zunehmendem Abstand zum mittelozeanischen Rücken älter und damit kälter und schwerer, so dass sie tiefer und tiefer in den Mantel einsinkt. Andere Beispiele sind vertikale Bewegungen in jungen Orogenen. Große Gebirgsmassen haben häufig, ähnlich wie Eisberge im Wasser, tiefe Gebirgswurzeln aus leichterem Krustengestein. Die Wurzeln können nur durch erhebliche vertikale Bewegungen entstanden sein. Ein drittes Beispiel ist die Auflast der Eismassen während der letzten Eiszeit, die zur Absenkung von ganz Skandinavien und Kanada geführt hat. Nach dem Ende der Eiszeit und dem Abschmelzen der Eisbedeckung haben sich die abgesenkten Gebiete wieder langsam gehoben. Ebenso können Salzstöcke, die leichter als das umliegende Gestein sind und eine geringere Viskosität besitzen, instabil werden, aufsteigen und das überliegende Material hochheben. So ist die Nordseeinsel Helgoland entstanden.

#### 3.3.1 Prinzip der Isostasie

Das **isostatische Ausgleichsprinzip** wurde 1855 sowohl von A.J.H. Pratt wie von Sir George Airy aufgestellt, um gemessene und reduzierte Lotabweichungen (zu gering gegenüber Erwartungen) am Fuß der Anden und des Himalaya zu erklären. Isostasie kann als Übertragung des **Archimedischen Schwimmgleichgewichts** auf "feste Körper" betrachtet werden. In einem Isostasiemodell schwimmen rheologisch starre Blöcke geringerer Dichte (z.B. Krustenblöcke) in einem weichen, dichteren Substratum, vergleichbar zu Eisbergen im Wasser. In geodynamischem Kontext kann die Lithosphäre mit der starren Einheit und die Asthenosphäre mit dem weicheren Substratum identifiziert werden. Die Lithosphäre hat wegen ihres leichten Krustenanteils eine geringere mittlere Dichte als die Asthenosphäre. Schwimmgleichgewicht bedeutet, dass in einer **Kompensationstiefe**  $z_a$  (Ausgleichstiefe) der Druck konstant ist, also keine lateralen Druckvariationen auftreten sollen. Nimmt man an, dass sich die Gesteinsmassen in der Lithosphäre über lange Zeiträume vertikal gegeneinander verschieben, also keine Scherkräfte und Scherspannungen tragen, dann herrscht in der Ausgleichstiefe Druckgleichgewicht (z.B. im oberen Mantel unter einer Gebirgswurzel oder in der Asthenosphäre). Der Druck am Boden einer Fluidsäule (z.B. Wasser) mit konstanter Dichte  $\rho$  und der Höhe  $h$  ist  $P = \rho b h$  ( $b$  ist die Gravitationsbeschleunigung). Die Dichte eines Lithosphärenblocks ist nicht überall konstant wie in einem Wasserbehälter, sondern variiert zwischen Erdmantel und Kruste und häufig auch innerhalb der Erdkruste. Wird die Dichte als Funktion der Höhe der Gesteinssäule über  $z_a$  geschrieben,  $\rho = \rho(z)$ , dann gilt für den Druck  $P_0$  in  $z_a$



$$P_0 = \int_{z_a}^{z_t} \rho(z) b dz = \text{const} \quad , \quad (3.6)$$

wobei  $z_t$  das vertikale Niveau der Erdoberfläche ist (inklusive Topographie eines Gebirges).  $P_0$  ist konstant unabhängig davon, ob die Gesteinssäule unter einem Gebirgszug, dem Flachland oder dem Ozean betrachtet wird.

In dem einfachen **Isostasiemodell von Airy** (Abb. 3.25) wird eine konstante mittlere

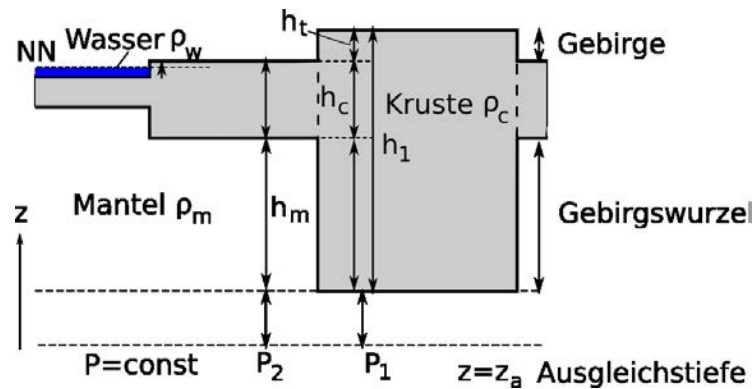


Abbildung 3.25: Isostasiemodell nach Airy. Hohe Gebirge besitzen eine tiefe krustale Gebirgswurzel.  $h_t$  ist die topographische Erhebung des Gebirgszugs über Meeresniveau (NN),  $h_m$  die Dicke der Gebirgswurzel und  $\rho_c$  und  $\rho_m$  die mittlere Krusten- und Manteldichte.

Dichte jeweils für den gesamten Krusten- und Mantelblock angesetzt. Mit (3.6) ergibt sich eine einfache Abschätzung der Eintauchtiefe  $h_m$  der Gebirgswurzel als Funktion der topographischen Erhebung eines Gebirges ( $h_t$ ) und der mittleren Krusten- und Manteldichten wie

$$P_2 = P_1$$

$$\rho_c h_c + \rho_m h_m = \rho_c h_1 = \rho_c (h_m + h_c + h_t) \quad \text{oder} \quad h_m = \frac{\rho_c}{\rho_m - \rho_c} h_t \quad . \quad (3.7)$$

Für eine Krustendichte von  $\rho_c = 2700 \text{ kg/m}^3$  und eine Manteldichte von  $\rho_m = 3200 \text{ kg/m}^3$  ergibt sich eine Gebirgswurzel, die das etwa 5-fache der Topographie des Gebirges beträgt. Mit Abb. 3.25 und dem Ansatz für Druckgleichgewicht kann entsprechend zu (3.7) aus der mittleren Erhebung aller Landmassen die mittlere Dicke der kontinentalen im Vergleich zur ozeanischen Kruste bestimmt werden (vgl. Übungen).

In dem **Isostasiemodell von Pratt** geht man von einer einheitlichen Eintauchtiefe aus (z.B. Moho-Tiefe sei überall konstant) und erfüllt die Bedingung in (3.6) allein durch laterale Variationen der mittleren Dichten der Krustenblöcke.

Ein Test der beiden Isostasie-Modelle von Airy und Pratt war erst möglich nachdem mit Hilfe der Seismik Krustenstrukturen erkundet und die Tiefe der Moho bestimmt werden konnte. Man weiß heute, dass die Moho-Tiefe stark variiert und sowohl laterale wie auch vertikale Dichteveränderungen in der Erdkruste und im oberen Mantel vorhanden sind. Das Modell von Pratt ist heute daher weniger von Bedeutung. Mit detaillierteren Angaben von Krusten- und Manteldichten kann man heute mit einem verbesserten oder verallgemeinerten Isostasiemodell rechnen, in dem sowohl laterale wie vertikale Dichteveränderungen erlaubt sind.

Eine wichtige Frage betrifft die Gültigkeit der Grundannahme der isostatischen Ausgleichung, d.h. bis zu welcher Spannweite und über welche Zeiträume die Lithosphäre Scherspannungen tragen kann oder nicht. Aufgrund von Schweremessungen geht man davon aus, dass großräumige Strukturen in tektonisch wenig aktiven Gebieten mit mehr als 400 km Länge eine isostatische Ausgleichung in erster Näherung erfahren haben. Für kleinere Strukturen muss dies aber nicht zutreffen. Die Biegesteifigkeit der elastischen Lithosphäre kann den isostatischen Ausgleich dann durchaus verhindern oder verlangsamen. Ebenso ist der isostatische Ausgleich durch Vertikalbewegung an aktiven Plattenrändern, wie z.B. an Tiefseegräben oder allgemein an Subduktionszonen, häufig noch nicht abgeschlossen.

### 3.3.2 Postglaziale Hebungen

Ein Beispiel für einen im Ausgleich befindlichen, aber noch nicht abgeschlossenen Prozess ist die aktuelle Hebung von Skandinavien und Kanada, die mit dem Ende der letzten Eiszeit vor 10000 Jahren und der Abschmelzung der Eismassen eingesetzt hat. Die Eismassen über Skandinavien hatten eine Mächtigkeit von 2 - 2.5 km. Seither hat sich Skandinavien um etwa 270 m gehoben; die aktuelle Hebungsrate beträgt im Zentrum der Hebung etwa 9 mm/a (Abb.3.26). In Zukunft ist eine weitere Hebung von etwa 250 m bis zum völligen isostatischen Ausgleich zu erwarten.

Interessant ist, dass sich aus dem zeitlichen und verzögerten Verlauf der Hebung Rückschlüsse auf die Viskosität der Asthenosphäre ziehen lassen. Die Viskosität der Asthenosphäre liegt danach im Bereich von etwa  $\eta = 10^{18} - 10^{19} \text{ Pa s}$ , die der Lithosphäre ist um den Faktor  $10^3$  bis  $10^4$  größer.

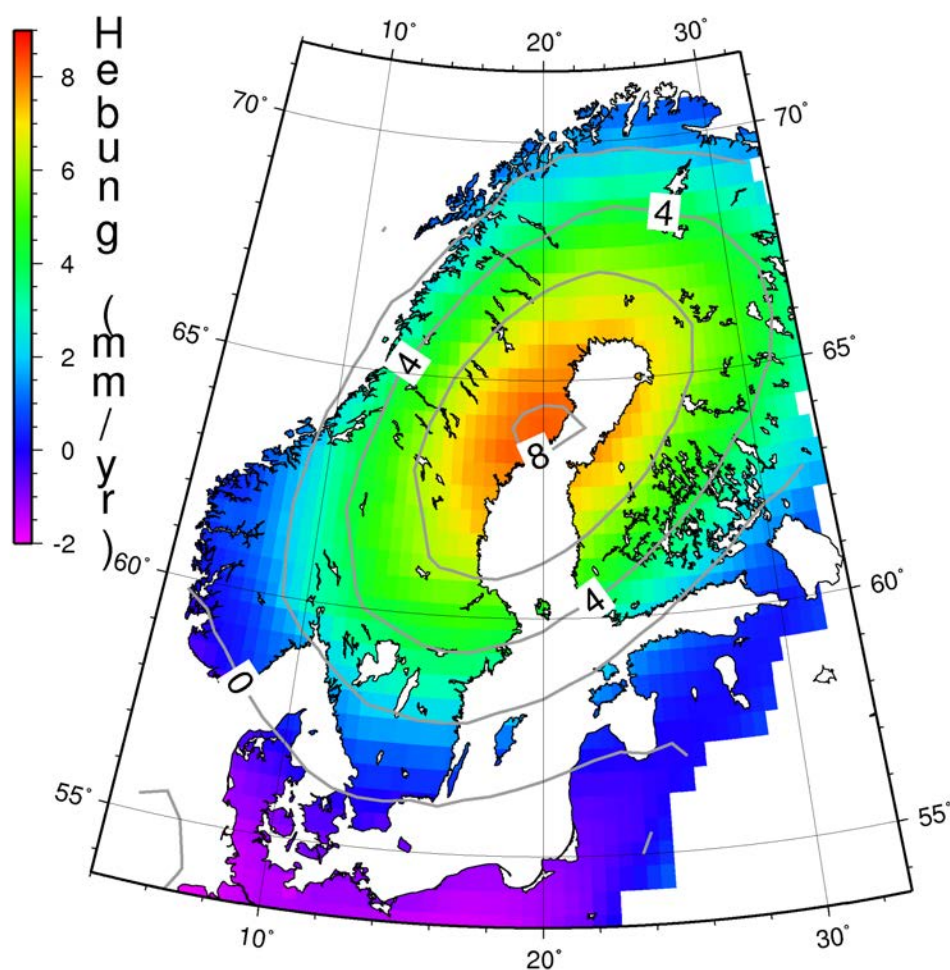


Abbildung 3.26: Isostatische Hebungsgeschwindigkeit von Skandinavien in mm/Jahr auf Basis von Levelling, kontinuierlichem GPS und Tide Gauges (Daten von Olav Vestol, 2006, J. Geod. 80, 248-258, 10.1007/s00190-006-0063-7). Äquidistante konische Projektion mit dem Zentrum bei  $20^\circ/62^\circ$  und zwei Standardparallelen bei  $58^\circ$  und  $68^\circ$ .

### 3.4 Temperatur, Wärme, Konvektion und Geodynamo

In Kapitel 1 wurde bereits erwähnt, dass im Mantel Konvektionsströmungen auftreten, die als ein Antriebsmechanismus der Plattenbewegung angesehen werden<sup>36</sup>. Im flüssigen äußeren Kern sind die Konvektionsströmungen um den Faktor  $10^6$  größer als im Mantel und verantwortlich für das Magnetfeld der Erde. Die Konvektion in Mantel und Kern ist vor allem thermisch verursacht (**thermische Konvektion**). Sie stellt einen effizienten Mechanismus dar, um Wärme durch die Erde an die Oberfläche zu transportieren und Wärmeenergie abzugeben. Die Temperatur im Erdinnern ist eine wichtige Größe für die Geodynamik und nicht nur wegen der Konvektion. Die Temperatur beeinflusst die **Fließ-**

<sup>36</sup> Zusätzlich ist eine tiefenabhängige Rheologie der Kruste mit geringer Festigkeit in der Unterkruste erforderlich, ebenso wie die Erklärung von geringen Reibungskoeffizienten auf Plattengrenzen.

viskosität, die **anelastische Dämpfung seismischer Wellen** und die **elektrische Leitfähigkeit** der Gesteine. Beim Überschreiten der **Schmelzgrenze** ändert sich das Materialverhalten drastisch. Da Gesteine Mehrstoffsysteme sind, unterscheidet man zwischen dem Schmelzbeginn der leicht schmelzbaren Anteile (**Solidustemperatur**) und dem vollständigen Aufschmelzen (**Liquidustemperatur**). Im Temperaturbereich dazwischen spricht man von **partieller Schmelze** oder **fraktionierter Kristallisation**. In partiell geschmolzenem Gestein können sich die schwereren Komponenten absetzen, während die leichteren aufsteigen (**gravitative Differentiation**); ein Prozess, der sowohl bei der Bildung des Kerns wie auch bei der Bildung der ozeanischen Kruste auftritt. Leider kann die Temperaturverteilung  $T_h(r)$  in der Erde nicht direkt gemessen werden

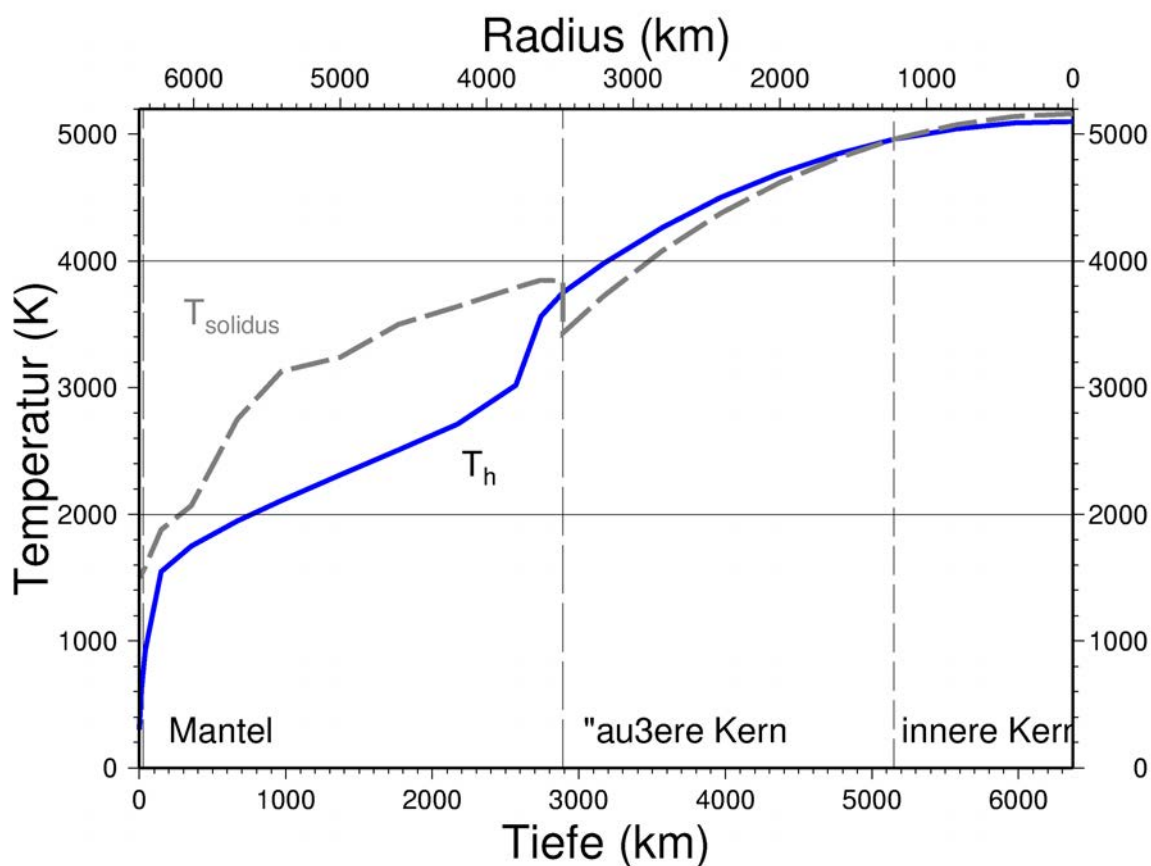


Abbildung 3.27: Temperaturverlauf  $T_h$  im Erdinnern (durchgezogene Linien) und Vergleich mit der Solidus-Temperatur (gestrichelt). Die Daten (aus Stacey, 1992) haben große Unsicherheiten; in anderen Modellen unterschreitet  $T_h$  im Bereich der Asthenosphäre die Solidustemperatur.  $0^\circ \text{C}$  entsprechen  $273 \text{K}$ .

und indirekt nur sehr schwer abgeleitet werden. Das liegt zum einen daran, dass es unterschiedliche Mechanismen für den Wärmetransport gibt; **Advektion** durch Materieströmung (z.B. bei Konvektion), **Konduktion** oder Leitung (Diffusionsprozess) und

schließlich **Strahlung**. Alle drei Mechanismen kommen in der Erde vor und sind in unterschiedlichen Tiefen unterschiedlich wichtig. Ausserdem hängen alle drei Prozesse stark von der Materialzusammensetzung ab. Zum anderen liegt es daran, dass es zusätzliche Wärmequellen in der Erde gibt wie z.B. die Radioaktivität in der kontinentalen Kruste. Sie spielt eine wichtige Rolle für den Wärmehaushalt der kontinentalen Kruste. Trotz der Schwierigkeiten hat man eine genaue Vorstellung über die Temperatur im Erdinnern (Abb. 3.27). Die wichtigen Fixpunkte bei der Ableitung sind die Existenz oder das Fehlen von partiellen Schmelzen und die Phasenübergänge. Die Temperatur in der partiell geschmolzenen Asthenosphäre in  $100\text{ km}$  Tiefe wird durch Vergleich mit Laborexperimenten und je nach Wassergehalt der Mantelgesteine auf etwa  $1150 - 1300^\circ\text{C}$  festgelegt. In  $410\text{ km}$  Tiefe findet im oberen Mantel der Phasenübergang von Olivin zu Spinell statt; das legt die Temperatur  $T_h$  auf  $1600^\circ\text{C} \pm 280^\circ\text{C}$  fest. Der Phasenübergang in  $670\text{ km}$  von Spinell zu Perovskit sollte bei etwa  $1650^\circ\text{C}$  stattfinden und einen Temperatursprung von etwa  $50^\circ\text{C}$  hervorrufen. An der Grenze zum äußeren Kern ist die Eisen-Nickel Legierung flüssig, weshalb die Temperatur mindestens  $3000\text{ K}$  ( $2727^\circ\text{C}$ ) sein muß und an der Grenze zum festen, inneren Kern wird ein  $T_h$  kleiner als etwa  $5500\text{ K}$  ( $5227^\circ\text{C}$ ) gefordert.

### 3.4.1 Wärmetransport durch Konvektion

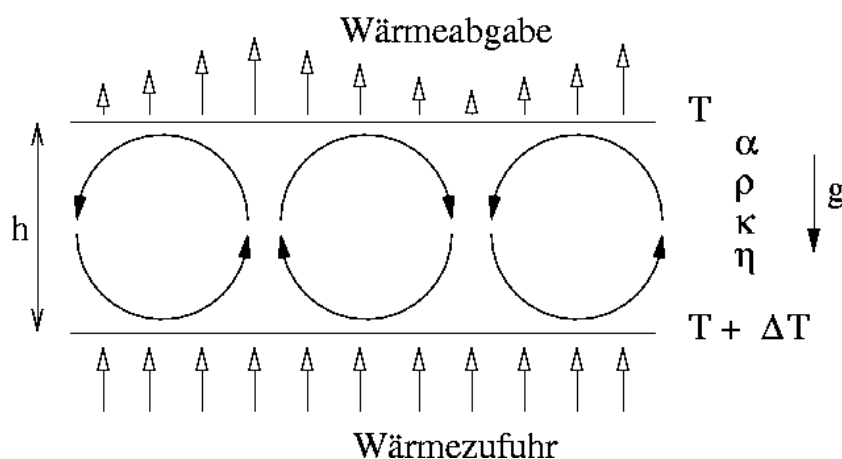


Abbildung 3.28: Schematische Darstellung des Wärmetransports durch thermische Konvektion. Die offenen Pfeile geben den Wärmefluss durch die Oberflächen des Behälters an, die geschlossenen die Strömungspfade in der Flüssigkeitsschicht.

Ein typisches Experiment zur Konvektion ist in Abb. 3.28 zu sehen. Eine Flüssigkeitsschicht wird im Schwerfeld der Erde von unten beheizt und von oben gekühlt. Die Temperaturdifferenz ist  $\Delta T_h [K]$  und die Flüssigkeit ist durch ihre Dichte  $\rho [kg/m^3]$ , ihren thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha_h = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT_h} [K^{-1}]$ , die Temperaturleitfähigkeit  $\kappa [m^2/Ks]$ , und ihre dynamische Viskosität  $\eta [Pa s]$  charakterisiert. Für  $\alpha_h > 0$

dehnt sich die Flüssigkeit mit steigender Temperatur aus oder anders ausgedrückt, die Dichte sinkt mit steigender Temperatur. D.h., am heißen Boden der Schicht hat das Fluid eine kleinere Dichte, an der Oberfläche eine größere. Wird ein Volumenelement am Boden um einen kleinen Betrag nach oben verschoben, dann ist es in dem neuen Niveau spezifisch leichter als die Umgebung und erfährt einen Auftrieb. Das Element wird weiter aufsteigen und noch mehr Auftrieb erfahren, bis es an der Oberfläche ankommt und dort seine gespeicherte Wärme abgeben kann. Die Schichtung ist also instabil bei kleinen Auslenkungen. Im Experiment beobachtet man Konvektion in Form von geschlossenen Zellen (Rayleigh-Benard-Zellen), deren Breite von der Schichtdicke  $h$  abhängt. Bremsend auf die Konvektionsbewegung wirkt die viskose Reibung im Fluid und die Temperaturleitfähigkeit. Die Konvektion kann nur stattfinden, wenn die thermischen Auftriebskräfte größer als die bremsenden Reibungskräfte sind. Lord Rayleigh hat eine dimensionslose Kennzahl eingeführt, die **Rayleigh-Zahl**  $Ra$ , und gezeigt, dass Konvektion nur einsetzen kann, wenn die Rayleighzahl des Fluids größer als eine kritische Rayleighzahl  $Ra_C$  ist <sup>37</sup>,

$$Ra := \rho g h^3 \frac{\alpha_h \Delta T_h}{\kappa \eta} \geq Ra_C \approx 2000 \quad . \quad (3.8)$$

**Beispiel 3.3 (Mantelkonvektion und Plattentektonik)** *Die Rayleighzahlen im Mantel können geschätzt werden; man findet Werte im Bereich  $Ra \approx 10^6$ . Obwohl die Zahl große Fehler hat, ist sie sicher größer als  $Ra_C$ , weshalb Mantelkonvektion zu erwarten ist (Abb. 3.29). Die Mantelkonvektion hat an der Grenze zur Lithosphäre Strömungsgeschwindigkeiten bis zu etwa 10 cm/a. Es ist bis heute nicht klar, ob die Konvektionszellen den gesamten Mantel umfassen oder aber getrennt im oberen und unteren Mantel auftreten. Ebenso ist strittig, ob subduzierte Lithosphärenplatten sich bereits im oberen Mantel ansammeln oder bis an die Kern-Mantel-Grenze abtauchen können. Die Heizung des Mantels zur Aufrechterhaltung der thermischen Konvektion wird durch den heißen Erdkern an der Kern-Mantel-Grenze bereitgestellt.*

**Beispiel 3.4 (Konvektion im äußeren Kern und der Geodynamo)** *Im flüssigen äußeren Kern tritt Konvektion ohne Zweifel auf, da die kritische Rayleighzahl deutlich überschritten wird. Die Konvektion wird aufrechterhalten durch (1) den Wärmeverrat des Kerns, (2) die latente Kristallisationswärme durch das Auskristallisieren des inneren Kerns und (3) die freiwerdende potentielle Energie bei der gravitativen Differentiation. Zusätzlich wird diskutiert, ob der radioaktive Zerfall von  $K^{40}$  zum Wärmehaushalt der Kerns beiträgt (4). Die Konvektionsgeschwindigkeiten sind im Bereich von 10 km/a und*

<sup>37</sup> $\Delta T_h$  ist genau genommen die adiabatische Temperaturdifferenz, siehe z.B. Berckhemer, 1997



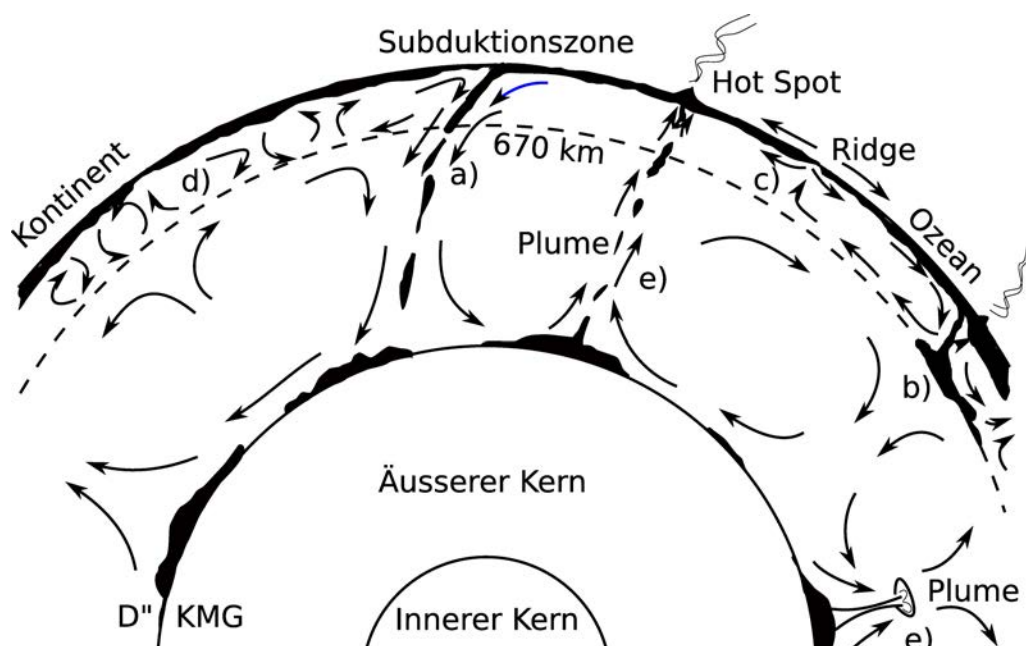


Abbildung 3.29: Vorstellungen zu Konvektionsströmungen (Pfeile) im Mantel. Transportiertes Lithosphärenmaterial ist durch schwarz gefüllte Bereiche gekennzeichnet. Wichtige Charakteristika der Mantelkonvektion sind Subduktionszonen (a), Rücken (c) und Plumes (e). Konvektionszellen der Stömung können im oberen (d) und unteren Mantel unabhängig ausgebildet sein (670 km Grenze) oder aber beide Zonen übergreifen. Oberhalb der Kern-Mantel-Grenze (KMG) könnte sich subduziertes Material ansammeln, das die seismologisch kartierte  $D''$  Schicht erklären würde (Abb. in Anlehnung an Geodynamik Skript von Prof. Schmeling, Frankfurt).

sind viel größer als im Mantel. Die Konvektionszellen im äusseren Kern, der ja aus einer gut leitenden Eisen-Nickel Verbindung besteht, sind für das Magnetfeld der Erde verantwortlich. Sie sorgen dafür, dass elektrische Ladungsträger "geordnet" fließen, was wiederum ein Magnetfeld induziert. Der Prozess und die Geometrie der Kernkonvektion ist kompliziert und die Konvektionszellen und Strömungen sind nicht streng zeit- und ortsstabil (**nicht-stationäre** oder **transiente** Strömungen). Einige Konsequenzen daraus sind unmittelbar plausibel; (1) das erzeugte Erdmagnetfeld hat eine komplexe Feldliniengeometrie (nur in 1-ter Ordnung ein Dipolfeld), (2) die Orientierung und Intensität des Erdmagnetfeldes kann driften und schwanken und (3) es können Polumkehrungen auftreten.

**Prinzip des magneto-hydrodynamischen Geodynamos:** Das Prinzip des selbst-erregenden Dynamos ist in Abb. 3.30a dargestellt. Rotiert eine leitende Scheibe in dem Magnetfeld eines Stabmagneten, dann sorgt die Lorentzkraft<sup>38</sup> dafür, dass Elektronen in

<sup>38</sup> Die Kraft auf eine elektrische Ladung  $q_e$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in einem Magnetfeld  $\mathbf{B}$  bewegt, ist  $\mathbf{F} = q_e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  (Lorentzkraft). Die Kraft wirkt also senkrecht zum Magnetfeld und dem

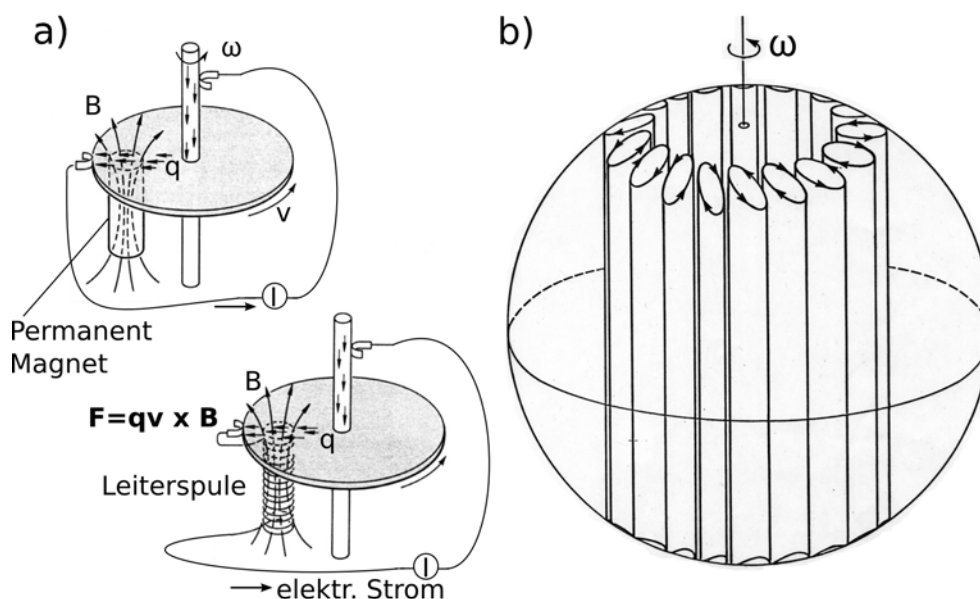


Abbildung 3.30: (a) Schematisches Modell des selbsterregenden Geodynamos. Im oberen Bild rotiert die elektrisch leitende Scheibe im Feld eines Permanentmagneten und erzeugt dadurch nach dem Dynamoprinzip einen elektrischen Strom  $I$ . Im unteren Bild wird das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  durch den Strom  $I$  erzeugt, der durch eine Spule unter der Scheibe fließt (in Anlehnung an [Elsasser, 1958](#)). (b) Schemabild von möglichen magneto-hydrodynamischen Konvektionszellen im äußeren Kern (aus [Carrigan and Busse, 1983](#)).

der Scheibe von der Achse nach außen wandern und eine elektrische Spannung  $\Delta U$  erzeugen. Ein Schleifkontakt zwischen Achse und Scheibenrand sorgt für einen elektrischen Stromfluß, der solange anhalten wird, solange sich die Scheibe dreht. Ersetzt man den Stabmagneten durch eine Spule, dann kann derselbe elektrische Strom das Magnetfeld erzeugen (verstärken), das wiederum den Strom induziert. Der Dynamo ist selbsterregend oder selbstverstärkend. Die elektromagnetische Wechselwirkung bremst aber auch die Rotorscheibe (Wirbelstrombremse). Magnetfeld und Strom werden also nur so lange wachsen, bis sich ein Gleichgewicht zwischen Brems- und Antriebskräften (Scheibendrehung) einstellt. Die Umsetzung des Modells auf den rotierenden und konvektierenden Kern ist kompliziert. In der Geodynamik ist es erst seit kurzer Zeit gelungen die hydrodynamischen und elektrodynamischen Gleichungssysteme zu lösen und realistische numerische Simulationsrechnungen durchzuführen, die Eigenschaften des Geodynamos erklären können. Die Verifikation des Geodynamos in Laborexperimenten ist bis heute eine Herausforderung. [Busse \(1975\)](#) konnte 1975 zeigen, dass das in [Abb. 3.30b](#) dargestellte Konvektionsmodell (Taylorwirbel) strömungsmechanisch plausibel ist und Eigenschaften eines selbsterregenden Dynamos besitzt (vgl. auch [Carrigan and Busse, 1983](#)).

**Form und Figur des Erdmagnetfeldes:** Das Erdmagnetfeld kann nicht vollständig

---

Geschwindigkeitsvektor der Ladung.

durch das Analogmodell eines Stabmagneten (Dipolfeld) repräsentiert werden (wird häufig in populären Darstellungen verwendet). Die Stärke und Richtung der Feldlinien ist komplizierter und ausserdem zeitabhängig. Eigens zur Beschreibung des Erdmagnetfeldes hat C. F. Gauß 1838 die Reihenentwicklung nach Kugelfunktionen eingeführt. Die Kugelfunktionsentwicklung hat heute große Bedeutung für Potenzialfelder und allgemein für Feldgrößen auf und in der Erdkugel. Die Glieder niedrigster Ordnung der Kugelfunktionsentwicklung entsprechen dem Feld eines **magnetischen Dipols** im Erdmittelpunkt. Die Achse dieses Dipols bildet mit der Rotationsachse der Erde einen Winkel von derzeit  $11.5^\circ$ . Das **Dipolfeld** kann etwa 80% des Erdfeldes erklären. Der Rest entfällt auf Glieder höherer Ordnung, die zusammenfassend als **Nicht-Dipolanteile** bezeichnet werden.

**Schwankungen des Erdmagnetfeldes:** Man bezeichnet die langsamen Änderungen des Magnetfeldes als **Säkularvariationen**. Die Nicht-Dipolanteile unterliegen heute der größten zeitlichen Änderung, die regional einige Prozent der Feldstärke im Jahr betragen kann. Auffällig ist eine Westwärtsdrift der Änderung der Nicht-Dipolanteile von etwa 0.3 Längengraden pro Jahr (30 km/a am Äquator). Auch die Stärke des Dipolfeldes variiert; innerhalb der letzten 2000 Jahre ist sie etwa um die Hälfte abgesunken. Das magnetische Feld an der Erdoberfläche setzt sich aus den Beiträgen der einzelnen Strömungswalzen in Abb. 3.30b zusammen, die unterschiedliche Polaritäten haben. Es gibt aufgrund des Strömungsmusters erstmal keine Vorzugspolarität. Man konnte zeigen, dass im Geodynamo-Modell eine Polumkehr auftreten kann, ohne dass sich die Strömungswalzen dabei umkehren. Magnetische Polumkehrungen treten auf der Erde tatsächlich auf (vgl. Abb. 3.6). Man weiß heute, dass der Prozess der Feldumkehr etwa 10000 Jahre dauert. Während dieser Zeit verschwindet das Feld nicht ganz, vielmehr dominieren dann die unregelmässigen Anteile des Nicht-Dipolfeldes. Abb. 3.31 zeigt die rekonstruierten Polwechsel während der letzten 160 Ma.

Außer den langsamen Schwankungen des Erdmagnetfeldes, die ihre Ursache im äußeren Kern haben, gibt es noch kurzperiodische Schwankungen, deren Ursache die Korpuskularstrahlung von der Sonne ist.

### 3.4.2 Wärmetransport durch Wärmeleitung

In der Lithosphäre dominiert Wärmetransport durch Leitung oder Strahlung, wobei beide Transportmechanismen durch die gleichen Gesetze beschrieben werden können. In Fault Zones und in hydrothermal aktiven Zonen ist auch Wärmetransport durch Fluidströmung, also lokale Advektion, wichtig. Fluidströmung ist allerdings kompliziert zu beschreiben und meistens beschränkt man sich auf die Beschreibung des rein konduktiven Anteils. Hier wird kurz die Definition und Messung der **Wärmeflußdichte** ( $\dot{Q}/A$ ) beschrieben, und dann die **Wärmeleitungsgleichung** anhand eines Anwendungsbeispiels diskutiert.

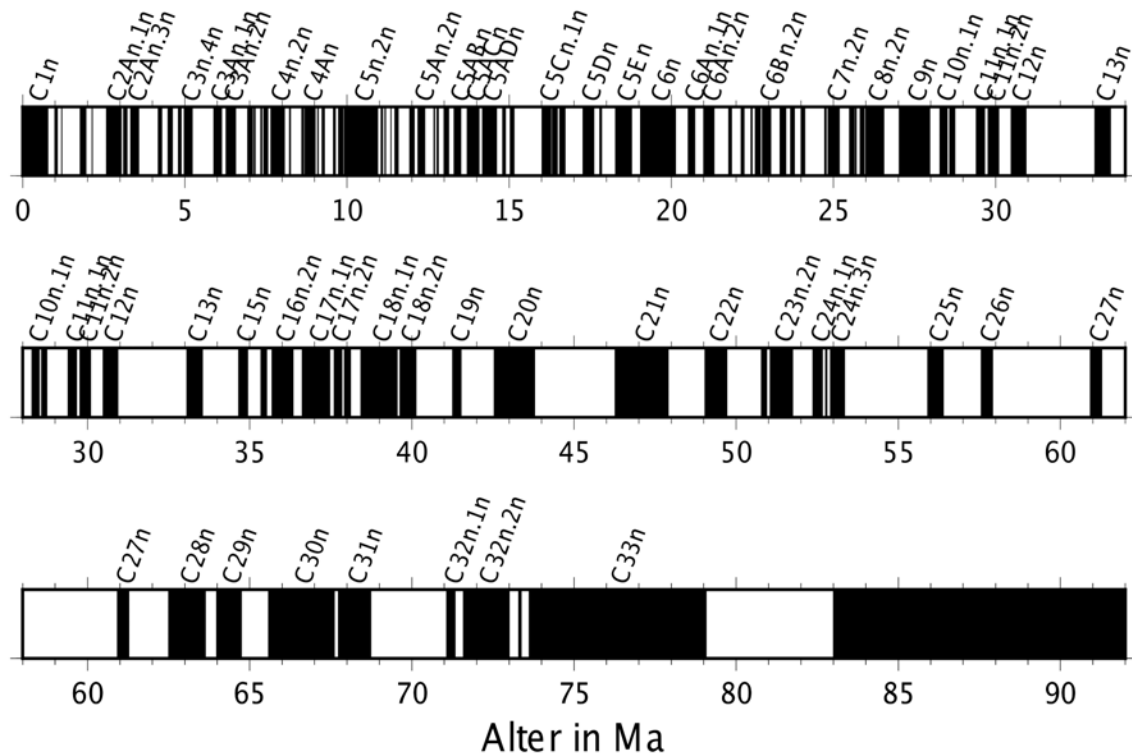


Abbildung 3.31: Geomagnetische Polarität Zeitskala (GPTS) nach Gee und Kent (2007). Epochen nordgerichteter bzw. südgerichteter Polarisation sind durch schwarze und weiße Bereiche gekennzeichnet. Die globalen magnetischen Epochen sind benannt.

**Wärmeflußdichte** ( $\dot{Q}/A$  in  $[W/m^2]$ ), **Fourier's Gesetz** (Annahme, dass  $T_h = T_h(z)$ )<sup>39</sup>:

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = \frac{\dot{Q}}{A} = -\kappa_h \frac{dT_h(z)}{dz} \quad , \quad (3.9)$$

wobei  $\kappa_h$  die **Wärmeleitfähigkeit** (**thermal conductivity**, aber nicht gleich Temperaturleitfähigkeit  $\kappa$ , s.u.!) in  $W/(Km)$  ist,  $T_h$  die Temperatur,  $A$  die Flächeneinheit,  $t$  die Zeit und  $z$  die Tiefe. Die Wärmeflußdichte  $\dot{Q}/A$  (in  $W/m^2$ ) definiert die gemessene Wärmemenge  $Q$  pro Fläche und Zeit. Der Wärmefluß in einem Gestein ist also dann groß, wenn sich entweder die Temperatur mit Tiefe stark ändert (der Temperaturgradient  $dT_h/dz$  ist groß) oder wenn die Wärmeleitfähigkeit groß ist. Typische Temperaturgradienten liegen in Mitteleuropa bei etwa  $30K/km$ , können aber in geothermal anomalen Gebieten viel größere Werte haben (z.B. bei Landau in der Pfalz etwa  $100K/km$ ). Die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa_h$  hat typische Werte von  $2 - 4 W/Km$  (Krustengesteine) oder  $6 -$

<sup>39</sup>Im allgemeinen Fall ist  $\dot{\mathbf{Q}}$  ein Vektor und hängt von dem Temperaturgradient  $\partial T_h / \partial x_i$  ab.

7 W/Km (Salz).

Die ozeanische Wärmeflußdichte ist im Mittel etwas größer als die kontinentale Wärmeflußdichte (grobe Abschätzung: etwa  $100 \text{ mW/m}^2$  gegenüber  $60 \text{ mW/m}^2$ ). Allerdings können auch in den Ozeanen lokal große Schwankungen auftreten (z.B. an mittelozeanischen Rücken).

Der Temperaturgradient ist nicht in der ganzen Kruste konstant, da die Kruste einen relativ hohen Anteil an radioaktiven Elementen (vor allem  $U^{238}$ ,  $U^{235}$ ,  $Th^{232}$ ,  $K^{40}$ ) und damit an **radiogenen Wärmequellen** hat. Nur etwa 20% bis 50% des Wärmestroms der kontinentalen Kruste kommt aus dem Mantel, d.h. werden direkt über (3.9) abgeleitet. Überraschend ist, dass trotz des hohen Gehalts an radiogenen Wärmequellen in der Kruste die Wärmeflußdichten der kontinentalen und ozeanischen Lithosphäre ähnlich groß sind. Daraus kann man schließen, dass der Temperaturgradient in der ozeanischen Kruste und Mantellithosphäre, wo ja die radiogenen Wärmequellen weitgehend fehlen, etwa doppelt so groß sein muß wie in der kontinentalen Kruste. Im Einklang damit steht die Beobachtung einer flacheren und ausgeprägteren Niedriggeschwindigkeitszone (Gutenberg-Kanal) unter Ozeanen. Das würde heißen, in der Tiefe der ozeanischen Asthenosphäre ist der Mantel unter Ozeanen heißer als unter Kontinenten.

**Messung der Wärmeflußdichte ( $\dot{Q}/A$ ):** Die Wärmeflußdichte wird aus  $\kappa_h$  und  $dT_h/dz$  mit (3.9) bestimmt. Der vertikale Temperaturgradient  $dT_h(z)/dz \approx \frac{T_h(z_2) - T_h(z_1)}{z_2 - z_1}$  wird aus Temperaturmessungen in unterschiedlicher Tiefe bestimmt, entweder durch Messung der Temperatur einem Bohrloch oder im Falle von Messungen im marinen Bereich durch Einbringen von Temperaturfühlern in die oberen Meter des noch unkonsolidierten Sediments (Abb. 3.32 und 3.33). In den obersten Metern und Zentimetern des Bodens sind Temperaturschwankungen durch den Einfluß der Luft bzw. des Wassers zu erwarten. Diese sind nicht von Interesse und müssen korrigiert werden. Die kontinentale jahresperiodische Temperaturwelle ist z.B. in 30 m Tiefe bereits auf  $0.001^\circ \text{C}$  abgeklungen. Jahreszeiteneffekte in geringeren Tiefen können rechnerisch berücksichtigt werden. Abb. 3.34 zeigt eine Zusammenstellung der Temperaturgradientmessungen in der Framstrasse zwischen Grönland und Spitzbergen. Man erkennt systematisch höhere Gradienten in der Nähe der Rückenachse, was auf höhere Wärmeflußdichten an der Spreizungszone hinweist.

Die Messung von  $\kappa_h$  wird in der Regel im Labor durchgeführt. Die Probe wird z.B. zwischen eine beheizte und eine gekühlte Platte gelegt und thermisch isoliert. Dann wird bei bekannter Heizleistung der Temperaturanstieg gemessen und daraus  $\kappa_h$  berechnet.

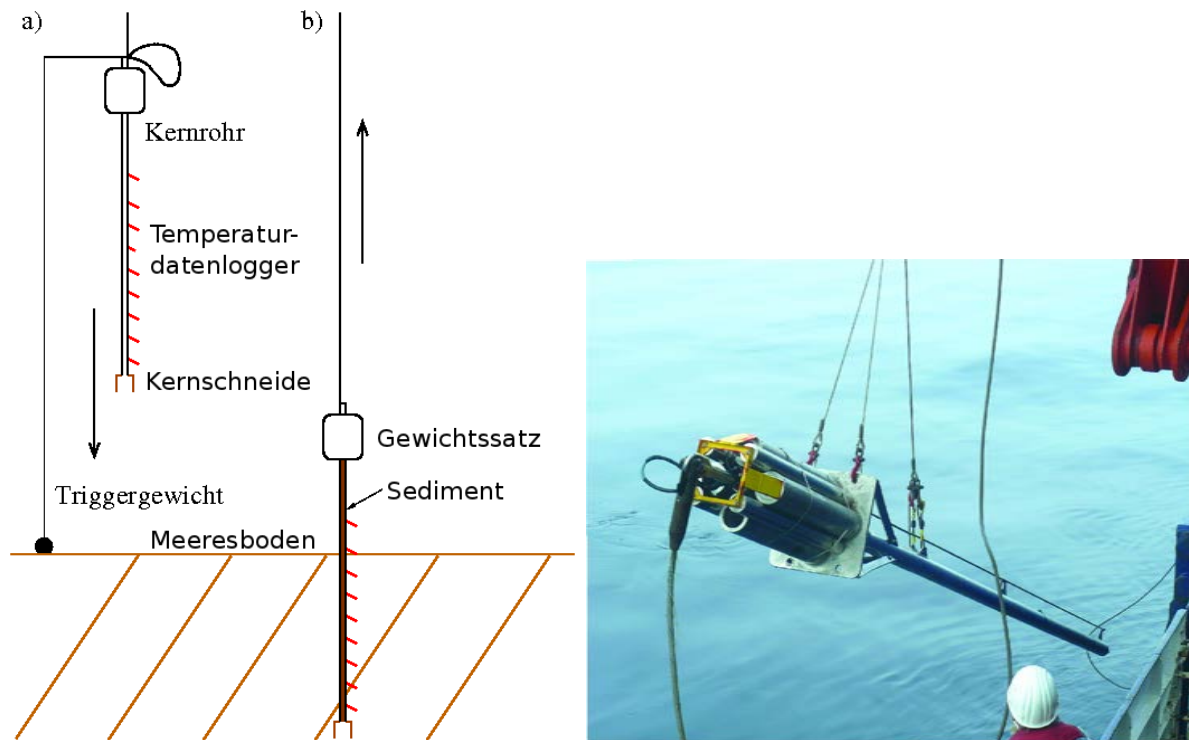


Abbildung 3.32: Messmethoden zur Bestimmung des marinen Wärmestroms. **Links:** Durch am Kernrohr eines Kolbenlots befestigte autonome Temperaturdatenlogger wird nach dem Eindringen des Kolbenlots die Temperatur in den verschiedenen Tiefen gemessen und gespeichert. Damit kann der vertikale Temperaturgradient bestimmt werden. Die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa_h$  kann an dem gewonnenen Sedimentkern im Labor gemessen werden. **Rechts:** Moderne Wärmestromsonde im Violinbogen-Design (Universität Bremen) zur in situ Messung von Temperaturen und Wärmeleitfähigkeiten. Parallel zu der massiven Lanze sind in einem dünnen Sensorrohr insgesamt 21 Temperaturfühler angebracht, mit denen nach dem Eindringen der Sonde in situ Temperaturen gemessen werden. Weiterhin ist im Sensorrohr ein Heizdraht verlegt, mit dem nach erfolgreicher Messung der Temperaturen ein kurzer Wärmepuls ( $\approx 10\text{-}20\text{ s}$ ) erzeugt wird. Die Geschwindigkeit, mit der die erzeugte Temperaturerhöhung abklingt, ist ein Maß für die Wärmeleitfähigkeit. Die Elektronik zur Steuerung der Messung und Speicherung der Daten befindet sich in einem Drucktopf am Ende der Sonde (Villinger et al., 2010).



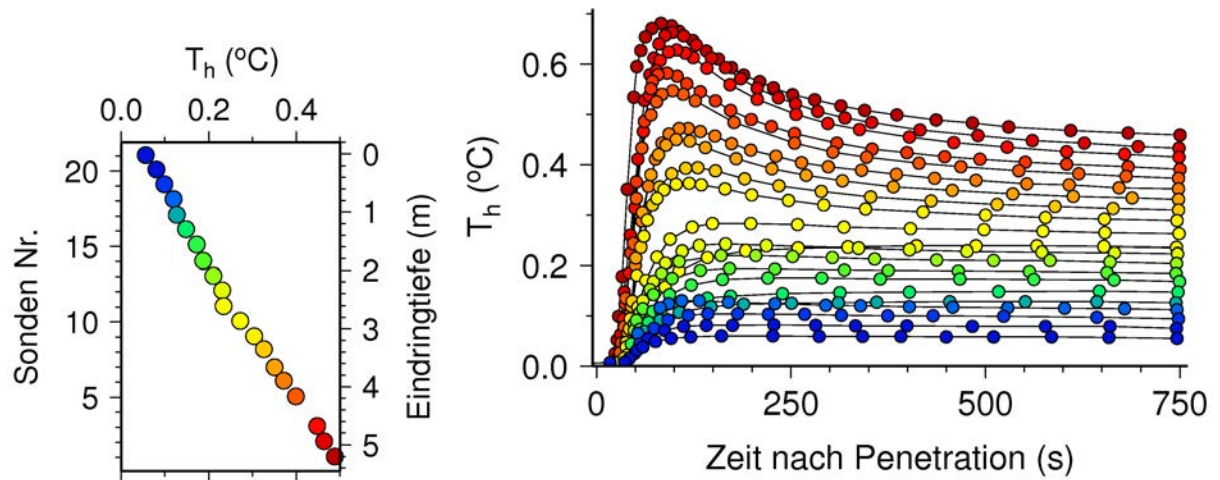


Abbildung 3.33: Ergebnisse einer Temperaturgradientmessung bei Spitzbergen (vgl. Abb. 3.32, Daten von P. Pulm). **Links:**  $dT_h/dz$  wird aus der Auftragung der Sensortemperatur über die Eindringtiefe bestimmt. **Rechts:** Die  $T_h$  Daten an jedem Sensor (farbig unterschieden) zeigen kurzzeitig hohe Werte infolge der Reibungswärme bei der Penetration (Reibungspeak), welche nach etwa 750 s abgeklungen sind.

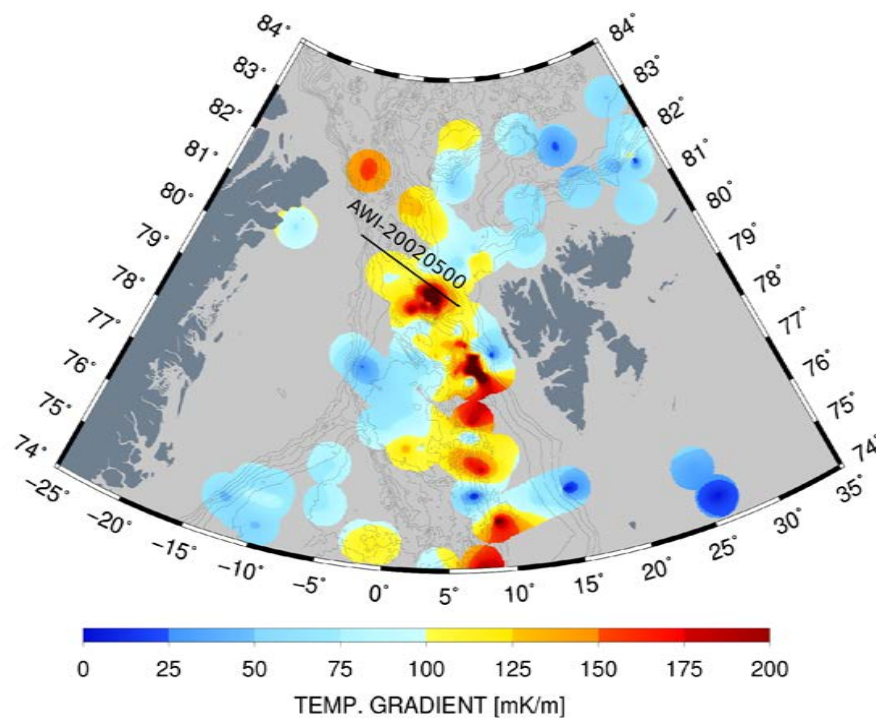


Abbildung 3.34: Gemessene Temperaturgradienten in der Framstrasse zwischen Grönland und Spitzbergen (von P. Pulm 2009, Polarstern AWI, siehe Geissler et al., 2014). Die schwarze Linie markiert das seismische Mehrkanalprofil Nr. 20020500 des AWI.

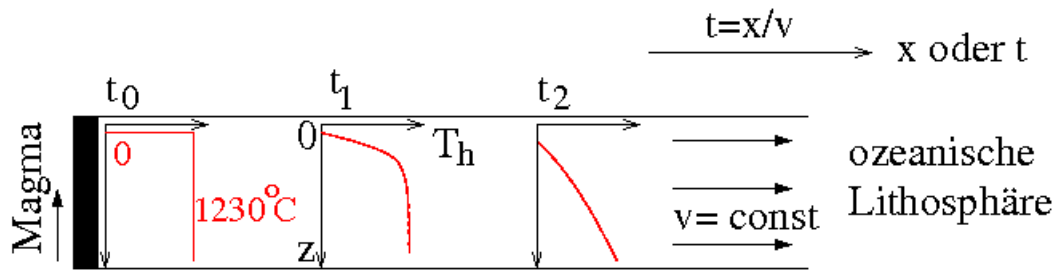


Abbildung 3.35: Abkühlung der ozeanischen Lithosphäre. Zur Zeit  $t_0$  steigt heißes Magma bis zum Meeresboden auf und bildet eine neue ozeanische Lithosphäre. Zu späteren Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  ist die Lithosphäre vom Meeresboden her abgekühlt. Das Temperaturprofil  $T_h(z, t)$  weist eine geringere mittlere Temperaturen auf.

### Wärmeleitungsgleichung und die Abkühlung der ozeanischen Lithosphäre:

Die konduktive Wärmeleitung der Lithosphäre kann in der Regel durch die eindimensionale, thermische Diffusionsgleichung (partielle Differentialgleichung, radiogene Wärmequellen vernachlässigt) beschrieben werden (Annahme, dass  $T_h = T_h(z, t)$ ),

$$\frac{\partial T_h(t, z)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T_h(t, z)}{\partial z^2} \quad , \quad (3.10)$$

wobei  $\kappa$  in  $[m^2/s]$  die **Temperaturleitfähigkeit (thermal diffusivity)** ist<sup>40</sup>, mit  $\kappa = \frac{\kappa_h}{\rho c_p}$  ( $c_p$  ist die spezifische Wärme bei konstantem Druck). Lösungen zu Randwertproblemen von (3.10) sind in [Carslaw and Jaeger \(1959\)](#) ausführlich beschrieben. Eine elementare Lösung beschreibt die Temperaturänderung in einem Halbraum ( $z > 0$ ), an dessen Oberfläche bei  $z = 0$  die Temperatur zur Zeit  $t = 0$  plötzlich einen Sprung um  $T_{h0}$  erfährt. Die Temperatur in dem Halbraum gleicht sich durch Wärmeleitung langsam aus, der Wärmefluss "diffundiert" in den Halbraum hinein.

Diese Lösung kann z.B. zur Messung von  $\kappa_h$  eines Bohrkerns im Labor verwendet werden. Sie ist aber auch ein vereinfachtes Modell für die Abkühlung der ozeanischen Kruste. Zur Zeit  $t = 0$  entsteht neue ozeanische Kruste am mittelozeanischen Rücken. Die junge Kruste hat eine einheitliche Temperatur von etwa  $1500\text{ K}$  (Schmelztemperatur von Basalt). Am Meeresboden ( $z = 0$ ) kommt die heiße Kruste in Kontakt mit dem Meerwasser und wird auf die Temperatur  $273\text{ K}$  gekühlt (Temperatur am Ozeanboden). Die Temperatur in der Kruste wird mit zunehmender Zeit also mit zunehmendem Alter und wegen der Seebodenspreizung mit zunehmender Entfernung zur Rückenachse, abkühlen.

<sup>40</sup> z.B.  $\kappa \approx 1.3 \cdot 10^{-6} m^2/s$  in der oberen Kruste  $\kappa \approx 1.1 \cdot 10^{-6} m^2/s$  im oberen Mantel

Die Randbedingung für unser Randwertproblem ist

$$\begin{aligned} T_h(z=0, t) &= 0 \quad \text{für } t < 0 \\ T_h(z=0, t) &= T_{h0} \quad \text{für } t > 0 \quad . \end{aligned}$$

Der Temperatursprung ist  $T_{h0} \approx -1230 \text{ K}$ . [Carlslaw and Jaeger \(1959\)](#) finden eine Lösung der Differentialgleichung der Form

$$T_h(z, t) = T_{h0} \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \quad \text{mit} \quad \operatorname{erf}(z') = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z'} e^{-x^2} dx \quad . \quad (3.11)$$

$\operatorname{erf}(z')$  wird Error Funktion genannt. Für die Wärmeflußdichte ist  $dT_h/dz$  wichtig; Die Ableitung nach  $z$  ergibt

$$\frac{\partial T_h(z, t)}{\partial z} = \frac{T_{h0}}{\sqrt{\pi \kappa t}} e^{-z^2/(4\kappa t)}$$

und am Meeresboden in der Tiefe  $z = 0$

$$\frac{\partial T_h(z=0, t)}{\partial z} = \frac{T_{h0}}{\sqrt{\pi \kappa t}} \quad . \quad (3.12)$$

Der Kehrwert der Wärmeflußdichte ist nach dieser einfachen Theorie abgesehen von einem möglichen konstanten Quellterm proportional zur Wurzel des Meeresbodenalters ([Abb. 3.36](#)).

Mit dem zeitabhängigen Wärmefluß kann man die Absenkung der ozeanischen Lithosphärenplatte mit dem Alter infolge der Abkühlung abschätzen. Der totale Wärmeverlust der Platte seit ihrer Entstehung bis zur Zeit  $t$  ist das Integral

$$\frac{Q}{A} = \int_0^t \frac{\dot{Q}}{A} dt \sim \sqrt{t} \quad ,$$

und ist proportional zu  $\sqrt{t}$ . Der Wärmeverlust hängt linear mit der Volumenverkleinerung der Platte zusammen (Proportionalitätskonstante ist der Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha$ ). Die Volumenverkleinerung führt zu einer Vergrößerung der Dichte und, wenn man von isostatischem Ausgleich ausgeht, zu einem Absinken der Platte mit der Wurzel des Meeresbodenalters,

$$z - z_0 \sim \sqrt{t} \quad . \quad (3.13)$$

Die Abhängigkeit der Meerestiefe von  $\sqrt{t}$  lässt sich bis zu einem Alter von etwa 80 *Ma* bestätigen ([Abb. 3.36](#), siehe auch [Hasterok, 2013](#)). Für älteren Meeresboden ist die einfache Theorie nicht mehr ausreichend.

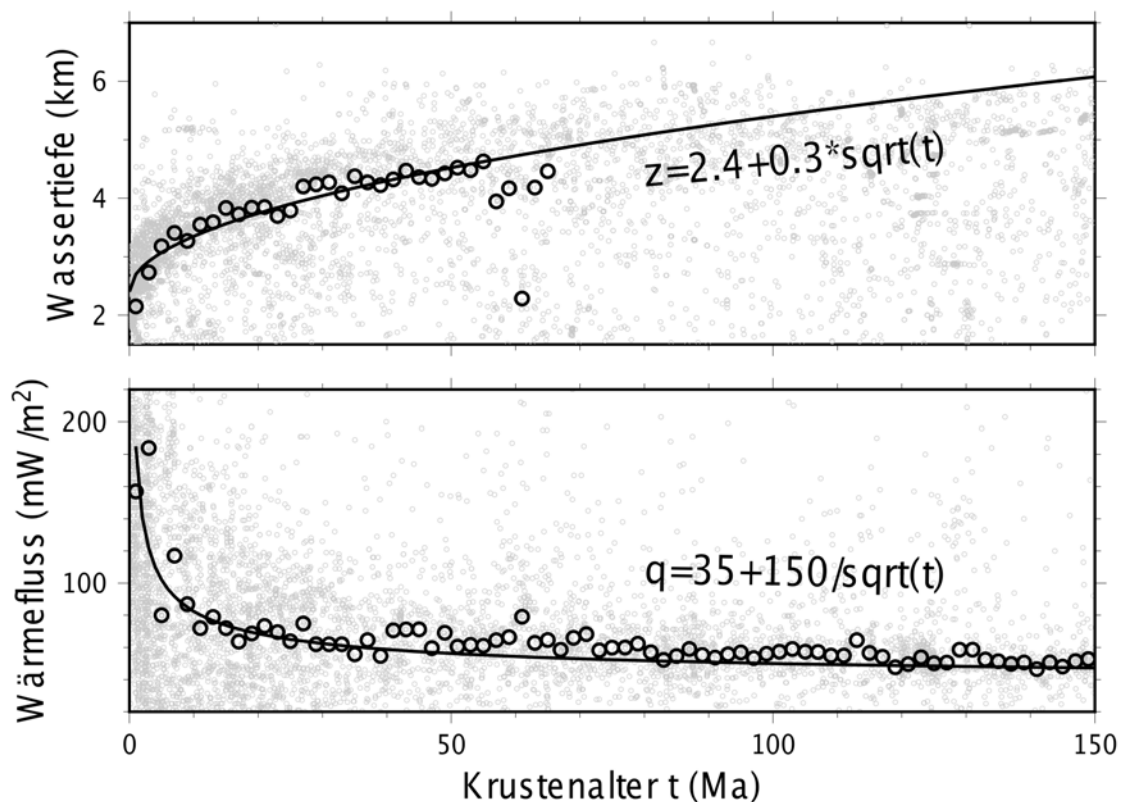


Abbildung 3.36: Gemessene Wärmeflussdichten und Meerestiefen (graue Punkte, etwa 8000 Messungen aus allen marinen Becken) sind über das Alter des Meeresbodens aufgetragen. Die offenen Kreise sind die gemittelten Messwerte (Medianfilter mit Länge von 2 Ma). Die durchgezogenen Linien zeigen die theoretischen Erwartungen nach (3.12) und (3.13), wobei die Faktoren für diesen Plot empirisch bestimmt wurden.

## 4 Potenzialfelder in der Geophysik

### 4.1 Kurzeinstieg in die wichtigsten Grundlagen

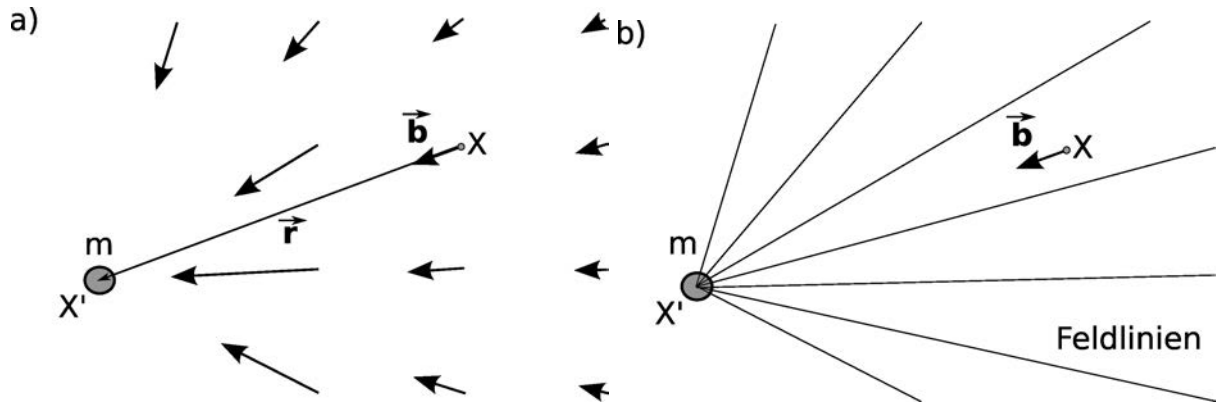


Abbildung 4.1: Gravitationsfeld einer großen, punktförmigen Masse  $m$  im Punkt  $X'$ . (a) Die Pfeile geben die Richtung und Stärke des Gravitationsfeldes an. Auf eine kleine Probemasse ( $m^*$ ) im Aufpunkt  $X$  im Abstand  $r$  wirkt die Gravitationsbeschleunigung  $\mathbf{b}$  in Richtung  $m$ . Abhängig von der Masse der Probekörpers erfährt dieser eine Gravitationskraft  $\mathbf{F}_g = m^*\mathbf{b}$ . (b) Das Feld der Punktmasse wird durch Feldlinien dargestellt.

Als Potenzialfelder bezeichnet man in der Geophysik in der Regel statische, also zeitunabhängige **Kraftfelder**. Beispiele sind das **Gravitationsfeld**, das **Schwerefeld**, das **Zentrifugalfeld**, das **Magnetfeld der Erde**, oder **elektrische Felder**. Beim Gravitations-, Schwere- und Zentrifugalfeld wirkt die Kraft auf eine Masse (z.B. Probemasse  $m^*$ , Abb.4.1), beim elektrischen Feld auf ein elektrisch geladenes und beim Magnetfeld auf ein magnetisiertes Teilchen (oder eine bewegte elektrische Ladung). Wächst die Masse eines Körpers auf der Erde an, dann wächst auch die wirkende Schwerkraft auf diesen Körper. Man führt daher besser eine **Feldstärke** ein, welche die normierte Kraft auf einen "Probekörper" beschreibt. Beim Gravitationsfeld ist der Probekörper die Probemasse, beim elektrischen Feld eine Probeladung, und beim Magnetfeld ein magnetischer Probekörper (magnetischer Dipol oder fiktiver Monopol). Die Feldstärke repräsentiert eine normierte Kraft und beschreibt ausschließlich das Feld unabhängig von den Probekörpern, die in den Einflußbereich des Feldes gebracht werden. Die Feldstärke des Gravitationsfeldes ist die **Gravitationsbeschleunigung  $\mathbf{b}$** , die des Schwerefeldes die **Schwere  $\mathbf{g}$** , die des elektrischen Feldes die **elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$** , und die des Magnetfeldes die **magnetische Flußdichte  $\mathbf{B}$** .

$\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{g}$  sind **Vektorgrößen**, die entsprechenden Felder sind also **Vektorfelder**. Die Vektorfelder können formal durch Vektoren an jedem beliebigen Gitterpunkt beschrieben werden. Die Richtung des Vektors gibt die Richtung der Kraft an, die auf den

Probekörper an diesem Punkt wirkt. Die Länge des Vektors gibt die Größe der Kraft auf den Probekörper an (vgl. Abb.4.1). Zur Veranschaulichung des Vektorfeldes werden häufig **Feldlinien** gezeichnet, die sozusagen Trajektorien entlang der Feldvektoren darstellen. Der Betrag der Feldstärke kann aber nicht mehr an der einzelnen Feldlinie abgelesen werden. Allerdings stellt die Feldlinien-Dichte ein Maß für die Stärke des Feldes dar. Ziehen sich die Feldlinien in einer Region zusammen, dann wächst dort der Betrag der Feldstärke, während er in Regionen mit abnehmender Feldliniendichte abnimmt (vgl. Abb.4.1).

Das eigentliche Ziel in der Geophysik ist es die physikalischen Felder der Erde zu vermessen, um aus möglichen Feldanomalien Rückschlüsse auf die Struktur der Erde und deren Inhomogenitäten im Erdinnern zu ziehen. Voraussetzung dafür ist, dass man den Effekt einer Inhomogenität im Erdinnern auf das Vektorfeld theoretisch berechnen kann.

**Potenzialfelder** sind sogenannte **konservative Vektorfelder**. Das sind Felder und Systeme, in denen die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie konstant ist. D.h. im Falle der Schwere z.B., dass die Arbeit, die nötig ist, um eine Masse von  $X_1$  nach  $X_2$  zu verschieben, wegunabhängig ist. Hebt man einen Stein auf, und setzt ihn wieder auf denselben Punkt, dann hat das System Erde-Stein letztlich keine Energie verloren oder gewonnen. Potenzialfelder können einfacher durch **skalare Potenziale** anstelle von vektoriellen Feldstärken beschrieben werden. Der Potenzialbegriff wird am Beispiel des Schwerfeldes erläutert.

Das skalare Potenzial des Schwerfeldes wird durch  $W = W(x, y, z)$  (in Kugelkoordinaten ist  $W = W(r, \Theta, \phi)$ ) definiert. Die Schwerebeschleunigung berechnet sich dann aus

$$\mathbf{g} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}\right)^T = -\text{grad}W = -\nabla W \quad . \quad (4.1)$$

$\mathbf{g}$  ist der **Gradient des Schwerepotenzials**<sup>41</sup>, also der Vektor, der die Richtung und den Betrag der maximalen Änderung von  $W$  angibt.

Genauso wie  $W$  für  $\mathbf{g}$  kann ein Gravitationspotenzial  $W_b$  und ein Zentrifugalpotenzial  $W_\zeta$  eingeführt werden mit

$$\mathbf{b} = -\nabla W_b, \quad \boldsymbol{\zeta} = -\nabla W_\zeta \quad .$$

Entsprechendes gilt für  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ .

Die Arbeit beim Verschieben einer Masse kann mit dem Potenzial einfach berechnet werden. Wird die Probemasse  $m^*$  um den infinitesimalen Betrag  $d\mathbf{s}$  verschoben, so ist die Arbeit  $dQ_s$  nötig. Diese ist gleich der aufgewendeten Kraft  $\mathbf{F}$  entlang  $d\mathbf{s}$  gegen die

<sup>41</sup> In Kugelkoordinaten gilt:  $g_r = -\frac{\partial W}{\partial r}$ ,  $g_\Theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \Theta}$  und  $g_\phi = -\frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial W}{\partial \phi}$



Schwerkraft,

$$dQ_s = -m^* \mathbf{g} \mathbf{d}s = +m^* \nabla W \mathbf{d}s = +m^* dW \quad . \quad (4.2)$$

Es gilt  $dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz = \nabla W \mathbf{d}s$ . Beim Verschiebung der Masse über einen endlichen Weg von  $X_1$  nach  $X_2$  kann die Arbeit über inkrementell kleine Wege integriert werden, so dass für die gesamte erforderliche Arbeit gilt

$$Q_s = \int_{X_1}^{X_2} dQ_s = m^* \int_{X_1}^{X_2} dW = m^* (W(X_1) - W(X_2)) \quad . \quad (4.3)$$

D.h., die Potenzialdifferenz zwischen  $X_2$  und  $X_1$  bestimmt, nach Multiplikation mit  $m^*$ , die aufzuwendende Arbeit bei Verschiebung der Probemasse von  $X_1$  nach  $X_2$ .

Das Schwerepotenzial der Erde nimmt mit der Höhe zur Erdoberfläche zu und strebt im Unendlichen asymptotisch gegen einen konstanten Wert. Da das Schwerepotenzial der Erde per Definition im Unendlichen Null ist, wird es mit Annäherung an die Erde negativ. Aus der Potenzialdifferenz zwischen dem Weltall (Null) und dem Potenzial an der Erdoberfläche kann die Arbeit berechnet werden, die nötig ist, um eine Rakete ins All zu schießen. Bewegt man sich hingegen (reibungsfrei) auf einer Bahn gleichen Potenzials, dann muss keine Arbeit aufgebracht werden.

Ein Fläche gleichen Potenzials wird als **Äquipotenzialfläche** bezeichnet. Der Gradient des Potenzials, also der Vektor der Feldstärke (im Fall des Schwerepotenzials  $\mathbf{g}$ ), steht **immer senkrecht auf den Äquipotenzialflächen**. Äquipotenziallinien schneiden die Feldlinien also immer im rechten Winkel.

Äquipotenzialflächen geben Gleichgewichtsflächen in dem entsprechenden Feld an. Können sich z.B. die Masseteilchen wie im Fall des flüssigen Ozeans frei verschieben, dann stellt die Oberflächen des ruhenden Ozeans eine Äquipotenzialfläche für das Schwerfeld dar. Entsprechende Aussagen findet man auch bei den anderen Potenzialfeldern der Erde.

Ein wichtiger Vorteil einer Potenzialfelddarstellung ist, dass man nur ein skalares anstelle eines Vektorfeldes betrachtet. Entsprechend ist die Berechnung des theoretischen Effekts eines inhomogenen Gebietes in der Erde (z.B. eines Salzstocks) viel einfacher im Vergleich zu der direkten Analyse der vektoriellen Feldstärke. Entsprechende Beispiele werden in den folgenden Unterkapiteln besprochen

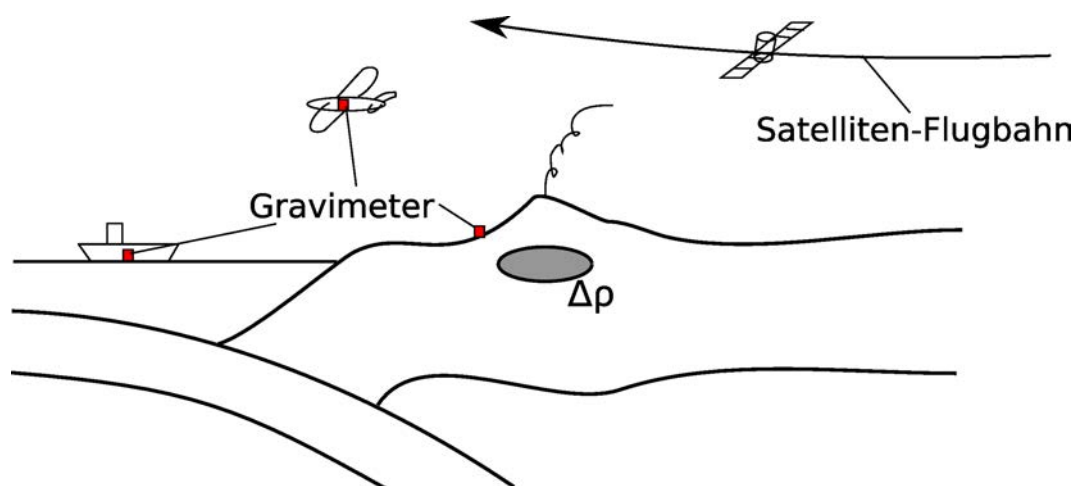


Abbildung 4.2: Schweremessungen werden mit Hilfe von Gravimetern an Land, im Wasser und in der Luft durchgeführt. Im Weltraum kann das Schwerefeld indirekt durch die Auswertung der Flugbahnvariationen von Satelliten bzw. Satellitendoublets bestimmt werden. Schweremessungen dienen dazu Dichteinhomogenitäten im Erdinnern ( $\Delta\rho$ , z.B. Magmakammern, Subduktionszonen, Gebirgswurzeln, u.a.) und deren zeitliche Variationen zu kartieren und zu interpretieren.

## 4.2 Das Schwerefeld der Erde und Gravimetrie

Die Schwere spielt eine wichtige Rolle in der Geophysik und Planetologie. Sie bestimmt die Gleichgewichtsfigur der Erde und der Planeten und erlaubt Rückschlüsse auf heterogene Massen- oder Dichteverteilungen in der Erde. Inhomogene Massenverteilungen und Dichteanomalien in der oberen Erdkruste führen zu kurzwelligen Schwereanomalien, d.h. Abweichungen des Schwerefeldes von einem erwarteten Referenzfeld. Masseninhomogenitäten in größerer Tiefe wie im oberen Erdmantel führen zu langwelligen Schwereanomalien. Die Interpretation von kurz- und langwelligen Schwereanomalien kann für sehr unterschiedliche Problemstellungen interessant sein, wie zum Beispiel die Lagerstättenprospektion, die Untersuchung des Wasserhaushalts nahe der Oberfläche, Tektonik und Vulkanismus, die Gleichgewichtsfigur der Erde oder die Konvektion und Geodynamik im Mantel.

Die Schwere kann relativ einfach gemessen werden, sowohl an Land, zur See oder in der Luft oder indirekt durch die Auswertung von Satellitenbahnkurven. Allerdings haben Schweredaten alleine in der Regel keine hohe Auflösung für die Dichtestruktur im Erdinnern und lassen sich nicht eindeutig interpretieren. Deshalb werden Schwereanomalien häufig in Kombination mit anderen Messdaten, z.B. Seismik-Daten, interpretiert.

Das Kapitel zur Schwere ist in drei Blöcke gegliedert; (1) Grundlagen zum Schwerefeld, (2) Messgeräte und Messverfahren und (3) das Prozessing und die Interpretation von

Schwereanomalien.

#### 4.2.1 Theorie der Schwere

##### **Schwerepotenzial und Schwerebeschleunigung:**

Auf jede Masse  $m^*$  (Probemasse) auf und in der Erde wirken Kräfte durch die Massen-

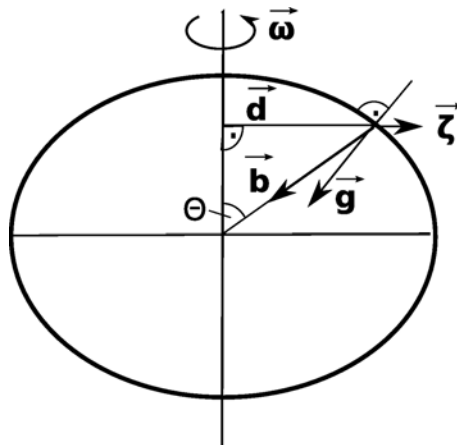


Abbildung 4.3: Die Schwerebeschleunigung  $\mathbf{g}$  setzt sich aus der Gravitationsbeschleunigung  $\mathbf{b}$  und der Zentrifugalbeschleunigung  $\boldsymbol{\zeta}$  zusammen. Die Rotationsgeschwindigkeit der Erde ist  $\omega_E = \frac{2\pi}{86164\text{ s}}$ .  $\Theta$  ist die Poldistanz.

anziehung (**Gravitationskräfte**  $\mathbf{F}_g = m^*\mathbf{b}$ ) und durch die Trägheit der Masse bei Beschleunigung (**Zentrifugalkräfte**  $m^*\boldsymbol{\zeta}$  auf der rotierenden Erde). Die Schwerkraft auf der Erde ist die vektorielle Summe aus diesen beiden Kräften. Zentrifugal- und Gravitationskraft hängen linear von der Masse  $m^*$  selbst ab. Normiert man die Kraft durch  $m^*$ , dann erhält man die massenunabhängige Beschleunigung oder Feldstärke. Die **Schwerebeschleunigung**  $\mathbf{g}$  berechnet sich dann aus der vektoriellen Summe von Gravitations- und Zentrifugalbeschleunigung,

$$\mathbf{g} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\zeta} \quad . \quad (4.4)$$

Sie wird in der Geophysik und Geodäsie häufig noch **in Gal (CGS-Einheit) angegeben** (nach G. Galilei, 1564-1642), wobei  $1\text{ Gal} = 10^{-2}\text{ m/s}^2$  und  $1\text{ mGal} = 10^{-5}\text{ m/s}^2 = 10\text{ g.u.}$  ist. Die Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche liegt im Bereich von  $978\text{ Gal}$  (Äquator) und  $983.3\text{ Gal}$  (Pol). **Schwereanomalien** liegen im Bereich von einigen  $\text{mGal}$  für langwellige Geoidundulationen und bis zu  $0.01\text{ mGal}$  für kurzwellige, lokale Anomalien.

Die Erde ist bestrebt eine Figur mit minimaler potenzieller Energie anzunehmen. Der fe-

ste Erdkörper verhält sich bei extrem lang anhaltender Belastung (z.B. durch die Schwerkraft) wie eine viskose Flüssigkeit<sup>42</sup>. Wenn zusätzlich zur Schwerkraft keine anderen Kräfte wirken, dann nähert sich die Erdoberfläche einer Gleichgewichts-Äquipotenzialfläche an mit minimaler potenzieller Energie. Die Abweichung der tatsächlichen Erdfigur von der Äquipotenzialfläche minimaler Energie wird vor allem durch tektonische Prozesse (Kräfte) verursacht.

Hier geht erstmal darum die Gleichungen für die Schwerebeschleunigung und das Schwerepotenzial einer geschichteten, rotierenden Kugelerde abzuleiten. Die Gravitationskraft  $\mathbf{F}_g$  oder -beschleunigung  $\mathbf{b}$ , die durch eine punktförmige Masse  $m$  im Zentrum am Punkt  $(x', y', z')$  auf eine bewegliche Probemasse  $m^*$  am Punkt  $(x, y, z)$  im radialen Abstand  $r$  entsteht, ist

$$\mathbf{F}_g = -G_E \frac{m m^*}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{b} = -\frac{\mathbf{F}_g}{m^*} = G_E - \frac{m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad . \quad (4.5)$$

wobei  $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$  und  $\hat{\mathbf{r}}$  der Einheitsvektor in Richtung  $\mathbf{r}$  ist.  $G_E$  ist die universelle Gravitationskonstante<sup>43</sup>,  $G_E = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ .

In Anhang C wird explizit gezeigt, dass die Gravitationsbeschleunigung ausserhalb einer Kugelerde mit radialsymmetrischer Dichteverteilung  $\rho(r)$  gleich ist, als ob die Gesamtmasse  $m_E$  der Erde im Mittelpunkt konzentriert wäre. Dieses Ergebnis wird vorerst verwendet, so dass das Gravitationspotenzial berechnet wird aus ( $r \geq r_E$ )

$$W_b = -G_E \frac{m_E}{r} \quad . \quad (4.6)$$

Hinzu kommt der Anteil durch die **Zentrifugalbeschleunigung**. Dieser ist auf der Erde viel kleiner als die Gravitationsbeschleunigung; am Äquator etwa  $3.4 \text{ Gal}$  und an den Polen Null. Jede mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_E = 2\pi/(1 \text{ Sterntag}) = 2\pi/86164 \text{ s}$  rotierende Masse in und auf der Erde erfährt eine Zentrifugalbeschleunigung  $|\zeta| = \omega_E^2 d = \omega_E^2 r \sin \Theta$ , wobei  $d$  der orthogonale (kürzeste) Abstand der Probemasse zur Rotationsachse ist (Abb. 4.3).  $\zeta$  hängt nicht von der Masse der Erde sondern nur von  $r$ ,  $\Theta$  und  $\omega_E$  ab. Das Zentrifugalpotenzial ist dann

$$W_\zeta = -\frac{1}{2} \omega_E^2 d^2 = -\frac{1}{2} \omega_E^2 r^2 \sin^2 \Theta \quad . \quad (4.7)$$

<sup>42</sup> Zähflüssiger Honig mit einer Viskosität von etwa  $10^3 \text{ Pas}$  ist im Vergleich zu Wasser hochviskos. Die dynamische Viskosität des Erdmantels ist im Bereich von  $10^{19} - 10^{21} \text{ Pas}$

<sup>43</sup> In der Teilchenphysik gibt es Modelle, nach denen  $G_E$  nicht konstant ist; dies konnte bisher aber nicht durch Messungen bestätigt werden.

Das Schwerfeld hat damit das Potenzial

$$W = W_b + W_\zeta = -G_E \frac{m_E}{r} - \frac{1}{2} \omega_E^2 r^2 \sin^2 \Theta \quad . \quad (4.8)$$

Daraus erhält man die Radial- ( $g_r$ ) und polare Tangentialkomponente  $g_\Theta$  der Schwerebeschleunigung in Kugelkoordinaten<sup>44</sup>

$$g_r = -\frac{\partial W}{\partial r} = -G_E \frac{m_E}{r^2} + \omega_E^2 r \sin^2 \Theta, \quad g_\Theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \Theta} = \frac{1}{2} \omega_E^2 r \sin 2\Theta \quad .$$

An der Erdoberfläche ergibt sich

$$g_r = (-982.037 + 3.389 \sin^2 \Theta) \text{ Gal}, \quad g_\Theta = 1.695 \sin 2\Theta \text{ Gal} \quad . \quad (4.9)$$

Verwendet man anstelle der Poldistanz  $\Theta$  die geographische Breite  $\theta = 90^\circ - \Theta$ , dann ergibt sich (in Gal)

$$\begin{aligned} -g_r &= 982.037 - 3.389 \cos^2 \theta = 982.037 - 3.389(1 - \sin^2 \theta) \\ &= 978.648(1 + 0.003463 \sin^2 \theta) \quad . \end{aligned}$$

Das Modell der rotierenden Kugelerde ist eine Näherung für die Erde, weil die Dichteverteilung in der Erde nicht in Strenge radialsymmetrisch ist und die Figur der Erde besser durch ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit der großen Halbachse durch den Äquator als durch eine Kugel beschrieben wird. Man spricht auch von der Äquatorwulst der Erde. Eine genauere Formel für die Schwere an der Erdoberfläche wird später kommen. Man kann mit (4.9) aber bereits wichtige Eigenschaften des Schwerfeldes diskutieren. Die Schwere auf der Erdoberfläche hängt von der Poldistanz  $\Theta$  ab (oder der geographischen Breite  $\theta$ ). Sie ist am Pol am größten und am Äquator am kleinsten. Es gibt außerdem eine Tangentialkomponenten der Schwere, die zum Äquator gerichtet ist und für  $\Theta = 45^\circ$  am größten ist.

### **Das Geoid und das Referenzellipsoid:**

Die Gleichgewichtsfigur der Erde weicht von der Kugelgestalt ab. Als Bezugsfläche für die Schwerefigur der Erde wird eine Äquipotenzialfläche definiert, die im Mittel entlang der Meeresoberfläche verläuft und Geoid genannt wird. Das Potenzial des **Geoid** beträgt  $W_0 = -6.264 \cdot 10^7 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . Die Gleichgewichtsfigur einer vollkommen mit Wasser bedeckten Erde würde das Geoid darstellen. Die physikalische Erdoberfläche auf dem Festland mit allen Bergen und Tälern weicht vom Geoid ab. Das Geoid über dem Festland wird sozusagen durch die Oberfläche eines virtuellen Weltmeeres repräsentiert, das unter den Kontinenten durchfließen kann. Alle Massenverteilungen und -inhomogenitäten unterhalb der gedachten Meeresoberfläche beeinflussen die Figur (die Höhe) des Geoids. Umgekehrt kann man aus der Höhe des Geoids Rückschlüsse auf Massenininhomogenitäten ziehen.

---

<sup>44</sup> $2 \sin \Theta \cos \Theta = \sin 2\Theta$

Wie kann man die Höhe des Geoids definieren? Dazu führt man eine geometrisch einfach zu beschreibende Referenzfigur ein, welche der theoretischen Äquipotenzialfläche einer idealisierten, rotationsymmetrischen Erde entspricht. Die Höhe des wahren Geoids wird gegenüber dieser Referenzfläche angegeben. Die idealisierte Erde verhält sich wie eine Flüssigkeit mit Dichtezunahme in der Tiefe, entsprechend der Dichtezunahme in der realen Erde. Dies führt bei Rotation auf ein **Rotationssphäroid** als Gleichgewichtsfigur (Äquipotenzialfläche) der idealisierten Erde. Da das Rotationssphäroid aber mathematisch relativ kompliziert zu beschreiben ist, hat man sich in internationalen Kommissionen auf eine geometrisch einfachere Referenzfigur geeinigt, das sogenannte **Referenzellipsoid**. Das Referenzellipsoid ist dem Rotationssphäroid sehr ähnlich. Die große Halbachse des Referenzellipsoids ist  $r_a = 6378160 \text{ m}$  (Äquatorradius), die kleine  $r_c = 6356755 \text{ m}$  (Polradius) und die Abplattung  $f_{\text{Abplattung}} = \frac{r_a - r_c}{r_a} = \frac{1}{298.25}$ . Das Referenzellipsoid ist aber nicht nur eine einfache geometrische Fläche, sondern ebenfalls eine Äquipotenzialfläche  $W^{(e)}$  mit  $W_0^{(e)} = W_0$ . Die Höhenabweichung zwischen dem Referenzellipsoid und dem Geoid wird **Geoidundulation** genannt. Dem Referenzellipsoid wird ein Referenzschwerewert zugeordnet, der **Normalschwere**  $g_0$  genannt wird

$$g_0 = 978.0490 (1 + 0.0052884 \sin^2 \theta - 0.0000059 \sin^2(2\theta)) \text{ Gal} \quad (4.10)$$

Die Normalschwere ist  $g_0 = |\nabla W^{(e)}(0)| = \frac{dW^{(e)}}{dN}|_0$ . Sie hängt von der geographischen Breite  $\theta$  ab ( $\theta \approx 90^\circ - \Theta$ ). Abb. 4.4 vergleicht die Breitenabhängigkeit von  $|\mathbf{g}|$  nach (4.9) und  $g_0$ . Beide Kurven zeigen die gleichen Trends mit einer geringeren Schwere am Äquator ( $\theta = 0^\circ$ ) und einer erhöhten Schwere am Pol ( $\theta = 90^\circ$ ) und einer Abhängigkeit von  $\sin^2 \theta$ . Die Erniedrigung und Erhöhung der Referenzschwere am Äquator und Pol ist wegen der elliptischen Form des Referenzellipsoids stärker ausgeprägt als für die Kugelerde.

Die Geoidundulation kann in der Regel nicht direkt, z.B. in Metern, gemessen werden. Liegen Schwerewerte als Messdaten vor, dann werden diese auf die Höhe des Referenzellipsoids zurückgerechnet (reduziert) und die Abweichung gegenüber  $g_0$  als Anomalie (Residuum) abgeleitet. Aus flächenhaft bestimmten Schwereanomalien kann eine Potenzialanomalie abgeleitet werden (Verfahren von Stokes), aus der dann wiederum die Geoidhöhe über dem Referenzellipsoid (Geoidundulation) berechnet wird. Bei der Auswertung von Satelliten Flugbahnen und der Vermessung der mittleren Meereshöhe aus Radardaten können direkt Höhenmodelle von Äquipotenzialflächen bestimmt und auf das Niveau des Referenzellipsoid zurückgerechnet werden (Feldfortsetzung).

### ***Schwere der inhomogenen Erde und lokale Schwereanomalien:***

Wie bereits diskutiert wurde stellt das Gravitationspotenzial den größten Anteil der



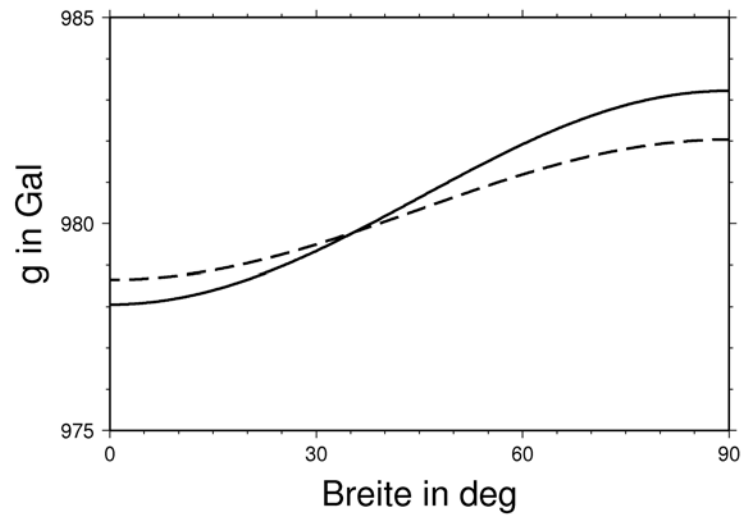


Abbildung 4.4:  $|g|$  nach (4.9) (gestrichelt) und  $g_0$  nach (4.10) (durchgezogen) als Funktion der geographischen Breite. Die Schwereabplattung  $g_0$  für das Referenzellipsoid ist deutlich größer als  $g$  auf einer kugelförmigen rotierenden Erde (Punktmassenmodell).

Schwere. Um lokale Schwereanomalien zu interpretieren, genügt es in der Regel, das Gravitationspotenzial der anomalen Regionen gesondert zu betrachten. Hat man einen räumlich ausgedehnten Körper mit dem Volumen  $V$ , dann ist das Gravitationspotenzial am Aufpunkt  $P$  die Überlagerung aus allen Potenzialanteilen von infinitesimalen Punktmassen (elementaren Punktquellen). Mit  $dm = \rho dV = \rho dx' dy' dz'$  erhält man (vgl. Abb. 4.5),

$$W_b = -G_E \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} \frac{\rho}{d} dx' dy' dz' \quad . \quad (4.11)$$

Diese Gleichung ist Ausgangsbasis, um das Gravitationspotenzial einer komplizierteren Erde zu berechnen oder aber, um den Schwereeffekt durch lokale, flache Dichteveriationen abzuschätzen. In Anhang C werden Beispiele gebracht.

Ein etablierter Ansatz ist,  $1/d$  nach Kugelfunktionen zu entwickeln, wobei  $d^2 = r'^2 + r^2 - 2rr' \cos \vartheta$  ist (Kosinussatz, z.B. [Bronstein and Semendjajew, 1985](#)). Die Kugelfunktionen gehen weit über den Stoff einer Einführungsvorlesung hinaus, und werden hier natürlich nicht vertieft. Einige Aspekte werden knapp zusammengefasst. Die Kugelfunktionsentwicklung erlaubt es, das Schwerepotenzial als eine endliche Reihe aus definierten Funktionen darzustellen, wobei die Gewichtungsfaktoren der Terme zunächst unbekannt sind. Messwerte der Schwere auf der Erdoberfläche lassen sich ebenfalls in Kugelfunktionen entwickeln und darstellen, so dass man durch Koeffizientenvergleich Rückschlüsse auf Anomalien und Inhomogenitäten im Innern ziehen kann.

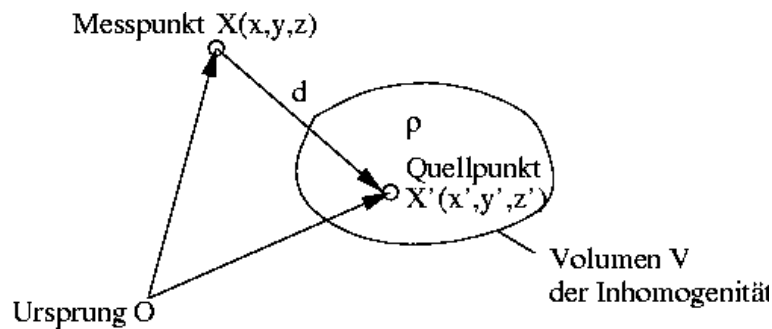


Abbildung 4.5: Skizze zur Berechnung des Gravitationspotenzials eines ausgedehnten Körpers mit variabler Dichte  $\rho(x', y', z')$  und dem Volumen  $V$ . Das Potenzial im Messpunkt  $X$  summiert sich aus allen Potenzialanteilen von einzelnen Quellpunkten im Volumen  $V$  auf.

Die Terme kleiner Ordnung  $l$  in der Kugelfunktionsentwicklung haben die größten Wellenlängen. Der Term mit  $l = 0$  stellt das Potenzial eines Massenpunkts dar, für den die Gesamtmasse  $m_E$  der Erde im Ursprung liegt. Der größte Term der Entwicklung gehört zu  $l = 2$  ( $C_2^0$ ) und entsteht durch den Äquatorwulst der Erde. Er kann durch die Hauptträgheitsmomente der Erde ausgedrückt werden (vgl. Kapitel 2.2.2)  $C_2^0 = \frac{J_C - J_A}{r_a^2 m_E}$ .

Abb. 4.6 zeigt globale Geoidundulationen in Meter aus einer Kugelfunktionsentwicklung bis zur Ordnung 2190. Die größte Abweichung des Geoids gegenüber dem Referenzellipsoid ist ein  $-106\text{ m}$  tiefes "Schwereloch" an der Südspitze Indiens ( $79^\circ$  Länge,  $5^\circ$  Breite). Die größte Geoiderhebung von etwa  $85\text{ m}$  liegt nördlich von Australien ( $138^\circ$  Länge,  $-4^\circ$  Breite). Die Ursache der langwelligen Undulationen liegt im tiefen Erdmantel; daher ist eine Korrelation mit Plattengrenzen in Abb. 4.6 nicht zu erkennen. Abb. 4.7 zeigt gemittelte Geoidundulation als Funktion der geographische Breite und Länge. Das Geoid hat eine komplizierte Form und weist z.B. an der südlichen Polarregion eine "Delle" und an der nördlichen Polarregion eine "Beule" auf. Die Dellen und Beulen können nicht durch die mittlere Verteilung der Kontinente oder kontinentaler Kruste erklärt werden. Die Beulenform des Geoids wird manchmal als "Potsdamer Kartoffel" bezeichnet, da die 3D Abbildungen der im Rahmen von Satellitenmissionen des Deutschen GeoForschungsZentrums Potsdam gewonnen, hochgenauen Messungen zum Geoid gewisse Ähnlichkeiten mit einer Kartoffel haben.

Wäre die Massenverteilung in der Erde radialsymmetrisch, dann wären die Satelliten-Flugbahnen exakte Ellipsen. Masseninhomogenitäten führen zu einer **Abweichung von der Ellipsenbahn**. Aus der Messung der Abweichung, z.B. indem die Entfernung zum Satelliten aus der Laufzeit eines Laserpulses abgeleitet wird, kann die Geoidundulationen bestimmt werden. Die Satellitenbahnen selbst zeigen wegen der Entfernung zur Erde allerdings nur relativ langwellige Undulationen. Eine spezielle Messmethode über Ozea-

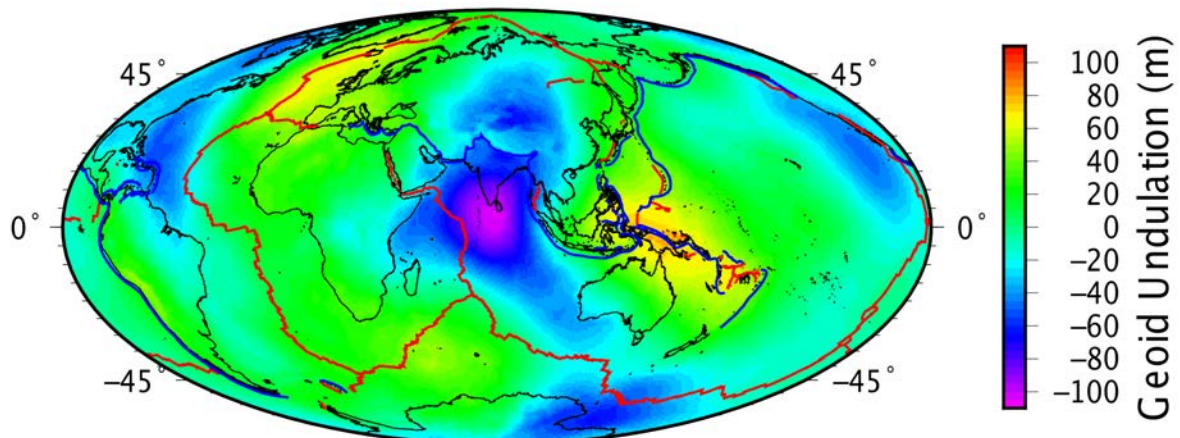


Abbildung 4.6: Globale Geoidundulationen (farbiges Feld, Synthese von Kugelfunktionsentwicklung bis zur Ordnung  $l = 2190$ , Modell EGM2008, auf  $1^\circ$  abgetastet) mit der Verteilung von Rücken (rot) und Tiefseegräben (blau). Hammer Projektion mit zentralem Meridian bei  $80^\circ$ .

nen wird **Satellitenaltimetrie** genannt, bei der die kurzwellige Meeresoberfläche sehr genau vermessen wird, indem aktiv vom Satellit aus Radarpulse ausgesendet werden, die an der Meeresoberfläche reflektiert und am Satelliten wieder empfangen werden. Bevor Satellitenaltimetrie möglich war, gab es mehr genaue Landmessungen der Schwere als Seemessungen. Die Satellitenmissionen GEOS3 und SEASAT in 1975 und 1978 haben dies geändert und das Verhältnis umgedreht. Das Geoid ist durch die Messungen der Satellitenaltimetrie über Ozeanen heute bis auf eine Höhe von weniger als  $10\text{ cm}$  bekannt. Abb. 4.8 zeigt kurzwellige Geoidundulation der mittleren Meeresoberfläche, indem langwellige Feldanteile von Abb. 4.6 abgezogen wurden. Die kurzwelligen Undulation variieren zwischen  $\pm 2\text{ m}$ , während die langwelligen Anteile in Abb. 4.6 Variationen zwischen  $\pm 100\text{ m}$  hatten. Die kurzwelligen Residuen in Abb. 4.8 spiegeln im Wesentlichen die bathymetrischen Erhebungen und Senken im Ozean wieder. Schweremessungen können sozusagen verwendet werden, um die Tiefe des Meeresbodens zu kartieren. So führt das Massendefizit in dem Tiefsee-graben vor Indonesien/Sumatra zu einer negativen Anomale von etwa  $-2\text{ m}$ , während im vorgelagerten Meeresboden eine positive Undulation von etwa  $+1\text{ m}$  erkannt wird. Topographische Rücken wie der Ninetyeast Ridge oder die Hotspotspur des Reunion führen zu positiven Undulationen (Massenüberschuss). Allerdings skalieren die kurzperiodischen Undulationen nicht streng linear mit der Meeresboden Bathymetrie (z.B. in dem vorgelagerten Bulge eines Tiefsee-grabens, siehe Abb. 4.9), da sich z.B. durch die Biegesteifigkeit der Lithosphäre oder die elastische Antwort massenentlasteter Regionen nicht ausgeglichene Regionen bilden können, die als Geoidundulation erkennbar sind aber nicht gleichermaßen als bathymetrische Senke oder Erhebung.

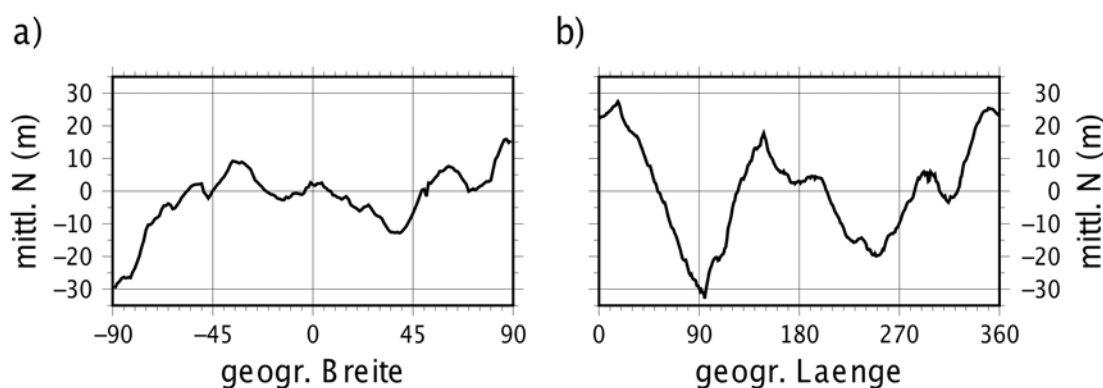


Abbildung 4.7: Mittlere Geoidundulation  $N$  aus Abb. 4.6 als Funktion der geographischen Breite (a) und Länge (b).

Satellitenbasierte Schwere- und Geoidmessungen sind heutzutage so genau, dass damit zeitliche Änderungen des Schwerefeldes durch die Bindung von Wasser in Böden (durch Feuchtigkeit), oder durch einzelne größere Flutereignisse untersucht werden können (Rammillien et al., 2005). Variationen des Drucks am Ozeanboden, und damit verbunden zeitliche variierende Tiefseeströmungen, können durch Schwereuntersuchungen vom Weltall aus analysiert werden.

Die Schweredaten des Satellitenprogramms *GRACE* haben erstmalig auch ermöglicht, die zeitliche Änderung des Schwerepotenzials durch die Verschiebung der oberflächennahen Massen während eines Starkbebens (Sumatra 2004,  $M_W = 9.3$ ) zu erfassen (z.B. Han et al., 2006). Das Sumatra Beben hat nicht nur das Geoid der Erde verändert, sondern auch die Rotationsachse der Erde um etwa 8.6 cm in Richtung Mittelsibirien ( $130^\circ$ ) verschoben, gerade entgegengesetzt der Rotationsachsendrift des *True Polar Wander* durch postglaziale Hebung und Subduktionszonen (Sabadini et al., 2007)<sup>45</sup>.

<sup>45</sup> Der True Polar Wander durch postglaziale Hebung beträgt etwa 10.3 cm/a und zeigt in Richtung Neufundland ( $\approx 75^\circ W$ ). Der True Polar Wander durch den kumulativen Effekt von Erdbeben ist im Mittel nur etwa 1 cm/a und etwa entgegengesetzt gerichtet (liegt vermutlich an der globalen Verteilung der Erdbeben in Subduktionszonen)

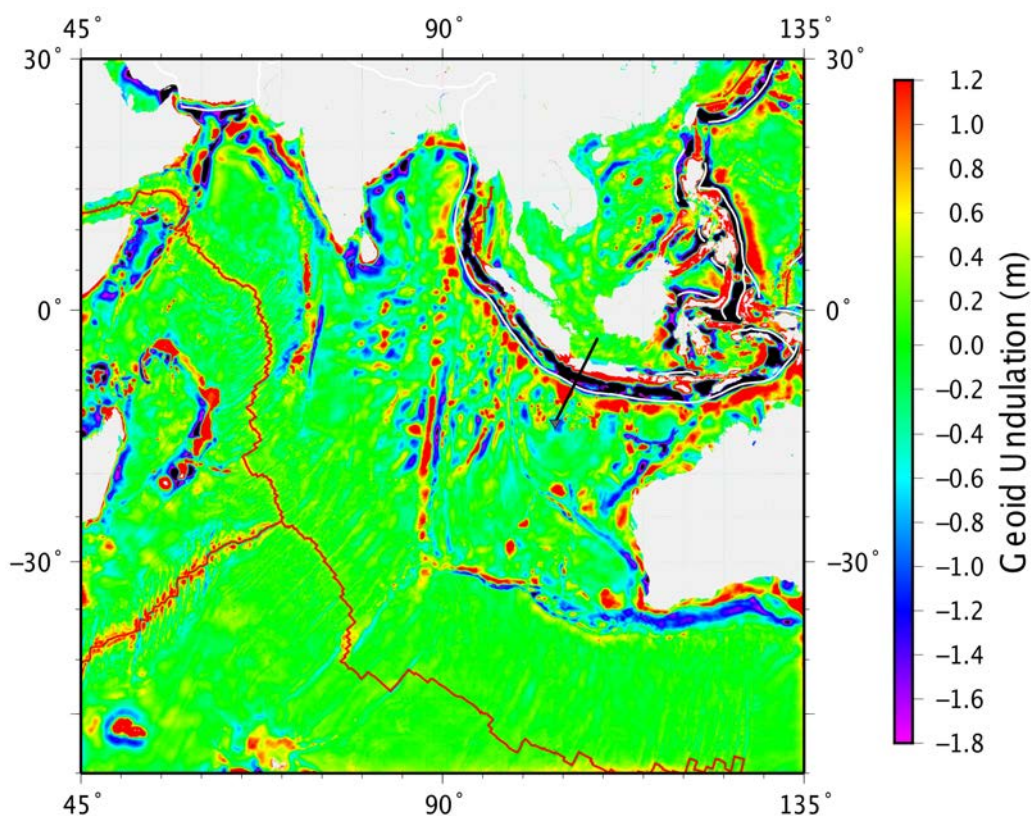


Abbildung 4.8: Kurzwellige Geoidundulation im Pazifischen Ozean aus der Differenz zwischen Abb. 4.6 und dem mit 500km Länge tiefpassgefilterten Feldanteil (Gaussfilter). Mittelozeanische Rücken (rot) und Tiefseeegräben (weiß) sind eingezeichnet. Die schwarze Linie gibt den Profilschnitt aus Abb. 4.9 an.

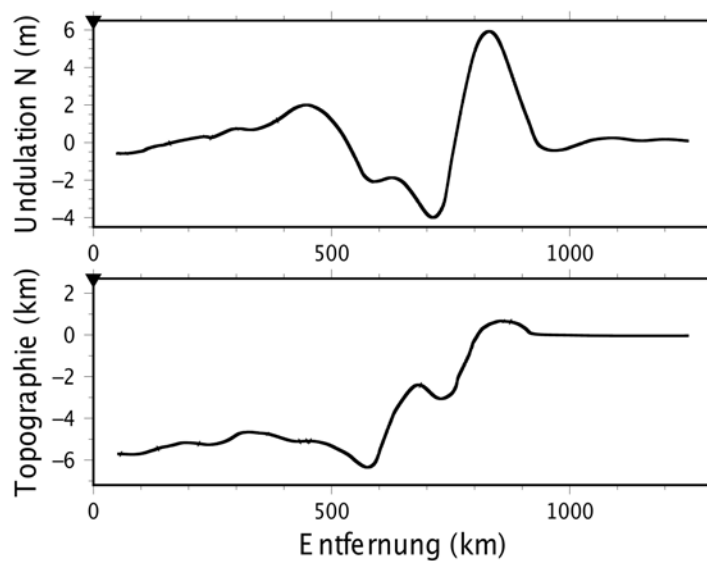


Abbildung 4.9: Vergleich der Geoidundulation und der Bathymetrie / Topographie entlang des Profils aus Abb. 4.8.



### Zeitabhängige Anteile des Schwerepotenzials:

Neben den zeitlich konstanten Anteilen zur Schwerebeschleunigung gibt es kleine, zeit-

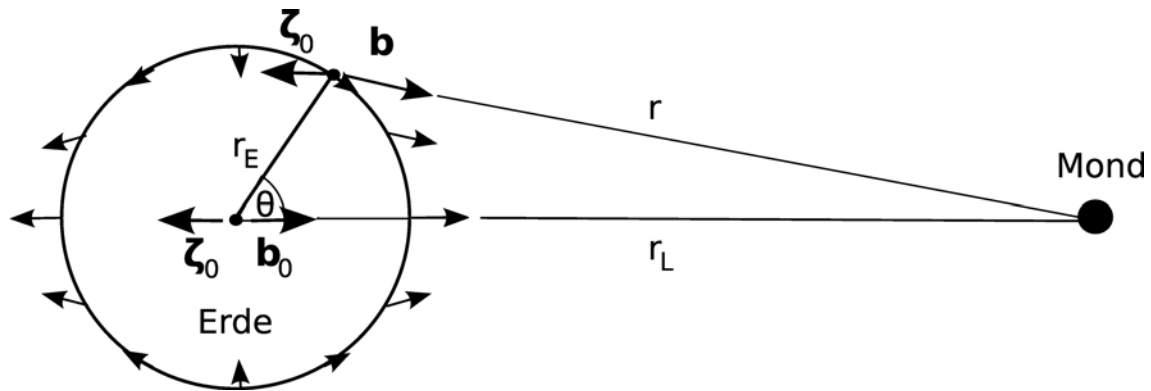


Abbildung 4.10: Skizze zum Gezeiteneffekt. Die Gezeitenbeschleunigung an der Erdoberfläche ist durch dünne Pfeile markiert. Die Zentrifugalbeschleunigung  $\zeta_0$  zeigt nach außen (dicke Pfeil), die Gravitationsbeschleunigung  $\mathbf{b}$  nach innen.

lich variable Anteile. Die wichtigsten sind die Gezeiten durch Sonne und Mond. Erde und Mond umkreisen einen gemeinsamen Schwerpunkt (liegt noch innerhalb des Erdkörpers, da die Erde größer und schwerer als der Mond ist) und zwar derart, dass sich für den Massenmittelpunkt der Erde die Gravitationsbeschleunigung  $\mathbf{b}_0$  und die Zentrifugalbeschleunigung  $\zeta_0$  gerade ausgleichen,  $\zeta_0 = -\mathbf{b}_0$  (Abb. 4.10). Die Bewegung der Massenmittelpunkte folgt den Kepler Bahnkurven (der Abstand Erde-Mond ist so groß, dass inhomogene Massenverteilungen in den Planeten keine Rolle spielen). Betrachtet man die Erde erstmal als nicht um die eigene Achse rotierend (in Bezug auf den Fixsternhimmel), dann durchläuft jedes Massenelement der Erde einen gleichgroßen, konzentrischen Kreis und erfährt dieselbe Zentrifugalbeschleunigung  $\zeta(r) = \zeta_0 = -\mathbf{b}_0$ . Wegen der unterschiedlichen Abstände einzelner Elemente zum Mond ist die Gravitationsbeschleunigung  $\mathbf{b}$  für dem Mond zugewandte Elemente größer und für abgewandte Elemente kleiner als  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{b}(r)$  ist also nicht konstant. Die Gezeitenbeschleunigung  $\mathbf{g}^{\text{tide}}(r)$  ist die **vektorielle Summe zwischen  $\mathbf{b}$  und  $\zeta_0$** . Die Gezeitenbeschleunigungen sind also nur im Massenmittelpunkt der Erde exakt kompensiert, oberhalb und unterhalb zeigen differentielle Beschleunigungen (differentielle Kräfte) weg bzw. hin zum Mond. Die Erde reagiert darauf mit Deformation und bildet zwei **Gezeiten-Gleichgewichtsfluten** (Abb. 4.10). Die differentiellen Gezeitenbeschleunigungen lassen sich wieder durch ein Potenzial beschreiben. Das **Gezeitenpotenzial**  $W_l$  wird als Differenz des Gravitationspotenzials des anziehenden Gestirns und des Zentrifugalpotenzials der Bahnbewegung eingeführt. Für die Radial- und Tangentialkomponente der Gezeitenbeschleunigung findet man schließlich (z.B. Torge, 1975, Kerz, 1969)

$$g_r^{\text{tide}} = \frac{2C_L}{r_E} \left( \cos(2\theta) + \frac{1}{3} \right), \quad g_\theta^{\text{tide}} = -\frac{2C_L}{r_E} \sin(2\theta) \quad .$$



$C_L$  ist die **Gezeitenkonstante des Gestirns** (hier des Mondes),  $C_L = \frac{3}{4}G_E \frac{m_L r_E^2}{r_L^3}$ . Die Gezeitenbeschleunigung ist am Äquator am größten mit Maximalwerten bis zu  $0.3 \text{ mGal}$  (vgl. Abb.4.10).

Die Gezeitenkonstante von Mond und Sonne stehen etwa im Verhältnis 1 zu 0.46 zueinander. Der Mond hat trotz seiner deutlich kleineren Masse als die Sonne einen etwa doppelt so großen Gezeiteneffekt. Das liegt an dem geringeren Abstand der Mondes zur Erde.

Rotiert die Erde nun um ihre eigene Achse, dann ist die Gezeitenbeschleunigung für einen Punkt auf der Erde zeitlich variabel. Die Ozeane können der veränderlichen Gezeitenbeschleunigung fast unmittelbar folgen und bilden eine globale Gezeitenflut entlang einer Äquipotentialfläche aus. Durch Resonanzschwingungen in begrenzten Gewässern unterliegt die tatsächliche ozeanische Gezeitenflut auch regionalen Gegebenheiten. Die Landmassen der Erde haben ebenfalls das Bestreben, sich der Äquipotentialfläche der Gezeitenflut anzupassen. Die Erde deformiert sich allerdings visco-elastisch, d.h. die Erdoberfläche hebt und senkt sich mit einer gewissen Zeitverzögerung und Abschwächung im Vergleich zu den Ozeangezeiten. Die langwellige Hebung und Senkung der visco-elastischen Erde kann bis zu einigen Dezimetern betragen. Da es sowohl auf der dem Mond zugewandten wie auch der abgewandten Seite eine Gezeitenflut gibt (Abb. 4.10), ergibt sich für einen auf der Erde befindlichen Beobachter eine halbtägige Gezeitenperiodizität. Die Feste-Erde-Gezeiten werden dadurch komplizierter, dass sich die Wirkungen von Sonne und Mond mit leicht unterschiedlichen Periodizitäten überlagern und dass die Erdrotationsachse geneigt ist gegen die Bahnebenen. Wenn sich die Gezeiten von Mond und Sonne gleichphasig überlagern, entsteht eine **Springflut**, bei gegenphasiger Überlagerung eine **Nippflut**. Abb. 4.11 zeigt die gemessene und theoretische Gezeitenbeschleunigung der festen Erde an der Station BFO im Schwarzwald (theoretische zum Vergleich auch für Hamburg). Man erkennt die ganztägigen und halbtägigen Gezeiten. Die halbtägigen Gezeiten werden in der Regel am stärksten angeregt. Durch den Effekt der Ozeane wären gemessene Feste-Erde-Gezeiten in Hamburg um ca. 10% gestört.

Die Gezeitenbewegung verbraucht Energie, die als **Gezeitenreibung** in Wärmeenergie übergeht. Der Energieverbrauch der Gezeitenbewegung geht zur Lasten der Rotationsenergie der Erde. Dadurch verringert sich über lange Zeiträume die Bahngeschwindigkeit des Mondes und die Rotationsgeschwindigkeit der Erde. Die Tage auf der Erde werden länger<sup>46</sup> und gleichzeitig wächst aufgrund der Drehimpulserhaltung der Abstand Erde-Mond an.

---

<sup>46</sup> Der Effekt der Gezeitenreibung wurde bereits 1693 von Halley aus der Auswertung von Mondfinsternissen der letzten 2000 Jahre erkannt. Darwin hat 1880 die erste "Theorie der Gezeitenreibung" aufgestellt.

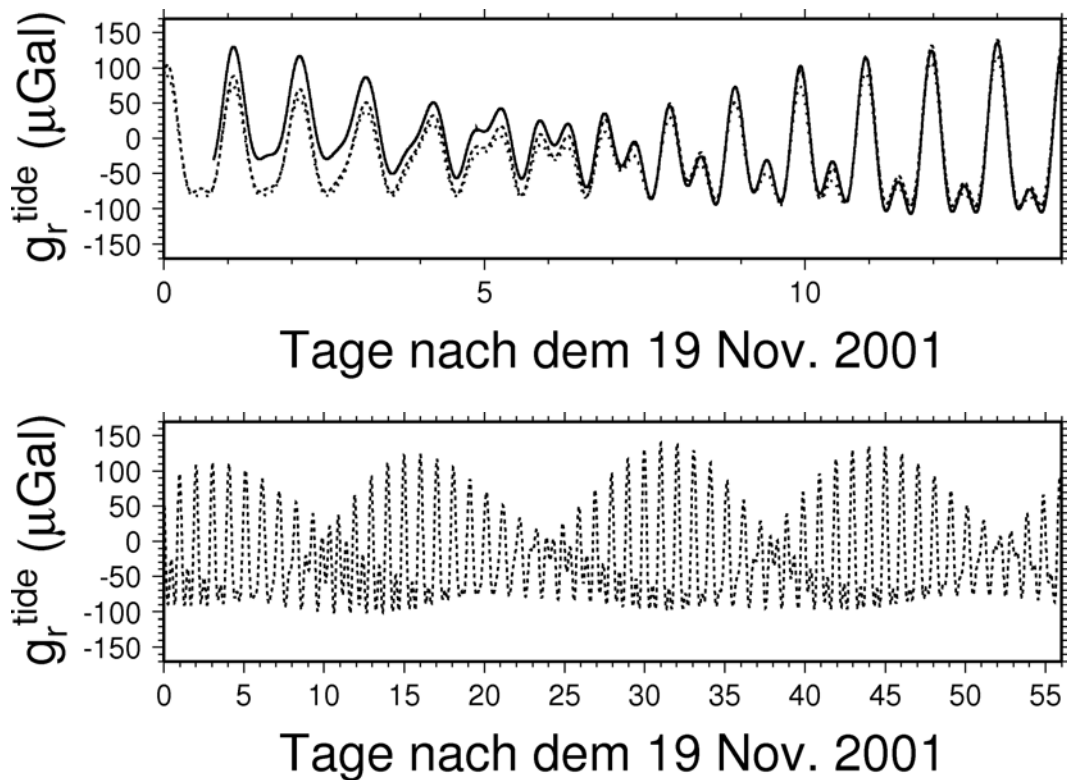


Abbildung 4.11: Oben: Gemessene (durchgezogene Linie, La-Coste Romberg Gravimeter, ET-19, BFO) und theoretische (gestrichelt, BFO und Hamburg) Gezeitenbeschleunigung  $g_r^{\text{tide}}$  der festen Erde in BFO, Schiltach (Daten von R. Widmer-Schnidrig). Abweichungen in den ersten 5 Tagen können durch wetterbedingte Gerätedrift erklärt werden. Unten: Theoretische BFO-Gezeiten für 55 Tage, so dass langperiodische Schwebungen erkennbar werden.

Die Auswertung von Tages- und Jahreswachstumsringen an Korallen aus dem Devon (Erdaltertum, ca. 400 Mio Jahre) ergaben eine Paläo-Tageslänge von etwa 21  $h$ . Die Rate der Verlängerung der Tageslänge beträgt heute  $4.5 \cdot 10^{-8} \text{ s/d} = 0.0016 \text{ s/Jhrd}$ . Im Vergleich dazu liegen Tageslängenschwankungen durch Massenverlagerungen im Erdinnern und der Atmosphäre bei etwa  $0.005 \text{ s/Jhrd}$  und jahreszeitliche Schwankungen zwischen März und August etwa  $0.001 \text{ s/Jhrd}$ . Die Ganggenauigkeit von modernen Atomuhren beträgt  $10^{-18}$ .

### 4.2.2 Schweremessungen

Schweremessungen müssen sehr genau sein, weshalb hohe Anforderungen an die Messgeräte gestellt werden. Schwere-Absolutmessungen werden durch Pendelversuche (**Reversionspendel**) oder mit höherer Genauigkeit durch **Senkrechte-Wurf-Versuche** bestimmt. Die höchste Genauigkeit erzielen jedoch **Gravimeter**, die nur **relative Schwerewerte** messen und keine **Absolutschwere**. Relativgravimeter in Observatorien erreichen teilweise Genauigkeiten bis zu  $1 \text{ nGal}$  (LCR ET-19, SG-056; entspricht  $10^{-11} \text{ m/s}^2$ , fast  $10^{-12}$  des Schwerewerts an der Erdoberfläche) und werden zur Messung der zeitlichen Änderung der Schwere eingesetzt (z.B. Gezeitenmessungen)<sup>47</sup>. Zur Vermessung lokaler Anomalien an Land (z.B. Salzstöcke, Lagerstätten, tektonische Störungen) werden Genauigkeiten bis zu  $10 \mu\text{Gal}$  gefordert, für regionale Großstrukturen (z.B. Graben) genügen häufig  $100 \mu\text{Gal}$  Genauigkeit. Es werden transportable Gravimeter eingesetzt, z.B. vom Typ **La-Coste-Romberg** oder **Worden**. Für Schiffsmessungen braucht man spezielle Seegravimeter, die nur von wenigen Herstellern gebaut werden. Schweremessungen mit Hilfe von Einzel oder Tandemsatelliten haben die Datenlage des Geoids deutlich verbessert.

#### *Messung der Absolutschwere:*

Die Geräte, die auf dem **Prinzip des senkrechten Wurfs** basieren, erreichen

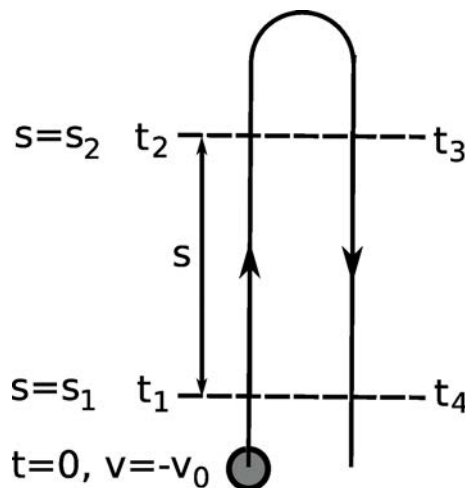


Abbildung 4.12: Absolutschwere-Bestimmung mit der Freiwurf-Freifall Methode

heutzutage eine Genauigkeit von etwa  $\pm 1 \mu\text{Gal}$  (z.B. FG-5, vergleichbar zu Gravimetern). Gemessen werden Fallzeit und Fallweg einer Masse im Vakuum. Ist  $v(0)$  die Anfangsgeschwindigkeit der Masse, dann gilt für den Fallweg  $s(t)$

<sup>47</sup> Die Gezeitendeformation kann allerdings auch aus Deformations- (z.B. Strainmeter) oder Neigungsmessungen (Tiltmeter oder z.B. Schlauchwaage) abgeleitet werden.

$$s(t) = v(0)t + \frac{1}{2}gt^2 \quad . \quad (4.12)$$

Für den senkrechten Wurf nach oben ist  $v(0) = -v_0$ . Die Masse durchläuft die zwei Ebenen bei  $s_1$  und  $s_2$  (Abstand  $s = s_2 - s_1$ ) je zweimal, zu den Zeiten  $t_1, t_2, t_3$ , und  $t_4$  (Abb. 4.12). Man erhält

$$\begin{aligned} s_1 &= -v_0t_1 + \frac{1}{2}gt_1^2 = -v_0t_4 + \frac{1}{2}gt_4^2 \\ s_2 &= -v_0t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2 = -v_0t_3 + \frac{1}{2}gt_3^2 \quad . \end{aligned}$$

Die unbekannte Geschwindigkeit  $v_0$  kann eliminiert werden, und die Differenzbildung  $s = s_1 - s_2$  führt auf

$$g = \frac{2s}{t_2t_3 - t_1t_4} = \frac{8s}{(t_4 - t_1)^2 - (t_3 - t_2)^2} \quad . \quad (4.13)$$

Die Wurfmasse wird z.B. durch eine Feder etwa einen halben Meter hochgeworfen. Für die Zeitmessungen wird ein Laserinterferometer gemessen.

#### **Messung der Relativschwere mit Gravimeter:**

Die Messung der Schweredifferenz zwischen zwei Punkten oder zu unterschiedlichen

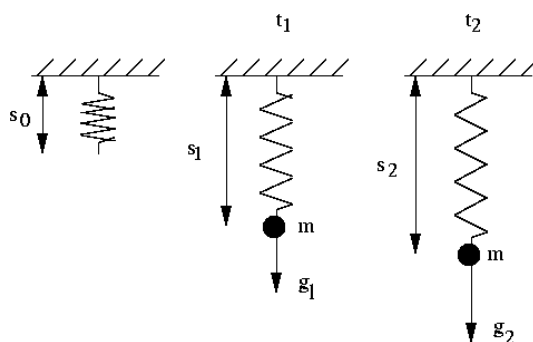


Abbildung 4.13: Prinzip der Messung einer Schwereänderung mit Feder-Masse-Systemen.

Zeiten am gleichen Meßpunkt ist einfacher und genauer als die Messung der absoluten Schwere. Solche Relativmessungen werden mit **Gravimetern** durchgeführt. Klassische Geräte sind Federgravimeter, d.h. hochempfindliche Federwaagen. Das Gleichgewicht zwischen Schwerkraft der Masse und Rückstellkraft der Feder mit der Länge  $s_0$  ergibt für zwei Schwerewerte  $g_1$  und  $g_2$  (Abb. 4.13)

$$mg_1 = -K_f(s_1 - s_0), \quad mg_2 = -K_f(s_2 - s_0) \quad .$$

Die Schweredifferenz  $\delta g = g_2 - g_1$  hängt nicht mehr von  $s_0$  ab und ist proportional zur Längenänderung  $\delta s = s_2 - s_1$  der Feder,

$$m\delta g = -K_f\delta s \quad \text{oder} \quad \delta g = -\frac{K_f}{m}\delta s \quad . \quad (4.14)$$

Die Messung von Schwereänderungen anstatt der absoluten Schwere ist auch von Vorteil, weil Federgravimeter durch Alterung und durch Umwelteinflüsse (z.B. Temperatur) in der Regel eine starke Drift haben. Die Drift, die während einer Messkampagne auftritt, kann berücksichtigt werden, indem ein Referenz oder Basispunkt wiederholt vermessen wird und die Messwerte als Stützstellen für eine interpolierte, empirische Driftkurve verwendet werden.

Um die Empfindlichkeit möglichst groß zu machen, muss der Faktor vor  $\delta s$  in (4.14)

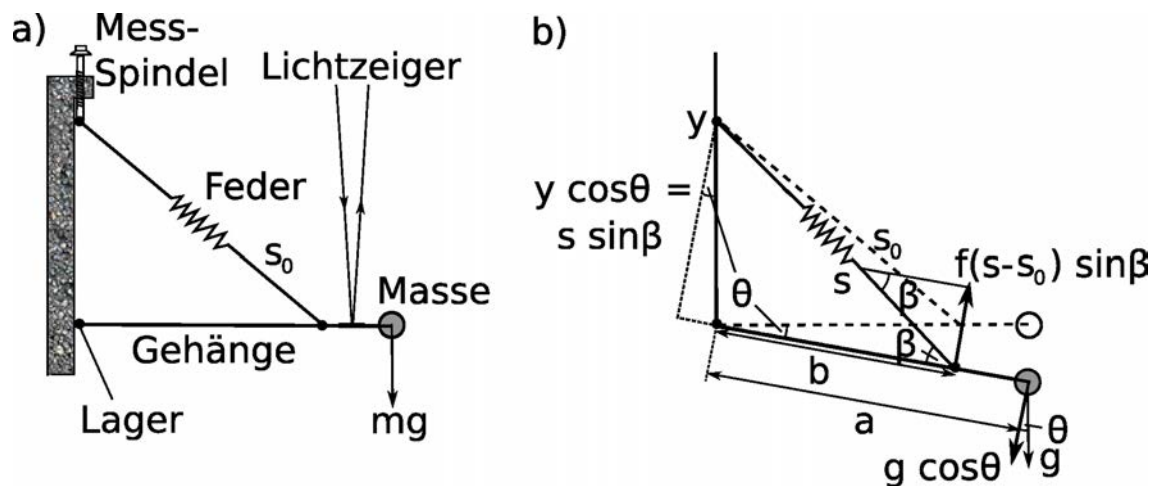


Abbildung 4.14: (a) Prinzip des astasierenden Gravimeters vom Typ La-Coste-Romberg. (b) Skizze zur Ableitung der Auslenkung

möglichst klein werden. Mit der Entwicklung von **Gravimeter** wurde das Prinzip der **Astasierung**<sup>48</sup> für diesen Zweck eingeführt, das sich durch eine schräg angebrachte **Nulllängenfeder** auszeichnet (Abb. 4.14). Eine Nulllängenfeder ist eine Feder, bei der die Rückstellkraft proportional zur gesamten Federlänge ist,  $s_0$  ist Null oder sehr klein. Das wird durch eine Vorspannung des Federdrahts erreicht, so dass ein Kraft-Schwellenwert nötig wird zur Auslenkung der Feder. Würde man alle Massen der Nulllängenfeder entfernen, dann würde sie sich auf die Länge Null zusammenziehen. Welche Größen die Empfindlichkeit eines **La-Coste-Romberg-Gravimeters** bestimmen, ist aus Abb. 4.14 ersichtlich. Die Drehmomente (Entfernung zur Drehachse multipliziert mit der Kraft senkrecht zum Hebel) auf den Hebelarm mit der Masse  $m$

<sup>48</sup> Astasierung bedeutet, dass das Meßgerät in einem mechanisch labilen oder hochempfindlichen Gleichgewicht arbeitet, sodass kleine Änderungen der Meßgröße zu großen Ausschlägen führen.

sollen sich im Gleichgewicht gerade aufheben,

$$\begin{aligned}
 mga \cos \Theta &= -K_f(s - s_0)b \sin \beta = -K_f(s - s_0)b \frac{y \cos \Theta}{s} \\
 \text{oder } g &= -\frac{K_f b y (1 - \frac{s_0}{s})}{ma} .
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Eine Schwereänderung führt dann auf

$$\delta g = \frac{dg}{ds} \delta s = -\frac{K_f b y s_0}{m a s^2} \delta s . \tag{4.16}$$

Die Empfindlichkeit des La-Coste-Romberg Gravimeters wird groß sein, wenn in (4.16) Faktoren im Zähler klein und Faktoren im Nenner groß sind. Dann wird die Dehnung  $\delta s$  selbst bei kleinen Schwereänderungen sehr groß. Für die Nulllängenfeder ist  $s_0$  sehr klein und nahezu Null.

Um die Genauigkeit der Messungen zu erhöhen, sind Gravimeter in der Regel **Nullinstrumente**, d.h. die Ablesung erfolgt immer in der Nulllage bei horizontal liegendem Hebelarm. Dazu wird der Aufhängepunkt der Feder durch eine Mikrometerschraube justiert, so dass der Hebel in Nulllage gebracht wird (vgl. 4.14). Der Messwert ist die Justierung der Messschraube. Ausserdem werden fast alle Gravimeter aktiv oder passiv temperaturisoliert, da die Temperaturänderung einer der Hauptgründe für die Instrumentendrift ist. Gravimeter müssen vor ihrem ersten Einsatz geeicht werden.

Zwei Typen von Gravimeter sind gebräuchlich. Ein Beispiel für den ersten Typ ist ein **LaCoste-Romberg Gravimeter**, in dem Stahlfedern verwendet werden. Um thermische Einflüsse zu minimieren wird das Gravimeter ständig auf etwa  $> 50^\circ$  geheizt. Stahlfeder-Gravimeter können für den Transport festgesetzt werden (locking). Der zweite Typ benutzt gegossene Quarzfedern, die in einer Vakuum Kammer eingebaut sind. Beispiele sind **Worden**, **Sodin** oder **Scintrex Automatic Meter**. Gravimeter dieser Art können in der Regel nicht für den Transport festgesetzt werden.

### ***Supraleitende Gravimeter:***

Supraleitende Gravimeter sind aufwändige, aber sehr empfindliche Instrumente und werden nur in wenigen Observatorien eingesetzt. Die Zielsetzung ist, die zeitliche Änderung der Schwere zu erfassen, z.B. verursacht durch extrem langperiodische Gezeiten, durch die Änderung der Rotationsachse der Erde oder durch tektonische Prozesse. Luftdruckänderungen und Änderungen der Bodenfeuchte erzeugen ebenso messbare Schwereeffekte, die man in der Regel korrigieren muss. Bei supraleitenden Gravimetern wird die Schwerkraft auf eine supraleitende, magnetische Probemasse durch ein magnetisches Gegenfeld kompensiert. **Supraleitung** entsteht in Metallen bei sehr tiefen Temperaturen ( $< 10 K$ ). Bei Unterschreitung der **kritischen Temperatur** verschwindet der elektrische Widerstand des Metalls und vorhandene elektrische Ströme klingen nicht ab. Ebenso sind die Magnetfelder von stromdurchflossenen, supraleitenden Spulen zeitkonstant und müssen



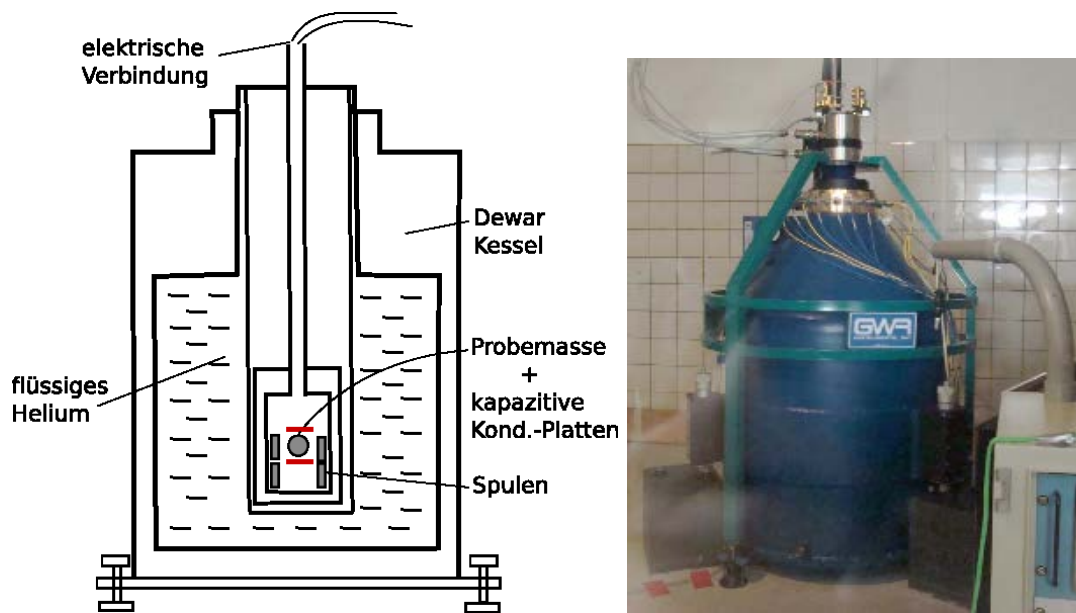


Abbildung 4.15: Links: Prinzip eines supraleitenden Gravimeters. Rechts: Supraleitendes Gravimeter vom Typ CD-034 GWR im geodynamischen Observatorium der Universität Jena (Foto von Kühnel).

nicht durch elektrische Energie aufrechterhalten werden. Die notwendigen tiefen Temperaturen zum Erreichen des supraleitenden Zustandes werden mit Hilfe von flüssigem Helium erreicht, das einen Siedepunkt bei  $4.2\text{ K}$  hat. In jüngerer Zeit sind auch Metalle entdeckt worden, die bei wesentlich höheren Temperaturen in den supraleitenden Zustand gelangen. Abb. 4.15 verdeutlicht das Prinzip des supraleitenden Gravimeters. Im Innern schwebt eine supraleitende Hohlkugel (25 mm Durchmesser, Al und Pb) in einem durch Spulen erzeugten Magnetfeld (elektromagnetische Levitation). Änderungen der Schwere lenken die Hohlkugel aus der Nulllage. Die Auslenkung wird gemessen und durch ein zusätzliches Magnetfeld sofort wieder kompensiert; aufgezeichnet wird der Kompensationsstrom. Die Kompensation der Auslenkung aus der Ruhelage ist ein **Feedback-Messprinzip** wie es heute für viele unterschiedliche Präzisionsinstrumente verwendet wird. Um den Einfluß äußerer Magnetfeldschwankungen zu verhindern, sind Hohlkugel und Spulen durch einen Kupfermantel magnetisch und elektrisch abgeschirmt. Der Kupfermantel selbst sitzt in einem Vakuum und zusätzlich in einem Dewar-Gefäß zur thermischen Isolierung. In dem Dewar-Gefäß ist das flüssige Helium, das in mehrmonatigem Abstand nachgefüllt werden muss.

**Forced Feedback Gravimeter** nach dem Prinzip einer frei schwebenden Masse mit Spule in einem Magnetfeld werden auch ohne supraleitende Spulen verwendet, z.B. für Messungen auf See oder in der Luft (BGM-3 Gravimeter der Bell Aerospace Company).

**Seegravimeter:**

Schweremessungen auf einem beweglichen Schiff oder in einem Flugzeug sind anspruchsvoller und in der Regel nicht so genau wie ortsfeste Messungen an Land. Andererseits haben Schweremessungen in Schiffen oder Flugzeugen den Vorteil, dass große Messstrecken mit geringem Aufwand abgefahren werden können. Die ersten Schweremessungen auf See waren motiviert durch die Vorstellung, aus den Schwerewerten direkt auf die Wassertiefe schließen zu können. C.W. Siemens hatte bereits 1876 Pendelversuche auf See unternommen, und O. Hecker hatte 1903 die Schwere durch die Messung der Höhe  $h$  einer Bleisäule bei bekanntem Druck  $P_a$  (Siedepunkt von Wasser) aus  $P_a = \rho gh$  gewonnen (50 mal ungenauer als spätere Schiffsmessungen). Wie wir heute wissen, ist die Wassertiefe nicht der einzige Parameter, der Geoidundulationen und also Schwereanomalien hervorruft (vgl. Abb. 4.9).

Ein erster Erfolg waren die Untersee-Pendelmessungen des holländischen Geophysikers

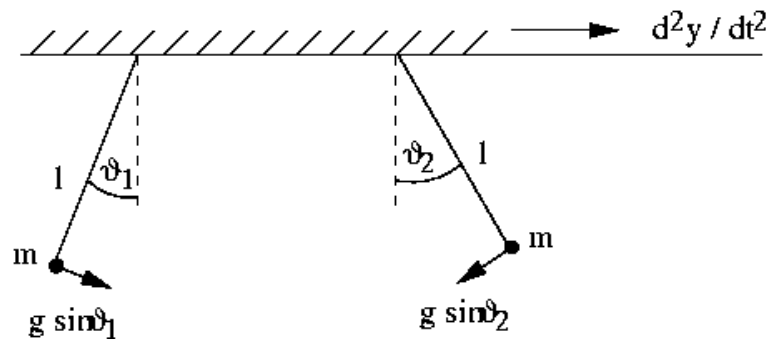


Abbildung 4.16: Prinzip des Mehrpendel-Apparats von Vening Meinesz für submarine Schweremessungen.

F.A. Vening Meinesz in den 1920-er und 1930-er Jahren. Interessant ist das Prinzip des **Vening Meinesz Mehrpendelapparates**. Die Bewegungsgleichungen eines mathematischen Pendels der Punktmasse  $m$  und Pendellänge  $l$  ist bei kleinen Ausschlägen (Drehmoment-Gleichgewicht<sup>49</sup>, vgl. Abb 4.16)

$$l \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g \sin \vartheta \approx -g\vartheta \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\vartheta = 0 \quad .$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist eine Schwingung mit der Periode  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ ,  $\vartheta(t) = a \sin \frac{t}{\sqrt{l/g}} = a \sin \frac{2\pi}{T}t$ . Unterliegt der Rahmen des Pendels einer horizontalen Beschleunigung  $d^2y/dt^2$  durch die Schiffsbewegung, dann muss die Gleichung in erster

<sup>49</sup> Das Drehmoment durch die Tangentialkomponente der Schwerkraft ( $mg \sin \vartheta$ ) auf die Masse  $m$  im Abstand  $l$  zur Drehachse ist  $mg \sin \vartheta \cdot l$  und ist gleich der zeitlichen Drehimpulsänderung,  $-\frac{dL}{dt} = -\frac{d}{dt}(J\omega) = -\frac{d}{dt}(J \cdot \dot{\vartheta}) = -\frac{d}{dt}(ml^2 \cdot \dot{\vartheta})$ .

Ordnung ergänzt werden wie

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\vartheta + \frac{1}{l} \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad . \quad (4.17)$$

Hat man zwei Pendel mit gleicher Länge am gleichen Rahmen angebracht, dann gilt für die Differenz der beiden Winkelauslenkungen

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \frac{g}{l}(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0 \quad . \quad (4.18)$$

Die Horizontalbeschleunigung wird durch die Differenzbildung eliminiert und für  $(\vartheta_1 - \vartheta_2)$  gilt dieselbe Differentialgleichung wie für das einfache Pendel in ruhendem Rahmen. Vening Meinesz hat drei Pendel verwendet, um horizontale Beschleunigungen in zwei Koordinatenrichtungen eliminieren zu können. Die vertikale Beschleunigung des Schiffes kann allerdings nicht berücksichtigt werden; hier wurde über mehrere Messungen gemittelt.

Um vertikale Beschleunigung auf See durch Mittelwertbildung zu eliminieren, sind **kontinuierliche Aufzeichnungen** wichtig. Häufig verwendete Federgravimeter sind heutzutage **La-Coste-Romberg** oder **Graf-Askania Seegravimeter** der Bodenseewerke (Abb. 4.17). Die wichtigsten Modifikationen gegenüber Landgravimetern sind, dass das Federsystem stark überdämpft wird und dass kontinuierlich und digital aufgezeichnet wird. Die starke Dämpfung ist nötig, da der Seegang periodische, vertikale Beschleunigungen bis zu 100 *Gal* erzeugen kann. Durch die Dämpfung wird die Masse während der kurzen Beschleunigungsdauer einer Welle nur wenig ausgelenkt. Da die Wellenbewegung periodisch ist, kann die dadurch erzeugte vertikale Beschleunigung herausgemittelt werden. Typische Mittelungszeiten sind vier Minuten und bei starkem Seegang bis zu 12 Minuten.

Heutzutage wird die Auslenkung der Masse durch eine **Feedback-Mechanik** klein gehalten. Ein kapazitiver Wegaufnehmer misst die Auslenkung der Masse und erzeugt eine entgegenwirkende, magnetische Kraft, indem ein elektrischer Strom durch eine Spule gesteuert wird, die sich im Feld eines Permanentmagneten befindet. Die eigentliche Messgröße des Feedback Gravimeters ist nicht mehr die Auslenkung, sondern der Kontrollstrom um die Masse in Ruhe zu halten.

Die Seegravimeter werden auf Plattformen montiert, die durch gyroskopisch<sup>50</sup> kontrollierte Motoren die Dreh- und Neigungsbewegungen auf dem Schiff ausgleichen. Die Sensoren werden dann nicht oder kaum durch horizontale Beschleunigungen beeinflusst, aber eventuell durch kleine Schwankungen in der Horizontierung.

### ***Korrekturen gemessener Schwerewerte:***

Vor allem zwei Effekte werden bei Gravimetermessungen häufig direkt korrigiert;

<sup>50</sup> Kardanisch aufgehängter Kreiselstisch, der aufgrund der Drehimpulserhaltung kleine Neigungsänderungen unmittelbar ausgleicht (Lageregelung).



Abbildung 4.17: La-Coste-Romberg Gravimeter (links) und Seegravimeter (rechts) der Universität Hamburg (Foto: Dr. A. Dehghani).

(1) Gerätedrift und Gezeiten und (2) Korrekturen der Effekte durch eine bewegte Messplattform (Schiff oder Flugzeugmessungen).

Ursachen für die **Gerätedrift** sind Temperaturschwankungen und bodennahe oder atmosphärische Störungen. Diese unerwünschten Effekte werden zusammen mit den Gezeiten durch Wiederholungsmessungen an einer **Basisstation** erfasst (z.B. alle 2 h). Ist das Messgebiet nicht zu groß, dann kann man von einem gleichen Verlauf der zeitlichen Schwankungen an allen Messpunkten ausgehen. Der einfachste Ansatz ist, den "Drifteffekt" zu beliebigen Messzeiten durch die lineare Interpolation der Werte an der Basisstation abzuschätzen und zu korrigieren.

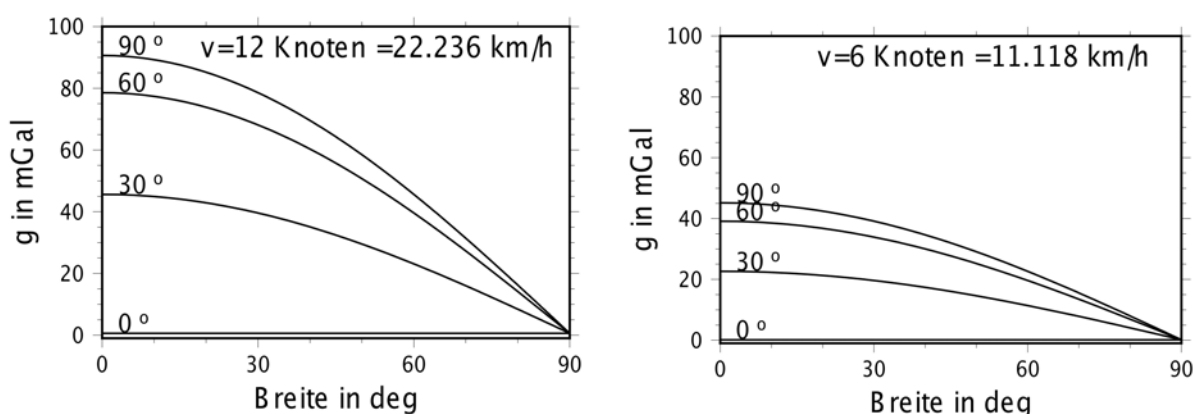


Abbildung 4.18: Eötvös-Korrektur für unterschiedliche Geschwindigkeiten  $v$ , Kurse  $\alpha$  und Breiten  $\theta$ .

Bewegt sich die Gravimeterplattform in Richtung Westen oder Osten, dann ist die Zentrifugalbeschleunigung auf die Gravimetermasse kleiner oder größer als die der starren Erde. Dadurch mißt man eine scheinbar erhöhte oder erniedrigte Schwere, in Abhängig-

keit von der geographischen Breite  $\theta$  und vom Kurs-Azimuth  $\alpha$  und der Geschwindigkeit  $v$  des Schiffes oder Flugzeuges in Knoten ( $kn$ )<sup>51</sup>. Die sogenannte **Eötvös-Korrektur** ist

$$g_e = 7.503 \left( \frac{v}{kn} \right) \cos \theta \sin \alpha + 0.004154 \left( \frac{v}{kn} \right)^2 [mGal] \quad . \quad (4.19)$$

Abb. 4.18 zeigt die Eötvös-Korrektur für unterschiedliche  $v$ ,  $\alpha$  und  $\theta$ . Die Effekte können relativ groß sein, und müssen in jedem Fall korrigiert werden. Für Flugzeugmessungen sind sie in der Regel noch größer, weshalb dann auch genauere Formeln als (4.19) verwendet werden.

### 4.2.3 Auswertung von Schweremessungen

Schweremessungen liegen in der Regel auf Linienprofilen oder flächenhaft vor. Das Ziel ist, aus den Messungen auf Dichteinhomogenitäten im Untergrund zu schließen. Dazu wird z.B. die Gravitationsbeschleunigung einer angenommenen Dichteanomalie (Modell) mit den Messwerten verglichen; bei Übereinstimmung kann das Modell akzeptiert, bei Abweichungen ausgeschlossen werden. In der Regel sind die Beschleunigungsanteile durch Dichteanomalien kleiner als die Schwereschwankungen durch topographische Massen oder die unterschiedlichen Höhen und geographischen Breiten der Messorte. Deshalb müssen diese letzteren Anteile vor der Interpretation von den Messwerten abgezogen werden (**Schwerereduktion**). Dieses Verfahren ist nicht unproblematisch, da durch Schwerereduktionen auch Artefakte in den reduzierten Schwerekurven entstehen können. Die Artefakte können relativ leicht erkannt und vermieden werden, wenn die zu interpretierenden Schwereanomalien andere (kürzere) Wellenlängen haben.

#### A. Schwerereduktionen:

Der gemessene Schwerewert  $g^{\text{mess}}$  an einer Station mit den Koordinaten  $(\phi, \theta, h)$  im Messnetz wird aus unterschiedlichen Anteilen aufgebaut,

$$g^{\text{mess}}(\phi, \theta, h) = g_0(\theta) + \delta g_{\text{Frei}} + \delta g_{\text{Plat}} + \delta g_{\text{Topo}} + \delta g_{\text{Geol}} \quad . \quad (4.20)$$

$h$  ist hierbei die Höhe über dem Referenzellipsoid (Meeresniveau). Die zeitlich veränderlichen Anteile  $\delta g_t$  durch Gezeiten und Gerätedrift sollen bei  $g^{\text{mess}}$  bereits abgezogen worden sein (vgl. 4.2.2).  $\delta g_{\text{Geol}}$  ist der Anteil durch Dichteinhomogenitäten im Untergrund und soll letztlich interpretiert werden.

Abb. 4.19 verdeutlicht die anderen Anteile und die Schwerereduktionen. Die Schwere  $g^{\text{mess}}$  ist z.B. im Punkt  $X$  in der Höhe  $h$  über dem Referenzellipsoid gemessen worden. Um die Messung vergleichbar zu machen mit den Messungen an benachbarten Orten,

<sup>51</sup> 1 Knoten ist die Geschwindigkeit 1 nautischen Seemeile pro Stunde,  $1 kn = 1 nm/h = 1.8355 km/h$ .

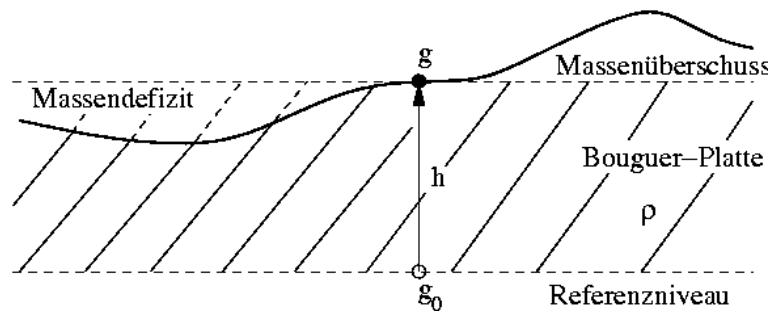


Abbildung 4.19: Reduktion des Messwertes  $g$  auf ein einheitliches Bezugsniveau (z.B. Referenzellipsoid). Topographische Überschussmassen werden rechnerisch abgetragen und Täler aufgefüllt. Zusätzlich wird der Freiluft über den Höhenunterschied  $h$  und der Masseneffekt der "Bouguerplatte" reduziert.

Tabelle 4.1: Gesteinsdichten

	$g/cm^3$		$g/cm^3$
Seewasser	1.02	Lehm	1.6
nasser Sand	1.8 - 2.0	Steinsalz	2.15
Sandstein	1.8 - 2.7	Kalkstein	2.5
Granit	2.7	Basalt, Gabbro	2.9
Peridotit	3.3	Eklogit	3.4

soll  $g^{\text{mess}}$  auf den Punkt  $X_0$  auf dem Referenzellipsoid **reduziert** werden, so als ob keine Massen oberhalb von  $X_0$  existieren würden. Ein erster Schritt ist, gedanklich die Berge und Täler links und rechts von  $X$  abzutragen oder aufzufüllen, so dass eine fiktive Ebene entsteht. Die Reduktion wird **topographische Reduktion** oder **Geländereduktion**  $\delta g_{\text{Topo}}$  genannt. Dann wird die Schwerewirkung einer unendlich ausgedehnten Platte der Dicke  $h$  berechnet und abgezogen. Die Reduktion wird **Bouguersche Plattenreduktion**  $\delta g_{\text{Plat}}$  genannt. Zuletzt muss noch die Freilufthöhe  $h$  des Messpunktes  $X$  oberhalb von  $X_0$  korrigiert werden; das wird als **Freiluftreduktion**  $\delta g_{\text{Frei}}$  bezeichnet.

Da man in der Regel nur relative Schweremessungen vorliegen hat, kann zu dem Anteil  $g_0$  noch ein konstanter, aber unbekannter Wert hinzukommen. Deshalb begnügt man sich auch oft damit, auf ein **Bezugsniveau an einer Basisstation** zu reduzieren und nur die **Breitenabhängigkeit**  $\delta g_{\text{breite}}$  von  $g_0$  formelmässig zu berücksichtigen,

$$g_0(\theta) = \text{Konstante} + g_{\text{basis}}^{\text{mess}} + \delta g_{\text{breite}}(\theta) \quad .$$

#### Beispiel 4.1 (Ableitung der unterschiedlichen Anteile)

**Breitenanteil:** Aus der Formel für die Normalschwere,  $g_0 = 978049(1 +$



$0.0052884 \sin^2 \theta + \dots$ ) folgt:

$$\begin{aligned} \delta g_{\text{breite}}(\theta) &= \frac{\partial g_0}{\partial \theta} \Delta \theta \approx 978049 \cdot 0.0052884 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \Delta \theta \\ &= \frac{978049 \cdot 0.0052884}{r_E} \sin(2\theta) \Delta y = 0.81 \sin(2\theta) \Delta y \text{ mGal/km} \quad , \end{aligned}$$

wobei  $\Delta y$  die Breitendifferenz von Meßpunkt und Bezugspunkt in km ist (positiv in zunehmender Breite) und  $\theta$  die mittlere Breite des Meßgebiets. Bei der Ableitung wurde (4.10) und  $\Delta y = \Delta \theta \cdot r_E$  benutzt.

**Freiluftanteil:**

$$\begin{aligned} \delta g_{\text{Frei}}(h) &= G_E \frac{m_E}{(r_E + h)^2} - G_E \frac{m_E}{r_E^2} = G_E \frac{m_E}{r_E^2} \frac{1}{(1 + h/r_E)^2} - G_E \frac{m_E}{r_E^2} \\ &\approx G_E \frac{m_E}{r_E^2} \left(1 - 2 \frac{h}{r_E} \pm \dots\right) - G_E \frac{m_E}{r_E^2} = -0.3086 h \text{ mGal/m} \quad . \end{aligned}$$

**Bouguerscher Plattenanteil:** Die Vertikalkomponente der Schwerebeschleunigung ist  $g_z \approx b_z = -\frac{\partial}{\partial z} W_b = \int_V \rho G_E \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{d} dV = \rho G_E \int_V \frac{z}{d^3} dV$ , wobei  $d$  der Abstand zwischen Quell- und Messpunkt. Damit findet man für eine unendliche ausgedehnte Schicht:

$$\delta g_{\text{Plat}} = G_E \rho \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^h \frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} dx dy dz = 2\pi G_E \rho h \approx 0.041 \rho h \frac{\text{mGal}}{\text{m g/cm}^3} \quad ,$$

wobei  $\rho$  die Dichte der Gesteinsplatte ist und  $h$  ihre Dicke in Metern. Welche mittlere Dichte verwendet wird, hängt von der Geologie ab (vgl. Tabelle 4.1). Ein Standardwert für großräumige Anomalien auf Kontinenten ist die mittlere Krustendichte  $\rho_m = 2.67 \text{ g/cm}^3$ . Aus der Freiluftreduktion und der Bouguerschen Plattenreduktion findet man, dass die Schwere etwa mit  $-0.2 \text{ mGal/m}$  mit der Höhe abnimmt. Um Schwereanomalien im Bereich von  $0.01 \text{ mGal}$  aufzulösen, muss die Höhe auf etwa  $5 \text{ cm}$  genau bekannt sein. Dazu ist genaues Nivellement erforderlich oder differentielle GPS-Messungen. Indirekte, relative Höhenmessungen durch barometrische Luftdruckmessungen erreichen diese Genauigkeit in der Regel nicht.

**Topographischer Anteil (Terrain Korrektur):** Der Schwereanteil durch Topographie,  $\delta g_{\text{Topo}}$ , ist am aufwändigsten zu berechnen. Genaue topographische Karten und Rechenprogramme oder graphische Verfahren sind erforderlich. Die überliegenden Massen eines Hügels bewirken eine nach oben gerichtete Beschleunigung auf die Masse des Gravimeters (Verkleinerung gegenüber der Normalschwere). Die fehlenden Massen einer unterliegenden Tales bewirken ebenfalls eine Verkleinerung des gemessenen Schwere gegenüber der Normalschwere. Die Korrektur des Schwereeffekts sowohl des Tales wie des Berges ist daher positiv, d.h. vergrößert den gemessenen Schwerewert. Topographische Korrekturen sind vor allem in Gebirgen zu berücksichtigen. Im Flachland kann die

*Terrain Korrektur häufig vernachlässigt werden, zumindest wenn großräumige Anomalien im Bereich von mehreren mGal untersucht werden. Genauere Abschätzungen liefert ein Hammer Chart (siehe z.B. Milsom, 1996).*

Um die gesuchte Größe  $\delta g_{\text{Geol}}$  zu erhalten, werden die gemessenen Schwerewerte um alle anderen berechneten Anteile und um  $g_{\text{basis}}^{\text{mess}}$  korrigiert. Die komplette Reduktion von Gleichung (4.20) führt auf die **Bougueranomalie**  $\Delta g_{\text{bouguer}}$ ,

$$\begin{aligned}\Delta g_{\text{bouguer}} &= g^{\text{mess}}(\phi, \theta, h) - g_{\text{basis}}^{\text{mess}} - \delta g_{\text{breite}} - \delta g_{\text{Frei}} - \delta g_{\text{Plat}} - \delta g_{\text{Topo}} \\ &= \delta g_{\text{Geol}} + \text{Konstante} \quad .\end{aligned}\tag{4.21}$$

Die Bougueranomalie sollte nur durch Dichteinhomogenitäten unterhalb des Bezugsniveaus verursacht werden. Eine positive Bougueranomalie bedeutet einen Massenüberschuß.

Eine andere gebräuchliche Anomalie ist die **Freiluftanomalie**, bei der zwar  $\delta g_{\text{Frei}}$ , nicht aber  $\delta g_{\text{Plat}}$  und  $\delta g_{\text{Topo}}$  abgezogen wurden (z.B. auf See). Für Messungen an der Meeresoberfläche sollten Bouguer- und Freiluftanomalie gleich sein (Reduktion auf Meereshöhe). In marinen Schweremessungen wird sich die Meeresbodentopographie (Bathymetrie) widerspiegeln, neben den Effekten durch mögliche Dichteanomalien in der darunterliegenden, festen Erde. Um die Anomalien in Kruste und Mantel "sichtbar" zu machen, wird manchmal eine "inverse" Bouguer-Plattenkorrektur eingeführt, die fiktiv die Wasserschicht durch das Material am Meeresboden ersetzt. Die Meeresbodentopographie oder Bathymetrie muss dazu genau bekannt sein.

Einzelne Schritte der Schwerereduktionen werden am Beispiel der Untersuchung eines oberflächennahen Salzstocks im nordwestlichen Stadtgebiet von Hamburg erläutert (Abb. 4.20, Dahm et al., 2010). In unterschiedlichen Messkampagnen wurde ein feines Gitter von Messpunkten über dem Gebiet des Salzstockes aufgenommen. Jede einzelne Messung wurde driftkorrigiert und mit Hilfe der zusätzlichen Höhenmessungen auf das Niveau des Basispunktes am Institut für Geophysik der Universität Hamburg korrigiert. Nach Korrektur des Breiten- und Freilufteffekts (Abb. 4.21) kann bereits der Umriss des Salzstockes durch eine positive Freiluftanomalie erkannt werden. Nach der zusätzlichen Bouguerplattenkorrektur, und nachdem der langwellige Trend der Bougueranomalie aus regionalen Messdaten abgezogen wurden, erhält man die lokale Bougueranomalie (Abb. 4.22), welche für die Interpretation und die Ableitung eines Salzstockmodells genutzt werden konnte (Dahm et al., 2010, und unten im Skript). Die Bougueranomalie in Abb. 4.22 über dem Salzstock ist positiv, da der Salzstock bis nahe an die Oberfläche kommt und das Steinsalz dort eine höhere Dichte als die umgebenden, holozänen Sande und Sedimente hat. Die Anomalie ist im südlichen Bereich größer als im Norden.

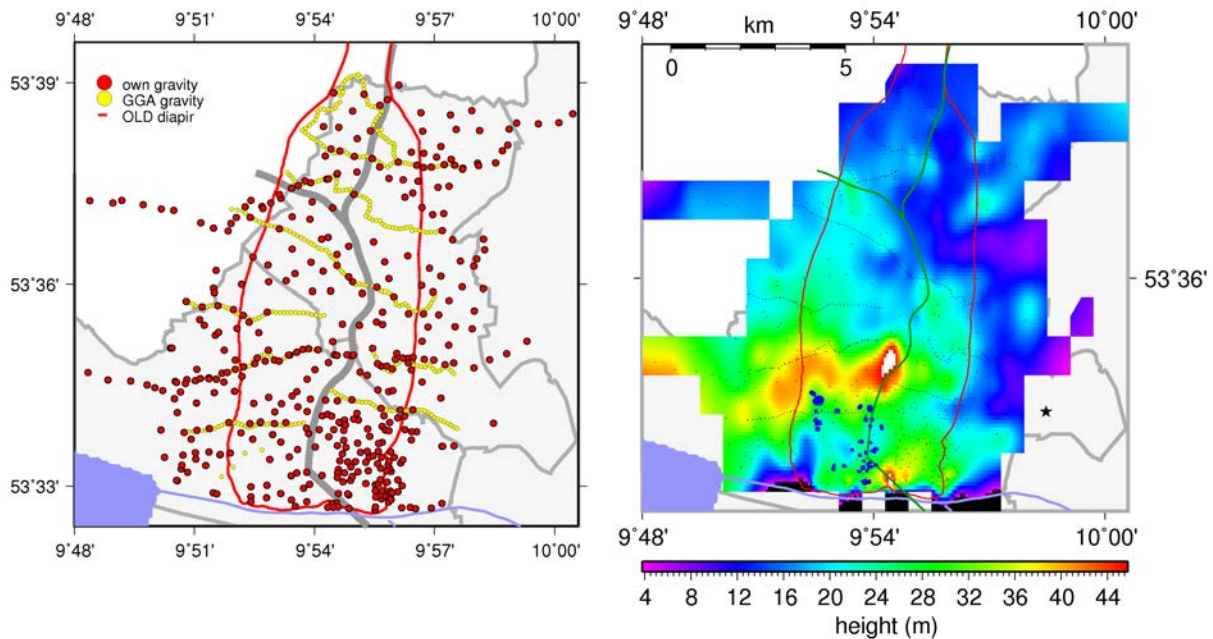


Abbildung 4.20: Verteilung der Schweremesspunkte (links, rote und gelbe Punkte) und Höhenmodell (rechts) im Stadtgebiet von Hamburg (hellgrau) nördlich der Elbe. Bezirksgrenzen sind durch graue Linien, die Autobahn A7 durch die dicke graue Linie und die Elbe blau gekennzeichnet. Die rote Linie zeigt die Randbegrenzung des Othmarschen Langenfelde Salzdiapirs unter dem Stadtgebiet. Dunkelblau gefärbte Polygone im rechten Bild sind geologisch kartierte Erdfälle durch Salzlösung. Der Stern markiert die Basisstation am Institut für Geophysik, auf die alle Messpunkte reduziert wurden.

Das deutet darauf hin, dass der Salzstock nach Norden in die Tiefe abtaucht. Der obere Bereich des Diapirs hat vermutlich eine Subrosionspfanne ausgebildet, also eine pfannenartige Morphologie, welche sich in der Bougueranomalie widerspiegelt (z.B. mittleres Profil in Abb. 4.22).

### ***B. Interpretation und Modellierung von Schwereanomalien:***

Die Schwereanomalien  $\Delta g$  liegen nach dem Datenprozessing flächenhaft oder entlang von Profilen vor. Profildaten werden durch 2-dimensionale Modelle, flächenhafte Daten evtl. durch dreidimensionale Modelle interpretiert werden. Man geht von einer ebengeschichteten Erde als Hintergrundmodell aus, und sieht die Bougueranomalie durch laterale Inhomogenitäten gegenüber diesem Hintergrundmodell verursacht. In der Regel wird versucht, **Störkörper** oder **Inhomogenitäten** mit einer Dichtedifferenz  $\Delta\rho$  zum Hintergrundmodell zu finden, deren vertikale Gravitationsbeschleunigung  $b_z$  gleich ist zur beobachteten Bougueranomalie  $\Delta g$ . Es genügt, die vertikale Gravitationsbeschleunigung des Störkörpers zu berücksichtigen, da Gravimeter nur den Betrag der Schwere in Lotrichtung messen und die Richtung des viel größeren Schwerevektors des Hauptfeldes durch den Störfeldvektor kaum beeinflusst wird. Die Anomalie  $\Delta g$  wird also in erster

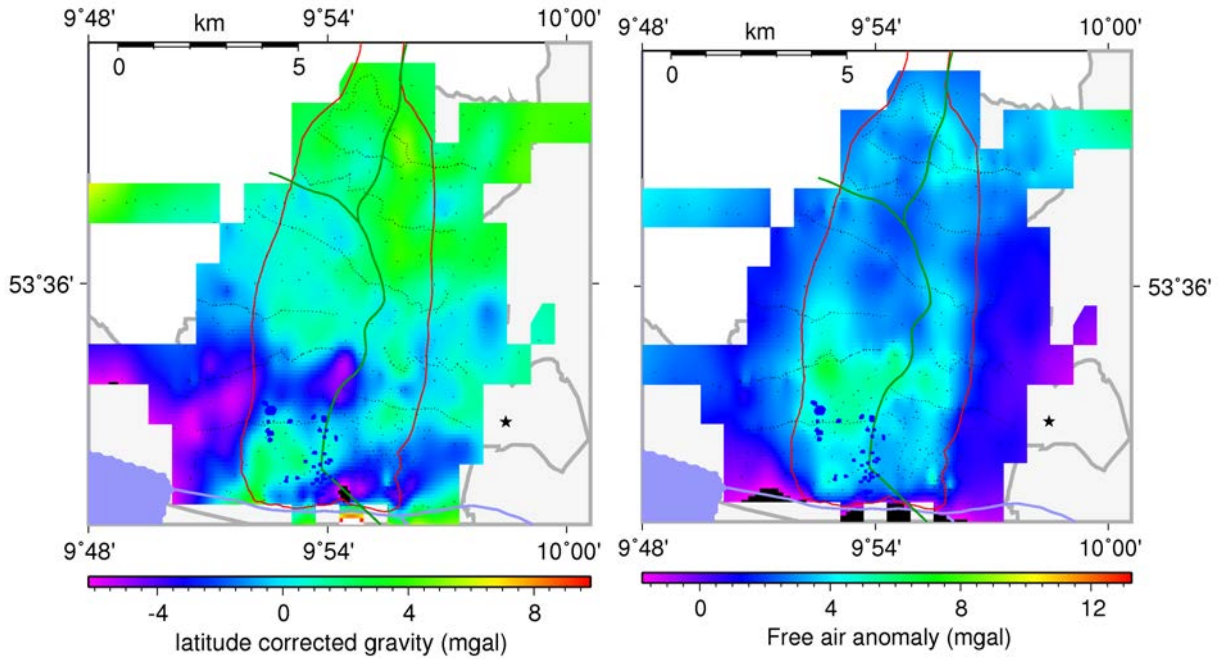


Abbildung 4.21: Schwerewerte in Hamburg nach Drift- und Breitenkorrektur (links) und nach zusätzlicher Freiluftkorrektur (rechts).

Näherung durch  $b_z$  hervorgerufen (Abb. 4.23).

Ein bekanntes Problem bei der Schwereauswertung ist die Mehrdeutigkeit. Es gibt viele unterschiedliche Modelle mit guter oder identischer Übereinstimmung zwischen  $b_z$  und  $\Delta g$ . Wegen der Mehrdeutigkeit versucht man, zusätzliche Informationen bei der "Modellierung" zu verwenden, z.B. aus der Geologie oder aus seismischen Daten. Einfache Modelle sind geometrisch komplizierteren vorzuziehen.

### ***B.1 Schwerewirkung einer Verwerfung mit vertikalem Versatz:***

Die theoretische Bougueranomalie der halbinendlichen Platte ist (Anhang C)

$$b_z(x) = G_E \Delta \rho \left[ x \ln \frac{x^2 + h^2}{x^2} + \pi h + 2h \tan^{-1} \frac{x}{h} \right] . \quad (4.22)$$

Für  $x \rightarrow \infty$  ist  $b_z = 2\pi G_E \Delta \rho h$ , für  $x \rightarrow -\infty$  gilt  $b_z = 0$  (vgl. Bouguer Plattenanteil). Aus der Differenz  $b_{\max} = b_z(\infty) - b_z(-\infty)$  läßt sich unmittelbar das Produkt  $\Delta \rho h$  bestimmen,  $\Delta \rho h = \frac{b_{\max}}{2\pi G_E}$ . Die Sprunghöhe  $h$  und  $\Delta \rho$  lassen sich nicht leicht getrennt auflösen;  $h$  bestimmt den genauen Verlauf der Übergangszone bei  $x = 0$ .

G. Müller hat ein direktes Verfahren zur Bestimmung von  $h$  und  $\Delta \rho$  vorgeschlagen. Man bestimmt aus den Abszissen (unabhängige Variablen)  $x_{1/4}$  und  $x_{3/4}$  die Ordinaten (abhängigen Variablen)  $b_{\max}/4$  und  $3b_{\max}/4$ . Für die  $x$ -Werte gilt:  $x_{1/4} = -0.4h$  und  $x_{3/4} = +0.4h$ . Aus der Differenz läßt sich  $h$  bestimmen,  $1.25(x_{3/4} - x_{1/4}) \approx h$ .

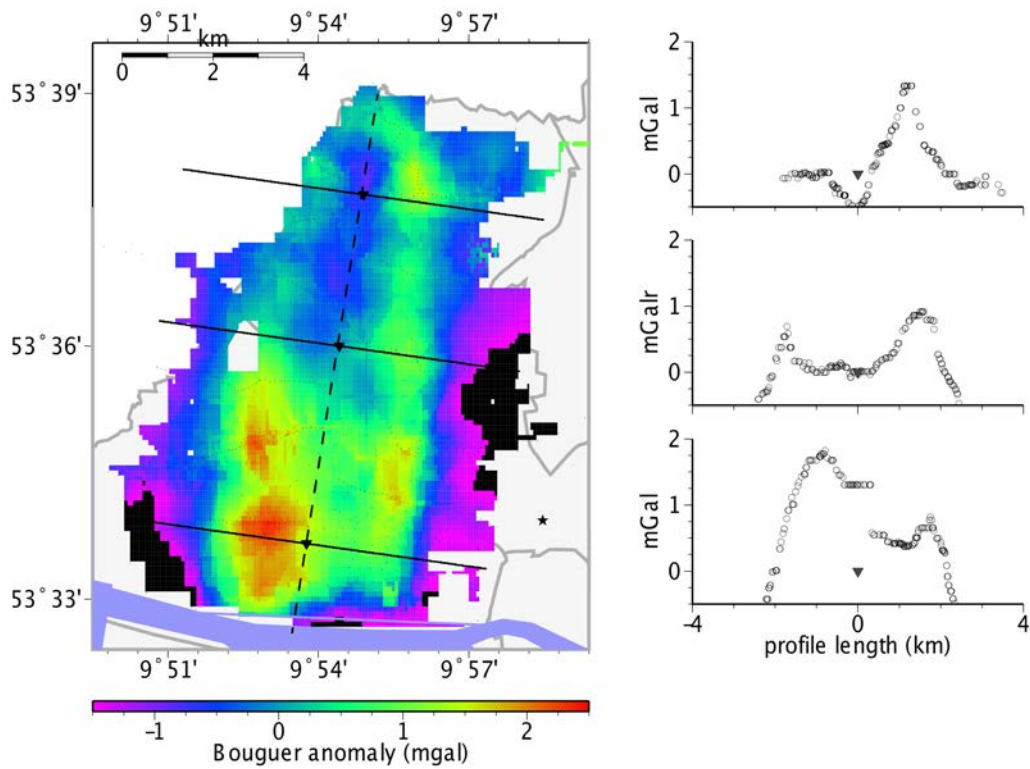


Abbildung 4.22: Lokale 3D Bougueranomalie des Othmarschen Langenfelde Diapirs in Hamburg. Die Profilschnitte rechts können für eine vereinfachte 2D Interpretation genutzt werden.

Abb. 4.24 zeigt theoretische Anomalien für unterschiedlich dicke und in unterschiedlicher Tiefe liegende, halbunendliche Platten.  $\Delta\rho$  gibt die Dichtedifferenz gegenüber dem Hintergrundmodell an, und kann sowohl positiv wie negativ sein. Eine halbunendliche Platte an der Oberfläche mit negativem  $\Delta\rho$  kann z.B. eine von Sedimenten überdeckte Stufe im Festgestein mit einer Sprunghöhe  $h$  repräsentieren. Die Differenz des unteren und oberen Schwereplateaus für  $x \gg h$  ist  $2\pi G_E \Delta\rho h$ . Der Übergangsbereich zwischen den beiden Plateaus ist bei gleichem Dichtekontrast für eine große Sprunghöhe breiter als für eine geringe Sprunghöhe (Abb. 4.24); die Anomalie der geringmächtigen Sedimentfüllung ist kurzweiliger. Wird die Platte bei gleichbleibendem  $h$  und  $\Delta\rho$  in die Tiefe gelegt, dann verbreitert sich der Übergangsbereich bei gleichbleibenden Plateauwerten (Abb. 4.24, wobei in der Simulation das Vorzeichen von  $\Delta\rho$  umgedreht wurde). Die "Wellenlänge" der Stufenanomalie hängt von der Tiefe der Unterkante der halbunendlichen Platte ab, während das Produkt  $\Delta\rho h$  die Höhe der Anomalie kontrolliert.

In Abb. 4.25 zeigt den Effekt des Versatzes einer kompakten Schicht (z.B. basaltischer Sill), wobei ein vertikaler Versatz und eine geologische Ab- und Aufschiebung an einer Verwerfung simuliert wurden. In allen drei Fällen verschwindet die Anomalie für  $b_z$  weit entfernt von der Verwerfung. Der Effekt der vergrabene Schicht kann bei  $x = \pm\infty$  als



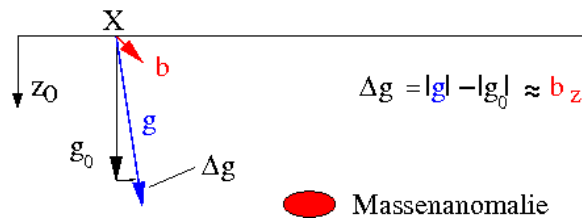


Abbildung 4.23: Addition eines Störfeldvektors  $\mathbf{b}$  durch eine Massenanomalie zum Hauptfeldvektor  $\mathbf{g}_0$ . Die Schwereanomalie  $\Delta g$  (Skalar) ist in guter Näherung die Vertikalkomponente  $b_z$  der Gravitationsbeschleunigung  $\mathbf{b}$ .

konstanter Bouguerplatteneffekt berechnet werden, der im Plot der Relativschwere durch Differenzbildung herausfällt. Die Anomalie an der Verwerfung selbst ist für die drei Fälle jedoch deutlich verschieden. Während die Abschiebung der Schicht eine negative Anomalie vorhersagt (Massen fehlen bei  $x = 0$ ), wird für die Überschiebung eine positive Anomalie (Massen akkumulieren bei  $x = 0$ ) und bei dem vertikalen Versatz eine kleinere, zweiseitige, kurzwellige Anomalie berechnet.

Die Beispiele in Abb. 4.24 und 4.25 sind instruktiv für eine qualitative Interpretation von Bougueranomalien an geologischen Verwerfungen, zeigen aber auch, wie sehr die Anomalien von der Struktur des Untergrundes abhängen. Um die Mehrdeutigkeiten bei der Interpretation zu verringern, sollten Schweredaten mit unabhängigen geologischen und seismischen Strukturdaten zusammen interpretiert.

**Beispiel 4.2 (Sprunghöhe der Taunus Südrandverwerfung)** *Die Taunussüdrand Verwerfung bei Königstein und Frankfurt/Wiesbaden hat bei der Bildung des Rheingraben einen vertikalen Versatz von mehreren hundert Metern erfahren. Die Sprungstufe ist größtenteils mit jungterziären Sedimenten überdeckt, die eine geringere Dichte haben als der Taunus-Serizit-Gneis. Das kann die beobachtete Schwereanomalie auf einem Profil über die Verwerfung erklären (Abb. 4.26). Die verfüllte Sprungstufe kann durch das Modell einer halbumendlichen Platte der Dicke  $h$  erklärt werden. Die Dichte  $\Delta\rho$  der Platte ist die Differenz der Dichten des Serizit-Gneises und der Sedimentfüllung. In Abb. 4.26 sind Modellrechnungen für  $h = 350\text{ m}$  und  $\Delta\rho = 250\text{ kgm}^{-3}$  verglichen.*

### B.2 Schwere der homogenen Kugel und Abschätzung der Maximaltiefe der Anomalie:

Ein einfacher, dreidimensionaler Störkörper ist eine homogene Kugel in der Tiefe  $z$  und mit dem Radius  $a$  und dem Dichte- beziehungsweise Massenüberschuss  $\Delta\rho$  und  $\Delta m$  (Abb. 4.27). Die erwartete Schwereanomalie ist ( $\cos\vartheta = z/r = z/(x^2 + z^2)^{1/2}$ )

$$\Delta g = b_z = |\mathbf{b}| \cos\vartheta = G_E \Delta m \frac{z}{r^3} = G_E \Delta m \frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (4.23)$$



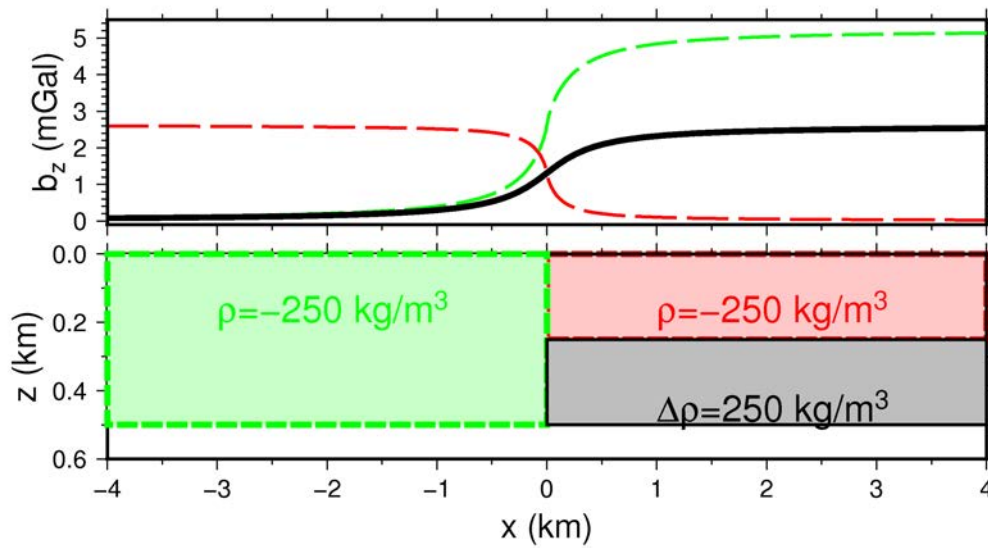


Abbildung 4.24: Modellgeometrie und  $b_z$ -Anomalie für unterschiedliche, halbunendliche Platten. Das rote und grüne Modell gibt die relative Anomalie nach (4.22) wieder. Das grau-schwarze Modell einer vergrabenen, halbunendliche Platte in 300 m Tiefe wurde durch Überlagerung der beiden halbunendlichen Platten und dem Effekt einer Bouguerplatte berechnet.

Die Schwereanomalie hat einen Extremalwert direkt über dem Kugelmittelpunkt bei  $x = 0$ ,  $\Delta g_{\max} = G_E \Delta m \frac{1}{z^2}$ . In der Halbwertsbreite  $x_{1/2}$  ist der Maximalwert auf die Hälfte abgeklungen, womit gilt

$$G_E \Delta m \frac{z}{(x_{1/2}^2 + z^2)^{3/2}} = G_E \Delta m \frac{1}{2z^2}, \quad \text{oder} \quad z = (2^{2/3} - 1)^{-1/2} x_{1/2} = 1.3 x_{1/2} .$$

Aus der Halbwertsbreite der Anomalie kann also auf die Tiefe der Kugel geschlossen werden. Jede Abweichung eines realen Störkörpers von der Kugelgestalt bewirkt bei gleicher Störkörpertiefe eine Verbreiterung der Anomalie. Um eine Anomalie gleicher Breite hervorzurufen, muss der Störkörper flacher liegen. Das Kugelmodell führt also auf eine **Abschätzung der Maximaltiefe** des symmetrischen Störkörpers. Mit bekannter Tiefe kann aus dem Maximalwert der Anomalie der **Massenüberschuss**  $\Delta m$  berechnet werden,  $\Delta m = \frac{\Delta g_{\max} x_{1/2}^2}{G_E (2^{2/3} - 1)}$ . Ist die Dichtedifferenz  $\Delta \rho$  bekannt, dann kann der Radius  $a$  der Kugelanomalie aus  $\Delta m = 4/3 \pi a^3 \Delta \rho$  abgeschätzt werden (z.B. für einen luftgefüllten Hohlraum). Allgemein kann gezeigt werden, dass das Integral über die Schwereanomalie in Zusammenhang mit dem Massenüberschuss des Störkörpers beliebiger Geometrie steht,  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta g dx dy = 4\pi G_E \Delta m$ .

**Beispiel 4.3 (Impakt-Krater)** Das Nördlinger Ries in Süddeutschland wurde durch

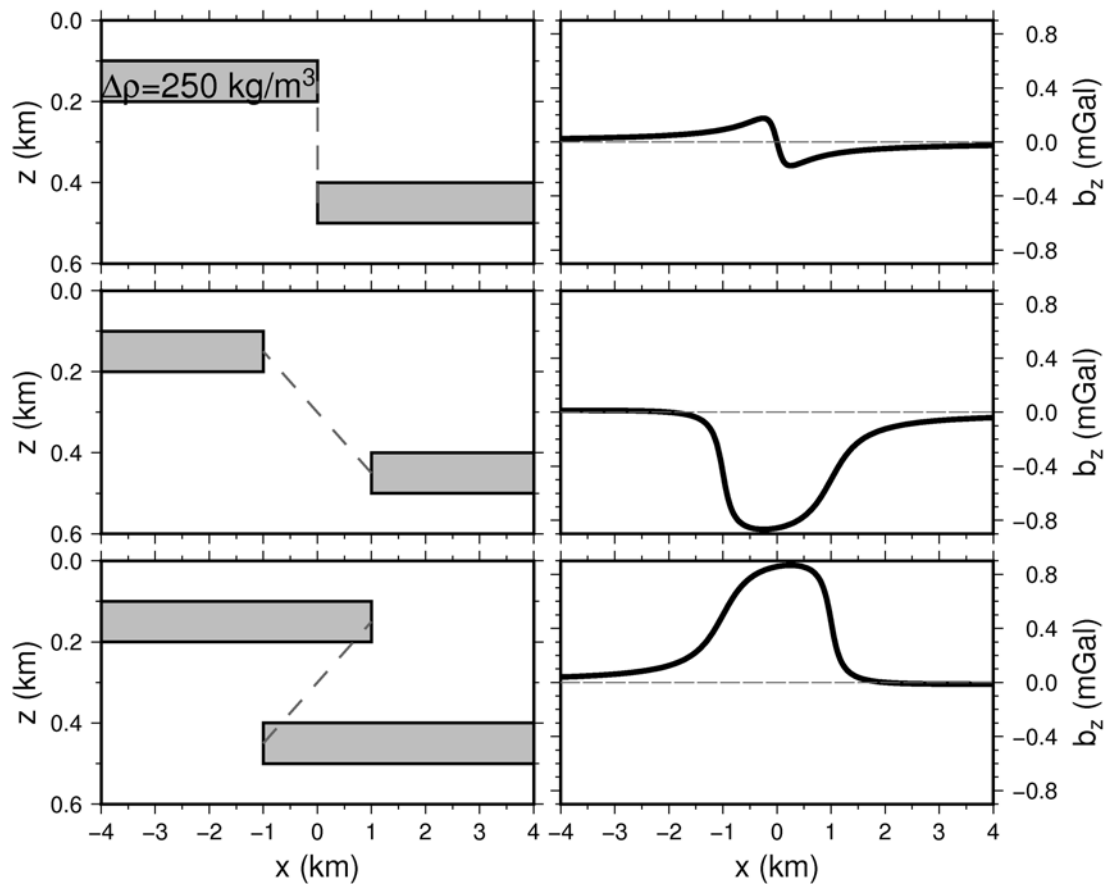


Abbildung 4.25: Durch die Überlagerung von zwei vergrabenen, halbusendlichen Platten (vgl. Abb. 4.24) in unterschiedlicher Tiefe zur Simulation einer in vertikaler Richtung gescherten Verwerfung. Tiefenlage, Versatz, Schichtdicke und  $\Delta\rho$  wurden konstant gehalten. Die horizontale Lage der Platten wurden einzig verschoben, um den Effekt einer vertikalen Verwerfung (oben) und einer geologischen Ab- (mitte) und Aufschiebung (unten) zu simulieren.

den Impakt eines Meteoriten vor 14.7 Ma gebildet. Der nahezu kreisrunde, radialsymmetrische Krater hat einen Durchmesser von etwa 20 km und eine Maximaltiefe von 2.3 km, und ist größtenteils mit jungtertiären Sedimenten gefüllt. Die Sedimente haben eine geringere Dichte als das umliegende Gestein, was die beobachtete, negative Bougueranomalie erklärt (Abb. 4.28). Die Anomalie kann durch einen Stapel zylindrischer Scheiben geringerer Dichte modelliert werden. Eine Abschätzung der Maximaltiefe und des Massenüberschusses durch das Kugelmodell führt auf eine Maximaltiefe von 6.8 km (Abb. 4.28).

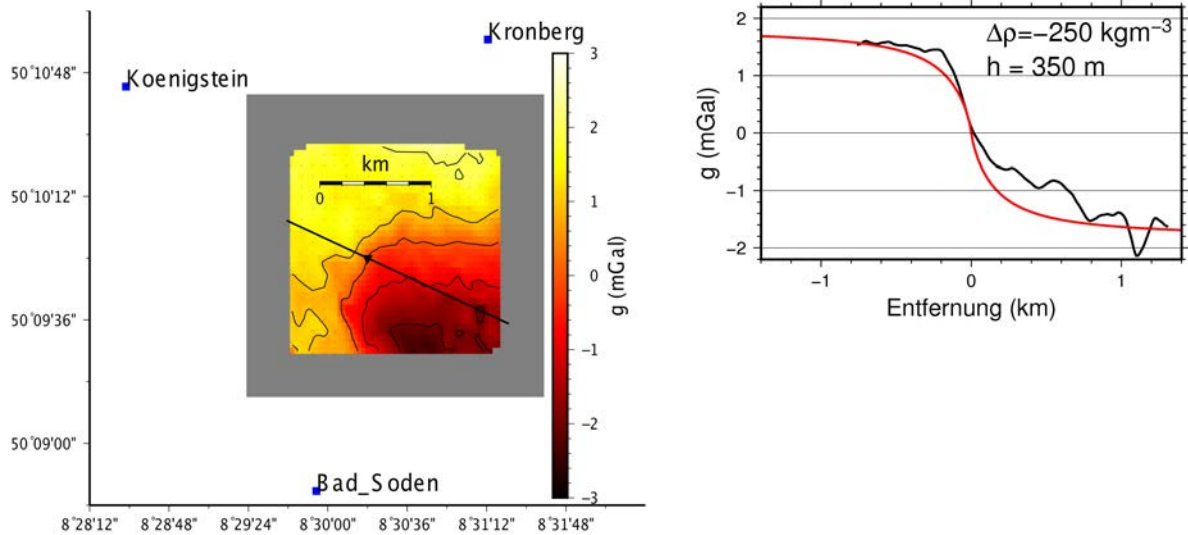


Abbildung 4.26: Links: Bougueranomalie im Bereich der Taunus Südrandverwerfung bei Königstein / Frankfurt am Main. Rechts: Gemessene (schwarz) und theoretische Schwereanomalie (rot) für eine halbunendliche Platte ( $h = 350 \text{ m}$ ,  $\Delta\rho = 250 \text{ kgm}^{-3}$ ) entlang des eingezeichneten Profils (Daten: Feldpraktikum Geophysik Universität Frankfurt a.M.).

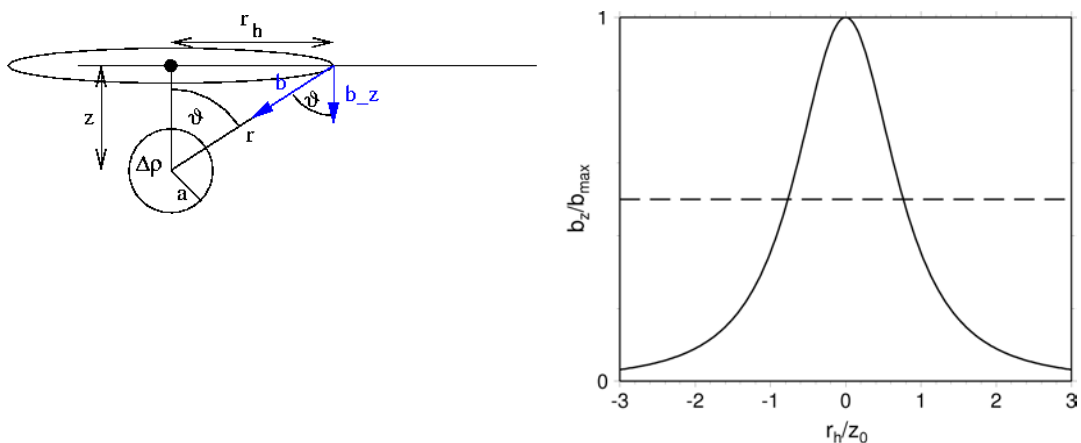


Abbildung 4.27: Schwereanomalie über einer Kugel in der Tiefe  $z$ , mit dem Radius  $a$  und dem Massenüberschuss  $\Delta m = \frac{4}{3}\pi a^3 \Delta\rho$ .

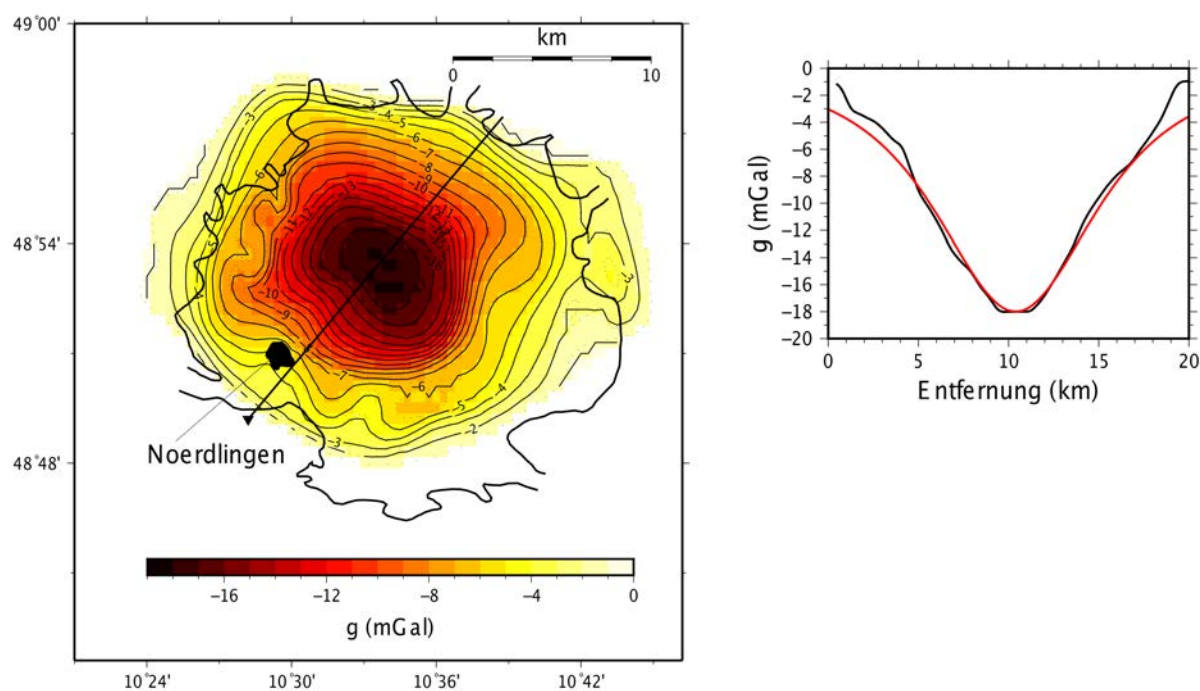


Abbildung 4.28: Bougueranomalie im Nördlinger Ries (nach Jung et al., 1969). Leichte Sedimente haben den Krater aufgefüllt und erzeugen eine negative Anomalie bis zu  $19 \text{ mGal}$ . Im rechten Bild ist die Anomalie (schwarz) entlang eines Profils durch das Zentrum mit der theoretischen Effekt einer Kugel (rot) verglichen ( $x_{1/2} = 5.3 \text{ km}$ ,  $z_0 = 6.89 \text{ km}$ ,  $\Delta m = -1.3 \cdot 10^{14} \text{ kg}$  und  $\Delta \rho = -93 \text{ kg/m}^3$ ).

## 4.3 Gesteinsmagnetismus und Magnetostatik

Der Magnetismus verdankt seinen Namen dem Mineral Magnetit ( $Fe_3O_4$ ), das nach seinem klassischen Fundort „Magnesia“ benannt wurde, einer altgriechischen Kolonie in Westanatolien. Magnetit ist der wichtigste Vertreter von remanent magnetisierbaren Mineralien auf der Erde. Die Untersuchung von Gesteinsmagnetismus und des Erdmagnetfeldes ist relativ alt. Um 1600 hat Sir William Gilbert (Hausarzt der Königin Elizabeth I) in seinem Werk „De Magnete“ die Vermutung aufgestellt, dass die Erde im Innern ein Magnetfeld erzeugt. Die „nord-suchende“ Eigenschaft von magnetisierten Stäben wurde seit damals für die Navigation auf See verwendet und 1702 wurde, basierend auf Seemessungen von Edmond Halley, eine erste Karte der globalen Magnetfeld-Deklination (Azimuthrichtung der Horizontalkomponente) publiziert. Erst Carl Friedrich Gauss hat in den Jahren 1830-1843 in Göttingen die wissenschaftliche Grundlage für eine quantitative Bestimmung und Darstellung des Erdmagnetfeldes geschaffen sowie den Beweis erbracht, dass das magnetische Hauptfeld der Erde im Erdinneren erzeugt werden muss. Bereits 1843 wurde von Von Wrede eine magnetische Anomalie zur Kartierung einer Goldlagerstätte genutzt, also eine erste angewandte Fragestellung neben der Navigation untersucht. Die magnetische Exploration wird heutzutage von Land, dem Wasser und aus der Luft betrieben. Obwohl magnetische Anomalien schwieriger zu interpretieren sind als Schwereanomalien, werden magnetische Verfahren häufiger eingesetzt. Das liegt wohl an den vergleichsweise einfachen und damit kostengünstigen Messverfahren. Magnetische Verfahren werden häufig auch als erste Untersuchungsmethode eingesetzt, um daraufhin andere und evtl. aufwändigere Verfahren gezielt einzusetzen.

In dem Kapitel hier geht es vor allem um die angewandte Magnetostatik. Die Grundlagen zur Erzeugung des Erdmagnetfeldes wurden bereits in Kapitel 3.4 behandelt. Zeitlich variable magnetische und elektrische Felder werden im übernächsten Kapitel behandelt. Nach einer kurzen Einführung in die Theorie der Magnetostatik und des Gesteinsmagnetismus wird ein Überblick über magnetische Feldgeräte gegeben und Beispiele zur Interpretation lokaler magnetischer Anomalien.

### 4.3.1 Theorie der Magnetostatik

#### ***Klassische versus elektrodynamische Beschreibung:***

##### *Klassische Beschreibung:*

Gemeinhin ist die Wirkung eines Magnetfeldes auf einen drehbaren Stabmagneten (z.B. Kompassnadel) bekannt; der Stabmagnet erfährt ein Drehmoment und richtet sich im Magnetfeld parallel zu den magnetischen Feldlinien aus. Bei der klassischen Magnetfeldmessung wird der Einheits-Stabmagnet zur Vermessung des Magnetfeldes verwendet, ähnlich wie die Einheitsmasse zur Messung des Schwere- oder Gravitati-

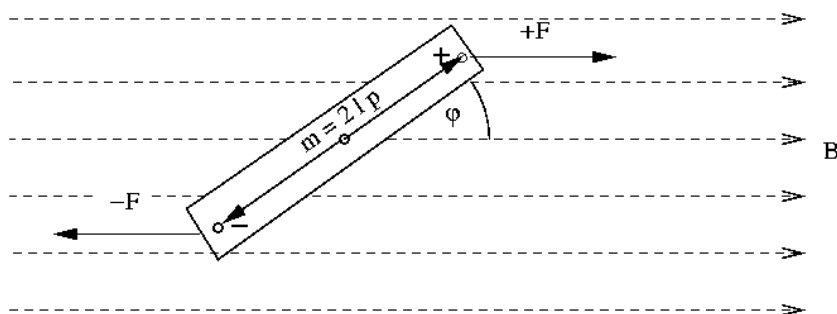


Abbildung 4.29: Auf den Stabmagneten mit dem Moment  $m_\chi = 2lp_\chi$  wird im Magnetfeld  $B$  ein Drehmoment ausgeübt, das durch die zwei Kräfte  $\mathbf{F}^+$  und  $\mathbf{F}^-$  auf seine beiden Pole beschrieben werden kann, Drehmoment  $= 2(lF \sin \varphi) = Bm_\chi \sin \varphi$ .

onsfeldes. Der Probekörper "Stabmagnet" hat allerdings zwei **magnetische Pole** mit unterschiedlichem Vorzeichen (**Nord- und Südpol**), die im homogenen Magnetfeld in entgegengesetzte Richtungen gezogen werden (Abb. 4.29). Die Pole liegen an den Stabenden und allgemein dort, wo sich die magnetischen Feldlinien des Eigenfeldes fokussieren. Man ordnet den Polen die **Polstärke**  $\pm p_\chi$  zu (Einheit  $Am$ ). Ganz allgemein ziehen sich entgegengesetzte Pole an und gleiche Pole stoßen sich ab. Das ist in Analogie zur Elektrostatik zu sehen, in der es Elementarladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen gibt, die sich gegenseitig anziehen oder abstoßen<sup>52</sup>. Im Gegensatz zur Elektrostatik kann man magnetische Pole aber nicht isolieren (z.B. durch Zersägen des Stabmagneten). **Magnetische Monopole** sind bis heute nicht gefunden oder entdeckt worden. Obgleich magnetische Monopole **nicht** existieren, spielen fiktive Monopole in der klassischen Sichtweise eine Rolle. Man kann formal die Kraft  $\mathbf{F}$  zwischen zwei beliebigen Polen  $p_{\chi 1}$  und  $p_{\chi 2}$  mit dem gegenseitigen Abstand  $r$  berechnen durch<sup>53</sup>

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 p_{\chi 1} p_{\chi 2}}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad , \quad (4.24)$$

wobei  $\mu_0$  die magnetische Permeabilität im Vakuum ist ( $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} Vs/(Am)$ ). Für zwei fiktive, magnetische Monopole gilt also ein "Coulombsches Gesetz" analog zur Elektrostatik. Die **magnetische Flußdichte**  $\mathbf{B}$  kann als Kraft pro "Einheitspol" definiert werden,

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{F}}{p_{\chi 1}} \quad . \quad (4.25)$$

<sup>52</sup>Massen ziehen sich immer nur an, es gibt keine negativen Massen

<sup>53</sup>z.B. ist  $p_{\chi 1}$  der Nordpol eines sehr langen Stabmagneten und  $p_{\chi 2}$  der Südpol eines zweiten, ebenfalls sehr langen Stabmagneten



Sie hat die Einheit  $T$  (Tesla,  $1T = 1Vs/m^2 = 1N/(Am)$ ). Ein fiktiver Monopol  $p_{\chi 2}$  erzeugt an einem Punkt  $X$  im Abstand  $r$  ein Magnetfeld

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 p_{\chi 2}}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad . \quad (4.26)$$

Vergleichbar zum Schwerefeld kann wieder ein **skalares Potenzial**  $W_{\chi}(r)$  eingeführt werden, das anschaulich die Arbeit repräsentiert, um im Magnetfeld einen positiven Einheits-Monopol aus dem Unendlichen in den Abstand  $r$  zu bringen.

$$\mathbf{B} = -\nabla W_{\chi} \quad . \quad \text{Potenzial des fiktiven Monopols: } W_{\chi}(r) = \frac{\mu_0 p_{\chi}}{4\pi r} \quad . \quad (4.27)$$

Ein elementarer **magnetischer Dipol** setzt sich aus zwei Monopolen mit unter-

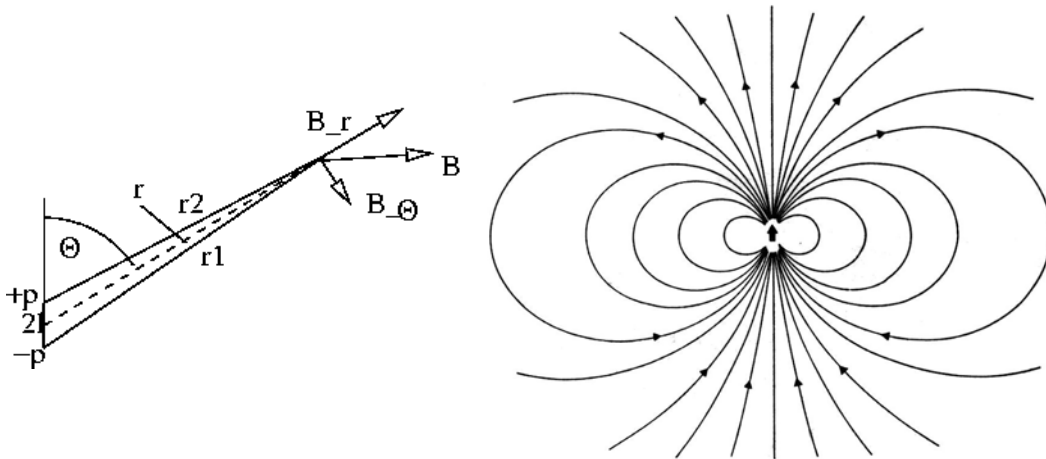


Abbildung 4.30: **Links:** Definition der geometrischen Abstände, Polwinkel und Magnetfeldkomponenten für einen Dipol mit den Polstärken  $\pm p$  im Abstand  $2l$ . **Rechts:** Feldlinien des magnetischen Dipols.

schiedlichem Vorzeichen im Abstand  $2l$  zusammen (Abb. 4.30). Das **magnetische Moment** oder **Dipolmoment** ist  $m_{\chi} = p_{\chi} 2l$  und das **Potenzial des Dipols** ist damit

$$W_{\chi}^{\text{dipol}}(r) \approx W_{\chi}(r_1) - W_{\chi}(r_2) = \frac{\mu_0 p_{\chi}}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad .$$

Behält man für  $r \gg l$  in einer Potenzreihenentwicklung (Taylorreihe) der Polbeiträge um den Mittelpunkt des Dipols nur das erste und zweite Glied ergibt sich  $W_{\chi}(r_1) \approx W_{\chi}(r) + \frac{dW_{\chi}}{dr}(r_1 - r)$ , und ein entsprechender Ausdruck für  $W_{\chi}(r_2)$ . Das Potential des Dipols ist damit

$$W_{\chi}^{\text{dipol}}(r) = W_{\chi}(r) - W_{\chi}(r) + \frac{dW_{\chi}}{dr}(r_1 - r_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} m_{\chi} \frac{\cos \Theta}{r^2} \quad , \quad (4.28)$$

wobei  $\Theta$  der Winkel zwischen dem Mittelpunkt der Dipolachse  $2\mathbf{l}$  und dem Radiusvektor  $\mathbf{r}$  zum Aufpunkt  $X$  ist (Abb. 4.30) und  $r_2 - r_1 \approx 2l \cos \Theta$  eingesetzt wurde.

Die Radial und Tangentialkomponente der magnetischen Flußdichte des Dipolfeldes ist

$$B_r = -\frac{\partial W_X}{\partial r} = \frac{\mu_0 m_X}{4\pi r^3} 2 \cos \Theta, \quad B_\Theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial W_X}{\partial \Theta} = \frac{\mu_0 m_X}{4\pi r^3} \sin \Theta \quad . \quad (4.29)$$

Die Stärke der Flußdichte des Dipolfeldes, die sogenannte Totalintensität  $|\mathbf{B}|$ , ist

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{B_r^2 + B_\Theta^2} = \frac{\mu_0 m_X}{4\pi r^3} (\sin^2 \Theta + 4 \cos^2 \Theta)^{1/2} = \frac{\mu_0 m_X}{4\pi r^3} (1 + 3 \cos^2 \Theta)^{1/2} \quad (4.30)$$

Die Totalintensität hängt von dem "Poldistanz-Winkel"  $\Theta$  ab und fällt außerdem mit  $r^{-3}$  ab, im Unterschied zum Monopolfeld mit einer Abnahme proportional zu  $r^{-2}$ .

Das Magnetfeld der Erde wird gängig durch zwei an der Oberfläche gemessene Richtungswinkel dargestellt, die **Deklination** und **Inklination**. Die Deklination gibt die Azimuthrichtung der Feldlinien von  $\mathbf{B}$  gegen geographisch Nord an. Die Inklination ist der Neigungswinkel der Feldlinien gegen die Horizontale oder Tangentialrichtung (in Ebene durch Polachse und Messpunkt). Für ein Dipolfeld gilt für die Inklination  $\varphi$

$$\tan \varphi = \frac{B_r}{B_\Theta} = 2 \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta} = 2 \cot \Theta = 2 \tan \theta \quad , \quad (4.31)$$

wobei  $\theta = (90^\circ - \Theta)$  die magnetische Breite ist<sup>54</sup>.

Wie in Kapitel 3.4 gezeigt wurde, kann der größte Anteil des Erdmagnetfeldes als Dipolfeld beschrieben werden. Deshalb kann Gleichung (4.31) verwendet werden, um die Position eines Paläo-Nordpols aus den Einfallswinkeln  $\varphi$  magnetisch remanenter Gesteine zu berechnen. Die magnetische Flußdichte des Dipolanteils am Erdäquator ist  $B_0 = 3.03 \cdot 10^{-5} T = 0.303 \Gamma$  (Gauß). Die Nichtdipolanteile des Erdfeldes sind zur Zeit nur etwa ein Viertel so stark (r.m.s. strength). Das Dipolfeld und vor allem die Nichtdipolanteile unterliegen allerdings langsamen Schwankungen und Drehungen (Säkularvariationen). Um neben dem Dipolfeld die Feldanteile höherer Ordnung mathematisch zu beschreiben, bedient man sich der Kugelfunktionsentwicklung.

#### *Elektromagnetische Beschreibung des Magnetismus:*

In der modernen elektromagnetischen Theorie werden alle Magnetfelder durch elektrische Ströme erzeugt. Jedes sich zeitlich ändernde elektrische Feld (z.B. stromdurchflossener

<sup>54</sup> Die magnetische Breite wird analog zu geographischen Breite definiert, nur dass magnetische Nord etwas von geographisch Nord abweicht und der magnetische Äquator nicht exakt am geographischen Äquator liegt.

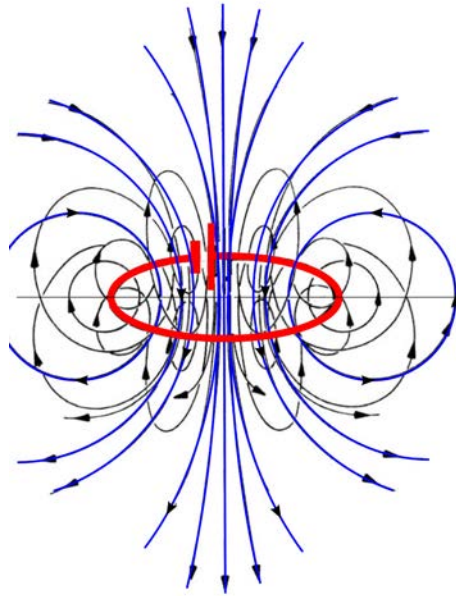


Abbildung 4.31: Skizze der magnetischen Feldlinien, die durch den Kreisstrom in einer Leiterschleife (dicke rote Linie) erzeugt werden (modifiziert nach Gerthsen et al., 1982). Feldlinien des "Fernfeldes" (blau) gleichen denen eines theoretischen Dipols.

Leiter) erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld und jedes sich ändernde Magnetfeld ein elektrisches Wirbelfeld (oder Strom, vgl. Maxwellsche Gleichungen). Der Strom  $I$  durch eine Leiterschleife mit dem Radius  $x$  erzeugt im Abstand  $r \gg x$  das Feld eines magnetischen Dipols wie in (4.29) (Abb. 4.31). Das magnetische Moment dieses Feldes ist

$$m_{\chi} = I\pi x^2 \quad . \quad (4.32)$$

Die moderne Sichtweise, bei der alle Magnetfelder durch bewegte Ladungen erzeugt werden, erklärt warum es keine magnetischen Monopole und nur Dipole oder kompliziertere Magnetfelder gibt. Die Theorie bis hierhin gibt jedoch keinen einfachen, intuitiven Ansatz den Gesteinsmagnetismus in seinen unterschiedlichen Formen zu erklären. Bei der Magnetisierung von Gesteinen werden keine Ströme im makroskopischen sondern im atomaren Bereich angeregt, die mit dem Umlauf von Elektronen um den Atomkern und mit der Eigenrotation (**Spin**) elektrisch geladener Elementarteilchen zusammenhängen. Die Beobachtung zeigt, dass Gesteine ihre Magnetisierung für Millionen von Jahren behalten können. Das heißt, dass diese atomaren Ströme oder Bewegungen nicht abklingen und nicht gedämpft werden.

Die moderne elektromagnetische Beschreibung mit dem magnetischen Dipol als kleinste Einheit macht die Formeln der klassischen Sichtweise von Gauss nicht ungültig, die in Analogie zur Elektrostatik auf fiktiven, magnetischen Monopolen aufbaut. Aller-

Tabelle 4.2: Einheiten magnetischer Größen

Name	Größe	SI-Einheit	cgs-Einheit
magn. Flußdichte	$B$	$1T$ (Tesla) = $10^9\gamma$ = $1Vs/m^2 = N/(Am)$	= $10^4\Gamma$ (Gauß)
magn. Erregung	$H$	$1A/m$	= $4\pi 10^{-3}Oe$ (Oersted)
magn. Permeabilität	$\mu_0$	$4\pi 10^{-7} Vs/(Am)$	= $1\gamma/Oe$
Magnetisierung	$M_\chi$	$1A/m$	= $4\pi 10^{-3}Oe$
magn. Moment	$m_\chi$	$1Am^2$	= $4\pi 10^{-3}Oe cm^3$
magn. Suszeptibilität	$\chi$	1	$\chi' = \chi/4\pi$

dings sollten die alten *cgs*-Einheiten (Zentimeter-Gramm-Sekunde und elektromagnetische Einheiten) nicht mehr benutzt werden und durch *SI*-Einheiten (Systeme International) ersetzt werden. Das ist unter Erdmagnetikern noch nicht allgemeine Praxis, weshalb Tabelle 4.2 eine Gegenüberstellung der "magnetischen Einheiten" gibt.

### ***Gesteinsmagnetismus und Magnetisierung:***

*Phänomenologische und mikroskopische Beschreibung:*








	Ferromagnet	Antiferromagnet	Ferrimagnet	Antiferromagnet (abgeschrägt)
	Fe, Co, Ni	NiO, MnO	Magnetit (Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub> )	Hematit (Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )
Atomare magnetische Momente				
spontane Netto-Magnetisierung		Null		

Abbildung 4.32: Die vier wichtigsten Typen der Ausrichtung der "Elementarmagnete" (Domains) und ihre Einteilung in ferro-, antiferro-, und ferrimagnetisch.

Bringt man einen Körper in den Bereich zunehmender Feldstärke eines äußeren, magnetischen Dipolfeldes, dann kann man unterschiedliche Phänomene beobachten, je nachdem ob der Körper diamagnetisch oder paramagnetisch ist. **Diamagnetische** Elemente und Gesteine werden aus dem Magnetfeld herausgedrückt, d.h. sie erfahren eine (kleine) Kraft in Richtung abnehmender Feldstärke. Beispiele sind Wismuth, Anhydrit, Gips, Marmor, Quarz und Salz. Man kann sich vorstellen, dass ganze Atome mit voll besetzten Elektronenhüllen um die B-Richtung des Außenfeldes rotieren, und ein abstoßendes magnetisches Moment erzeugen. **Paramagnetische** Elemente und Gesteine werden hingegen ins Ma-

gnetfeld hineingezogen. Sie magnetisieren sich in Feldrichtung. Die atomaren Teilchen von paramagnetischen Stoffen haben permanente magnetische Momente (**Elementarmagnete**), die vom äußeren Feld ausgerichtet werden. Die meisten paramagnetischen und diamagnetischen Effekte sind klein und für die Geophysik wenig bedeutend.

Einige paramagnetische Stoffe zeigen allerdings so starke Effekte (etwa  $10^6$ -fach stärker), dass sie einen eigenen Namen erhalten haben; **ferro-**, **antiferro-** oder **ferrimagnetisch**. Gemeinsam ist allen dreien, dass die an den Elektronenspin gebundenen Elementarmagnete in **Domänen**, also größeren Einheiten (auch **Weißsche Bezirke** genannt), organisiert oder ausgerichtet werden. Die Weißsche Bezirke können sich auch selbst oder spontan ausrichten. Die Ausrichtung der Elementarmagnete hängt von der Temperatur ab; bei hoher Temperatur überwiegt die zufällige, Brownsche Bewegung der Atome und die strenge Ordnung geht verloren. Oberhalb einer Temperaturgrenze (**Curie-Temperatur**, z.B.  $575^\circ\text{C}$  für Magnetit) verlieren ferro- oder ferrimagnetische Stoffe ihre magnetischen Eigenschaften.

Das magnetische Verhalten unterscheidet sich in der Wechselwirkung der magnetischen Momente zwischen Domänen (Abb. 4.32). In rein **ferromagnetischen** Stoffen sind alle magnetischen Momente parallel ausgerichtet. Beobachtet wird für chemische Elemente wie *Fe*, *Co* und *Ni*, aber nicht in Gesteinen. **Antiferro-** und **ferrimagnetische** Stoffe haben Subdomänen, in denen sich die magnetischen Momente entgegengesetzt ausgerichtet haben (Abb. 4.32). Bei ferrimagnetischen Stoffen bleibt ein Netto-Moment übrig. Einige **ferrimagnetische Mineralien** in Gesteinen sind für den **remanenten Gesteinsmagnetismus** verantwortlich, z.B. **Magnetit** ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) oder andere Mischkristalle aus Eisen- oder Titanoxiden.

Der **Paläomagnetismus** beruht also vor allem auf ferrimagnetischen Mineralien, die die remanente Magnetisierung tragen. Es gibt unterschiedliche Gründe für remanente Magnetisierung. **Thermoremanente Magnetisierung** (TRM) entsteht, wenn magnetisierbares Gestein (z.B. vulkanische Lava) im Erdmagnetfeld unterhalb die Curie-Temperatur abkühlt. Die thermoremanente Magnetisierung friert im Gestein ein und ist in der Regel relativ stark und äußerst stabil. Sie bleibt für Hunderte von Jahrmillionen erhalten und kann am Meeresboden vom Schiff aus vermessen werden (Magnetstreifenmuster). **Sedimentationsmagnetisierung (detrital remanent magnetisation, DRM)** ist relativ schwach. Ihre Vermessung erfordert hochempfindliche Messgeräte. Verläuft der Sedimentationsvorgang langsam und ungestört, dann können sich Magnetitminerale in den Sedimenten (relativ selten) wie Kompaßnadeln im Erdmagnetfeld ausrichten und festsedimentieren. Zusätzlich zu TRM und DRM gibt es noch chemisch induzierte Magnetisierung und "magnetische Anomalien" durch Eingriffe des Menschen (z.B. Archäomagnetik).

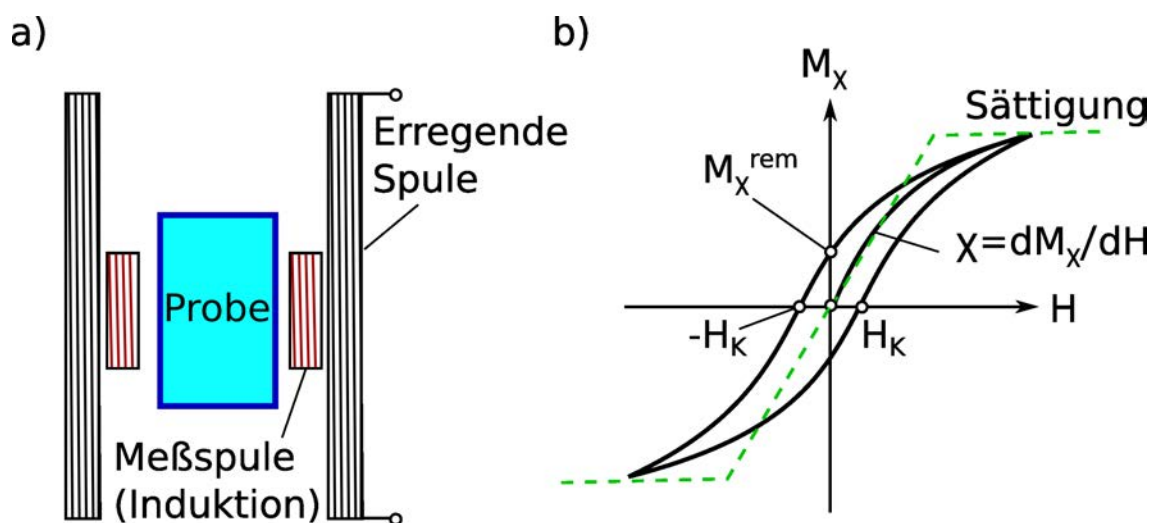


Abbildung 4.33: a) Experimenteller Aufbau aus erregender Primärspule, induktiver Meßspule und Probe zur Messung der Magnetisierungskurve eines Gesteins. b) Schematische Magnetisierungskurve  $M_x(H)$  eines ferrimagnetischen Gesteins. Die gestrichelte Kurve zeigt den generellen Trend inklusive Sättigung.

#### *Makroskopische Beschreibung:*

Bei Einbringen des magnetisierbaren Materials in ein äußeres Feld werden magnetische Dipole ausgerichtet (erzeugt). Die **Magnetisierung**  $M_x$  ist das magnetische Moment pro Einheitsvolumen (spezifische magnetische Moment),

$$M_x = \frac{m_x}{V} \text{ (in A/m)} \quad . \quad (4.33)$$

Die Magnetisierung  $M_x$  ist kein Materialparameter. Sie hängt von den Materialeigenschaften und dem erregenden Magnetfeld ab. Das erregende Feld wird durch die **magnetische Erregung**  $H$  beschrieben (Einheit  $A/m$ )<sup>55</sup>. Der Zusammenhang zwischen  $M_x$  und  $H$  gibt die Materialeigenschaften an. Die **Magnetisierungskurve**  $M_x(H)$  wird vermessen, indem ein Gestein in einer primären Stromspule einer steigenden magnetischen Erregung  $H$  ausgesetzt wird und  $M_x$  über eine sekundäre Induktionsspule gemessen wird (Abb. 4.33a). Für ferrimagnetische Gesteine erhält man typische **Hysterese-Kurven** (Abb. 4.33b). Hat das Gestein am Anfang keine remanente Magnetisierung, dann steigt  $M_x$  mit wachsendem  $H$  erstmal an (**Neumagnetisierung**). Für große  $H$  kommt man in den Bereich der **Sättigungsmagnetisierung**.

<sup>55</sup> Die magnetische Flußdichte  $B$  mißt dagegen das erregende Feld und das durch die Magnetisierung entstandene Feld.  $B$  wird durch freie und gebundene (mikroskopische) Ströme erzeugt,  $H$  nur durch freie. Das ist analog zur elektrischen Feldstärke  $E$  und der Verschiebungsdichte  $D$ .  $B$  und  $H$  haben unterschiedliche Einheiten, da  $\mu_0$  dimensionsbehaftet ist



Tabelle 4.3: Magnetische Suszeptibilität für verschiedene Gesteine und Mineralien.

Gestein/Mineral	$\chi$ -Bereich $\cdot 10^3$	$\langle \chi \rangle$	Gestein/Mineral	$\chi$ -Bereich $\cdot 10^3$	$\langle \chi \rangle$
Granit	0 - 50	2.5	Kalkstein	0 - 3	0.3
Augit-Syenit	30-40		Quarz		-0.01
Olivin-Diabase		25	Steinsalz		-0.01
Gabbro	1 - 90	70	Gips		-0.01
Basalt	0.2 - 175	70	Pyrrholite	1 - 6000	1500
Peridotit	90 - 200	150	Ilmenite	300 - 3500	1800
Sandstein	0 - 20	0.4	Magnetit	1200 - 19200	6000

Alle Elementarmagnete sind parallel zum  $H$ -Feld ausgerichtet. Nimmt  $H$  wieder ab, dann läuft die Magnetisierungskurve nicht wieder durch den Nullpunkt. Für  $H = 0$  verbleibt die **remanente Magnetisierung**  $M_\chi^{\text{rem}}$ . Nicht alle Weißschen Bezirke haben ihre ursprüngliche Domänenmagnetisierung wiedererlangt. Um die remanente Magnetisierung zu beseitigen, muss ein Gegenfeld  $H_K$  angelegt werden, das die sogenannte **Koerzitivkraft** des magnetisierten Materials überwindet. Je größer  $H_K$  ist, desto widerstandsfähiger ist die remanente Magnetisierung. Für kleine  $H$  kann die Magnetisierungskurve durch eine Gerade angenähert werden; die Steigung ist die **Suszeptibilität**  $\chi$ . Die Suszeptibilität ist der Materialparameter, der festlegt, ob eine starke oder schwache Magnetisierung möglich ist. Bei der Interpretation einer magnetischen Anomalie wird allerdings nicht nur die aktuell induzierte Magnetisierung untersucht (proportional zu  $\chi$ ), sondern die gesamte Magnetisierung aus induzierten und remanent vorhandenen magnetischen Momenten. Die Magnetisierung hat in dem Sinne eine vergleichbare Rolle wie die Dichte bei der Interpretation von Schwereanomalien. Für kleine  $H$  ist  $M_\chi \approx M_\chi^{\text{rem}} + \chi H$  (Abb. 4.33). Mit Magnetometern wird letztlich  $B$  gemessen, das sich aus dem erzeugenden Feld  $H$  und der Magnetisierung  $M_\chi$  zusammensetzt,

$$B = \mu_0 (H + M_\chi) \approx \mu_0 (H + \chi H + M_\chi^{\text{rem}}) \quad . \quad (4.34)$$

Ist die remanente Magnetisierung vernachlässigbar, dann erhält man die einfachere Form

$$B = \mu_0 (1 + \chi) H = \mu_0 \mu_r H \quad , \quad (4.35)$$

wobei  $\mu_r = (1 + \chi)$  die dimensionslose magnetische Permeabilität des Mediums ist. Im Vakuum ist  $\mu_r = 1$ , in Luft  $\mu_r \approx 1$ . In Tabelle 4.3 ist der Bereich der magnetischen Suszeptibilität für verschiedene Gesteine und Mineralien zusammengestellt.

Tabelle 4.4: Größenordnung magnetischer Anomalien.

hochfrequente Störfelder	bis $100 \text{ nT}$	Erzlagerstätte	mehrere $10000 \text{ nT}$
Metallfaß ( $2\text{m}$ tief)	$\approx 100 \text{ nT}$	Pleistozene Rinne	$< 100 \text{ nT}$
Basaltlagerstätte	$< 500 \text{ nT}$	archäologische Objekte	$< 50 \text{ nT}$
Hausmüll Deponien	$> 2000 \text{ nT}$	PKW ( $5\text{m}$ entfernt)	$< 200 \text{ nT}$

### 4.3.2 Magnetische Feldmessungen

Die magnetische Flußdichte  $\mathbf{B}$  wird selten als vollständiger Vektor gemessen. Häufig wird die **Totalintensität**  $|\mathbf{B}|$  gemessen oder die **Deklination** (Winkel zwischen der Horizontalkomponente und Nord) und **Inklination** (Einfallswinkel des  $\mathbf{B}$ -Vektors gegen die Horizontale)<sup>56</sup>. Einige Instrumente messen nur die Horizontal- oder die Vertikalintensität. Die geforderten Genauigkeiten in der angewandten Geomagnetik sind  $1 - 10 \text{ nT}$  in einem Feld bis zu etwa  $50000 \text{ nT}$  (vgl. Beispiele in Tabelle 4.4). Ältere Meßinstrumente sind magnetische Feldwaagen oder Torsionsmagnetometer. Sie sind heute von geringer Bedeutung. Das Kernsättigungsmagnetometer wird als Feldinstrument verwendet, um z.B. den vollständigen  $\mathbf{B}$ -Vektor zu messen. Genügt für die Fragestellung die Kenntnis der Totalintensität, dann ist ein Protonen-Präzessions-Magnetometer das geeignete Instrument. Um schnelle Änderungen des Magnetfeldes zu erfassen, werden manchmal Magnetometer eingesetzt, die mit Resonanzen von Elektronen arbeiten (optically pumped magnetometer). Diese modernen Magnetometer können eine Genauigkeit bis zu  $0.001 \text{ nT}$  erreichen. Gradiometer, die Komponenten des B-Feldes in geringem Abstand zueinander messen, kommen heutzutage ebenso mehr und mehr zum Einsatz.

#### *Mechanisches Torsionsmagnetometer:*

Das Torsionsmagnetometer mißt die Vertikalkomponente  $B_z$ . Zwischen zwei gespannten Metallbändchen ist ein Stabmagnet angebracht, der sich im Erdmagnetfeld parallel zu den Feldlinien ausrichten will (Abb. 4.34). Bis auf den magnetischen Äquator hat das Erdfeld eine vertikale Komponente  $B_z$ . Der Stabmagnet würde also frei schwebend geneigt zur Horizontalen in Ruhe sein. Zur Messung wird der Stabmagnet durch Torsion des Drahtes in die horizontale Lage zurückgestellt. Die dazu nötige Torsionskraft hängt linear von  $B_z$  ab. Die Meßgröße ist der erforderliche Drehwinkel  $\alpha$ . Das Torsionsmagnetometer kann nur die relative Änderung von  $\phi = \alpha$  und damit von  $B_z$  genau messen. Es muss durch Messungen in Eichspulen kalibriert werden.

<sup>56</sup> Häufig verwendete Nomenklatur: D für Deklination, I für Inklination, T für Totalintensität, Z für Vertikalkomponente, H für Horizontalkomponente (ebenso X und Y).

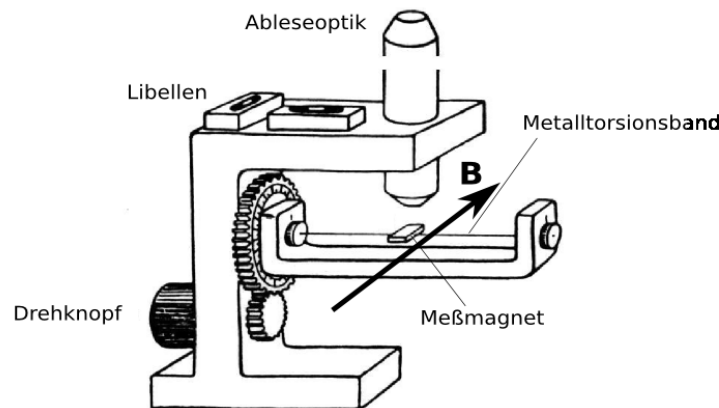


Abbildung 4.34: Prinzip eines Torsionsmagnetometers der Firma Gfz Askania.

#### ***Kernsättigungs-Magnetometer:***

Das Kernsättigungs-Magnetometer (Förster Sonde, Saturationskern- oder Fluxgate Magnetometer) wurde während des zweiten Weltkriegs zur besseren Detektion von U-Booten entwickelt. Heute wird es für geophysikalische Messungen an Land, im Wasser und in der Luft eingesetzt. Mit dem Kernsättigungs-Magnetometer können unterschiedliche Komponenten von  $\mathbf{B}$  gemessen werden. Das Prinzip ist in Abb. 4.35 dargestellt. Das Meßelement besteht aus einem stabförmigen Eisenkern hoher Suszeptibilität und ausgeprägter Sättigung. Der Eisenkern ist von einer Anregungsspule und einer Messspule umgeben. Der Eisenstab wird durch ein Wechselfeld der Anregungsspule ständig bis zur Sättigung magnetisiert. Die Messspule mißt eine induzierte Spannung proportional zu  $\dot{\mathbf{B}}$ . Ohne Magnetfeld der Erde ist die Magnetisierungskurve  $\mathbf{M}_x$  und damit auch  $\mathbf{B}$  streng symmetrisch um die Nulllage. Durch das Magnetfeld der Erde ( $H_0 = B_0/\mu_0$ ) entsteht eine Unsymmetrie, die durch elektronische Filter gemessen werden kann. Die Unsymmetrie ist "proportional" zu dem Anteil von  $H_0$  (oder  $B_0$ ) parallel zur Spulenachse. Je nach Orientierung der Spule können unterschiedliche Komponenten des Erdmagnetfeldes gemessen werden.

#### ***Protonen-Präzessions-Magnetometer:***

Das Protonen-Präzessions-Magnetometer (kurz: Protonen-Magnetometer) mißt die Präzessionsfrequenz des magnetischen Moments von Wasserstoffkernen (Proton) im Erdmagnetfeld. Liegt der Eigendrehimpuls (Spin) des Protons nicht parallel zur Richtung des äußeren Magnetflusses, dann wirkt auf das Proton ein Drehmoment. Das Proton verhält sich wie ein Kreisel (Abb. 4.36) und umkreist die Magnetfeldrichtung des Erdfeldes mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 2\pi f = \eta_{gy} |\mathbf{B}| \quad .$$

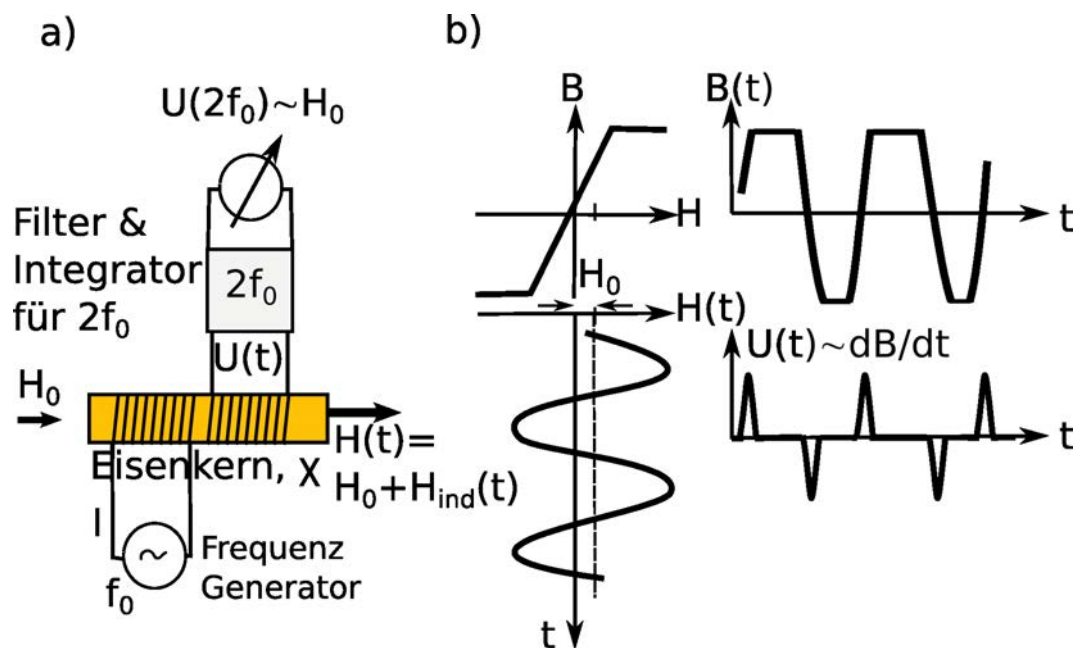


Abbildung 4.35: a) Aufbau eines Kernsättigungs-Magnetometers mit Eisenkern, anregender und messender Spule.  $H_0$  ist die Flußkomponente des Erdmagnetfeldes,  $H_{\text{ind}}(t)$  das durch den Wechselstrom  $I(t)$  generierte, erregende Feld.  $f_0$  gibt die Frequenz der Generatorstroms an. b) Schematische Magnetisierungskurve  $B(t)$  für den in die magnetische Sättigung induzierten Kern. Wegen des Feldanteils  $H_0$  des Erdfeldes ist die magnetische Erregung aus der Nulllage verschoben. Die induzierte Magnetisierung, oder besser die Flußdichte  $B(t)$ , durchläuft die Sättigungen nicht mehr symmetrisch, und die gemessene, induzierte Spannung  $U(t) \sim dB/dt$  zeigt Pulse in den Bereichen starker Änderung von  $B(t)$ .

Die Winkelgeschwindigkeit ist streng proportional zur Totalintensität  $|\mathbf{B}|$  (quantenmechanischer Effekt). Die Proportionalitätskonstante  $\eta_{\text{gy}}$  ist das **gyromagnetische Verhältnis** des Protons und hängt nicht von äußeren Einflüssen wie Temperatur oder Druck ab. Deshalb ist das Protonen-Präzessions-Magnetometer sehr genau und kann absolute Flußdichten messen (bis  $0.1 \text{ nT}$ ). Die Präzessionsfrequenz  $f$  kann elektronisch gemessen werden. Um allerdings genügend starke Signale zu erhalten, werden die Protonenträger (z.B. flüssiges Methanol) durch den starken Polarisationsstrom einer äußeren Spule kurz vor der Messung parallel zueinander ausgerichtet (polarisiert). Zu Beginn der eigentlichen Messung wird der Polarisationsstrom abgeschaltet, wodurch die meisten Protonen kurzzeitig im Gleichtakt präzessieren, was zu einem meßbaren, induzierten Signal in der Spule führt und die Ausmessung von  $f$  ermöglicht.

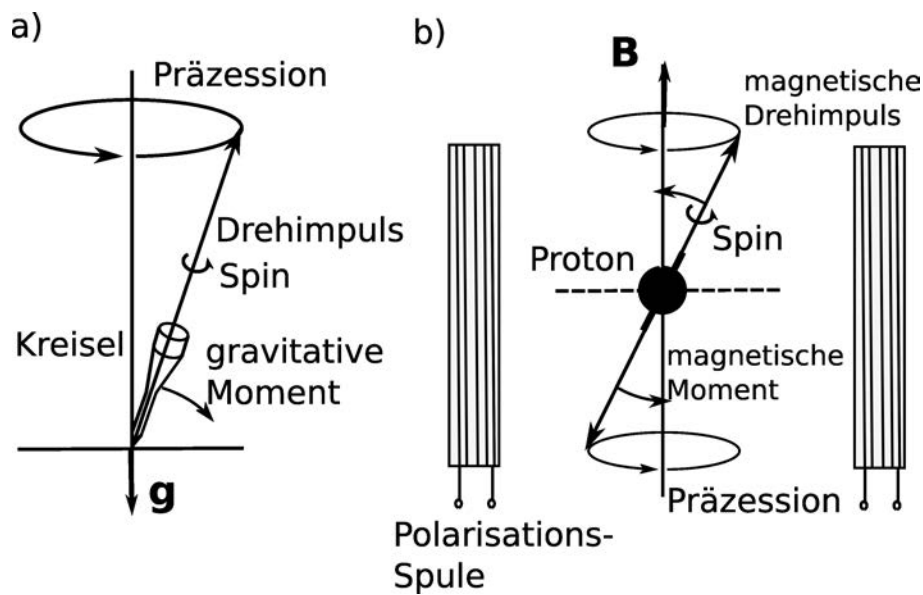


Abbildung 4.36: Veranschaulichung des Prinzips eines Protonen-Präzessions-Magnetometers durch Vergleich mit einem mechanischen Kreisel. a) Präzessionsbewegung, Spin / Drehimpuls und gravitatives Moment eines mechanischen Kreisels im Schwerfeld  $\mathbf{g}$ . b) Magnetischer Drehimpuls / Spin und magnetisches Moment auf ein Proton im Magnetfeld  $\mathbf{B}$  führt auf eine Präzessionsbewegung ähnlich zu der eines Kreisels im Schwerfeld.

### 4.3.3 Magnetische Auswertung

Magnetisierte Gesteinskörper erzeugen in ihrer Umgebung ein Eigenfeld, das sich mit dem regionalen Magnetfeld der Erde überlagert und als magnetische Anomalie in den Messungen erkennbar ist. Ähnlich wie bei der Schwereauswertung versucht man, die Geometrie und Stärke (und Richtung) der lokalen Magnetisierung durch den Vergleich mit theoretischen Anomalien von einfachen Störkörpern zu interpretieren. Wie bei der Schwere gibt es wieder beliebig viele Störkörper, die dieselbe Anomalie hervorrufen (Problem der **Mehrdeutigkeit**). Deshalb ist auch bei der magnetischen Interpretation der Vergleich mit anderen Messungen wichtig (z.B. Schwere, Seismik, Elektrik, Geologie). Magnetische Messungen müssen meist auf einen **einheitlichen Bezugszeitpunkt** reduziert werden, da das Erdmagnetfeld starken kurzperiodischen Schwankungen unterliegt, deren Ursachen in der Atmosphäre der Erde liegen. In der Regel werden an einem oder mehreren Basispunkten Wiederholungsmessungen durchgeführt (etwa einstündig) oder der Basispunkt wird gleich kontinuierlich vermessen<sup>57</sup>. Die Höhenkorrektur spielt in der Magnetik eine kleine Rolle. Bei großräumigen Messungen (z.B. vom Flugzeug aus) sollte

<sup>57</sup> Im Gegensatz zu Schweremessungen muss die Basismessungen nicht mit dem gleichen Sensor durchgeführt werden, da die Gerätedrift eines modernen Magnetometers einen vergleichsweise kleinen Effekt hat.

die regionale Änderung des Erdmagnetfeldes korrigiert werden, d.h. das **magnetische Hauptfeld** (Referenzfeld) der Erde wird vom Totalfeld abgezogen. Das Referenzfeld wird etwa alle 5 Jahre aus Daten von weltweit verteilten Observatorien neu berechnet und zur Verfügung gestellt (z.B. IGRF-Modell des National Geophysical Data Center NGDC). Da magnetische Anomalien in der Regel klein sind ( $< 15\%$ ) im Vergleich zum Hauptfeld, kann die Richtung des Hauptfeldes der Erde durch die Richtung des gemessenen B-Feldes approximiert werden (vergleichbar zum Ansatz bei der Schwereauswertung).

Die quantitative Interpretation von magnetischen Anomalien ist schwieriger als die Deutung von Schwereanomalien. Das liegt daran, dass die Magnetisierung (spezifische magnetische Moment) vektoriellen Charakter hat und keine skalare Größe wie die Dichte ist. Zum Beispiel hängt die Magnetisierung des Gesteins von Inklination und Deklination des aktuellen Erdmagnetfeldes und der remanenten Magnetisierung ab. Die remanente Magnetisierung könnte sogar eine andere Richtung aufweisen als die des aktuellen Magnetfeldes. Durch den vektoriellen Charakter der Magnetisierung wird die Vieldeutigkeit des Inversionsproblems noch größer. Außerdem kommt erschwerend hinzu, dass die Magnitude der Magnetisierung im Gestein lokal sehr stark variieren kann. Im Vergleich dazu sind die relativen Dichteveränderungen bei der Schwereauswertung klein.

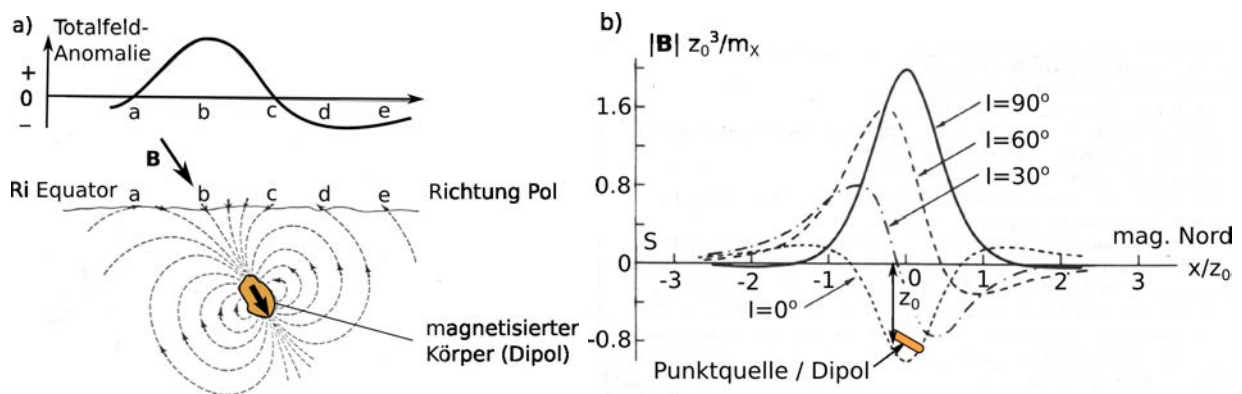


Abbildung 4.37: a) Konstruktion der Totalfeldanomalie für einen magnetisierbaren Körper im Untergrund (Dipol Punktquelle) durch Überlagerung des Dipolfeldes mit dem regionalen Erdmagnetfeld (hier  $\mathbf{B}$ ). b) Normierte Totalfeldanomalien der Dipol Punktquelle als Funktion der Quelltiefe  $z_0$  und der Inklination  $I$  des Regionalfeldes (modifiziert nach Telford et al., 1990). Die Inklination liegt in Deutschland zwischen etwa  $64.4^\circ$  im Süden (Stuttgart) und  $68^\circ$  im Norden (Hamburg).

Bei der Berechnung der theoretischen Anomalie einfacher magnetischer Störkörper geht man analog vor wie bei der Schwere. Die Gleichungen für einen magnetischen Dipol sind (4.28) und (4.29). Für einen punktförmigen magnetischen Störkörper der Magnetisierung  $m_x$  in der Tiefe  $z_0$  wird das Eigenfeld des Dipols mit dem regionalen Erdmagnetfeld an der Oberfläche überlagert. Dabei wird angenommen, dass der Störkörper in Richtung des



Erdmagnetfeldes magnetisiert ist (Abb.4.37a). Die Form des Anomaliefeldes hängt dann von der Inklination  $I$ , Deklination  $D$  und relativen Feldstärke  $|\mathbf{B}|z_0^3/m_\chi$  des Erdmagnetfeldes an den geographischen Koordinaten des Messgebiets ab (Abb.4.37b). Zum Beispiel variierte in 2012 die magnetische Inklination in Deutschland zwischen  $64.4^\circ$  im Süden (Stuttgart) und  $68^\circ$  im Norden (Hamburg), und die magnetische Deklination zwischen etwa  $1^\circ$  im Westen (Köln) und  $3.1^\circ$  im Osten von Deutschland (Berlin).

Die erwartete Totalfeldanomalie eines magnetisierten Körpers in mittleren nördlichen Breiten ( $\approx 60^\circ$ ) besteht aus einer positiven, glockenförmigen Anomalie und einer in Nordrichtung versetzten, etwas kleineren negativen glockenförmigen Anomalie. Entlang eines NS-Profiles erwartet man ein zweiseitiges Anomaliefeld (Abb.4.37b). Am Nordpol ( $I = 90^\circ$ ) erwartet man einen einseitigen und am Äquator ( $I = 0^\circ$ ) einen symmetrischen, zweiseitigen Puls. Die Stärke der Dipolanomalie skaliert mit  $|\mathbf{B}|z_0^3/m_\chi$ . Die Tiefe  $z_0$  ist das ein- bis dreifache der Halbwertsbreite der Anomalie, je nachdem unter welcher Inklination der Körper magnetisiert wird. Die Tiefe der Punktquelle kann analog zum Vorgehen bei der Schwereauswertung als Maximaltiefe interpretiert werden. Ausgedehnte Störkörper mit homogener Magnetisierung können ein ähnliches oder sogar identisches Anomaliefeld erzeugen, liegen aber in geringerer Tiefe. Zur Berechnung der Feldanomalie eines ausgedehnten, magnetisierten Körpers integriert man über magnetische Dipole im betrachteten Volumen. Ein mathematisch einfacher Ansatz geht über das Dipolpotenzial, wobei die Komponenten von  $\mathbf{B}$  dann durch die Ableitung des Potenzials nach den Ortskoordinaten berechnet werden. Telford et al. (1990) gibt mehrere Beispiele für zweidimensionale oder dreidimensionale Störkörper.

Die Magnetik hat eine wichtige Rolle bei der Erkundung eines Gebietes, da man einfach und schnell flächenhaft Messungen durchführen und Anomalien erkennen kann (z.B. für Archäomagnetik oder Deponieerkundung). In der Ingenieurgeophysik verzichtet man aber häufig auf eine quantitative Interpretation der magnetischen Anomalien und begnügt sich mit einer einfachen Kartierung und Detektion von Störkörpern. Die folgenden Beispiele umfassen einen kleinen Teil möglicher Anwendungen in der Geomagnetik.

**Beispiel 4.4 (Kartierung vergrabener Eisenobjekte)** *Geomagnetik kann zur Kartierung von metallischen Objekten im Untergrund verwendet werden. Abb. 4.38 zeigt die Kartierung einer industriellen Brachfläche mit einem Protonenmagnetometer (3m Messraster, GGU mbH Karlsruhe, M. Hübner, pers. Mitteilung). Ziel der Messung war es vergrabene Eisentanks (500 bis 1000 l) zu finden und zu bergen. Die Anomalien des Totalfeldes sind im Bereich von Tanks mit  $\pm 2000$  nT relativ stark. Die Anomalien zeigen den typischen N-S gerichteten Dipolcharakter, wie er durch im Magnetfeld der Erde magnetisierte Objekte im Untergrund verursacht wird. Stärke und geringe Wellenlänge der zweiseitigen Anomalien deuten auf metallische Objekte in geringer Tiefe hin.*

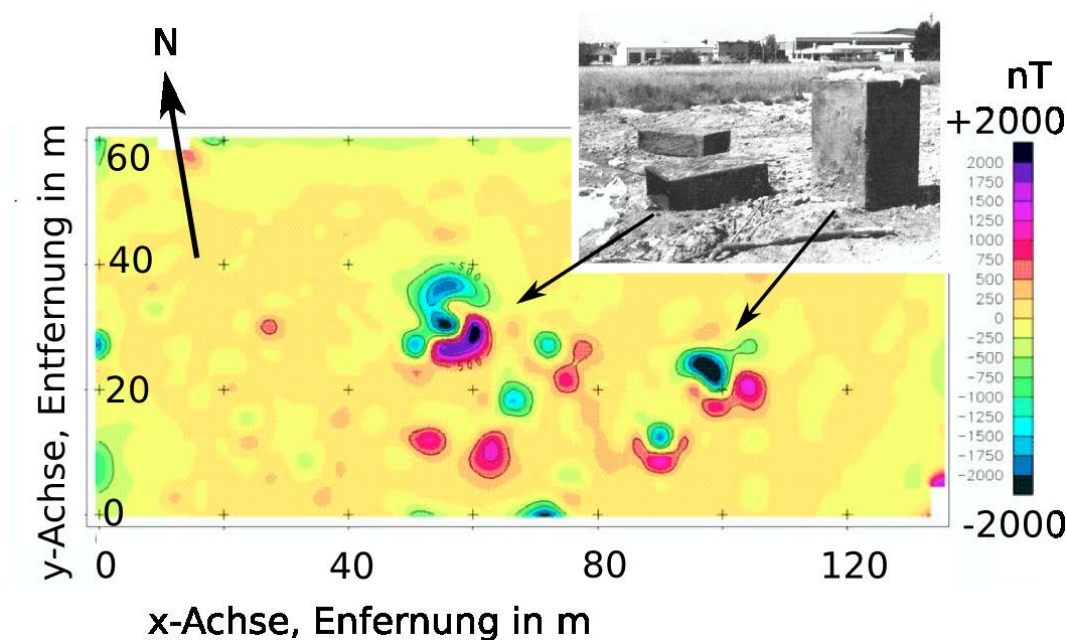


Abbildung 4.38: Anomaliefeld der erdmagnetischen Totalintensität auf einer industriellen Brachfläche (130 m x 60 m) (GGU mbH Karlsruhe).

**Beispiel 4.5 (Anomalie einer Altdeponie)** Abb. 4.39 zeigt die flächenhaft (160 m x 130 m) vermessene Totalintensität über einer Tongrube, die ehemals als Deponie genutzt wurde (GGU mbH Karlsruhe, M. Hübner, pers. Mitteilung). Zur Zeit der Messung war die verfüllte Grube abgedeckt und landwirtschaftlich genutzt. Die Totalfeld Anomalie ist mit  $\pm 2500$  nT relativ stark und umfaßt einen ausgedehnten, kreisförmigen Bereich von etwa 120 m Durchmesser. Der zweiseitige Dipolcharakter der Anomalie in NS Richtung ist gut zu erkennen. Die Begrenzung der Anomalie korreliert mit der Begrenzung der verfüllten Grube. Zusätzlich sind kleinere Einzelobjekte in geringer Tiefe anhand von kleinräumigen Anomalien auszumachen. Das Beispiel zeigt eine typische Anwendung der Ingenieurgeophysik. Oft genügt es bei der ersten Untersuchung, die Lage und Ausdehnung der "Altlast" zu kartieren, was hier durch einfache magnetische Messungen mit dem Protonen-Präzessions-Magnetometer gelingt.

**Beispiel 4.6 (Magnetfeld über eine erzhaltige Störungszone)** Abb. 4.40 zeigt die lokale Schwankungen der Totalintensität entlang eines 1 km langen Messprofils, welches eine geologische, mineralisierte Störung im Buntsandstein kreuzt. Ziel der Messung war es die Lage der Störung zu kartieren. In der Störungszone sind geringe Mengen an ferrimagnetischen Mineralien enthalten, wodurch eine schwache Anomalie von etwa  $\pm 15$  nT bei Profilmeter 1450 und 1870 erzeugt wird (GGU mbH, pers. Mitteilung), welche als Effekt der erzhaltigen Störungszone interpretiert wurde. Der zweiseitige Charakter der Anomalie des Totalfelds könnte auch durch den Versatz einer dünnen horizontalen, magnetisierten Schicht über die Störungszone entstehen (siehe Modellierungsbeispiele in

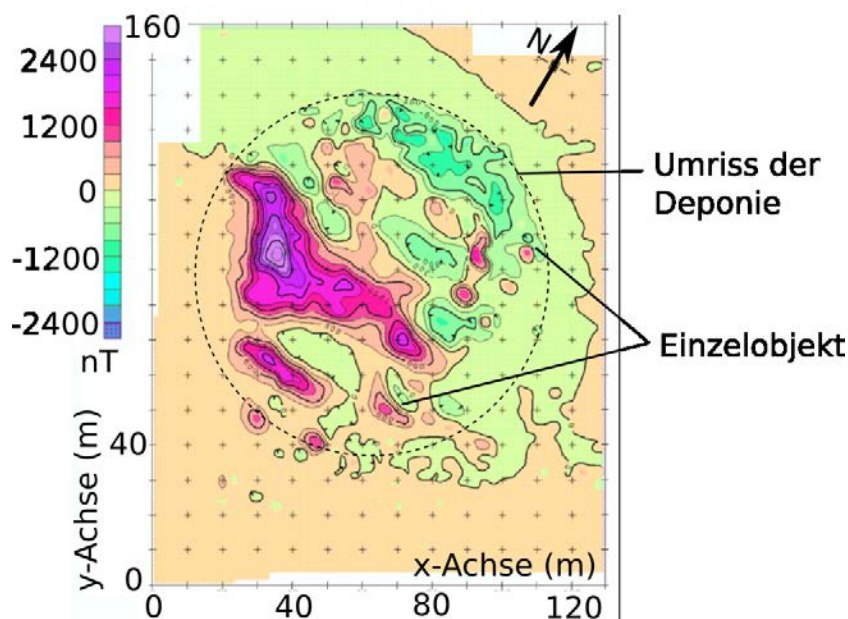


Abbildung 4.39: Anomalie der Totalintensität über einer Tongrube, die ehemals als Deponie genutzt wurde (GGU mbH Karlsruhe).

*Telford et al., 1990*). Bei der Messung kleinräumiger Anomalien geringen Intensität wie in diesem Beispiel müssen störende Eisenobjekte wie Maste, Fahrzeuge, Zäune u.a. genau dokumentiert werden, da diese ähnliche Signale erzeugen können.

**Beispiel 4.7 (Magnetfeld an untermeerischem Vulkanberg)** Im Rahmen eines Forschungsprojektes der Deutschen Forschungsgemeinschaft wurden zwischen 2006 und 2009 der untermeerische Vulkan Columbo vor Santorini in der Ägäis (Griechenland) mit unterschiedlichen geophysikalischen Methoden untersucht (*Hübscher et al., 2006*). Abb. 4.41 zeigt Profile von geomagnetischen Schiffsmessungen und die zugehörige Totalfeldanomalie. Die Messsonde wurde im Wasser etwa 230 m hinter der GPS Position des Schiffs gezogen - für die Zusammenstellung aller Messwerte musste die Sensorposition berücksichtigt werden. Abb. 4.41 zeigt die Messwerte nach Abzug des Hauptfeldes (IRGF Modell). Die überragende Anomalie des Santorini Vulkankomplexes von etwa  $\pm 500$  nT wurde ausgeblendet, um die kleinere Anomalie ( $\pm 200$  nT) entlang der NE-SW gerichteten Columbo Störungszone und des Columbo Seebergs erkennbar zu machen, die durch erstarrte, magmatische Spaltenintrusionen erklärt werden kann. Für die 3D Modellierung der magnetischen Anomalie wurde das Programm IGMAS der Universität Kiel verwendet (z.B. *Goetze and Lahmeyer, 1988*). Alle Koordinaten wurden für die Auswertung in UTM Koordinaten umgerechnet. Abb. 4.42 zeigt beispielhaft für einen Profilschnitt die Anpassung der Anomalie zusammen mit dem vorgeschlagenen Suszeptibilitätsmodell (aus *Landschulze, 2009*). Die zweiseitige Anomalie kann durch einen etwa 500 m dicken, vertikalen Intrusionskörper vom Meeresboden bis etwa 2 km Tiefe erklärt werden. Die

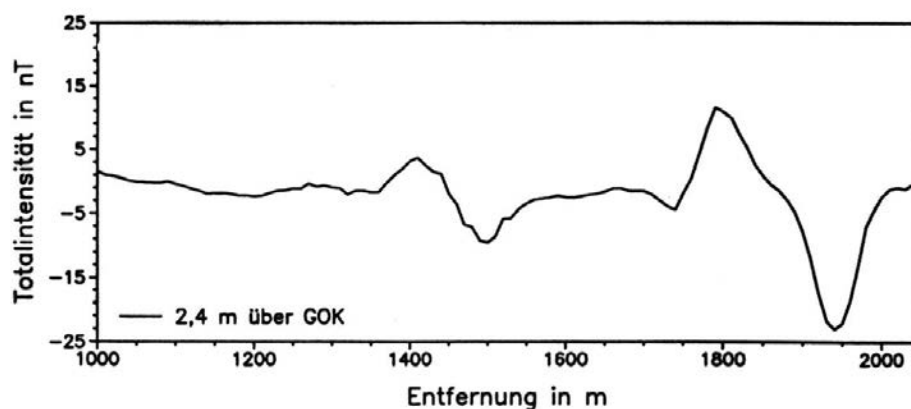


Abbildung 4.40: Totalintensität entlang eines Profils über eine geologische Störung (GGU mbH Karlsruhe).

*Curie Temperatur für Magmen wird in etwa 6 km Tiefe erreicht. Die Ergebnisse der seismologischen Messungen deuten darauf hin, dass das Magmareservoir unter dem Columbus Seamount in 4-5 km Tiefe liegt. Die Berücksichtigung einer tiefer reichenden magnetisierten Intrusion bis 5 km Tiefe hat allerdings kaum Einfluß auf die theoretische Anomalie. Um die Breite der Anomalie in Abb. 4.42 zu erklären wurde eine oberflächennahe, magnetisierte Schicht eingeführt, die als Lavaschicht am Seeboden interpretiert wurde. In die Interpretation und Modellierung sind auch Ergebnisse aus der Seismologie, Reflektionsseismik und Gravimetrie eingeflossen (Landschulze, 2009).*

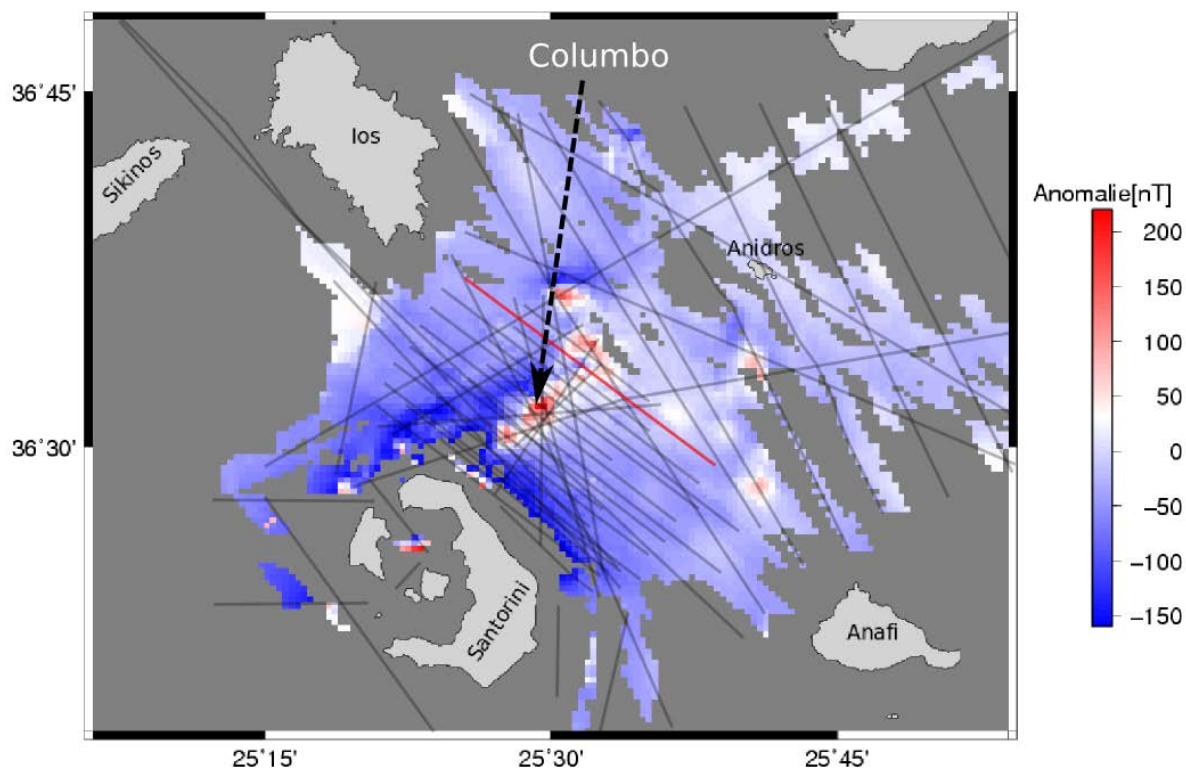


Abbildung 4.41: Anomalie des Totalfelds (100 m Gitter, interpoliert mit Nearest Neighbor Ansatz und 3 km Suchradius, Farbskala begrenzt zwischen  $[-160\text{nT}; +220\text{nT}]$ ) im Bereich des Columbo Seamounts nordwestlichen der Insel Thera des Santorinin Vulkans in der Ägäis (Griechenland). Das magnetische Hauptfeld und zeitliche Variationen wurden von den Messwerten abgezogen. Die Lage der gefahrenen, magnetischen Schiffsprofile ist durch graue Linien markiert. Das rote Profil wird in Abb. 4.42 beschrieben (aus Landschulze, 2009).



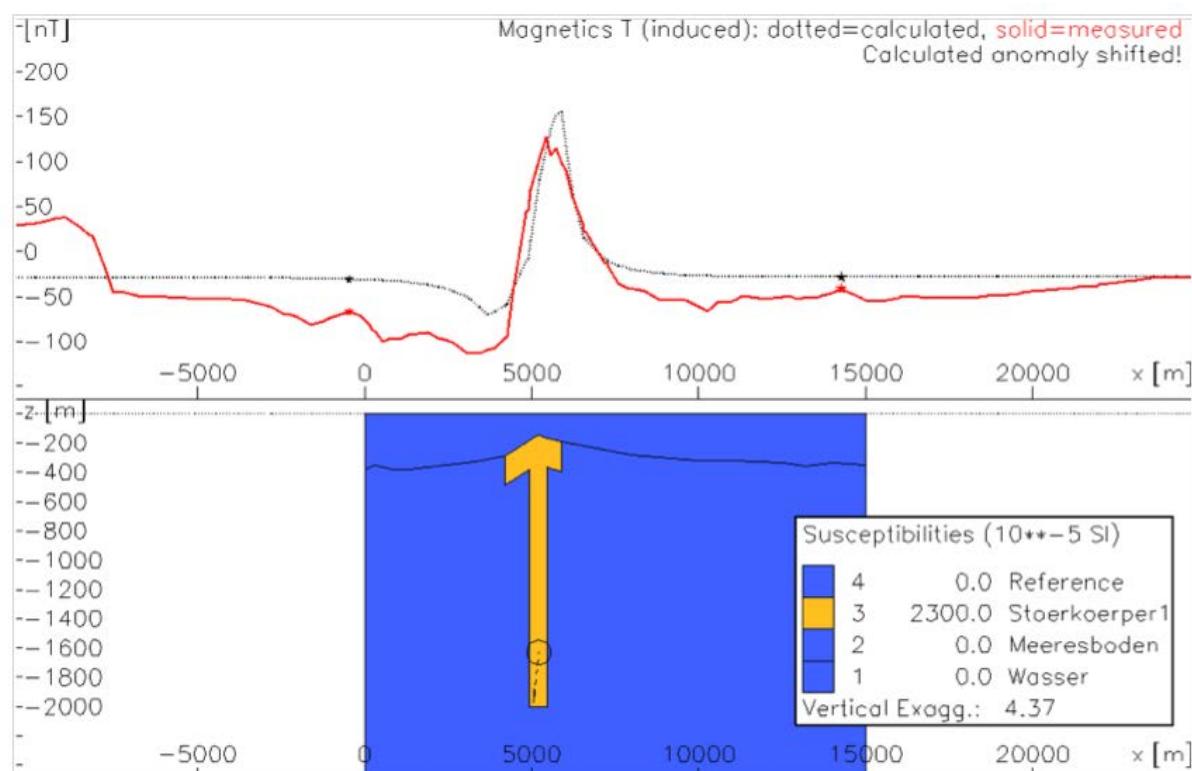


Abbildung 4.42: Ergebnis der magnetischen 3D Modellierung über die Columbo Störungszone mit dem Programmpaket IGMAS (aus Landschulze, 2009). Das dargestellte Profil ist in Abb. 4.41 rot markiert. Die rote Kurve zeigt die gemessenen Daten und die schwarze Kurve die theoretische Vorhersage mit dem gewählten Untergrundmodell. Im unteren Teilbild ist ein Vertikalschnitt durch das Suszeptibilitätsmodell gezeigt (dimensionslos in SI Einheiten).



## 4.4 Elektrostatische Felder und Gleichstromelektrik

Das griechische Wort für Bernstein ist „elektron“ ( $\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\nu$ ), das auch mit „Sonnenstein“ oder ursprünglich „hell glänzend“ übersetzt wurde. Das deutsche Wort „Bernstein“ leitet sich von „börnen“ (brennen) ab. Bernstein ist bis zu 260 Mio Jahre alt und besteht aus zähflüssigem Harz der damaligen Bäume, das im Laufe der Zeit zu einer festen nicht-kristallinen (amorphen) Substanz geworden ist. Bernstein ist ein leichtes, weiches „Gestein“, das brennbar ist (vgl. Kohle). Er besitzt einen sehr hohen **elektrischen Widerstand** und eine geringe **relative Dielektrizitätskonstante** von 2.9. Durch Reiben an Gewebe oder Wolle kann er elektrostatisch aufgeladen werden (**Reibungselektrizität**, der Bernstein erhält eine negative Ladung). In aufgeladenem Zustand zieht er kleine Staubfusseln oder Papierschnitzel an.

Die elektrischen Eigenschaften von Bernstein waren seit Thales von Milet bekannt, und in antiken Haushalten diente Bernstein als Kleiderbürste. Der englische Naturforscher William Gilbert hat den Effekt in seinem 1600 erschienenen Werk „De Magnete“ untersucht und vom Magnetismus unterschieden. Heute wissen wir, dass **elektrische Ladungen** an kleinsten Elementarteilchen, wie z.B. dem **Elektron**, für die elektrischen Effekte verantwortlich sind. **Elektrische Felder** entstehen durch die elektrischen Ladungen. Elektrisch geladene Teilchen erfahren eine Kraft entlang elektrischer Feldlinien. Bewegte elektrische Ladung erzeugen **elektrische Ströme** (Ladungsströme).

Im Unterschied zum Schwere- und Magnetfeld erzeugt die Erde kein permanentes elektrisches Feld, das an der Erdoberfläche meßbar ist. Im äußeren Kern fließen zwar Ströme, die **elektrische Leitfähigkeit** des Erdmantels ist jedoch so gering, dass an der Erdoberfläche keine Signale mehr meßbar sind. Elektrische und elektromagnetische Verfahren sind allerdings nicht auf Quellen aus dem tiefen Erdinnern angewiesen, sondern arbeiten oft mit kontrollierten, künstlichen Quellen, auch **aktive Verfahren** genannt. Wie alle aktiven Verfahren sind elektrische Verfahren besonders für die Angewandte Geophysik wichtig, wo man sich in der Regel für oberflächennahe Strukturen und Lagerstätten interessiert. Neben den aktiven gibt es auch einige **passive elektrische Verfahren**, die mit natürlichen elektrischen Quellen im nahen Untergrund (**Eigenpotenziale**) oder mit Magnetfeldschwankungen aus der oberen Atmosphäre arbeiten (**Magnetotellurik**).

Mit elektrischen und elektromagnetischen Verfahren untersucht man die **elektrische Leitfähigkeit**  $\sigma_e$  ( $1/\Omega m$ ) in der Erde (oder ihren Kehrwert, den **spezifischen elektrischen Widerstand**  $\rho_e = 1/\sigma_e$  in  $\Omega m$ ). Mit elektromagnetischen Verfahren können zusätzlich die **relative Dielektrizitätskonstante**  $\epsilon_r$  und in geringem Maße die **relative magnetische Permeabilität**  $\mu_r$  untersucht werden. Mit beiden Verfahren können Rückschlüsse auf z.B. Erzlagerstätten oder auf Fluidbewegungen und wasserführende Schichten gezogen werden. Zunehmend werden mit elektrischen Verfahren auch tektoni-

sche, vulkanologische oder geodynamische Fragestellungen angegangen. Elektrische Verfahren ergänzen andere Verfahren wie Gravimetrie, Magnetik oder Seismik, bei denen andere physikalische Parameter des Untergrundes wie z.B. die Dichte, die Magnetisierung oder die seismischen Geschwindigkeiten untersucht werden.

Es gibt eine Vielzahl von elektrischen und elektromagnetischen Prospektionsverfahren. Gemessen werden zeitkonstante elektrische Ströme, elektrostatische Felder oder elektromagnetische Wechselfelder. Die **Quellen** der Ströme und Wellen sind bei den aktiven Verfahren die über **Elektroden** in die Erde **eingespeisten Gleich- oder Wechselströme** oder feste bzw. bewegliche **Sender elektromagnetischer Wellen**. Bei den passiven Verfahren nutzt man die **natürlichen galvanischen Elemente** im Untergrund aus oder die **extraterrestrischen Magnetfeldstörungen** in der Ionosphäre und Magnetosphäre. Die **Empfänger** oder **Sensoren** sind **Sonden** zur Messung von **Potenzialdifferenzen (elektrischen Spannungen)** oder **Empfängerantennen**.

Bei der **Gleichstromelektrik** wird Strom in die Erde eingespeist und der Spannungsabfall zwischen zwei Sonden gemessen. Beim bodenpenetrierenden Radar (**Georadar**) werden elektromagnetische Wellen von einer beweglichen Senderantenne in die Erde abgestrahlt und das gestreute oder reflektierte Wellenfeld wird an einer Empfängerantenne aufgezeichnet. Um Aussagen über größere Tiefenbereiche zu treffen, werden auch Streusignale von leistungsstarken Längstwellensendern vermessen (**VLF-Methode**, Very Long Frequency).

Natürliche Quellen werden bei **Eigenpotenzial-Verfahren** benutzt oder bei der **Magnetotellurik**. Bei Eigenpotenzialverfahren mißt man den Strom oder die Spannung, die von natürlichen, galvanischen Elementen ausgeht. Bei der Magnetotellurik mißt man die Überlagerung aus einfallenden und gestreuten elektromagnetischen Wellen (elektrische und magnetische Feldstärke) in senkrecht zueinander stehenden Richtungen und leitet daraus die Leitfähigkeit des Untergrundes ab.

Die Einführung hier beschränkt sich auf die Beschreibung von Gleichstromverfahren, Magnetotellurik und Georadar.

#### 4.4.1 Theorie

Die Elektrizitätslehre und die Elektrodynamik sind feste Bestandteile jeder Einführungsvorlesung in Experimentalphysik. In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen nur angerissen beziehungsweise wiederholt, soweit es für das Verständnis der elektrischen Verfahren in der Geophysik wichtig ist. Spezielle Aspekte der „Geelektrik“ werden in den entsprechenden Unterkapiteln näher beschrieben.

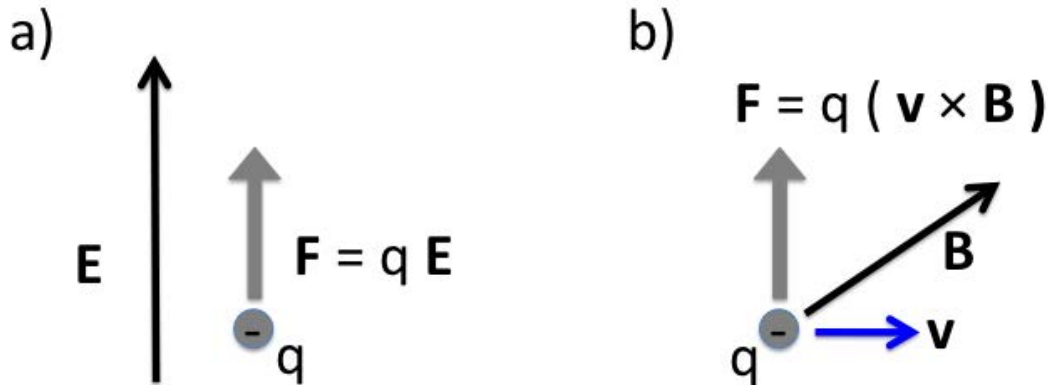
**Statische elektrische Felder und Gleichströme:**

Abbildung 4.43: Kräfte auf eine elektrische Ladung  $q$  im Feld. (a) Die **elektrische Feldkraft**  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  wirkt auf eine ruhende Ladung im elektrischen Feld der Stärke  $\mathbf{E}$ . (b) Die **Lorentz Kraft**  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  wirkt auf eine bewegte Ladung (Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ ) im Magnetfeld mit der Flußdichte  $\mathbf{B}$ .  $\mathbf{F}$  steht senkrecht auf  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{B}$ .

Es gibt zwei Typen von elektrischer Ladung, die seit Lichtenberg (1742-1799)<sup>58</sup> durch ein positives und negatives Vorzeichen unterschieden werden. Die Einheit der elektrischen Ladungen ist **Coulomb** ( $1C = 1As$ ). Die kleinste Ladung (Elementarladung) wird von einem **Elektron** (negativ) oder **Positron** (positiv) getragen; sie ist  $q_e = 1.602 \cdot 10^{-19} C$ . Elektrische Ladungen bleiben generell erhalten.

Die Kraft  $\mathbf{F}$  (Abb. 4.43) zwischen zwei elektrischen Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  im Abstand  $r$  ist (**Coulomb Gesetz**)

$$\mathbf{F} = \epsilon_0^{-1} \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.36)$$

wobei  $\epsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12} As/Vm$  die **elektrische Feldkonstante** ist. Der Einheitsvektor  $\hat{\mathbf{r}}$  zeigt von  $q_1$  nach  $q_2$ . Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich ab, solche mit ungleichem Vorzeichen ziehen sich an.

Elektrische Ladungen sind die Quellen elektrischer Felder. Das kann analog zu Massen gesehen werden, die Quellen des Gravitationsfeldes sind. Das Feld wird physikalisch durch die **elektrische Feldstärke**  $\mathbf{E}$  beschrieben, definiert durch (Abb. 4.43)

<sup>58</sup>Physiker aus Göttingen. Führte etwa 1777 Elektrophor aus Harz und die mathematischen Symbole + und - ein und erzeugte Lichtenberg Figuren. Erste Anwendung eines Blitzableiters

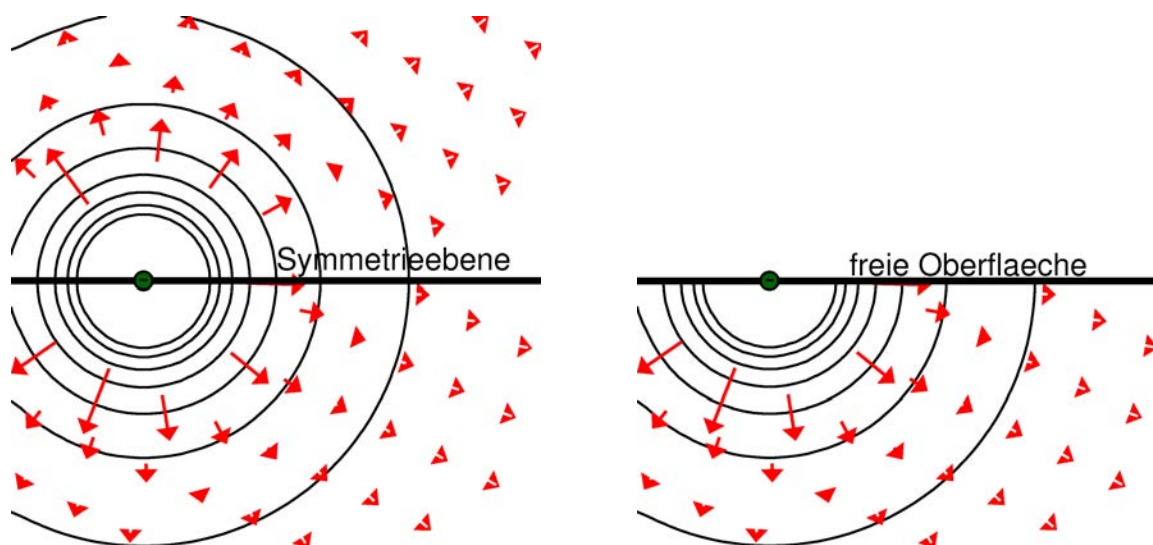


Abbildung 4.44: **Links:** Äquipotenziallinien (schwarz) und Feldstärke ( $\mathbf{E}$ , Vektoren) in der Vertikalebene einer (negativen) Punktladung im homogenen Vollraum. Potenzielllinien nahe der Ladung sind ausgeblendet. Die Feldlinien einer Punktladung  $q$  sind vom Zentrum ausgehende, radiale Linien. Die Feldlinien durch  $z = 0$  liegen entlang einer Symmetrieebene. Die Potenzielllinien schneiden die Symmetrieebene senkrecht. **Rechts:** Äquipotenziallinien und Feldstärke einer Punktladung in der Oberfläche des homogenen Halbraums sind bis auf den Faktor 2 in der Magnitude identisch zur Vollraumlösung. Die Randbedingung eines Isolators an der freien Oberfläche fordert verschwindende Normalkomponenten von  $\mathbf{E}$ . Äquipotenziallinien müssen die freie Oberfläche senkrecht scheiden.

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad , \quad (4.37)$$

mit der Einheit  $N/C = V/m$ .

Der Feldstärke-Vektor  $\mathbf{E}$  zeigt in Richtung der Kraft, die auf eine elektrische Probeladung wirkt. Die elektrischen Feldlinien veranschaulichen die Richtung des  $\mathbf{E}$ -Feldes. Sie beginnen auf positiven und enden auf negativen Ladungen<sup>59</sup> (Abb. 4.44 links). Ein Maß für den Betrag  $|\mathbf{E}|$  und damit die Stärke des Feldes ist die Dichte der Feldlinien pro Fläche senkrecht zum elektrischen Feld. Gebiete mit verdichteten Feldlinien haben ein großes  $|\mathbf{E}|$ , solche mit wenig Feldlinien ein kleines.

Genau wie beim Schwere- und Magnetfeld kann man für elektrostatische Felder ein skalares Potenzial  $W_e$  einführen, wobei

<sup>59</sup> Gilt nur für elektrostatische Felder und Gleichströme; bewegte Ladungen erzeugen geschlossene Feldlinien

$$\mathbf{E} = -\nabla W_e \quad . \quad (4.38)$$

Der Vorteil des skalares Potentials ist, dass sich kompliziertere Felder einfach durch die Addition von skalaren Potentialen ableiten lassen. Komplizierte Felder können z.B. aus mehreren Punktladung aufgebaut sein. Für eine Punktladung  $q$  im homogenen Vollraum erhält man

$$W_e = -\epsilon_0^{-1} \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r} \sim -\frac{1}{r} \quad . \quad (4.39)$$

Das elektrische Potential hat eine anschauliche Bedeutung. Die erforderliche **Arbeit**  $Q$  zur Verschiebung einer Probeladung  $q$  im elektrischen Feld von  $X_1$  nach  $X_2$  ist (vgl. Ableitung 4.3)<sup>60</sup>

$$\begin{aligned} Q_{12} &= -\int_{X_1}^{X_2} \mathbf{F} d\mathbf{x} = -q \int_{X_1}^{X_2} \mathbf{E} d\mathbf{x} = +q \int_{X_1}^{X_2} \nabla W_e d\mathbf{x} = +q \int_{X_1}^{X_2} dW_e \\ &= +q [W_e(X_2) - W_e(X_1)] = +q U_{12} \quad . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Die gemeinhin bekannte **elektrische Spannung**  $U_{12}$  (zwischen  $X_1$  und  $X_2$ , mit der Einheit  $1J/C = 1Nm/C = 1V$ ) ist die **Potenzialdifferenz**  $[W_e(X_2) - W_e(X_1)]$ . Die Verschiebungsarbeit im elektrischen Feld ist gleich der Ladung  $q$  multipliziert mit der Spannung  $U_{12}$ .

Gleichung 4.40 kann direkt auf zwei Spezialfälle angewandt werden:

**E zwischen zwei Kondensatorplatten:** An zwei parallelen Kondensatorplatten im Abstand  $d$  liegt die Spannung  $U$  an. Da  $\mathbf{E}$  zwischen den Platten konstant ist und senkrecht auf den Platten steht (homogenes Feld) kann 4.40 direkt integriert werden und führt auf  $E = \frac{U}{d}$ .

**E in einem Kupferdraht:** Über die Länge  $l$  des Elektronenleiters (Kupferdraht) fällt die Spannung  $U$  ab. Das Feld  $E$  im Draht ist homogen (konstant) und die Integration von 4.40 führt auf  $E = \frac{U}{l}$ .

<sup>60</sup> Es gilt ja  $dW_e = \frac{\partial W_e}{\partial x} dx + \frac{\partial W_e}{\partial y} dy + \frac{\partial W_e}{\partial z} dz = \nabla W_e d\mathbf{x}$ .

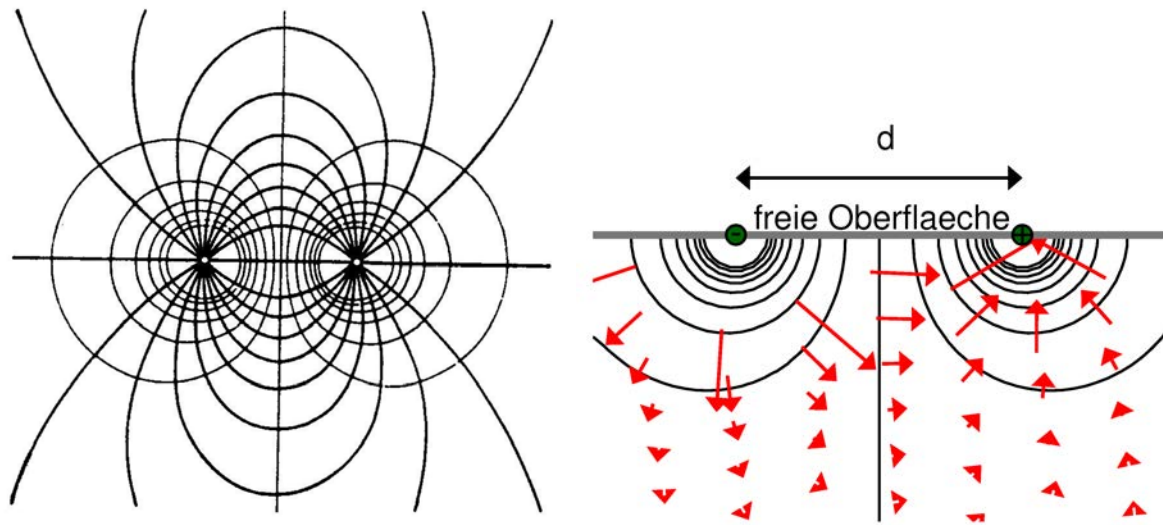


Abbildung 4.45: **Links:** Potenzial- und Feldlinien einer positiven und negativen elektrischen Ladung gleicher Stärke im Abstand  $d$  im Vollraum. **Rechts:** Äquipotenziallinien und Feldstärke zweier Punktladungen unterschiedlichen Vorzeichens im Abstand  $d$  an der freien Oberfläche des Halbraums.

Das elektrische Feld kann außer durch Feldlinien auch durch Äquipotenziallinien anschaulich beschrieben werden. Die Äquipotenziallinien stehen senkrecht auf den Feldlinien (Abb. 4.44 und 4.45). Die Feld- und Potenziallinien des elektrischen Feldes sind, wie für alle Potenzialfelder, immer stetig verbunden, können aber an Schichtgrenzen Knicke aufweisen. Entlang einer Äquipotenziallinie ist  $U$  konstant und man muß keine Arbeit aufwenden, um eine Probeladung entlang einer Äquipotenziallinie zu verschieben. Der Betrag der Feldstärke,  $|\mathbf{E}|$ , hängt vom Gradienten des Potentials ab, d.h. von dem lokalen Abstieg des Potenzialfeldes, und kann entlang einer Äquipotenzialfläche durchaus variieren.

#### 4.4.2 Elektrische Ströme und Leitungsmechanismen in der Erde

Sobald sich elektrische Ladungen bewegen können, fließt bei angelegtem Feld ein Ladungstrom  $\mathbf{j}$  in Richtung der Feldlinien. Negative Ladungen (Elektronen) bewegen sich vom negativen zum positiven Pol in Richtung wachsender Spannung, und positive Ladungen in die entgegengesetzte Richtung. Die **Stromdichte**  $\mathbf{j}$  hat die Einheit ( $A/m^2$ ). Die Stromdichte eines Kupferdrahts mit dem Querschnitt  $A$  ist z.B.  $I/A$ , wobei  $I$  der elektrische Strom des Leiters ist, d.h. die gesamte bewegte Ladung pro Zeit. Die Einheit von  $I$  ist Ampere ( $1A = 1C/s$ ).

In der Geophysik interessiert der Zusammenhang zwischen der Stromdichte  $\mathbf{j}$  und dem elektrischen Feld  $\mathbf{E}$ , der durch die differentielle oder vektorielle Form des Ohmschen



Tabelle 4.5: Spezifische Widerstände für Gesteine und Minerale.

Gestein / Mineral	$\rho_e$ in $\Omega m$	Gestein / Mineral	$\rho_e$ in $\Omega m$
Ton (Clay)	1 - 100	$Fe_2O_3$	0.1 - 300
Graphitischer Schiefer	10 - 500	Graphit (massiv)	0.0001 - 0.005
Gabbro	100 - 500 000	Magnetit	0.01 - 1000
Granit	200 - 100 000	Pyrit	0.01 - 100
Basalt	200 - 100 000		
Sandstein	200 - 8000	Oberflächenwasser	0.1 - 1000
Steinsalz	30 - $10^{13}$	Seewasser	1 - 100

Gesetzes ausgedrückt wird<sup>61</sup> Mit (4.38) erhält man

$$\mathbf{j} = -\sigma_e \nabla W_e = \sigma_e \mathbf{E} \quad . \quad (4.41)$$

Die **spezifische Leitfähigkeit**  $\sigma_e$  ist der Kehrwert des **spezifischen Widerstandes**,  $\sigma_e = \rho_e^{-1}$ , und hat die Einheit ( $\Omega^{-1}m^{-1} = Sm^{-1}$ ). Für isotrope Medien ist  $\sigma_e$  ein Skalar und  $\mathbf{j}$  zeigt in Richtung von  $\mathbf{E}$ .

Der **Ohmsche Widerstand** eines Leiter ist  $R = U/I$ . Der spezifische Widerstand eines Zylinders der Länge  $l$  und der Querschnittsfläche  $A$  hängt mit  $R$  zusammen über  $\rho_e = RA/l$  [ $\Omega m$ ]. Das aus der Physik gemeinhin bekannte **Ohm'sche Gesetz** läßt sich aus (4.41) für den Spezialfall eines stromdurchflossenen Leiterkabels der Länge  $l$  (in  $x$ -Richtung) und mit dem Querschnitt  $A$  direkt ableiten

$$j_x = \frac{I}{A} = \sigma_e E_x = \rho_e^{-1} E_x = \frac{l}{AR} \frac{U}{l} \quad \text{oder} \quad I = R^{-1} U \quad ,$$

wobei  $R = U/I$  der Ohmsche Widerstand des Leiters ist (Einheit  $1\Omega = 1V/A$ ).

Als **gute Leiter** bezeichnet man Materialien, in denen der spezifische Widerstand  $\rho_e < 10^{-5} \Omega m$  ist. Sehr schlechte Leiter oder **Isolatoren** sind Gesteine mit  $\rho_e > 10^7 \Omega m$ . In dem Bereich dazwischen spricht man auch von **Halbleitern**. Tabelle 4.5 gibt spezifische Widerstände für einige Gesteine und Minerale an.

In der Erde gibt es drei Leitungsmechanismen: (1) **Elektronenleitung** durch die Bewegung freier Elektronen in einem Leiter, (2) **elektrolytische Leitung** durch die Bewegung von positiv und negativ geladenen Ionen in einem Fluid (z.B. Wasser) und (3) die **dielektrische Leitung** in Isolatoren durch Ladungsverschiebung in einem Wechselfeld.

<sup>61</sup>Diffusionsprozess, vergleiche Gleichung für den Wärmefluß.

**Elektronenleitung:** Elektronenleitung ist in der Regel sehr effizient (gute Leiter). Elektronenleitung tritt in der Erdkruste in nur wenigen Gesteinen und Mineralien auf, z.B. in **Metallen**, in **Graphit** und **Sulfit** und in einigen Oxiden wie **Magnetit**, **Manganit** und **Ilmenit**. In schlechten Leitern bewegen sich auch oft freie Elektronen, nur ist ihre Anzahl vergleichsweise gering. Um eine gute Elektronenleitung über große Entfernungen zu erhalten, müssen durchgehend leitende Schichten oder Kanäle postuliert werden. Neben **Erzgängen** werden **mineralisierte Bruchzonen** als mögliche Kandidaten diskutiert.

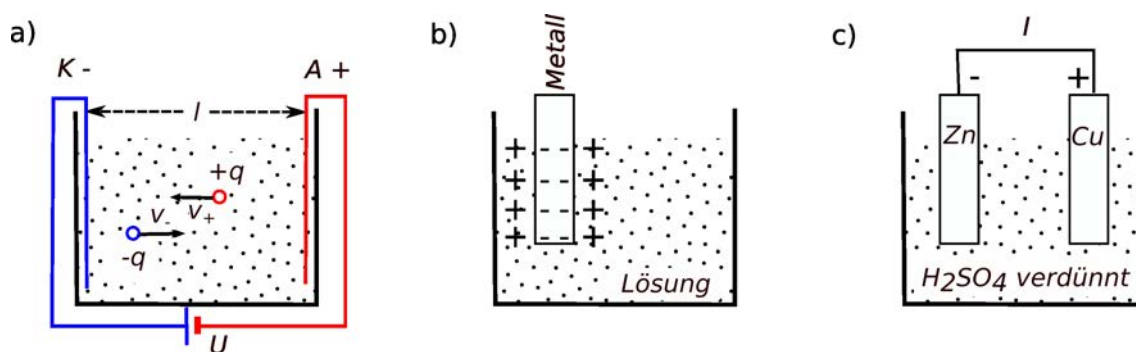


Abbildung 4.46: (a) Gleichstromexperiment zur Messung der elektrolytischen Leitung von Ionen mit Ladung  $\pm q$  und den Driftgeschwindigkeiten  $v_+$  und  $v_-$ . A ist die positiv geladene Anode und K die negativ geladene Kathode im Abstand  $l$ . (b) Aus einer eingetauchten, metallischen Elektrode treten so viele Ionen in das Lösungsmittel, bis das Feld der entstehenden Doppelschicht den weiteren Austritt verhindert. (c) Ein galvanisches Element besteht aus zwei Elektroden mit unterschiedlichem Potenzial (hier *Zn* und *Cu*), die in einen Elektrolyten getaucht werden (hier  $H_2SO_4$ ). Durch den Kurzschluß beider Elektroden außerhalb des Elektrolyten fließt ein stetiger Gleichstrom  $I$ .

**Elektrolytische Leitung:** Die meisten Gesteine der Erde sind schlechte Leiter. Durch den Effekt der elektrolytischen Leitung ist ihr spezifischer Widerstand dennoch gering. Gesteine der Erdkruste sind in der Regel **porös**. Der **Porenraum** ist mit Fluiden, hauptsächlich Wasser, gefüllt und ermöglicht elektrolytische Leitung. Dabei bewegen sich positiv (**Kationen**) und negativ geladene Ionen (**Anionen**) relativ langsam auf die negativen (**Kathode**) und positiven Pole (**Anode**) einer Spannungsquelle hin (Abb 4.46a). Die elektrolytische Leitung ist mit echtem Materialtransport verbunden und verursacht in der Regel auch **chemische Umwandlungen** (Elektrolyse). Die Leitfähigkeit hängt von der **Beweglichkeit** (damit vom Porenraum), der **Konzentration** und der **Dissoziation** (Löslichkeit) der Ionen ab. Die Leitfähigkeit von porösem Gestein wird durch ein empirisches Gesetz, **Archies Law**, beschrieben (vgl. Abb. 4.47).

Die Elektrolyse und Fluidbewegung ist auch eine Ursache für sogenannte **Eigenpoten-**

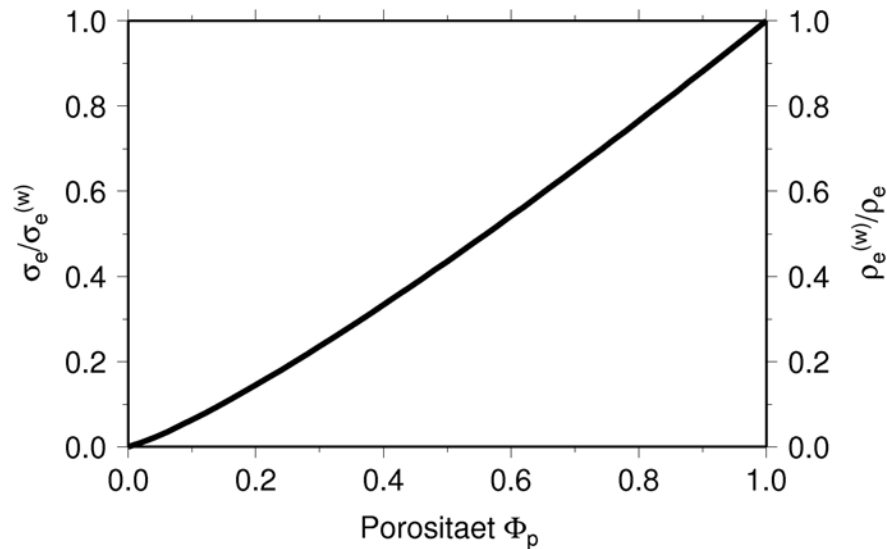


Abbildung 4.47: Archies Law verknüpft den spezifischen Widerstand von Gesteinen mit ihrer Porosität (fractional porosity  $\Phi_p$ ),  $\frac{\sigma_e}{\sigma_e^{(w)}} = \frac{\rho_e^{(w)}}{\rho_e} = \Phi_p^m$ .  $\rho_e$  ist der spezifische Widerstand des Gesteins,  $\rho_e^{(w)}$  der des Wassers. Ein  $\Phi_p = 0$  heißt, dass der Porenraum völlig geschlossen ist. Der empirische Faktor  $m$  (cementation factor) variiert zwischen etwa 1.2 und 1.8 je nach Körnigkeit des Gesteins (aus Milson, 1996). Hier ist  $m = 1.2$  geplottet, repräsentativ für kugelförmige Körner.

**ziale**, die in der Erde vorkommen und ausgewertet werden können. Taucht z.B. ein Metall (z.B. Zink) in einen Elektrolyten, dann lösen sich so viele Ionen ( $Zn^{++}$ ) von dem Metall ab, bis das Gegenfeld den weiteren Austritt verhindert (Abb 4.46b). Die Ionenbildung wird durch die Löslichkeit der Ionen, die Konzentration der Ionen im Elektrolyten und das entstehende Eigenfeld gesteuert. Werden zwei Elektroden unterschiedlicher Löslichkeit in den Elektrolyten gehalten (z.B.  $Zn$  und  $Cu$  in verdünntes  $H_2SO_4$ ), dann besteht zwischen beiden Elektroden eine Potentialdifferenz. Das unedlere Zink ist „negativer“, weil es sich besser löst. Verbindet man die beiden Elektroden, dann hat man ein **galvanisches Element** (Abb 4.46c). Galvanische Elemente dieser Art werden als ein Mechanismus zur Erzeugung von Eigenpotenzialen (Spannungen bis zu 1 V) diskutiert (**Mineralisations-** oder **elektrolytisches Kontaktpotenzial**). Ähnliche mögliche Mechanismen sind, wenn z.B. ein und dasselbe Mineral in ein Elektrolyt unterschiedlicher Konzentration reicht (**Nernst Potenzial**).

Die Ionenlöslichkeit von Sonden hat auch negative Auswirkungen bei der Messung von sehr kleinen Spannungen und hat zur Konstruktion von speziellen Sonden geführt (s.u.).

**Ladungsverschiebung in Materie und dielektrische Leitung:** Ein äußeres Feld bewirkt im Gestein eine messbare **Ladungsverschiebung** oder **elektrische Polari-**

**sation.** Die Polarisation einer Gesteinsprobe wird makroskopisch durch die **relative Dielektrizitätskonstante**  $\epsilon_r$  beschrieben. Im Vakuum ist  $\epsilon_r = 1$ , und in Materie gilt  $\epsilon_r \geq 1$ .  $\epsilon_r$  ist auch frequenzabhängig. In Anhang E sind einige Formeln zur Polarisation zusammengestellt, sowie eine Tabelle mit Werten für Minerale und Gesteine.

Der Verschiebungsstrom in einem Nichtleiter nach Anlegen einer Wechselspannung wird durch die elektrische Polarisation kontrolliert, also letztlich durch die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$ . Für elektromagnetische Verfahren spielen der Verschiebungsstrom und  $\epsilon_r$  eine Rolle, z.B. bei der **induzierten Polarisation**, bei der nach dem abrupten Anschalten eines Stromes ein Polarisationsfeld zeitverzögert aufgebaut wird. Die Auswertung der zeitabhängigen Effekte erlaubt Rückschlüsse auf  $\epsilon_r$  und  $\sigma_e$ . Die Größe  $\epsilon_r$  spielt bei der Gleichstromelektrik keine Rolle.

#### 4.4.3 Schichtgrenzen und Brechungsgesetz für elektrische Felder

Schichtgrenzen, an denen sich die Leitfähigkeit abrupt ändert, beeinflussen den Verlauf der Feld- und Potenziellinien des elektrischen Feldes oder der Stromlinien im Untergrund. An der Grenzfläche soll der spezifische Widerstand z.B. von  $\rho_{e1}$  auf  $\rho_{e2}$  springen. Die Stromdichte  $\mathbf{j}$  sei in der  $x$ - $z$  Ebene und wird in eine Tangential- ( $j_t$ ) und eine Normalkomponente ( $j_n$ ) zerlegt. Gleiches gilt für die elektrische Feldstärke,  $\mathbf{E} = (E_n, E_t)$ . Folgende Randbedingungen werden erfüllt. Die Tangentialkomponente der Feldstärke,  $E_t$ , muss über die Schichtgrenze stetig sein. In Normalenrichtung gilt, dass das Produkt  $\sigma_e E_n$  stetig ist. Bei Stromfluss ist damit gewährleistet, dass die Normalkomponente der Stromdichte stetig ist, sodass beim senkrechten Durchwandern der Schichtgrenze die Ladungen erhalten bleiben. Die **Randbedingungen** sind damit:

$$E_{t1} = E_{t2} \quad \text{und} \quad \sigma_{e1} E_{n1} = \sigma_{e2} E_{n2}$$

oder alternativ, wenn Strom fließt,

$$\rho_{e1} j_{t1} = \rho_{e2} j_{t2} \quad \text{und} \quad j_{n1} = j_{n2} \quad .$$

Eine dritte Randbedingung ist, dass das Potenzial  $W_e$  über die Schichtgrenze stetig ist.

Aus den ersten zwei Bedingungen kann ein **”Brechungsgesetz der Gleichstromelektrik”** abgeleitet werden,

$$\rho_{e1} \tan \varphi_1 = \rho_{e2} \tan \varphi_2 \quad , \quad (4.42)$$

wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen  $\mathbf{j}$  und der Flächennormalen ist (Abb. 4.48). Die Stromlinien

werden zum Lot hin gebrochen, wenn der Widerstand von 1 nach 2 steigt.

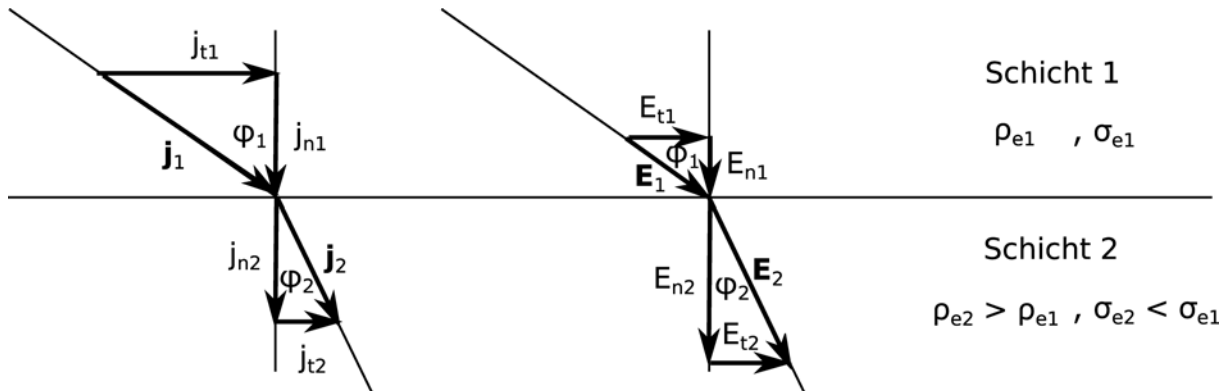


Abbildung 4.48: Skizze zur Brechung von Stromlinien  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{E}$ -Linien an einer Schichtgrenze mit einem Sprung in  $\rho_e$  bzw.  $\sigma_e$ .

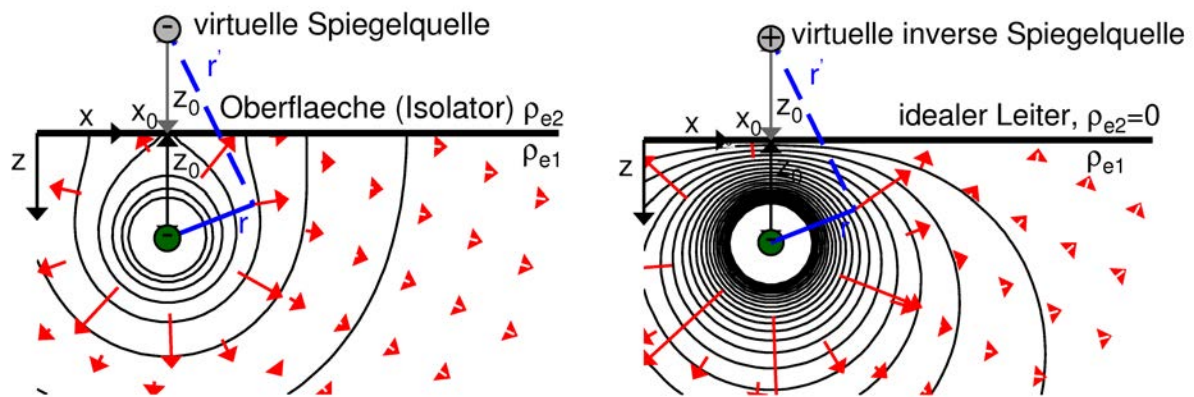


Abbildung 4.49: **Links:** Feldlösung der vergrabenen Punktladung im Halbraum (Isolator bei  $z = 0$ ) durch Überlagerung der Vollraumlösung mit dem Feld einer virtuellen Spiegelquelle. Die Potenzielllinien schneiden die freie Oberfläche senkrecht. **Rechts:** Feldlösung der vergrabenen Punktladung unter einem idealen Leiter bei  $z = 0$ . Die Spiegelquelle hat eine entgegengesetzte Ladung. Der Isolator ist eine Äquipotenzialfläche und die Feldlinien schneiden den Isolator senkrecht. Äquipotenziallinien in der Nähe der Quelle sind ausgeblendet.

Ein idealer Leiter ( $\rho_e = 0$ ) stellt eine Äquipotenzialfläche dar (Abb. 4.49 rechts), und die Feldstärke steht überall senkrecht auf dem Leiter. Der ideale Isolator (z.B. freie Oberfläche) erfordert, dass Feldlinien entlang des Isolators liegen und Potenzielllinien den Isolator senkrecht schneiden (Abb. 4.49 links). Die Feldlösung einer vergrabenen Punktladung im homogenen Halbraum, welche die Randbedingungen bei  $z = 0$  erfüllt, kann durch die Überlagerung der Vollraumlösung mit dem Feld einer gleich- oder gegenpoligen, virtuellen Spiegelquelle auf der entgegengesetzten Seite der Grenzfläche konstruiert

werden. In der Potenzialtheorie wird gezeigt, dass allgemein die Feldlösung in einem begrenzten, homogenen Volumen (geschlossene Randfläche oder unendliche Halbraum) konstruiert werden kann, indem gleichparametrische Felder von virtuellen Quellen außerhalb des Volumens überlagert werden. Aus Symmetriegründen kommen für die vergrabenen Quellen in Abb. 4.49 nur an der Oberfläche gespiegelte Quelle (**Spiegelquellen**) in Frage. Für den allgemeinen Fall, dass  $\rho_{e1}$  und  $\rho_{e2}$  beide endlich sind, ist das Potenzial der vergrabenen Stromelektrode

$$\begin{aligned} \text{für } z \geq 0: \quad W_e &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} + \frac{C_1}{r'} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}} + \frac{C_1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (z+z_0)^2}} \right) \\ \text{für } z \leq 0: \quad W_e &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{C_2}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{C_2}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \end{aligned}$$

wobei  $C_1$  und  $C_2$  zwei Konstanten sind, die die Quellstärke der virtuellen Quelle bestimmen und aus den Randbedingungen abgeleitet werden müssen. Für die Feldstärke gilt damit

$$\begin{aligned} (z \geq 0) \quad E_{x1} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(x-x_0)}{[(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} + \frac{C_1(x-x_0)}{[(x-x_0)^2 + (z+z_0)^2]^{3/2}} \right) \\ E_{z1} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(z-z_0)}{[(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} + \frac{C_1(z+z_0)}{[(x-x_0)^2 + (z+z_0)^2]^{3/2}} \right) \\ (z \leq 0) \quad E_{x2} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{C_2(x-x_0)}{[(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} \\ E_{z2} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{C_2(z-z_0)}{[(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen bei  $z = 0$  folgt

$$\begin{aligned} E_{x1} = E_{x2} & \quad \text{oder} \quad (1 + C_1) = C_2 \\ \frac{E_{z1}}{\rho_{e1}} = \frac{E_{z2}}{\rho_{e2}} & \quad \text{oder} \quad \rho_{e2}(-1 + C_1) = -\rho_{e1}C_2 \end{aligned}$$

und damit

$$C_1 = -\frac{\rho_{e1} - \rho_{e2}}{\rho_{e1} + \rho_{e2}} \quad \text{und} \quad C_2 = 1 - C_1 = \frac{2\rho_{e1}}{\rho_{e1} + \rho_{e2}}. \quad (4.43)$$

Die Randbedingungen können mit Hilfe jeweils einer Spiegelquelle in beiden Halbräumen für beliebiges  $x$  überall erfüllt werden. Für den Isolator ( $\rho_{e2} \rightarrow \infty$ ) ist  $C_1 = +1$ . Für den idealen Leiter ( $\rho_{e2} = 0$ ) ist  $C_1 = -1$  (siehe Abb. 4.49).

Abb. 4.50 zeigt die Potenziallinien der Lösung für einen Widerstandscontrast von  $\rho_{e1}/\rho_{e2} = 10$  oder 0.1. Steigt der Widerstand über die Schichtgrenze an, dann werden die Potenziallinien aufgesteilt und die Feldlinien entsprechend von der Schichtgrenze



weggebogen. Bei sinkendem Widerstand unterhalb der Schichtgrenze werden die Potenzielllinien an die Schichtgrenze gedrückt und die Feldlinien biegen sich auf die Grenze zu. Strom- und Feldlinien werden sozusagen in die gut leitenden Schicht hineingezogen.

Das Konzept der Spiegelquellen kann auch auf Mehrschichtenfälle angewendet werden, z.B. die Schicht über dem Halbraum oder den Einfluß eines vertikalen Gangs auf Potenzial- und Feldlinien durch eine Stromelektrode an der Oberfläche. Die Behandlung von mehr als einer Schichtgrenze führt allerdings auf eine Reihenentwicklung von virtuellen Quellen und ist deshalb komplexer (z.B. Telford et al., 1990). Abb. 4.51 zeigt die Konstruktion der ersten drei Spiegelquellen einer Punktladung (Stromelektrode) an der Oberfläche, für den Fall einer Schicht der Dicke  $d$  über dem Halbraum (Abb. 4.51 links) sowie für einen vertikalen Gang in unmittelbarer Nähe der Quelle  $q$  (Abb. 4.51 rechts).

Das Prinzip wird für die Schicht über dem Halbraum erläutert. Der Anteil der Quelle  $q$  auf das Potenzial am Punkt  $X(x, z)$  ( $z$  sei kleiner als  $d$ ) ist  $W_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r_0}$  (Halbraumlösung). Wegen der Schichtgrenze in der Tiefe  $z = d$  muss eine Spiegelquelle in der Tiefe  $z = 2d$  berücksichtigt werden mit dem Potenzialanteil  $W_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{C_r}{r_1} + \frac{1 \cdot C_r}{r'_1} \right)$  (Abb. 4.51 links). Die Stärke der unteren Spiegelquelle ist  $C_r q$ , wobei  $C_r = (\rho_{e2} - \rho_{e1}) / (\rho_{e1} + \rho_{e2})$  aus (4.43) folgt. Da die Spiegelquelle die Randbedingungen der freien Oberfläche erfüllen muss, wird ein Anteil bei  $z = -2d$  mit der gleichen Stärke erforderlich (der Reflexionkoeffizient der freien Oberfläche ist 1). Die Spiegelquelle bei  $z = -2d$  macht aber wiederum eine Spiegelung an der Schichtgrenze nötig, so dass das 2-te Spiegelquellen-Paar bei  $z = \pm 4d$  plaziert wird mit der relativen Stärke  $W_3 = \frac{C_r^2 q}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r'_2} \right)$ . So werden sukzessiv Spiegelquellen addiert und das gesamte Potenzial ergibt sich wie

$$W = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_0} + C_r \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r'_1} \right) + C_r^2 \left( \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r'_2} \right) + \dots \right] .$$

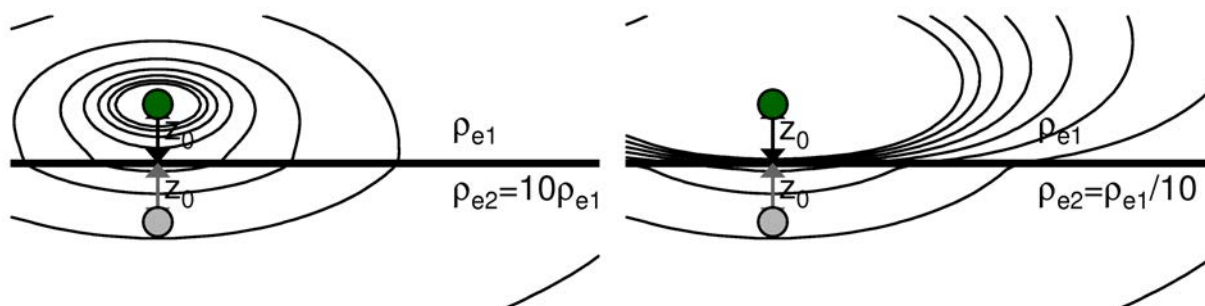


Abbildung 4.50: Spiegelquellen Lösung einer Punktquelle im oberen Halbraum (grün) im Kontakt an einen unteren Halbraum (graue Spiegelquelle). **Links:** Der untere Halbraum hat einen 10mal größeren spezifischen Widerstand. **Rechts:** Der untere Halbraum hat einen 10mal kleineren spezifischen Widerstand.

Liegt der Messpunkt an der Oberfläche bei  $z = 0$ , dann kann  $r_0 = r$  und jeweils  $r_1 = r'_1$  und  $r_2 = r'_2$  usw. gesetzt werden. Damit kann die Reihe kompakt geschrieben werden wie

$$W = = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_r^m}{\sqrt{r^2 + (2md)^2}} \right] . \quad (4.44)$$

Die Reihe konvergiert in der Regel, so dass bei der numerischen Berechnung nur eine endliche Anzahl von Spiegelquellen berücksichtigt werden müssen (z.B.  $m = 100$ ).

Abb. 4.52 zeigt damit konstruierte Feld- und Stromlinien für zwei Stromelektroden an der Oberfläche einer Schicht über dem Halbraum. Hat der untere Halbraum einen kleinen Widerstand (guter Leiter), dann fokussieren die Stromlinien in dem guten Leiter. Die Beobachtung kann auf eine Erde aus mehreren horizontalen Schichten übertragen werden. Existiert eine gut leitende Schicht, dann können die Stromlinien diese Schicht nicht mehr wesentlich durchdringen. Es können deshalb keine Aussagen über die Leitfähigkeit der Schichten unter dem guten Leiter getroffen werden. Der gute Leiter schirmt ab und verhindert das Eindringen der Ströme in größere Tiefen.

Der Effekt eines vertikalen Dikes (Abb. 4.51 rechts) kann analog konstruiert werden. Im Gegensatz zu dem Schichtproblem sind die Koeffizienten  $C_i$  der Quellen links des Dikes aber nicht immer 1 sondern müssen entsprechend aus (4.43) berechnet werden. Ebenso muss beachtet werden, dass nur solche Spiegelquellen berücksichtigt werden können, die außerhalb des Mediums des Aufpunkts liegen. Das führt auf mehrere Fallunterscheidungen und wenig übersichtliche Darstellungen (z.B. Telford et al., 1990). Das Konzept der Spiegelquellen wird im Kapitel "Gleichstromelektrik" und in späteren Kapiteln wieder aufgegriffen.

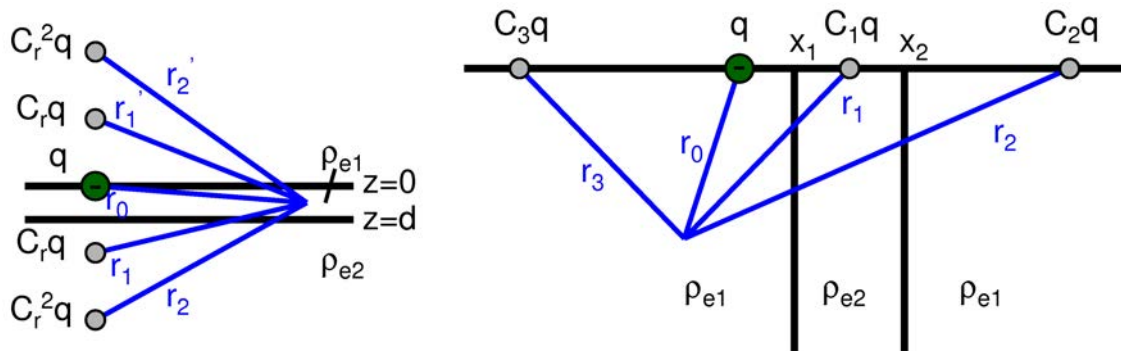


Abbildung 4.51: Konstruktion der Feldlösung einer Punktladung  $q$  an der Oberfläche bei  $z = 0$  (spezifischer Widerstand  $\rho_{e1}$ ) mit Hilfe einer Reihe von Spiegelquellen  $C_i q$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . **Links:** Schicht der Dicke  $d$  über dem Halbraum mit spezifischem Widerstand  $\rho_{e2}$ .  $C_r = (\rho_{e2} - \rho_{e1}) / (\rho_{e1} + \rho_{e2})$ . **Rechts:** In Nachbarschaft zu einem vertikalen Dike zwischen  $x_1$  und  $x_2$  mit dem spezifischen Widerstand  $\rho_{e2}$ .

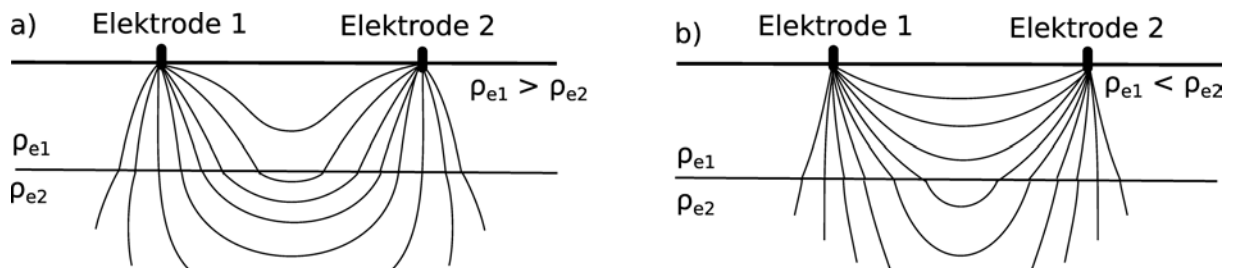


Abbildung 4.52: Feld- bzw. Stromlinien zwischen zwei Stromelektroden für eine Schicht über dem Halbraum. (a) schlechter leitende Schicht über dem Halbraum und (b) besser leitende Schicht über dem Halbraum (modifiziert aus [Milsom, 1996](#)).

#### 4.4.4 Messgeräte

##### *Gleichstromelektrik und Potenzialmessungen:*

**Spannungs- und Strommessung:** Bei der Gleichstrom-Geoelektrik und den Eigenpotenzial-Methoden werden Ströme und Spannungen gemessen, um daraus einen scheinbaren Widerstand abzuleiten. Typische Werte sind Ströme im Bereich von  $10^{-3} A$  (Milliampere,  $mA$ ), und Spannungen im Bereich von  $10^{-6} V$  (Mikrovolt,  $\mu V$ ). Die Messungen und Messgeräte sollten die Größen, die gemessen werden, möglichst wenig beeinflussen. Für Amperemeter muß dazu der gesamte Innenwiderstand klein sein gegen den Widerstand der zu messenden Schaltung (niederohmig). Spannungsmesser zwischen den Sonden einer Auslage müssen einen hochohmigen Innenwiderstand haben und praktisch stromlos messen. Die empfindlichen Spannungsmessungen beschränken in der Regel die Messgenauigkeit. Früher wurden deshalb Potenziometer eingesetzt, heute erfüllen hochohmige Spannungsmesser die meisten Anforderungen.

**Elektroden als Stromquellen:** Zur Stromeinspeisung werden meist Metallelektroden (z.B. Stahl) in den Boden gesteckt. Zur Stromeinspeisung wird eine Spannung (Gleichstrom) von mehreren  $100 V$  realisiert (hochtransformiert, einige Apparaturen schaffen bis zu  $4000 V$ ). Metallelektroden erzeugen in der Erde Kontaktpotenziale und Kontaktwiderstände, die zwar die Stromeinspeisung erschweren, aber nicht wirklich störend sind. Die unbekanntenen Übergangswiderstände zwischen Elektrode und Boden können allerdings groß sein. Deshalb ist es ungünstig, die Spannung des Stromkreises direkt an den Elektroden zu messen, weshalb sich bei der Gleichstromelektrik Vierpol-Anordnungen durchgesetzt haben.

**Messsonden:** Die Spannung an den „inneren“ Messsonden wird stromlos gemessen. Unbekannte Übergangswiderstände sind deshalb ohne Einfluss. Die unerwünschten Kontaktpotenziale an den in den Boden gesteckten Sonden versucht man zu vermeiden, indem man niederfrequenten Wechselstrom anstatt Gleichstrom einspeist. Eine andere Möglichkeit ist, nicht polarisierbare Elektroden als Sonden zu verwenden. Das sind Metallelektroden, die in eine gesättigte Lösung ihres eigenen Salzes tauchen. Dadurch lösen sich keine Ionen, und es kann kein Kontaktpotenzial entstehen. Die Verbindung zur Erde geschieht durch die poröse und permeable Wand des umgebenden Porzellantopfes. Nicht polarisierbare Elektroden müssen immer wieder mit gesättigter Elektrolyt-Lösung gefüllt werden, da das Elektrolyt langsam ins Erdreich entweicht.

**Messkabel und Profillängen:** Die Auslagen sind in der Regel einige hundert Meter lang. In günstigen Fällen wurden Auslagen bis zu einigen Kilometer Länge realisiert (A. Dehghani, persönliche Mitteilung). Bei marinen Gleichstrom-Verfahren werden zum Teil spezielle Unterseekabel mit fest eingebauten Elektroden und Sonden über den Ozeanboden gezogen, anstatt dass Elektroden und Sonden in den Meeresboden gesteckt werden. Bei der Verlegung der Kabel muss allgemein darauf geachtet werden, dass keine Störsignale durch Induktion in den langen Kabeln entstehen. Diese können z.B. durch Stromversorgungsleitungen entstehen. Bei Verfahren der induzierten Polarisation, die sehr geringe Spannungen messen, können auch bereits natürliche Magnetfeldschwankungen Störsignale in langen Kabeln induzieren.

#### 4.4.5 Gleichstromelektrik

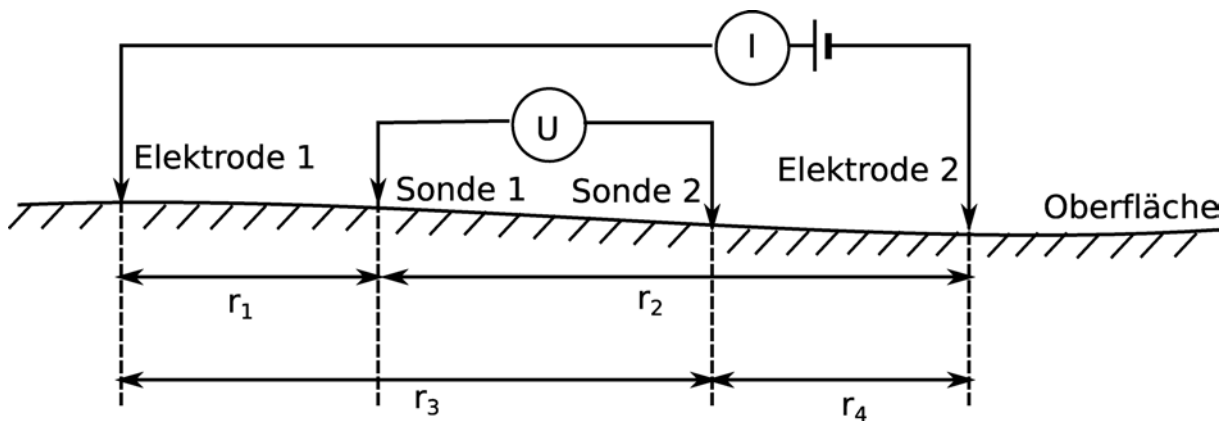


Abbildung 4.53: Gleichstrom Geoelektrik mit zwei Stromelektroden, an denen der Gleichstrom  $I$  eingespeist wird, und zwei Potenzial-Messsonden zur Messung der elektrischen Spannung  $U$ .

Bei der Gleichstromelektrik ist die Ladungsverteilung und damit auch das elektrische Feld zeitunabhängig und stellt ein Potenzialfeld dar. Die Feldlinien des Potenzialfeldes geben die Richtungen der Feldstärke an, und wegen  $\mathbf{j} = \sigma_e \mathbf{E} = -\sigma_e \nabla W_e$  auch die Richtungen der Stromlinien (gilt für isotrope Medien). Bei der Gleichstromelektrik wird der Strom  $I$  durch eine Stromelektrode an der Erdoberfläche eingespeist und breitet sich dann im Medium in alle Richtungen aus. Für die theoretische Behandlung interessiert das Potenzial der Stromelektrode im homogenen Voll- und Halbraum. Die Stromelektrode wird als „Punktquelle“ angesehen und  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{j}$  zeigen im homogenen Vollraum in Radialrichtung und sind Funktion des Radius  $r$ . Das Potenzial der Stromelektrode im Vollraum hat die gleiche Form wie das Potenzial der Punktladung (vgl. (4.39))

$$W_e = \frac{C}{r},$$

wobei die Quellstärke  $C$  konstant sei. Durch die Oberfläche einer virtuellen Kugelschale im Radius  $r$  um die Stromelektrode fließt dann insgesamt der Strom  $I$  (Kontinuität), so daß

$$j_r(r) = \frac{\pm I}{4\pi r^2} = -\sigma_e \frac{dW_e}{dr} = \sigma_e \frac{C}{r^2} \quad \text{oder} \quad C = \frac{\pm I}{4\pi\sigma_e} = \frac{\pm I\rho_e}{4\pi}.$$

Für den Halbraum wird der Faktor  $4\pi$  durch  $2\pi$  ersetzt (Strom fließt nur durch die untere Kugelhälfte, vgl. Abb. 4.45).

Für die Stromelektrode an der Oberfläche des homogenen Halbraums erhält man damit

$$W_e(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\pm I}{\sigma_e} \frac{1}{r}. \quad (4.45)$$

Das Vorzeichen des Potentials wechselt, je nachdem ob der Strom in die Erde hinein oder herausfließt. Bei der Gleichstrom-Geoelektrik verwendet man in der Regel zwei Stromelektroden: an einer wird Strom eingespeist, an der anderen wird der Stromkreis geschlossen. Für die Messung des Potentials nimmt man zwei Sonden, durch die kein Strom fließt (sogenannte **Vierpolanordnung**, siehe Abb. 4.53). Das Potential an der Sonde 1 durch die Elektroden 1 und 2 ist (Superpositionsprinzip)

$$W_e(1) = \frac{I}{2\pi\sigma_e} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Das Potential an der Sonde 2 wird entsprechend berechnet. Die abgelesene Spannung ist die Potentialdifferenz zwischen den Sonden, also

$$U = W_e(1) - W_e(2) = \frac{I}{\sigma_e} \frac{1}{2\pi} \left\{ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) \right\}. \quad (4.46)$$

Daraus ergibt sich für den spezifischen Widerstand

$$\rho_e = \frac{1}{\sigma_e} = \frac{2\pi}{\{\dots\}} \frac{U}{I} = C_e \frac{U}{I}. \quad (4.47)$$

Der **Geometriefaktor**  $C_e$  hängt von der Messanordnung ab. Es gibt beliebig viele Möglichkeiten, Elektroden und Sonden entlang eines Profils anzuordnen. Zwei symmetrische Anordnungen sind weit verbreitet, die **Wenner-Anordnung**<sup>62</sup> mit  $C_e = 2\pi a$ , und die **Schlumberger-Anordnung** mit  $C_e = \pi \frac{l^2 - a^2}{4a}$  (Abb. 4.54). Für  $l > 5a$  erhält man  $C_e \approx \frac{\pi l^2}{4a}$ . Beide Anordnungen sind symmetrisch. Bei der Wenner-Anordnung ist der Abstand zwischen Elektroden und Sonden jeweils immer gleich. Bei

<sup>62</sup>Die Wenner Anordnung wurde 1915 von F. Wenner in die Geophysik eingeführt (U.S. Bur. Standards Ser. Paper 258).



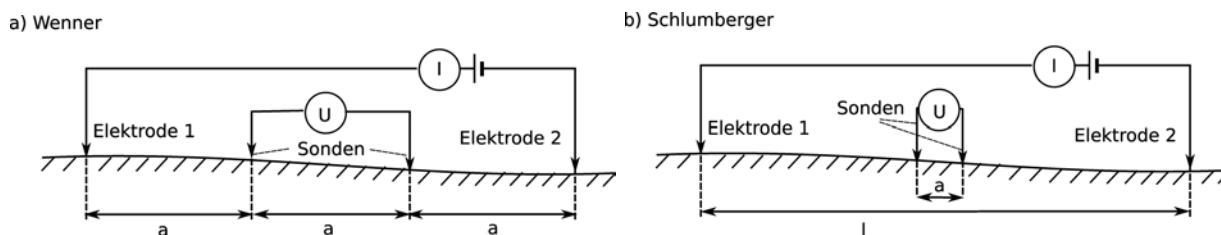


Abbildung 4.54: Bei der Wenner-Anordnung (a) liegen benachbarte Sonden bzw. Elektroden im Abstand  $a$  zueinander. Bei der Schlumberger-Anordnung (b) ist der Elektrodenabstand  $l$  sehr viel größer als der Sondenabstand  $a$ ,  $l \gg a$ .

der Schlumberger-Anordnung ist der Abstand zwischen den Spannungssonden in der Mitte klein gegen den Abstand zu den Elektroden außen. Die Schlumberger-Anordnung wurde traditionell für Tiefensondierungen verwendet, bei denen die Sonden ortsfest in der Erde bleiben und die Elektroden sukzessive symmetrisch versetzt werden. Die Wenner-Anordnung kann z.B. für eine Gleichstromkartierung benutzt werden, bei der die gesamte Anordnung horizontal verschoben wird. Moderne Geoelektrik Apparaturen und Auswerteverfahren arbeiten allerdings mit mehr als zwei Sonden und flexibleren Messgeometrien.

Im homogenen Halbraum ist der spezifische Widerstand nach (4.47) konstant und gleich dem wahren Widerstand des Untergrundes. Wenn  $\rho_e$  im Untergrund lateral (über die horizontale Entfernung) oder mit der Tiefe variiert,  $\rho_e = \rho_e(x, y, z)$ , dann wird mit der Rechengröße (4.47) ein **scheinbarer Widerstand**  $\rho_a$  berechnet. Der scheinbare Widerstand entspricht nicht dem wahren Widerstand  $\rho_e$ . Allerdings kann die Variation und der Verlauf von  $\rho_a$  häufig einfach interpretiert werden. Wenn die Änderung des Widerstandes klein ist über die Länge der Auslage, dann wird  $\rho_a$  immer noch ein guter Schätzwert für  $\rho_e$  sein. Es ist also durchaus sinnvoll und üblich  $\rho_a$  aufzutragen und für eine erste grobe Interpretation zu nutzen. Für die endgültige Auswertung wird dann der theoretische Zusammenhang zwischen  $\rho_a$  und  $\rho_e$  berücksichtigt.

#### **Profil-Kartierung mit der Wenner-Anordnung:**

In Abb. 4.55 ist die  $\rho_a$ -Kurve für eine **Kartierung** über einen vertikalen Kontakt von zwei Halbräumen mit unterschiedlichem Widerstand  $\rho_{e1}$  und  $\rho_{e2}$  mit Hilfe des Spiegelquellen-Konzepts berechnet worden. Als Kartierung bezeichnet man das flächenhafte Vermessen von Anomalien, um horizontale (laterale) Variationen zu erkennen. Die gesamte Anordnung wird stückweise entlang des Profils verschoben und das gemessene  $\rho_a$  immer der Mitte der Anordnung entlang des Profils zugeordnet. Abb. 4.55 diskutiert eine Kartierung mit einer Wenner-Anordnung mit dem Sondenabstand  $a$ . Entfernt von der Grenzfläche entspricht  $\rho_a$  jeweils dem wahren Widerstand der beiden Halbräume,  $\rho_{e1}$  und  $\rho_{e2}$ . Im Übergangsbereich in einer Entfernung von  $\pm 2a$  von der Kontaktfläche bei  $x = 0$  geht  $\rho_a$  stetig von  $\rho_{e1}$  nach  $\rho_{e2}$  über. Überstreicht die Wenner-Anordnung die Grenzfläche

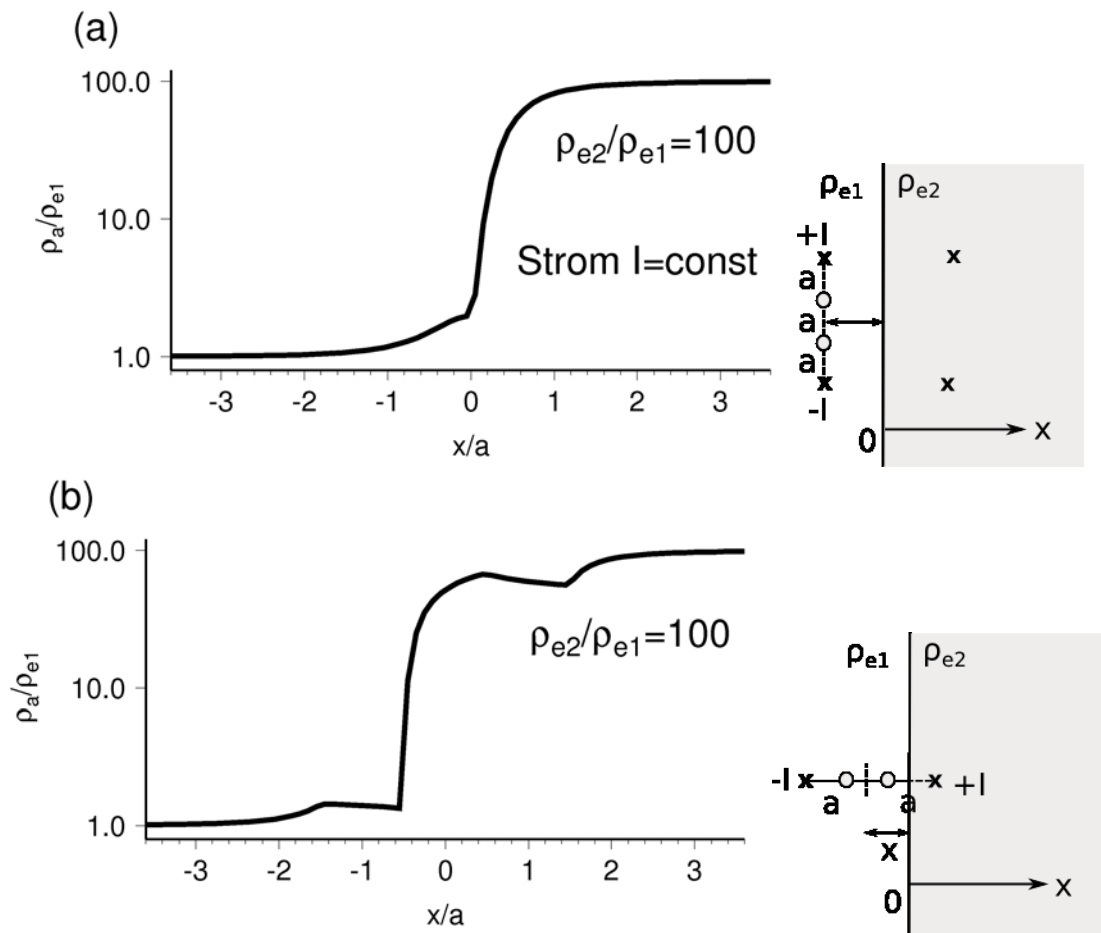


Abbildung 4.55: Scheinbare Widerstand  $\rho_a/\rho_{e1}$  als Funktion des Abstandes  $x/a$  zum Rand einer vertikalen Schichtgrenze.  $x$  wird vom Mittelpunkt der Wenner-Anordnung mit dem Sondenabstand  $a$  gemessen.  $\rho_{e2}$  ist der Widerstand im zweiten Halbraum. (a) Wenner-Anordnung steht parallel zur Schichtgrenze. (Spiegelquellen sind in der Skizze eingezeichnet) (b) Wenner-Anordnung steht senkrecht zur Schichtgrenze. Bei den Rechnungen wurde  $I$  konstant angenommen.

querliegend (Abb. 4.55a), dann ist die horizontale Auflösung etwas größer als bei Überstreichen in Profilrichtung (Abb. 4.55b). Generell ist die horizontale Auflösung größer wenn  $a$  kleiner ist, allerdings ist dann auch die Eindringtiefe geringer.

Eine Kartierung dieser Art ist gut geeignet, um die Widerstände über eine Verwerfung zu kartieren oder um eine vertikale Intrusion (Magma-Dike) zu untersuchen. Abb. 4.56 zeigt theoretische  $\rho_a$ -Kurven einer Wenner Anordnung entlang eines Profils, das einen vertikalen Dike kreuzt. Zur Konstruktion wurde das Spiegelquellen-Prinzip verwendet (vgl. Abb. 4.51 rechts). Falls der Dike zu dünn ist ( $d/a < 0.5$ ), dann kann aus der  $\rho_a$  Kurve weder die Dicke des Dikes noch die Widerstandserhöhung verlässlich abgeschätzt werden (vgl. Telford et al., 1990).

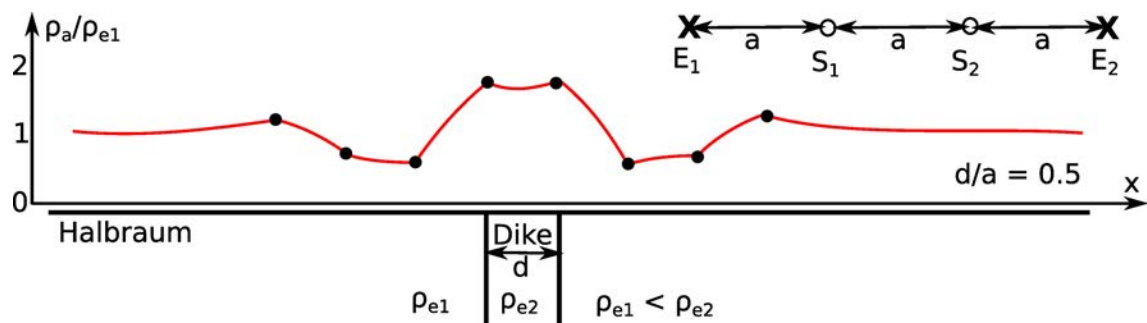


Abbildung 4.56: Profil des scheinbaren spezifischen Widerstandes einer Wenner-Anordnung (Elektroden  $E$  und Sonden  $S$ ) über einen kreuzenden, vertikalen Dike der Dicke  $d$ . Der elektrische Widerstand des Halbraums ist  $\rho_{e1}$ , der im Dike  $\rho_{e2} > \rho_{e1}$ . Zur Berechnung wurde  $d/a = 0.5$  angenommen (modifiziert aus Telford, 1990).

Wenner-Anordnungen werden außerhalb der Geophysik seit etwa 1954 zur Untersuchung von Halbleiterelementen in der industriellen Produktion eingesetzt, ebenso wie in der Physik und Chemie zur Charakterisierung von Elektrolyten oder von Gasen.

#### **Tiefen-Sondierung mit der Schlumberger-Anordnung:**

Eine andere Fragestellung ist, die Variation des Widerstands über die Tiefe zu bestimmen. Man spricht hierbei von einer **Tiefen-Sondierung**. Im Halbraum gilt als Faustregel, dass die **Eindringtiefe der Ströme** etwa ein Drittel des Elektrodenabstands  $l$  ist ( $z_0 \approx l/3$ ). Wird der Elektrodenabstand sukzessive vergrößert, dann repräsentiert  $\rho_a$  also grob den Widerstand in wachsender Tiefe. Häufig wird die Schlumberger-Anordnung für eine Sondierung verwendet, da dann die potenzialmessenden Sonden an derselben Stelle verbleiben können und nur der Abstand der Elektroden vergrößert werden muß. Ist der Elektrodenabstand klein, dann dringen die Ströme nicht sehr tief in den Untergrund ein und man mißt den Widerstand der obersten Schicht. Für einen sehr großen Abstand mißt man den Widerstand der untersten Schicht. Abb. 4.57 zeigt schematische  $\rho_a$ -Kurven für eine Schicht über dem Halbraum, sowohl für die Sondierung mit einer Schlumberger- wie einer Wenner-Anordnung. Die Kurven beider Messanordnungen unterscheiden sich für sinkende Widerstände leicht, wobei die Schlumberger-Anordnung eine etwas bessere Auflösung des Übergangsbereiches besitzt. Bei der Schlumberger-Anordnung müssen bei der Messung nur die Stromelektroden und nicht die Spannungssonden umgesteckt werden. Bemerkenswert ist, dass bei Erhöhung des Widerstandes im unterliegenden Halbraum ( $\rho_{e2}/\rho_{e1} > 1$ ) eine wesentlich längere Auslage nötig ist, um den wahren Widerstand  $\rho_{e2}$  als Plateauwert einer  $\rho_a$ -Kurve zu bestimmen.

Abb. 4.58 zeigt schematische  $\rho_a$ -Kurven für einen Zwei- und Dreischichtenfall. Eine graphische Auswertemethode besteht darin, gemessene  $\rho_a$ -Kurven in normierter, dimensionsloser Darstellung mit vorab berechneten Modellkurven für Zwei-, Drei-, oder Mehrschichtenfälle zu vergleichen. Mittlerweile ist die Rechnerleistung so groß, dass

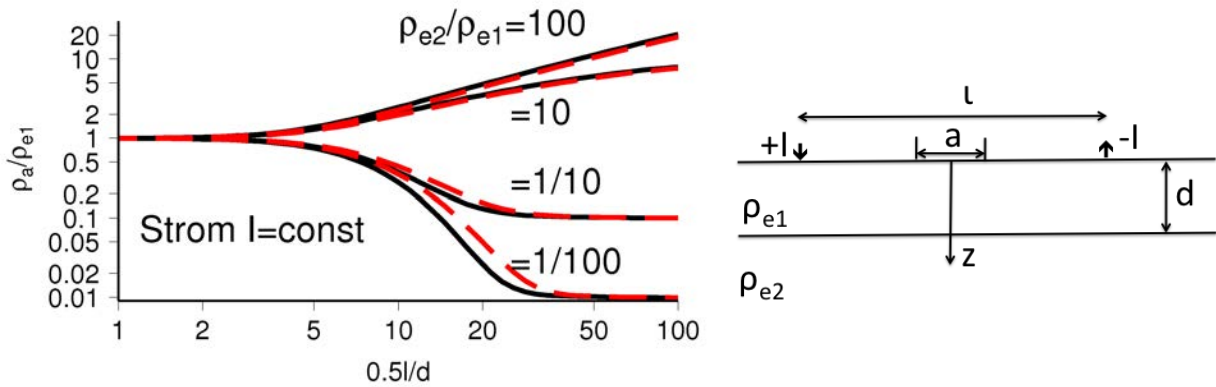


Abbildung 4.57: Scheinbare Widerstand  $\rho_a/\rho_{e1}$  als Funktion des Abstands  $l$  der Stromelektroden für eine Schicht der Dicke  $d$  mit Widerstand  $\rho_{e1}$  über dem Halbraum mit Widerstand  $\rho_{e2}$ . Sondierungskurven der Schlumberger- (durchgezogen,  $a \ll l$ ) und Wenner-Anordnung (rot gestrichelt,  $a = l/3$ ) wurden beide mit Hilfe Spiegelquellen und (4.44) konstruiert. Für die Simulation ist der Strom  $I$  konstant angenommen.

Sondierungs- $\rho_a$ -Kurven auch direkt durch ein numerisches Verfahren während der Messung invertiert werden können.

### ***Pseudosektion und geoelektrische Tomographie:***

Die beiden erwähnten Verfahren, Kartierung und Sondierung, sind klassische Mess- und Auswerteverfahren. Moderne Verfahren wie die Tomographie verbinden beide Ansätze. Eine Pseudosektion kann als Vorstufe einer Tomographie angesehen werden.

Ist die  $\rho_e$ -Verteilung im Untergrund sehr heterogen und kompliziert, dann sind die einfachen Interpretationen einer Wenner Kartierung oder Schlumberger Sondierung kritisch zu bewerten. Ein verbesserter Ansatz ist eine **Tomographie** mit Gleichstrom-Geoelektrik durchzuführen (Electric Resistivity Tomography, ERT). Im Prinzip werden unterschiedliche Messgeometrien auf dasselbe Target angewendet und aus allen Teilergebnissen wird ein verbessertes Bild der Widerstandsverteilung im Untergrund abgeleitet. Abb. 4.59 zeigt ein vergleichendes Beispiel einer Pseudosektionen und 2D Tomographie nach einer Sondierungskartierung zur Untersuchung von Karsthöhlen im Untergrund. Trockene Karsthöhlen werden an hohen spezifischen Widerständen im Bereich von  $2000 \Omega m$  erkannt. Die Pseudosektion (Abb. 4.59 oben) gibt eine rein geometrische Darstellung des scheinbaren spezifischen Widerstandes als Funktion der Profillänge und Pseudotiefe. Sie läßt nur eine grobe Einschätzung über Lage und Tiefe der Anomalie zu. Die 2D Tomographie (Abb. 4.59 unten) führt auf "echte" spezifische Widerstände als Funktion der "wahren" Tiefe. Die spezifischen Widerstände sind deutlich größer als die scheinbaren Widerstände in der Pseudosektion, und die Ausdehnung, Tiefe und Lage der Widerstands-anomalie wird durch die Tomographie genauer erfaßt.

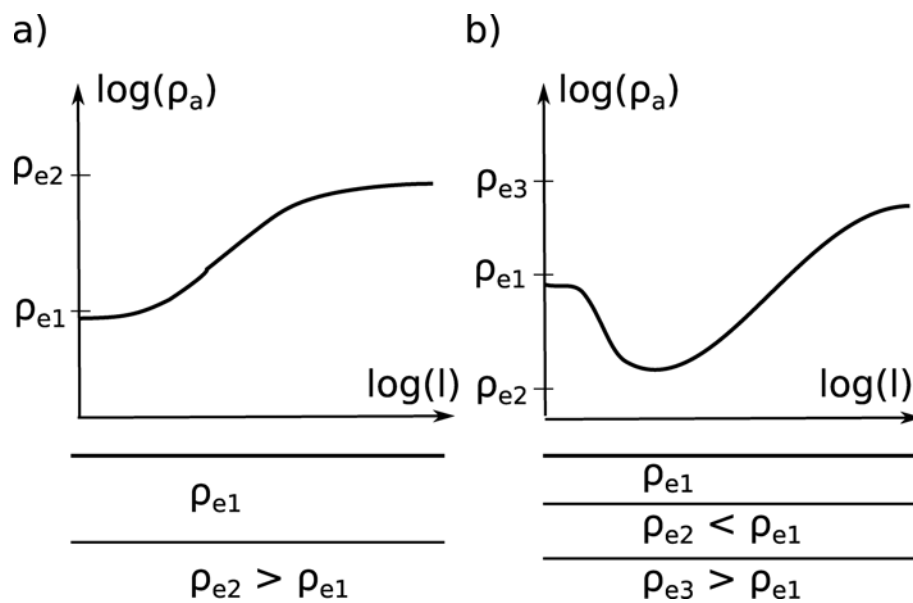


Abbildung 4.58: Schematische  $\rho_a$ -Kurven für eine Sondierung eines Zwei- (a) oder Dreischichtenfalls (b).  $l$  ist der Elektrodenabstand. Bei der Schlumberger-Anordnung ist der Anstieg der  $\rho_a$ -Kurve in einer doppelt logarithmischen Darstellung nicht steiler als  $45^\circ$ .

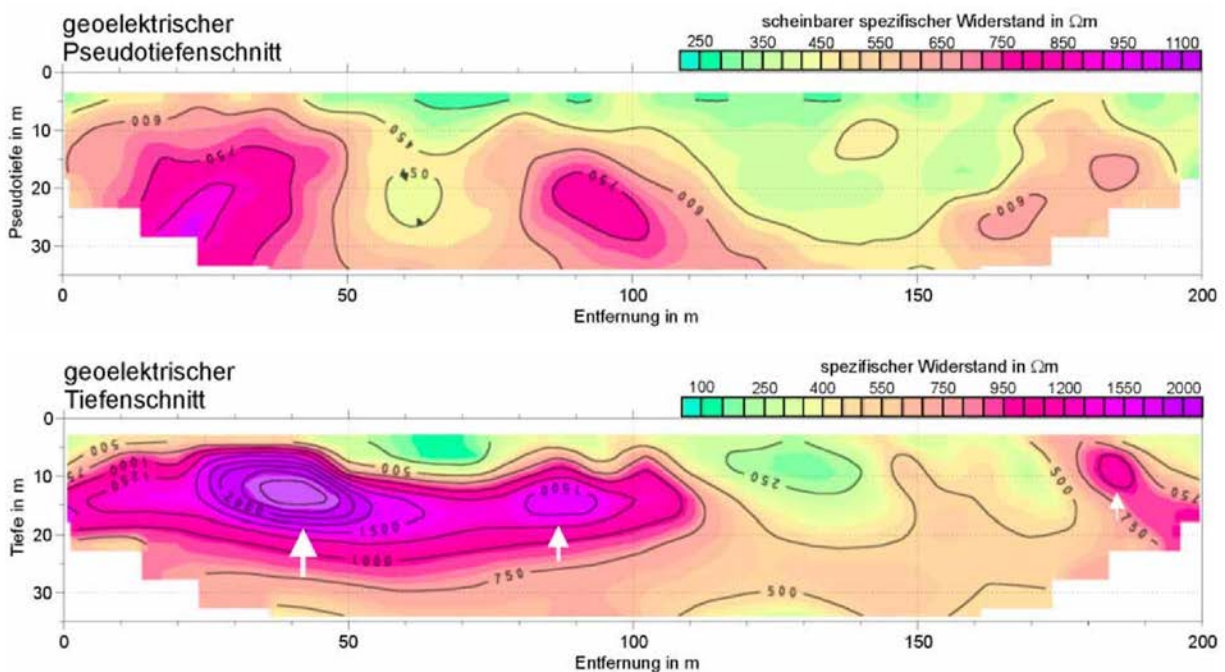


Abbildung 4.59: Pseudosektionen und 2D Tomographie einer Sondierungskartierung zur Untersuchung von Karsthöhlen im Untergrund. **Oben:** Pseudosektion der Sondierungskartierung, d.h. scheinbaren spezifischen Widerstandes als Funktion der Profilentfernung und Pseudotiefe. **Unten:** Ergebnisse der 2D Tomographie. Die Karsthöhlen sind durch weiße Pfeile gekennzeichnet (GGU mbH Karlsruhe).

## 5 Wellenfelder und Wellenfeldverfahren

### 5.1 Grundlagen zu Schwingungen und Wellen

Im Unterschied zu den bisher behandelten statischen Feldern (Schwerefeld, Magnetostatik, Gleichstromelektrik, etc.) sind Schwingungen und Wellen zeitabhängige Phänomene. Die Feldgröße hängt von Ort und Zeit ab, und eine transiente Störung kann sich im Raum als Welle ausbreiten. Die theoretische Beschreibung von zeitabhängigen Störungen und Wellen ist umfangreicher als für statische Felder und wird hier nur angerissen, so dass die wichtigsten Begriffe und Größen eingeführt werden.

#### 5.1.1 Theoretische Beschreibung von Schwingungen

Harmonische Schwingung sind z.B. zur Beschreibung der Bewegung eines Pendels, eines Feder-Masse Systems (Seismometer, See-Gravimeter), oder von Torsionsschwingungen bekannt. Wir betrachten z.B. ein Feder-Masse System mit der Auslenkung  $u = u(t)$ . Eine gedämpfte Schwingung wird beschrieben durch

$$u(t) = a_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \varphi_0) = a_0 e^{-bt} \cos(2\pi f t + \varphi_0) = a_0 e^{-bt} \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0\right) \quad (5.1)$$

Die Schwingung hat die **Winkelfrequenz**  $\omega = 2\pi f$ , die **Frequenz**  $f$  und die **zeitliche Periode**  $T = 1/f$ . Die Periode gibt die Zeitdifferenz zwischen zwei Maxima an, oder allgemein zwischen zwei Durchgängen von  $\omega t + \varphi_0 = \text{konstant}$ .  $a_0$  ist die Amplitude der Auslenkung zur Zeit  $t = 0$ , und  $\varphi_0$  ist eine konstante Phasenverschiebung, um unterschiedliche Anfangswerte zu erfüllen. Die Amplitude nimmt mit dem Faktor  $e^{-bt}$  ab, d.h. die Schwingung ist **zeitlich gedämpft**.

Gleichung (5.1) ist Lösung der Differentialgleichung (Masse  $m$  und Federkonstante  $K_f$ )

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma m \frac{\partial u}{\partial t} + K_f u = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_0^2 u = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} Q = \omega_0 / \gamma \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{K_f}{m}} \\ b = \frac{\omega_0}{2Q} \end{cases} \quad (5.2)$$

$\omega_0$  ist die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung. Die Dämpfung wird alternativ zu  $b$  auch mit den Parametern  $Q$  (Qualitätsfaktor) oder  $\gamma$  (logarithmisches Dekrement) beschrieben.

Für die theoretische Behandlung ist es häufig einfacher, mit komplexen Zahlen zu arbeiten anstatt mit Sinus und Cosinus. Aus der Funktionentheorie ist die **Eulersche**



**Gleichung** bekannt,

$$ae^{j\varphi(t)} = a \cos \varphi(t) + ja \sin \varphi(t) \quad ,$$

wobei  $j$  die imaginäre Einheit ist,  $j^2 = -1$ .

Die gedämpfte Schwingung kann damit äquivalent durch

$$\tilde{u}(t) = a_0 e^{-bt} e^{j(\omega t + \varphi_0)} \quad (5.3)$$

beschrieben werden, wobei nur der Realteil  $u = \text{Re}(\tilde{u})$  als physikalische Bodenbewegung interpretiert wird.

### 5.1.2 Theoretische Beschreibung von Wellen

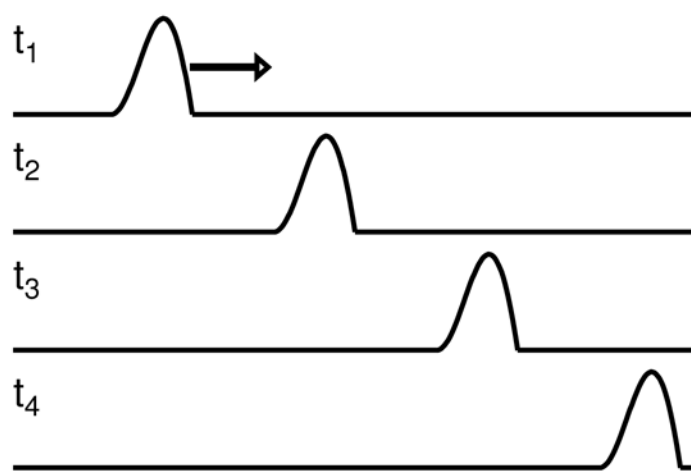


Abbildung 5.1: Ausbreitung einer transienten Störung zu den Zeiten  $t_1 - t_4$  als Transversalwelle auf einem Seil

Eine physikalische Welle ist eine sich im Raum ausbreitende Störung. Bei seismischen Wellen ist die Störung die Auslenkung der Gesteinspartikel (**die Bodenverschiebung**) oder des **Drucks** aus der Ruhelage. Das Ausbreitungsmedium ist die feste und flüssige Erde. Andere Feldgrößen wie **E**, **B** usw. können sich ebenso als Welle ausbreiten.

Eine **eindimensionale Welle** ist am einfachsten zu beschreiben. Die Verschiebung  $u$  breitet sich z.B. nur in  $x$ -Richtung aus und ist eine Funktion von der Profilkordinate  $x$  und der Zeit  $t$ ,

$$u = u(x, t) \quad .$$

Die Wellen sind Lösungen der homogenen, eindimensionalen **Wellengleichung**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad (5.4)$$

Eine allgemeine Lösung hat die Form

$$u(x, t) = f(ct \mp x) \quad , \quad (5.5)$$

wobei  $f(ct \pm x)$  eine beliebige, zweimal differenzierbare Funktion mit dem Argument  $ct \pm x$  und  $c$  die **Ausbreitungs-** oder **Phasengeschwindigkeit** der Welle ist. Abb 5.1 zeigt ein Beispiel einer Welle auf einem Seil. Die Störung (Auslenkung des Seils quer zur  $x$ -Richtung) sieht zu jedem Zeitpunkt  $t$  gleich aus und breitet sich in  $+x$ -Richtung aus. Sie wird mit  $f(ct - x)$  beschrieben. Bewege man das Koordinatensystem des Beobachters mit der Geschwindigkeit  $c$  in  $+x$ -Richtung, dann hätte man für jeden Zeitpunkt ein räumlich konstantes Bild, d.h. immer den gleichen Abstand von Seilende zum Maximum (allg. zu einer Phase) der Störung. Die Störung wird durch die Wellenform beschrieben und hat in Abb 5.1 eine begrenzte Länge. Im Gegensatz zu unendlich ausgedehnten Wellen spricht man von einer **transienten Störung** oder einem **transienten Signal**.

Eine spezielle Lösung der Wellengleichung ist die einer **harmonische Welle** (Cosinus- oder Sinuswelle). Die harmonische Welle ist streng periodisch und unendlich ausgedehnt mit der Form

$$u(x, t) = a \cos k(ct - x) = f(ct - x) \quad . \quad (5.6)$$

$a$  und  $k$  sind Konstanten;  $a$  ist die **Amplitude** der Sinuswelle (z.B. in  $m$  oder  $Pa$ ), und  $k$  wird **Wellenzahl** genannt (in  $rad/m$ ). Die Welle wird durch eine **zeitliche und räumliche Periode** charakterisiert, wobei die **zeitliche Periode** durch  $T$  und die räumliche durch die **Wellenlänge**  $\Lambda$  beschrieben wird. Abb. 5.2 zeigt eine harmonische Welle als eine Funktion des Ortes zu unterschiedlichen Zeiten (a, sogenannte **Snapshots**) und als Funktion der Zeit an einem festen Ort  $x_0$  (b). In beiden Fällen sieht man eine Sinusfunktion. Die Wellenlänge  $\Lambda$  ist der Abstand zwischen zwei benachbarten Wellentälern (oder Wellenbergen). Die Periode  $T$  ist der Abstand zweier Minima auf der Zeitachse.

In Abb. 5.2 ist das Fortschreiten der harmonischen Wellen eingezeichnet. Jeder Wellenberg breitet sich mit der Geschwindigkeit  $c$  aus. Das Argument  $k(ct - x)$  der Funktion  $f(ct - x)$  wird **Phase** genannt. Der Punkt  $k(ct - x) = konst$  ist ein **Punkt konstanter Phase**. Nicht nur jeder Wellenberg, sondern jeder Punkt konstanter Phase breitet sich mit  $c$  aus;  $c$  wird deshalb auch Phasengeschwindigkeit genannt. Bis der zurückliegen-

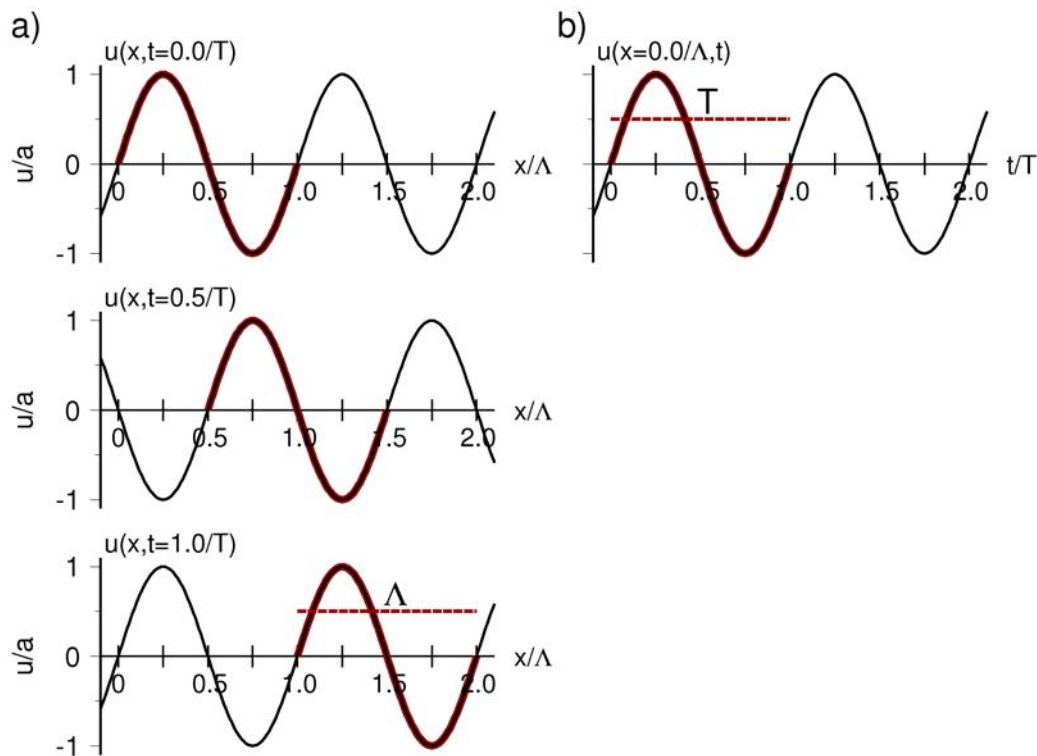


Abbildung 5.2: a) Snapshots, d.h. räumliche Darstellung einer in  $+x$ -Richtung fortschreitenden harmonischen Welle (z.B. Partikelbewegung  $u$  einer 1D Seilwelle) zu festen Zeiten (hier  $t = 0, T/2, T$ ).  $\Lambda$  ist die Wellenlänge,  $T$  die Periode und  $a$  die Amplitude der harmonischen Welle. Ein Segment über eine Wellenlänge ist farbig markiert. b) Der zeitliche Verlauf der Partikelbewegung an einem festen Ort (hier  $x = 0$ ).

de Wellenberg an der Stelle des vorhergehenden erscheint, ist die Zeit  $t = T$  vergangen. Der Wellenberg hat in dieser Zeit die Strecke  $\Lambda$  zurückgelegt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist damit  $c = \frac{\Lambda}{T}$ .

Neben  $T$  und  $\Lambda$  sind andere Größen gebräuchlich. Die **Frequenz** ist  $f = \frac{1}{T}$  ( $1\text{Hz} = 1/\text{s}$ ), die **Winkel­frequenz** ist  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  ( $\text{rad}/\text{s}$ ) und die **Wellenzahl** ist  $k = \frac{2\pi}{\Lambda}$  ( $\text{rad}/\text{m}$ ). Es gilt  $c = \frac{\omega}{k}$ .

Damit sind mehrere äquivalente Schreibweisen für harmonische Wellen möglich wie

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= a \cos k(ct \mp x) \\
 u(x, t) &= a \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\Lambda}\right) \\
 u(x, t) &= a \cos(\omega t \mp kx) \\
 u(x, t) &= a \cos \omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right) .
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Für nicht-harmonische, aber streng periodische Wellen, sind Größen wie die räumliche

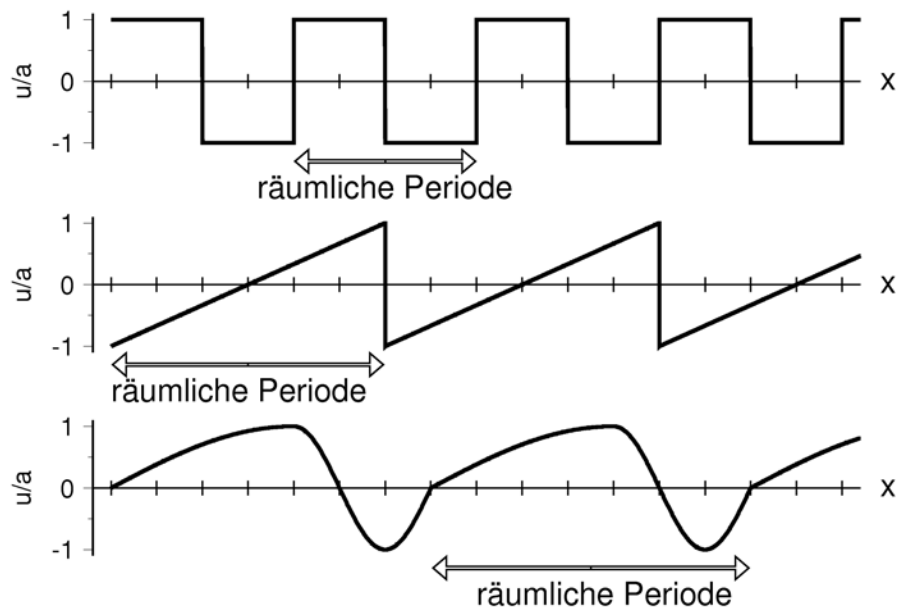


Abbildung 5.3: Nicht-harmonische, aber streng periodische Wellen. Größen wie die räumliche und zeitliche Periode sind auch hier definiert.

und zeitliche Periode ebenso definiert (Abb. 5.3). Im Sprachgebrauch verwendet man selbst bei transienten Signalen die Begriffe **dominante Wellenlänge** und **dominante Periode** oder **Frequenz**. Dominante Perioden können dann im Zusammenhang mit einer Fourierzerlegung definiert werden. Je nach Signal können dominante Perioden auch grob aus der Wellenform abgeschätzt werden.

In komplexer Schreibweise kann die Welle geschrieben werden wie

$$\tilde{u}(x, t) = ae^{j(\omega t - kx)} \quad , \quad (5.8)$$

wobei der Realteil  $u = \text{Re}(\tilde{u})$  die physikalische Bodenbewegung repräsentiert.

Eindimensionale Wellenausbreitung ist ein Spezialfall. Der allgemeinere und auch typische Fall für die Erde ist, dass sich die Wellen von einer **Punktquelle** ausbreiten, z.B. von einer Explosion. Im Vollraum breiten sich dann **Kugelwellen** aus. Abb. 5.4 zeigt einen Snapshot einer Kugelwelle durch die Zentralebene in perspektivischer Darstellung und in Aufsicht. Die Quelle lag im Zentrum und die Kugelwelle breitet sich in Radialrichtung  $r$  aus. In Abb. 5.4b ist eine **Wellenfront** als Fläche konstanter Phase eingezeichnet. Wenn die Wellenfronten gekrümmt sind müssen die Maximalamplituden der Welle räumlich variieren (hier Abnahme mit  $1/r$ ). Für Wellen, die sehr hochfrequent sind, kann die Ausbreitung generell durch **Strahlen** beschrieben werden (vgl. Optik).

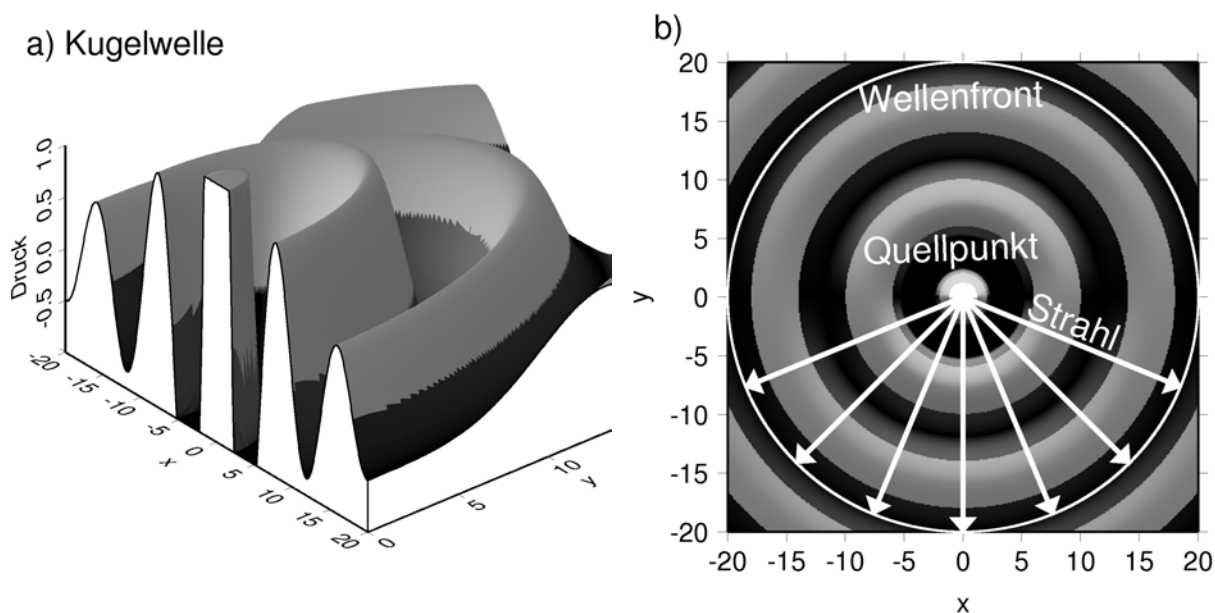


Abbildung 5.4: a) Perspektivische Darstellung (Snapshot) einer Kugelwelle in der Zentralebene für die Feldgröße Druck (willkürliche Einheiten). Simuliert wurde eine Sinuswelle mit geometrischer Amplitudenabnahme von  $1/r$  ( $r$  ist der Radius vom Quellpunkt; extreme Werte wurden in der Darstellung geklippt). b) Aufsicht auf das Druckfeld in der Zentralebene. Die Wellenfronten sind Kreise (im Raum Kugelflächen). Einzelne Strahlen sind durch Pfeile angedeutet und stehen senkrecht auf den Wellenfronten. Die Strahlen der Kugelwelle zeigen in Radialrichtung.

Der Strahl hat seinen Ursprung in der Quelle und ist dort einem Abstrahlwinkel zugeordnet. Dann kann der Strahl als Linie senkrecht zu Wellenfronten zu sukzessiv wachsenden Zeiten konstruiert werden. Er beschreibt die Richtung der Wellenausbreitung entlang des Strahls, d.h. die Tangente an den Strahl gibt die lokale Ausbreitungsrichtung der Wellenfront an. Für das Beispiel der Kugelwelle sind alle Strahlen Halbgeraden, die vom Zentrum aus radial wegzeigen (Abb. 5.4b). Die Bilder von Wellenfronten und Strahlen erleichtern die Beschreibung und das Verständnis von Wellen erheblich.

Abb. 5.5 zeigt den hypothetischen Strahl einer Wellenfront in einem geschichteten Medium (Geschwindigkeit  $c$  ist Funktion der Tiefe). Eine Wellenfront zur Zeit  $t_0$  und Phase  $\varphi_0$  ist angedeutet. Die **Phasenlaufzeit**  $t_0$  gibt an, wie lange die Wellenfront zum Durchlaufen des Strahlwegs benötigt. Der Strahlweg verdeutlicht durch welche Regionen des Mediums die Wellenfront gelaufen ist. Bei Verfahren der Strahlverfolgung (**Raytracing**) hat man das Ziel die Strahlwege und Laufzeiten einer Wellenfront zu konstruieren. Für eben geschichtete Medien ist es hierbei hilfreich eine neue Vektorgröße, den **Langsamkeitsvektor**  $\mathbf{s} = [s_x, s_z]^T$ , einzuführen. Der Betrag des Langsamkeitsvektors ist der Kehrwert der Geschwindigkeit,  $|\mathbf{s}| = 1/c$ .

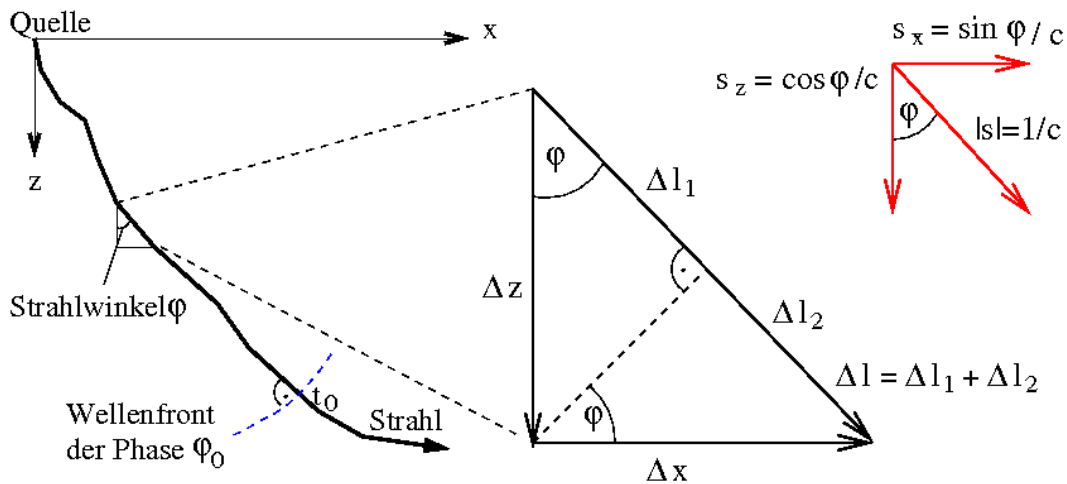


Abbildung 5.5: Skizze eines Strahls und zur Strahlverfolgung (Raytracing) in einem geschichteten Medium. Eine Wellenfront zur Zeit  $t_0$  und Phase  $\varphi_0$  ist angedeutet. Der Strahl wird in jedem Punkt durch einen Strahlwinkel  $\varphi$  parametrisiert. Die Länge des ausgeschnittenen Strahlsegments,  $\Delta l$ , kann in zwei Anteile zerlegt werden wie  $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \cos \varphi \Delta z + \sin \varphi \Delta x$ . Das Vektordreieck oben rechts (in rot) zeigt die Zerlegung des Langsamkeitsvektors  $\mathbf{s} = [s_x, s_z]^T$  in seine Horizontal- und Vertikalkomponente, wobei  $c$  die Geschwindigkeit der Welle angibt.

Der Strahl in Abb. 5.5 wird in jedem Punkt durch einen Strahlwinkel  $\varphi$  parametrisiert. Der Langsamkeitsvektor  $\mathbf{s}$  hat dann die Horizontalkomponente  $s_x = \sin \varphi / c$  und die Vertikalkomponente  $s_z = \cos \varphi / c$  (Abb. 5.5). Bei der Strahlverfolgung integriert oder summiert man z.B. die Strahlsegmente  $\Delta l$  entlang des gesamten Strahlwegs, um die Gesamtlänge des Strahls zu berechnen. Entsprechend wird die Laufzeit  $t_0$  der Phase als Summe über die Laufzeitanteile  $\Delta t$  entlang der einzelnen Strahlsegmente  $\Delta l$  berechnet. Die Laufzeit entlang eines Strahlsegments ist dabei (Abb. 5.5)

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{|\Delta \mathbf{l}|}{c} = \frac{\Delta l_1}{c} + \frac{\Delta l_2}{c} = \frac{\sin \varphi}{c} \Delta x + \frac{\cos \varphi}{c} \Delta z \\ &= s_x \Delta x + s_z \Delta z = \mathbf{s} \Delta \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Durch die Zerlegung des Segments  $|\Delta \mathbf{l}|$  in die Anteile  $\Delta l_1$  und  $\Delta l_2$  und die Einführung der Langsamkeit  $s_x$  und  $s_z$  hat man das Laufzeitproblem in eine Summe entlang  $x$  und eine Summe entlang  $z$  entkoppelt. Für den Spezialfall einer eben geschichteten Erde ist die Horizontalkomponente der Langsamkeit für einen seismischen Strahl konstant (vgl. Snellius Gesetz),  $s_x = \sin \varphi / c = \text{konst.}$ , und wird **horizontale Langsamkeit** oder **Strahlparameter** genannt. Wegen der Konstanz von  $s_x$  vereinfacht sich das Laufzeitproblem in (5.9) erheblich. Beispiele werden in späteren Kapiteln gebracht.

Während die Amplitude der eindimensionalen Welle konstant bleibt nimmt die Amplitude der Kugelwelle im Vollraum mit  $1/r$  ab (Abb. 5.4). Die Amplitudenabnahme mit



wachsender Entfernung zum Herd wird **geometrische Dämpfung** oder **geometrische Divergenz** genannt. Die geometrische Dämpfung ist der Hauptgrund dafür, dass Wellen von einem Erdbeben in großer Entfernung zum Bebenherd stark abgeklungen sind und nicht mehr von der Bevölkerung gespürt werden.

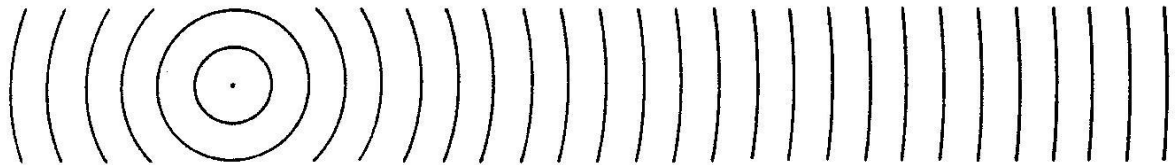


Abbildung 5.6: Die Krümmung der Wellenfront einer Kugelwelle flacht mit wachsendem Abstand zur Quelle ab.

Die geometrische Dämpfung der Kugelwelle hat ihre Ursache in der Krümmung der Wellenfronten (kreisförmig). Mit wachsender Entfernung  $r$  zur Quelle flacht die Krümmung der Wellenfront mehr und mehr ab, und der **Krümmungsradius** der Wellenfront wird größer und größer (Abb. 5.6). Sehr weit von der Quelle entfernt kann die Wellenfront in guter Näherung als eine **ebene Wellenfront** beschrieben werden. Man spricht von **ebenen Wellen**. Ebene Wellen im homogenen Vollraum lassen sich durch die eindimensionale Wellengleichung beschreiben. Die geometrische Dämpfung ist Null. Abb. 5.7 zeigt die Wellenfronten für eine harmonische, ebene Welle. Die Welle breitet sich in Richtung des Langsamkeitsvektors  $\mathbf{s}$  aus. Wegen  $k = \omega/c = \omega|\mathbf{s}|$  macht es Sinn, alternativ zum Langsamkeitsvektor einen **Wellenzahlvektor**  $\mathbf{k}$  einzuführen, der in Ausbreitungsrichtung zeigt und dessen Betrag gleich  $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\Lambda}$  ist. Die Gleichung der ebenen, harmonischen Wellen mit der Ausbreitung in Richtung  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  ist dann

$$\tilde{u}(x, t) = ae^{j(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})} = ae^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} \quad . \quad (5.10)$$

Ebene Wellen sind für die Seismologie also durchaus wichtig und realistisch, z.B. um die Ausbreitung der Welle von einem Erdbeben in sehr großer Entfernung zum Herd zu erklären.

Bisher wurden meist harmonische Wellen besprochen, die unendlich ausgedehnt sind. Harmonische Wellen sind sinusförmig in Raum und Zeit und mathematisch besonders

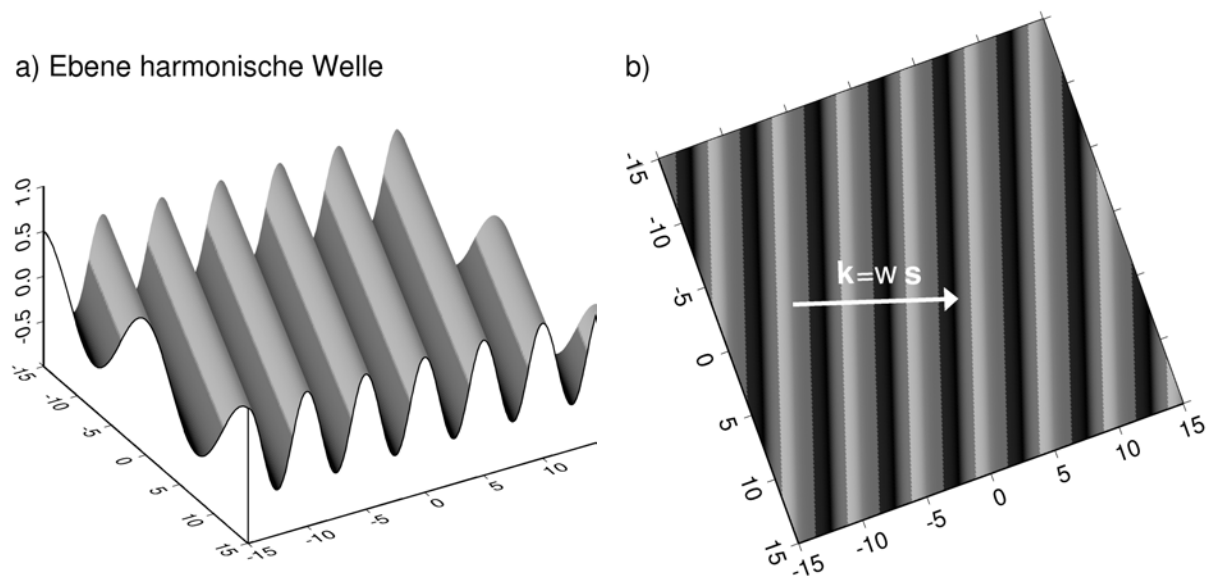


Abbildung 5.7: a) Perspektivische Darstellung einer ebenen, harmonischen Welle (beliebige Einheiten). b) Aufsicht auf das Wellenfeld. Die Wellenfronten liegen senkrecht zur  $x$ - $y$  Ebene und erscheinen in der Abbildung als Geraden. Die Wellenfronten breiten sich mit der Geschwindigkeit  $c = 1/|\mathbf{s}|$  in Richtung der Langsamkeit  $\mathbf{s}$  bzw. des Wellenzahlvektors  $\mathbf{k}$  aus.

einfach zu beschreiben. Harmonische Wellen treten in der Erde allerdings selten auf. Sie sind trotzdem sehr wichtig, da sich jede nicht-harmonische oder auch transiente ebene Welle durch eine Überlagerung aus vielen harmonischen, ebenen Wellen mit unterschiedlicher Frequenz, Amplitude und Anfangsphase synthetisieren lässt (Abb. 5.8). Das drückt sich mathematisch durch die Zerlegung in eine **Fourierreihe** aus oder alternativ durch ein **Fourierintegral**<sup>63</sup>. Häufig betrachtet man Signale nicht nur im Zeitbereich, sondern führt eine Fouriertransformation durch und untersucht das Amplituden- und Phasenspektrum im Frequenzraum.

### 5.1.3 Elektromagnetische Wellen

Die Theorie der Elektromagnetik ist anspruchsvoll und übersteigt den Rahmen dieses Skripts. Es werden nur zwei Aspekte angesprochen, die für das Verständnis der Magnetotellurik und des Georadars wichtig sind. Letztlich lassen sich alle Gleichungen und

<sup>63</sup> Die Zerlegung in harmonische, ebene Wellen ist analog zur Fourier-Zerlegung einer beliebigen Schwingung in harmonische Schwingungen

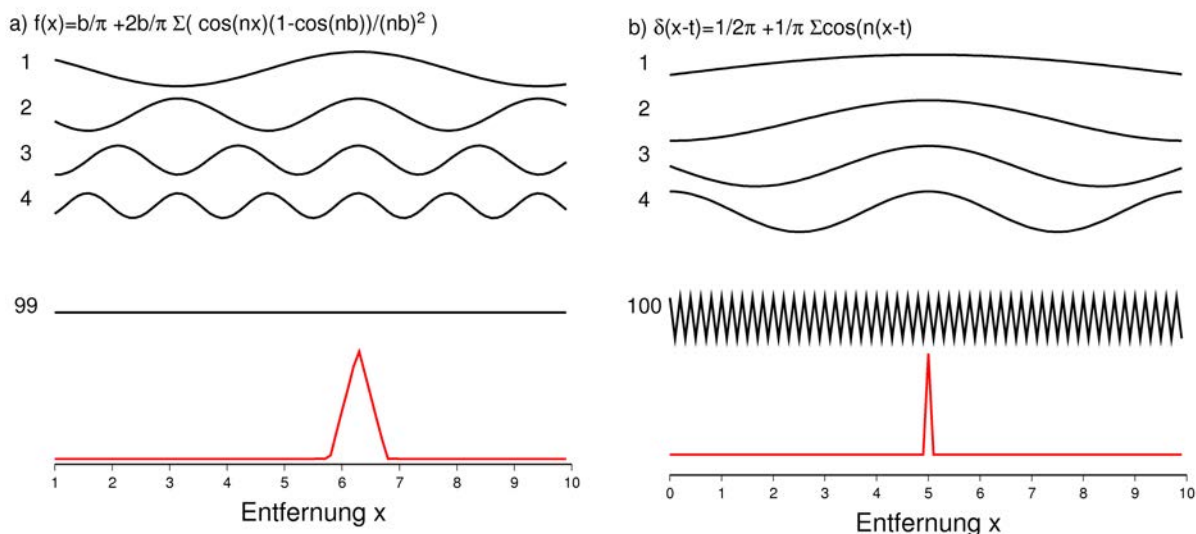


Abbildung 5.8: Beispiele für die Synthese eines Signals (untere rote Kurve) aus harmonischen Schwingungen (schwarze Kurven). a) Synthese eines symmetrischen Dreiecksignals aus harmonischen Schwingungen für  $n = 1, \dots, 100$ . b) Synthese eines  $\delta$  Pulses. Die Amplituden der harmonischen Schwingungen nimmt hier für große  $n$  nicht ab. Daher konvergiert die Reihe der  $\delta$ -Funktion schlecht.

Phänomene aus den vier **Maxwellschen Gleichungen** ableiten (Maxwell: 1831-1879):

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{j} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \\
 \operatorname{div} \mathbf{D} &= \frac{q}{V} \\
 \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

$\frac{q}{V}$  ist die Ladungsdichte und  $\mathbf{j}$  die Stromdichte,  $\mathbf{H}$  die magnetische Erregung,  $\mathbf{D}$  die Verschiebungsdichte (Anhang E),  $\mathbf{E}$  die elektrische Feldstärke und  $\mathbf{B}$  die magnetische Induktion. Die beiden letzten Gleichungen sagen aus, dass die Quellen von  $\mathbf{D}$  freie Ladungen sind und  $\mathbf{B}$  nicht durch Ladungen erzeugt wird. Die ersten beiden Gleichungen besagen, dass ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld oder Ströme ein magnetisches und ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld ein elektrisches Wirbelfeld erzeugt. Für die Herleitung und ausführliche Diskussion wird auf Lehrbücher der Physik verwiesen.

Aus den Gleichungen läßt sich die sogenannte Telegraphengleichung ableiten, (z.B. ein-dimensional für  $E = E_x$ , Ausbreitung nur in  $z$ -Richtung)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu_r \mu_0 \sigma_e \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad .
 \tag{5.12}$$

Für das Magnetfeld gilt eine entsprechende Telegraphengleichung für  $B_y$ . Eine Lösung im

homogenen Medium ist eine gedämpfte, ebene, harmonische Welle mit der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  (Ausbreitung nur in  $z$ -Richtung,  $E = E_x$ ),

$$\tilde{E} = E_0 e^{j(\omega t - \alpha z)} e^{-\beta z} = E_0 e^{j(\omega t - (\alpha + j\beta)z)} = E_0 e^{j(\omega t - \tilde{k}z)}. \quad (5.13)$$

Die Welle breitet sich mit der Geschwindigkeit  $v = \frac{\omega}{\alpha}$  in die Tiefe  $z$  aus, wobei  $\alpha$  die reelle Wellenzahl ist und  $\beta$  die Dämpfung der Welle mit der Tiefe kontrolliert.  $\tilde{k}$  wird als **komplexe Wellenzahl** definiert und ist im allgemeinen Fall

$$\tilde{k} = \alpha + j\beta = \sqrt{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \omega^2 + j\mu_r \mu_0 \sigma_e \omega} \quad (5.14)$$

mit

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 8.885 \cdot 10^{-12} \text{As(Vm)}^{-1} = \text{elektrische Feldkonstante} \\ \mu_0 &= 12.57 \cdot 10^{-7} \text{Vs(Am)}^{-1} = \text{magnetische Feldkonstante} \\ \epsilon_r &= \text{(relative) Dielektrizitätskonstante} \\ \mu_r &= \text{(relative) Permeabilitätskonstante} \\ \alpha &= \sqrt{\omega^2 \frac{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma_e^2}{\epsilon_r^2 \epsilon_0^2 \omega^2}} + 1 \right)} \\ \beta &= \sqrt{\omega^2 \frac{\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma_e^2}{\epsilon_r^2 \epsilon_0^2 \omega^2}} - 1 \right)} \end{aligned}$$

Anstatt einer harmonischen Welle können sich auch **transiente Signale** (Pulse) in die Erde ausbreiten, die als eine Überlagerung von harmonischen Wellen innerhalb einer gewissen **Frequenz-Bandbreite** dargestellt werden können.

Die Abhängigkeit der komplexen Wellenzahl in (5.14) von  $\omega$  und  $\omega^2$  deutet an, dass es für große und kleine Frequenzen zwei Grenzfälle gibt, für die sich die Gleichungen etwas vereinfachen.

**Grenzfall**  $\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \omega^2 \gg \mu_r \mu_0 \sigma_e \omega$ :

Der Grenzfall wird für große Frequenzen  $\omega$  und schlechte Leiter (kleine  $\sigma_e$ ) erreicht und führt auf eine eindimensionale Wellengleichung (z.B. Fouriertransformation von (5.12))

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \approx \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Die Wellenzahl ist rein reell,  $\tilde{k} = \alpha$ , und die Wellen breiten sich ungedämpft mit der Phasengeschwindigkeit  $v = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c_L}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$  aus, wobei  $c_L = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 0.3 \text{m/ns}$  die Phasengeschwindigkeit im Vakuum ist (Lichtgeschwindigkeit). Dieser Grenzfall ist beim **Georadar** (Ground Penetrating Radar) für schlechte Leiter gültig, wo man mit Frequenzen zwischen 100 und 1000 MHz arbeitet. Ist der Boden allerdings feucht oder

hat man gut leitende Schichten oder Körper im Untergrund, dann ist  $\beta \neq 0$  und die Wellen sind stark gedämpft. Die Eindringtiefe der elektromagnetischen Wellen ist dann sehr gering und beträgt in der Regel nur wenige Meter.

**Grenzfall**  $\mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \omega^2 \ll \mu_r \mu_0 \sigma_e \omega$ :

Der andere Grenzfall für tiefe Frequenzen in der Erde wird bei der **Magnetotellurik** erreicht. Dort arbeitet man mit Frequenzen zwischen 0.0001 und etwa 1000 Hz (Perioden  $T$  zwischen 10000 und 0.001 s). Der tiefenabhängige Anteil  $E(z)$  des E-Feldes (und  $B(z)$  des B-Feldes) wird durch eine vereinfachte Gleichung in der Form einer eindimensionalen Diffusionsgleichung beschrieben (vgl. Wärmeleitungsgleichung 3.10;  $\mu_r = 1$ ),

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \approx \mu_0 \sigma_e \frac{\partial E}{\partial t} \quad .$$

Die Lösung im homogenen Halbraum ist  $E(z, t) = E(z)e^{j\omega t}$  (siehe<sup>64</sup>)

$$\begin{aligned} E(z) &= E_0 e^{-\tilde{k}z} = E_0 e^{-(1+j)z/z_0} \\ \text{mit } \tilde{k} &= \sqrt{j\omega\mu_r\mu_0\sigma_e} = (1+j)\sqrt{0.5\omega\mu_r\mu_0\sigma_e} \\ \text{und } z_0 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\mu_r\mu_0\sigma_e}} \quad . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Die **Eindringtiefe**  $z_0$  ist die Tiefe, in der die Amplitude auf  $E_0/e = 0.368E_0$  abgeklungen ist.  $z_0$  ist proportional zu  $\sqrt{(f\sigma_e)^{-1}} = \sqrt{T/\sigma_e}$ . Für sehr kleine Frequenzen (große Perioden) ist die Eindringtiefe groß und kann mehrere hundert Kilometer betragen. Wenn die Leitfähigkeit groß ist, dann wird die Eindringtiefe kleiner.

Beide Grenzfälle, Georadar und Magnetotellurik, werden in den folgenden Kapiteln besprochen.

---

<sup>64</sup>  $\sqrt{j} = j^{1/2} = [1e^{j\pi/2}]^{1/2} = 1e^{j\pi/4} = 1(\cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2 = (1+j)/\sqrt{2}$

## 5.2 Magnetotellurik

### 5.2.1 Meßgeräte



Abbildung 5.9: Messgeräte in der Magnetotellurik. Die Komponenten der elektrischen Feldstärke können über lineare Anordnungen nichtpolarisierbarer Elektroden gemessen werden. Die Magnetfeldschwankungen  $B_x$  und  $B_y$  werden mit Kernsättigungsmagnetometer (tieffrequent) oder Stabspulen (hochfrequent) gemessen. Fotos von M. Jegen.

Um bei der Magnetotellurik die Horizontalkomponente der elektrischen Feldstärke zu messen, werden nichtpolarisierbare Elektroden (Abb. 5.9) im Abstand  $d$  zueinander in den Boden gesteckt ( $|\mathbf{E}| = U/d$ ). Dadurch wird die Feldstärke in  $d$ -Richtung erfasst. Gleichzeitig werden die Horizontalkomponenten der magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$  gemessen. Bei sehr tiefen Frequenzen kann  $B_x$  und  $B_y$  noch mit einem Fluxgate Magnetometer gemessen werden. Um auch etwas höhere Frequenzen berücksichtigen zu können, werden Stabspulen verwendet (Abb. 5.9). Der Geophysikalische Gerätepool Potsdam (GIPP) stellt Sensoren für die Magnetotellurik zur Verfügung.

Bei elektromagnetischen Verfahren werden kreisförmige Spulen oder Stabspulen verwendet, häufig in orthogonalen Richtungen. Für den marinen Einsatz am Meeresboden werden spezielle Stationen für Magnetotellurik gebaut, bei denen Magnetometer und E-Sensoren in einen Titanzylinder auf einer Meeresbodenplattform eingebaut werden (z.B. Pool des IfM-Geomar, M. Jegen).

### 5.2.2 Messgeometrie und Auswertung

Bei der Magnetotellurik werden natürliche magnetische und elektrische Felder gemessen, die zeitlich variieren und ihren Ursprung außerhalb der festen Erde in der Atmosphäre und Ionosphäre haben. Die Intensität der induzierten Ströme und des elektrischen Feldes an der Erdoberfläche hängt, außer von den anregenden Feldern, von der spezifischen Leitfähigkeit  $\sigma_e$  in der Erde ab. Von Interesse ist der Periodenbereich zwischen etwa 0.0001 bis 1000 Hz. Die Variationen oberhalb 1 Hz werden durch die weltweite Gewitteraktivität erzeugt. Die Schwankungen unterhalb von 1 Hz entstehen durch die

Interaktion des Erdmagnetfeldes mit dem Sonnenwind. Bei  $1\text{ Hz}$  hat man die niedrigste Amplitude des Quellterms. Lange Perioden weit unter  $1\text{ Hz}$  sind dann von Interesse, wenn Eindringtiefen  $z_0$  bis zu mehreren hundert Kilometern erreicht werden sollen ( $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\mu_0\mu_r\sigma_e}}$ , vgl. 5.15). Die Magnetotellurik ist damit eines der wenigen elektromagnetischen Verfahren, das sich für die Untersuchung der Leitfähigkeitsstruktur des Erdmantels eignet.

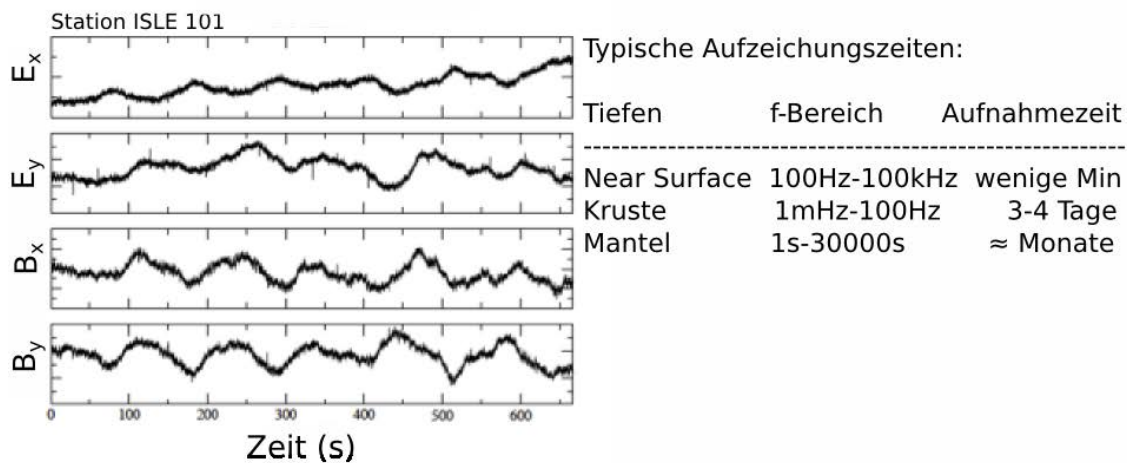


Abbildung 5.10: Beispiel für gemessene magnetische und elektrische Feldvariationen (von M. Jegen, Geomar). Die Aufzeichnungszeiten hängen von der Problemstellung ab, d.h. von dem zu untersuchenden Frequenzbereich.

In der **Magnetotellurik** wird das **Amplitudenverhältnis** und die **Phasendifferenz** zwischen den orthogonalen **Horizontalkomponenten** des elektrischen  $E(t)$  und magnetischen Feldes  $B(t)$  (also  $E_x$  und  $B_y$ , oder  $E_y$  und  $B_x$ ) an (einer) Station an der Erdoberfläche ausgewertet (Abb. 5.10), um  $\sigma_e$  oder  $\rho_e$  in der Erde zu bestimmen (z.B. Vozoff, 1986). Man geht von einem gleichförmigen Magnetfeld mit horizontalem Feldvektor in der Atmosphäre und einer ebenen Erdoberfläche aus. Unter Vernachlässigung des Verschiebungsstroms und der elektrischen und magnetischen Permeabilität in den Maxwell-Gleichungen ( $\mu_r = \epsilon_r = 1$ ), sowie der Annahme, dass das Ohmsche Gesetz  $\vec{j} = \sigma_e \vec{E}$  und  $\sigma_e = \sigma_e(z)$  gilt, kann man von vertikalen, ebenen (harmonischen) elektromagnetischen Wellen sprechen, wie z.B.

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = (0, E(z), 0)e^{-j\omega t} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}(x, y, z, t) = (B(z), 0, 0)e^{-j\omega t} \quad ,$$

wobei  $E(z)$  und  $B(z)$  nach (5.15) durch  $E(z) = E_0 e^{-(1+j)z/z_0}$  und  $B(z) = B_0 e^{-(1+j)z/z_0}$  bestimmt wird ( $z_0 = \sqrt{2/(\omega\mu_0\mu_r\sigma_e)}$ ).

Die Felder werden im Frequenzbereich ausgewertet (z.B.  $0.0001 - 200\text{ Hz}$ ,



siehe Abb. 5.11). Von Interesse ist die **komplexwertige Messgröße**  $R_m(0, \omega) = \frac{E_y}{B_x} = \frac{E(0, \omega)}{B(0, \omega)} = |R_m(0, \omega)| \cdot e^{j\varphi(0)}$  (Magnetotellurische Impedanz). Aus den Maxwell-Gleichungen und mit (5.15) findet man  $-\mathcal{J}\omega B(z) = \frac{dE}{dz} = \frac{-(1+j)}{z_0} E_0 e^{-(1+j)z/z_0}$ . Damit ergibt sich

$$R_m(0, \omega) = \frac{j\omega E(0, \omega)}{i\omega B(0, \omega)} = \frac{j\omega z_0}{(1+j)} = (j+1) \sqrt{\frac{\omega \rho_e}{2\mu_0}}, \quad (5.16)$$

und somit

$$|R_m(0, \omega)|^2 = \frac{\omega \rho_e}{\mu_0} \quad \text{oder} \quad \rho_e = \frac{\mu_0 |R_m(0, \omega)|^2}{\omega}. \quad (5.17)$$

Der (scheinbare) Widerstand  $\rho_e$  des homogenen Halbraums läßt sich also aus dem mit  $\mu_0/\omega$  skalierten Amplitudenquadrat der magnetotellurischen Impedanz (Betrag von  $R_m$ ) berechnen. Die Phase der Impedanz  $R_m$  ist für den homogenen Halbraum konstant bei  $\pi/4$ . Für einen inhomogenen, geschichteten Halbraum ist der theoretische Zusammenhang zwischen  $R_m$  und  $\rho_e$  komplizierter und nichtlinear. Sowohl die Phase als auch der skalierte Betrag von  $R$  variieren mit der Frequenz und geben Hinweise auf die Tiefenverteilung von  $\rho_e(z)$ . Gleichung (5.17) definiert für den inhomogenen Untergrund nicht den wahren sondern den scheinbaren spezifischen Widerstand  $\rho_a$ . Mit Hilfe numerischer Inversionsverfahren werden die Gleichungssysteme mit frequenzabhängigen, scheinbaren Widerständen  $\rho_a(f)$  gelöst und die Widerstände  $\rho_e(z)$  in einzelnen Schichten bestimmt.

Vergleichbar zur Gleichstromelektrik wird in einem ersten Schritt der scheinbare Widerstand  $\rho_a$  betrachtet und bei der Magnetotellurik als Funktion der Periode aufgetragen. Mit wachsender Periode wächst die Eindringtiefe der Felder, so dass man eine Pseudotiefen-Sektion erhält. Abb. 5.11 zeigt den scheinbaren Widerstand und die Phase einer Magnetotellurik-Station in Costa Rica (M. Jegen, pers. Mitteilung). Der ausgewertete Periodenbereich reicht von etwa 0.005 bis fast 10000 s. Impedanz und Phase unterscheidet sich je nachdem ob  $R_m$  aus  $E_x/B_y$  oder  $E_y/B_x$  berechnet wird, was ein Hinweis auf anisotrope Eigenschaften des Untergrundes gibt. Für Perioden größer als 0.01 s startet der scheinbare Widerstand  $\rho_a$  zuerst deutlich unter  $100 \Omega m$ , zeigt bei 1 s ein Maximum von etwa  $110 \Omega m$  und fällt zwischen 50 und 100 s auf etwa  $10 \Omega m$  ab (Abb. 5.11). Die Phase variiert um etwa  $\pm 20^\circ$  um den Wert des homogenen Halbraums ( $45^\circ$ ) und hat für Periodenbereiche mit zunehmendem  $\rho_a$  ein Minimum und Bereiche mit abnehmendem  $\rho_a$  ein Maximum. Dieses kombinierte Verhalten wird für ein geschichtetes Erdmodell erwartet, in dem eine hochohmige über einer niederohmigen Schicht im ansonsten homogenen Halbraum eingebettet ist. In Abb. 5.11 ist zusätzlich der theoretisch erwartete, periodenabhängige Widerstand  $\rho_a(T)$  als Funktion eines vorgegebenen, tiefenabhängigen Widerstandsmodells  $\rho_e(z)$  zwischen 0 und 120 km Tiefe eingezeichnet.

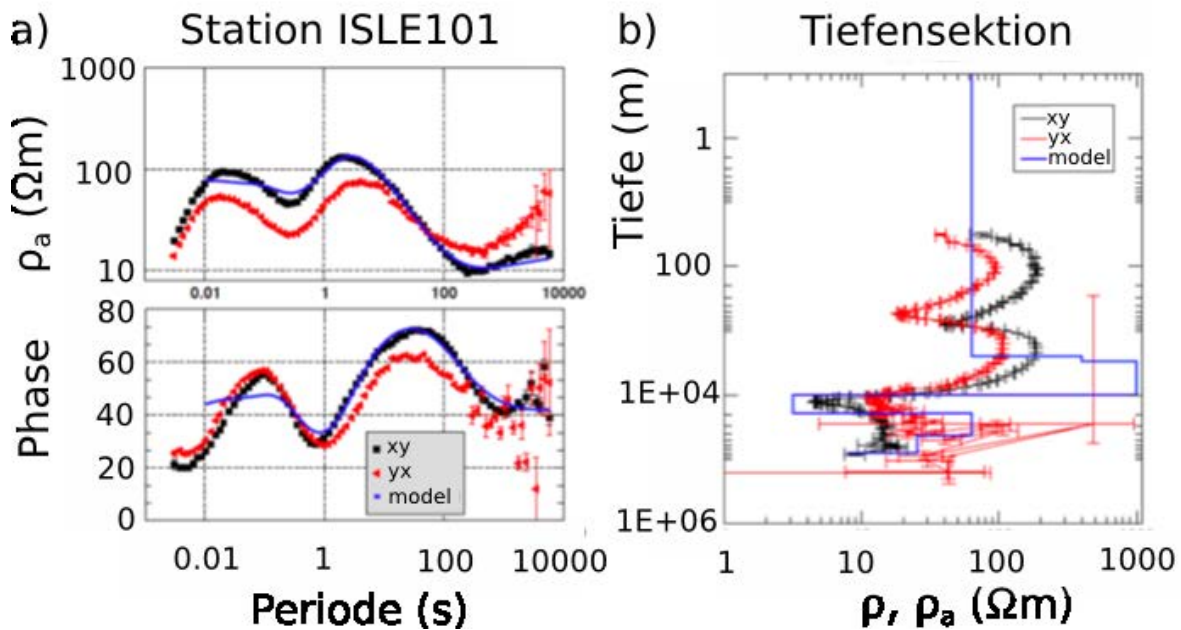


Abbildung 5.11: a) Scheinbarer Widerstand  $\rho_a$  und Phase  $\varphi$  der Magnetotellurik-Messung in Costa Rica an der Station ISLE101. Die  $\rho_a$  Kurven wurden für das Verhältnis  $E_x/B_y$  (blaue Punkte) und  $E_y/B_x$  (rote Punkte) jeweils berechnet und mit theoretischen  $\rho_a$  Kurven für ein "bestes Modell" (blaue Linie) verglichen. b) Invertiertes Widerstands-Tiefenmodell (blau durchgezogen) im Vergleich zu direkt abgeschätzten Pseudotiefen (M. Jegen, pers. Mitteilung).

Die Anpassung an die Messdaten ist sehr gut. Das zugrunde liegende Widerstandsmodell weicht im Detail von den aus  $\rho_a$  abgeleiteten Pseudotiefen-Sektionen ab (Abb. 5.11b). Ähnliche Diskrepanzen wurden bereits in Zusammenhang mit der Interpretation von  $\rho_a$  bei der Gleichstromelektrik festgestellt; dies sollte bei einer Interpretation berücksichtigt werden.

Aus der Kombination von Messungen wie in Abb. 5.11 entlang eines Profils von etwa 360 km Länge über die konvergente Plattengrenze vor Costa Rica wurde vom IfM-Geomar, Kiel, ein tomographisches, magnetotellurisches Widerstandsmodell für den Bereich der Subduktionszone erstellt (Abb. 5.12, Worzewski et al., 2011). Das amphibische Profil kreuzt sowohl den untermeerischen Tiefseegraben (Trench) wie auch den vulkanischen Bogen auf dem Festland etwa 150 km landeinwärts vom Trench (Abb. 5.12a). Das Modell unterscheidet sich klar zwischen dem ungestörten, ozeanischen Mantel vor der Subduktion und dem Bereich der abtauchenden Cocos Platte. Der ozeanische Mantel zeigt den typischen Verlauf einer hochohmigen Lithosphäre und eines niederohmigen Asthenosphärenkanals. Die Tiefe der ozeanischen Asthenosphäre (Dicke der Lithosphäre)

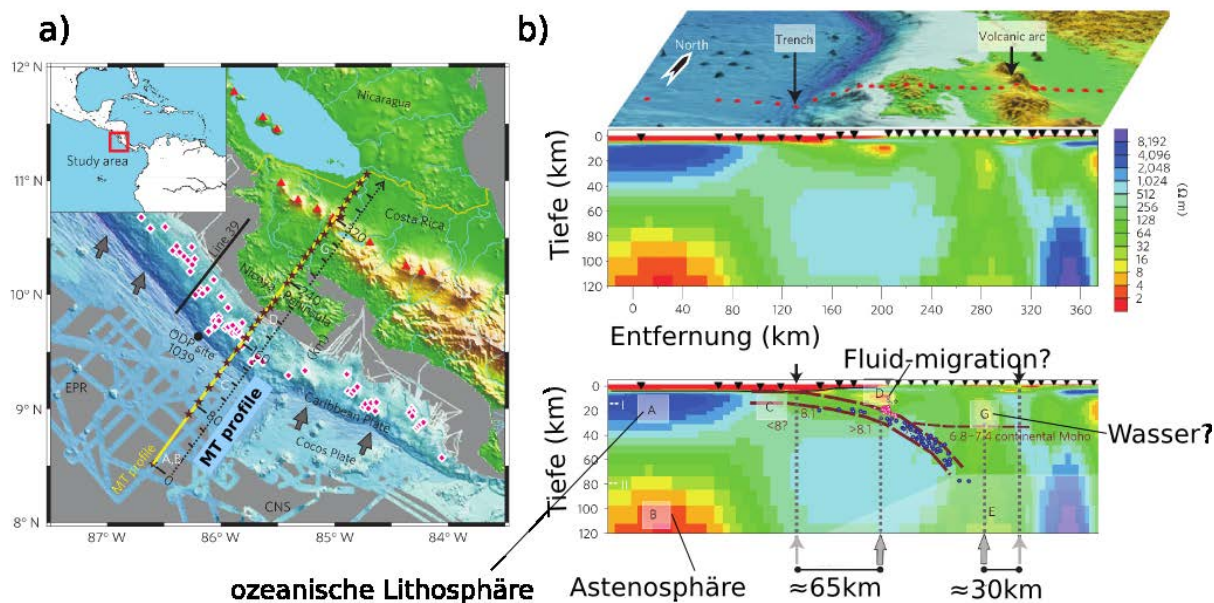


Abbildung 5.12: a) Messprofile unterschiedlicher geophysikalischer Untersuchungen vor Costa Rica. Senkrecht zum Tiefseeegraben wurde ein etwa  $360\text{ km}$  langes Magnetotellurik Profil aufgenommen (gelb markiert). Bathymetrie, Topographie, Vulkanischer Bogen (rote Dreiecke) und Orte submariner Fluidaustritte (rot-weiße Punkte) sind markiert. b) Invertiertes Widerstandsmodell aus Magnetotellurik Daten. Abbildungen aus [Worzewski et al. \(2011\)](#).

hängt von dem Alter bzw. der Temperatur der Platte ab und liegt vor Costa Rica bei etwa  $80\text{ km}$ .

Entlang und über der subduzierenden Platte sind mehrere Widerstandsanomalien zu erkennen, die auf Fluidakkumulation im Gestein hinweisen. Auffällig ist der Bereich stark erniedrigter Widerstände etwa  $65\text{ km}$  landeinwärts vom Trench direkt an der Unterkante der überliegenden Platte (Anomalie D in [Abb. 5.12 Worzewski et al., 2011](#)). Dies wird als trench-naher Akkumulationsbereich der durch Dehydratation freigesetzten Fluide in der überliegenden Platte interpretiert. Es ist auffällig, dass die höchste Rate der Tiefherdbeben an der Subduktion (seismogene Zone) unterhalb der Widerstandsanomalie D liegt. Eine zweite Zone erniedrigter Widerstände und damit möglicher Fluidakkumulation liegt in  $20\text{--}30\text{ km}$  Tiefe in der unteren Kruste der überliegenden Platte etwa  $30\text{ km}$  vor dem vulkanischen Bogen. Anomalien dieses Typs werden für Subduktionszonen weltweit beobachtet. Ob diese Anomalie durch erhöhte Magmaansammlung oder einer Akkumulation von Wasser verursacht wird ist nicht geklärt. Die Tiefe und Position von Akkumulationszonen im Mantelkeil einer Subduktionszone wird auch durch das heterogene Spannungsfeld im Mantelkeil kontrolliert, wie in numerischen Modellen der Magma- und Fluidmigration an Subduktionszonen gezeigt wurde ([Dahm, 2000](#)).

## 5.3 Georadar

### 5.3.1 Messprinzip

Beim **elektromagnetischen Reflexionsverfahren** (im folgenden kurz als **Georadar** bezeichnet) werden entlang der Erdoberfläche mit Hilfe einer Sendeantenne elektromagnetische Pulse erzeugt und die von Inhomogenitäten im Untergrund (z.B. Leitungen, Rohre, etc.) reflektierten bzw. gestreuten Pulse mit einer Empfangsantenne registriert. Aus den Laufzeiten und der Stärke dieser Reflexionen bzw. Diffraktionen lassen sich Aussagen über Form und Tiefenlage der Inhomogenitäten machen.

### 5.3.2 Zur Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

Die abgestrahlten elektromagnetischen Wellen werden durch die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$ , die magnetische Suszeptibilität  $\mu_r$  und die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma_e$  beeinflusst. Alle drei Größen können für den typisch verwendeten Frequenzbereich des Georadars als reell und frequenzunabhängig betrachtet werden.

In Analogie zur Optik läßt sich die Ausbreitung von Radarpulsen durch Strahlen beschreiben, insbesondere gilt für die Reflexion an ebenen Trennflächen das **Snellius'sche Gesetz der elektromagnetischen Wellen** (Abbildung 5.13),

$$\tilde{k}_0 \sin \varphi_0 = \tilde{k}_1 \sin \varphi_1 = \tilde{k}_2 \sin \varphi_2$$

und damit

$$\varphi_0 = \varphi_1 \quad (\text{Einfallswinkel gleich Reflexionswinkel})$$

Im allgemeinen Fall ist die Wellenzahl  $\tilde{k}$  komplexwertig und definiert wie in (5.14).

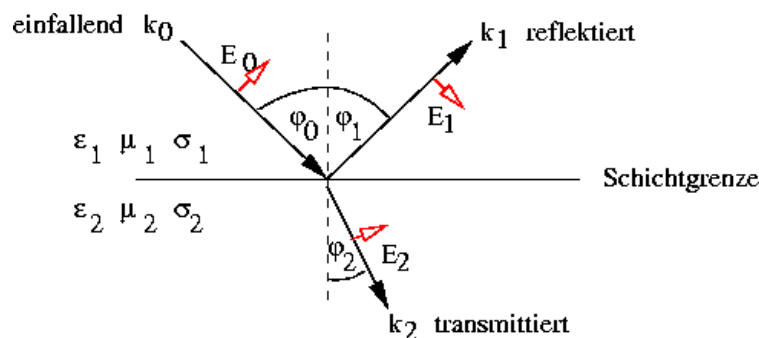


Abbildung 5.13: Geometrie zum Snellius'schen Gesetz (alle Winkel beziehen sich auf das Lot auf der Trennfläche).

Der **Reflexionskoeffizient**  $C_r$  einer solchen ebenen Trennfläche, d.h. im Fall elektromagnetischer Wellen **der Anteil der an dieser Trennfläche reflektierten Energie**, beträgt für senkrechten Einfall ( $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ,  $z = 0$ )

$$C_r = \frac{E_1^2}{E_0^2} = \frac{(\mu_{r2}\tilde{k}_1 - \mu_{r1}\tilde{k}_2)^2}{(\mu_{r2}\tilde{k}_1 + \mu_{r1}\tilde{k}_2)^2}.$$

mit

$$E(z, t) = E_0 e^{j(\omega t - \tilde{k}_0 z)} \text{ (einfallend) und } E(z, t) = E_1 e^{j(\omega t + \tilde{k}_1 z)} \text{ (reflektiert).}$$

Die **Dämpfung** der elektromagnetischen Welle beim Durchlaufen eines Mediums hängt vom Imaginärteil  $\beta$  der Wellenzahl  $k$  ab. Für einen Nichtleiter (z.B. Luft) gilt  $\sigma_e = 0$  und somit  $\beta = 0$ , d.h. eine elektromagnetische Welle breitet sich ungedämpft durch ein solches Medium aus. Eine hohe Leitfähigkeit  $\sigma_e$  (z.B. Metall oder stark mineralhaltiges Wasser) dämpft die einfallenden elektromagnetischen Wellen stark ( $\beta$  groß), so dass man bei einer Georadarmessung in der Regel keine Reflexion von Strukturen unterhalb solcher Materialien erwarten kann.

Ferner erkennt man aus obiger Gleichung, dass mit wachsender Frequenz auch die Dämpfung zunimmt ('geringe Eindringtiefe der Wellen in das Medium'). Hohe Frequenzen bedeuten aber in der Regel auch ein verbessertes Auflösungsvermögen, so dass man in der Praxis bei der Wahl der Antennenfrequenz einen Kompromiß zwischen Eindringtiefe und Auflösungsvermögen eingehen muß.

Die **Ausbreitungsgeschwindigkeit**  $v$  elektromagnetischer Wellen in schlechten Leitern ist näherungsweise umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  und der Permeabilitätszahl  $\mu_r$  des durchlaufenen Mediums,

$$v = \frac{\omega}{\alpha} \approx \frac{c_L}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

mit  $c_L = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} =$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (0.3 m/ns).

Einige typische Werte können der folgenden Tabelle entnommen werden:

Material	$\epsilon_r$	$\mu_r$	$\sigma_e [\Omega m]^{-1}$	$v [m/ns]$
Luft	1	1	0	0.3
Süßwasser	81	1	$< 10^{-2}$	0.033
Meerwasser	81	1	4	0.033
Granit	4-6	1	$10^{-5} - 10^{-3}$	0.15-0.12
sandiger Boden (trocken)	4-6	1	$10^{-7} - 10^{-3}$	0.15-0.12
sandiger Boden (feucht)	25	1	$10^{-2}$	0.06
Bernstein	2.5	1	$< 10^{-16}$	0.19

Die Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  ist frequenzabhängig; die Werte in der Tabelle gelten für Frequenzen im GHz-Bereich und darunter. Wasser hat bei den Frequenzen des sichtbaren Lichts ( $10^5 - 10^6$  GHz) ein  $\epsilon_r$  von etwa 1.7 und eine Lichtgeschwindigkeit  $v$  von 0.225 m/ns.

### 5.3.3 Messapparatur

Der Versuchsaufbau besteht aus der Sender-Empfänger-Antenneneinheit (im folgenden kurz als **Antenne** bezeichnet) mit fixiertem Laufrad zur automatischen Entfernungsbestimmung, der eigentlichen Radarapparatur, einer Einheit zur Steuerung der Laufradelektronik und einem PC zur Datenerfassung und vorläufigen Auswertung (vgl. Abb. 5.14).

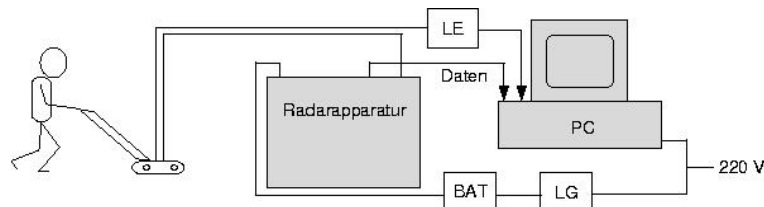


Abbildung 5.14: Versuchsaufbau Georadar (LE = Laufradelektronik, BAT = 12 V Batterie, LG = Ladegerät für Batterie).

Die Radarapparatur steuert das Aussenden und Empfangen der Radarsignale. Mit Hilfe der Laufradelektronik werden die empfangenen Signale nur für diskrete Entfernungen entlang des Profils an den PC gesendet und dort gespeichert. Das Signal wird dabei digitalisiert (AD-Wandlung) gemäß dem einzustellenden zeitlichen Abtastintervall  $\Delta t$ . Letzteres ist im Hinblick auf die verwendete Antennenfrequenz (100, 500 oder 900 MHz) so zu wählen, dass die Nyquistbedingung eingehalten wird,

$$f_{Nyq} = \frac{1}{2\Delta t} > f_{max}.$$

$f_{max}$  ist die höchste vorkommende Signalfrequenz (Richtwert etwa Antennenfrequenz + 50%).

### 5.3.4 Typische Messung

Die Antenne wird entlang eines Profils an der Erdoberfläche bewegt (vgl. Abbildung 5.15). Dabei werden kontinuierlich Radarpulse abgestrahlt bzw. registriert und gemäß

den Einstellungen der Laufradelektronik in diskreten Entfernungsabständen abgespeichert. So erhält man entlang des Profils eine ganze Sektion von sog. **Radargrammen** (= Registrierungen der Empfangsantenne als Funktion der Zeit). Da der feste Abstand von Sende- und Empfangsantenne relativ gering ist, spricht man von einer sogenannten **Zero-Offset-Sektion**.

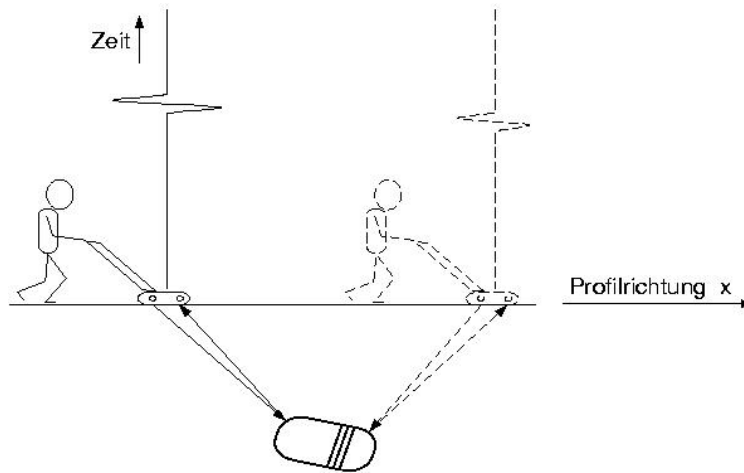


Abbildung 5.15: Messprinzip einer Zero-Offset-Sektion beim Georadar. Die Zeit-Achse verdeutlicht die erwarteten Einsätze der an einem Punktdiffraktor im Untergrund gestreuten Wellenpulse.

Im folgenden werden einige Beispiele für synthetisch erzeugte Radargrammsektionen näher erläutert.

### 5.3.5 Auswertung von Punktdiffraktoren

Abbildung 5.16 zeigt die Geometrie sowie eine synthetisch berechnete Zero-Offset-Radargrammsektion in Linien- bzw. Graustufendarstellung für einen Punktdiffraktor am Ort  $x = x_0$  in der Tiefe  $z = z_0$  eingebettet in ein Medium konstanter Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $v$ .

Die Laufzeit  $t$  der diffraktierten Welle vom Sender zum Diffraktor und zurück zum Empfänger kann als Funktion der Profilkordinate  $x$  geschrieben werden wie

$$t(x) = \frac{2}{v} \sqrt{(x - x_0)^2 + z_0^2} \quad \text{oder} \quad t(x)^2 = \frac{4}{v^2} (x - x_0)^2 + t_0^2. \quad (5.18)$$

Gleichung (5.18) ist die Gleichung einer Hyperbel<sup>65</sup>, deren Scheitel sich am Ort  $x = x_0$  des

<sup>65</sup> Hyperbeln, Parabeln und Ellipsen sind allgemein Kurven 2. Ordnung und gehören zu den Kegel-



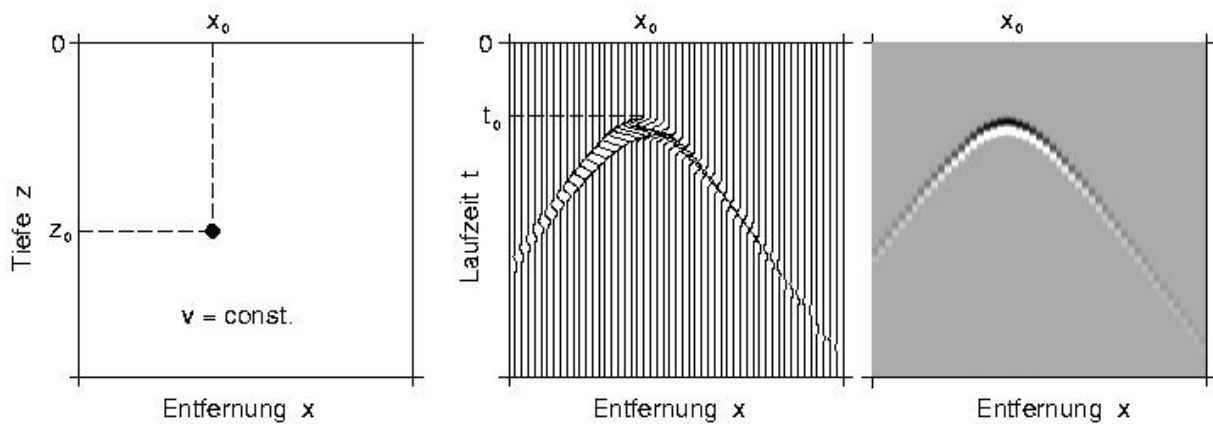


Abbildung 5.16: Modell des Punktdiffraktors. Links ist die Lage des Punktdiffraktors gezeigt, an dem einfallende Wellen zurückgestreut (diffraktiert) werden. Rechts ist die Laufzeitkurve der Diffraktion als Seismogrammsequenz und als interpolierte Graustufenkurve zu sehen.

Punktdiffraktors befindet. Die Scheitellaufzeit für den senkrechten Strahl ist  $t_0 = 2z_0/v$ . Mit wachsender Entfernung vom Diffraktor wächst die Laufzeit des Einsatzes. Die amplitudenechte Darstellung in Abb. 5.16 zeigt, dass mit wachsender Entfernung die Amplitude der diffraktierten Welle abnimmt, weil der Laufweg und damit die geometrische Dämpfung immer größer werden.

Ist die Geschwindigkeit  $v$  des Mediums unbekannt, so kann sie durch Ablesung der Scheitellaufzeit  $t_0$  sowie der Laufzeit  $t(x)$  für eine beliebige Entfernung  $x$  (besser für mehrere) gemäß

$$v = \frac{2|x - x_0|}{\sqrt{t^2(x) - t_0^2}}$$

bestimmt werden.

Bei bekannter Geschwindigkeit  $v$  läßt sich dann die Tiefe des Diffraktors aus der Scheitellaufzeit  $t_0$  berechnen mit

$$z_0 = \frac{v}{2}t_0$$

Abbildung 5.17 zeigt den Einfluss verschiedener Geschwindigkeiten  $v$  bzw. Diffraktortiefen  $z_0$  auf die Diffraktionshyperbel.

Je höher die Geschwindigkeit  $v$  (bei konstanter Tiefenlage  $z_0$  des Diffraktors), desto kleiner

schnitten. Die Gleichung einer Ellipse hat die Form  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , die einer Hyperbel ist  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Die Normalform einer Parabel ist  $2px - y^2 = 0$ .

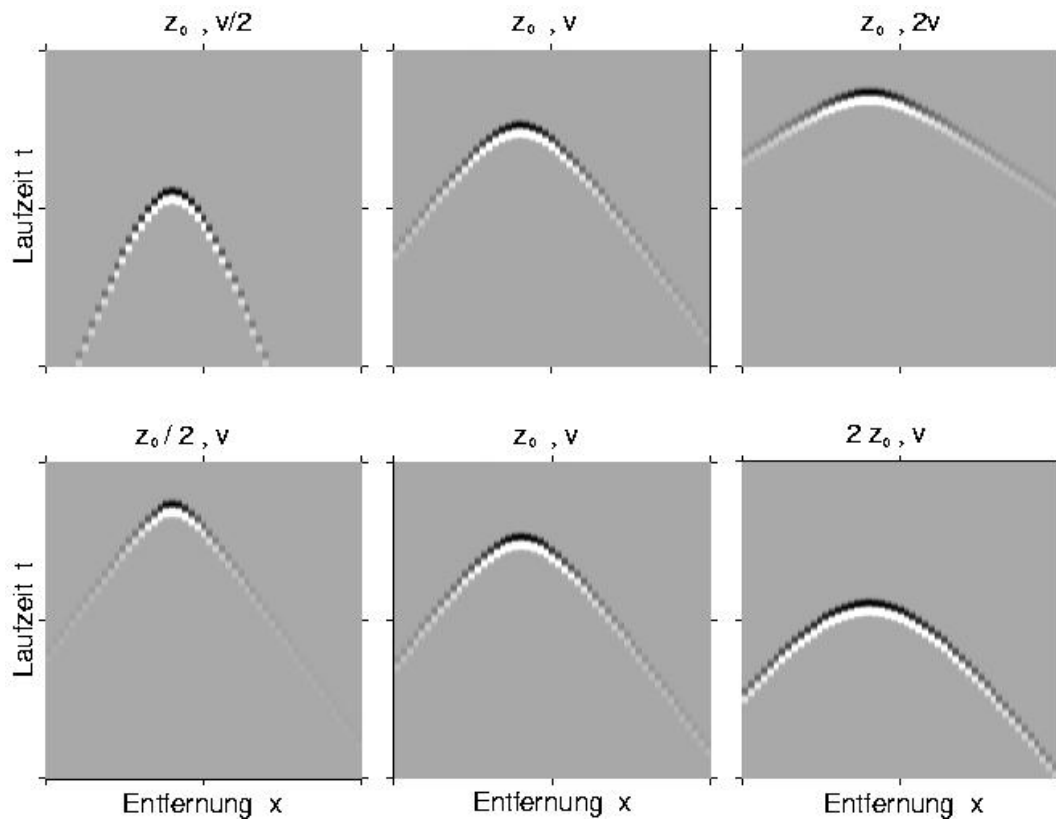


Abbildung 5.17: Einfluß der Geschwindigkeit (oben) und Diffraktortiefe (unten) auf die Diffraktionshyperbel in einer Zero-Offset Radargrammsektion.

ner die Scheitellaufzeit  $t_0$  und desto 'flacher' die Hyperbeläste (obere Bildreihe). Letzteres bedeutet, dass die Steigung der Hyperbeläste für den zunehmenden Abstand vom Diffraktor  $|x - x_0| \rightarrow \infty$  umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit  $v$  ist.

Je geringer die Tiefenlage  $z_0$  des Diffraktors (bei konstanter Geschwindigkeit  $v$ ), desto kleiner wiederum die Scheitellaufzeit  $t_0$  und desto 'spitzer' die Diffraktionshyperbel (untere Bildreihe). Die Steigung der Hyperbeläste für  $|x - x_0| \rightarrow \infty$  ist nun in allen drei Fällen gleich.

### 5.3.6 Auswertung von horizontalen Reflektorsegmenten

Ein ebenes Reflektorelement kann man sich aus vielen einzelnen Punktdiffraktoren aufgebaut vorstellen. Für die Radargrammsektion bedeutet dies, dass die Ecken des Segments wie Punktdiffraktoren wirken, deren Diffraktionshyperbeln sich in der Radargrammsektion seitlich an die ansonsten horizontale Reflexion anschließen (vgl. Abbildung 5.18).

Die Scheitel der Diffraktionshyperbel markieren somit die seitlichen Begrenzungen des Reflektorsegments. Analog zum Punktdiffraktorfall lassen sich aus den Diffraktions-

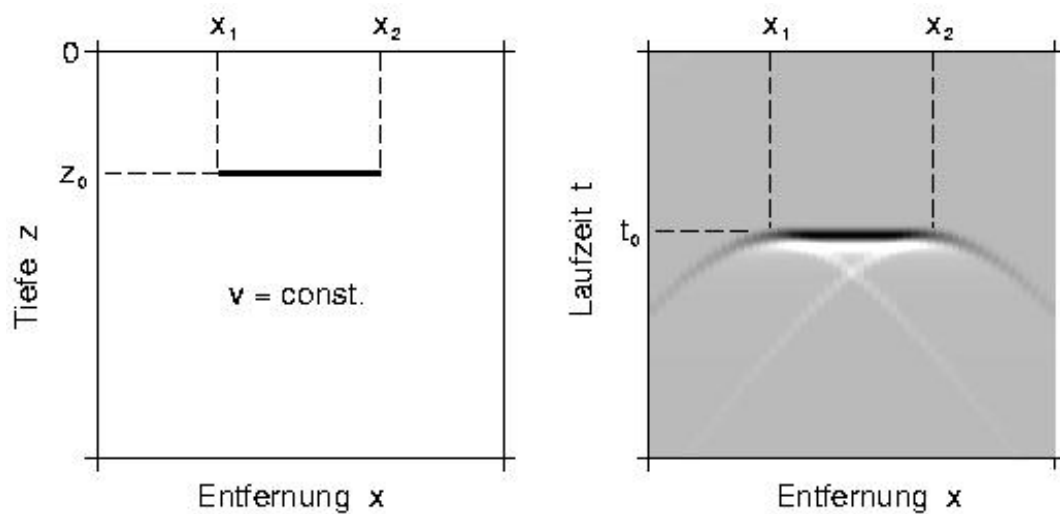


Abbildung 5.18: Modell (links) und Radargrammsektion (rechts) des horizontalen Reflektorsegments.

hyperbeln die Geschwindigkeit  $v$  und die Tiefenlage  $z_0$  des Reflektorsegments bestimmen.

Man beachte: Im Fall eines über die gesamte Profillänge durchgehenden Reflektors sind die Diffraktionshyperbeln nicht in der Radargrammsektion enthalten und es gibt keine Möglichkeit der direkten Bestimmung von  $v$  bzw.  $z_0$ .

### 5.3.7 Auswertung von geneigten Reflektorsegmenten

Ein geneigtes Reflektorsegment (bestehend aus vielen Punktdiffraktoren) erscheint in der Radargrammsektion als geneigte Reflexion inkl. der Ecken-Diffraktionshyperbeln, deren Scheitel wiederum die horizontale Erstreckung des Segments festlegen (vgl. Abbildung 5.19).

Analog zum Punktdiffraktormodell bzw. zum horizontalen Reflektormodell lassen sich die Geschwindigkeit  $v$  und die Tiefen  $z_1$  und  $z_2$  der Eckpunkte bestimmen und so das Reflektorsegment vollständig rekonstruieren.

Zusätzlich kann eine Überprüfung durch die Bestimmung der Reflektorneigung  $\varphi$  folgendermaßen geschehen:

Wählt man entlang des geneigten Reflexionseinsatzes (**nicht** entlang der Diffraktionshyperbeln) zwei beliebige Punkte und bestimmt ihre Entfernungsdifferenz  $\Delta x$  und die zugehörige Laufzeitdifferenz  $\Delta t$ , so gilt

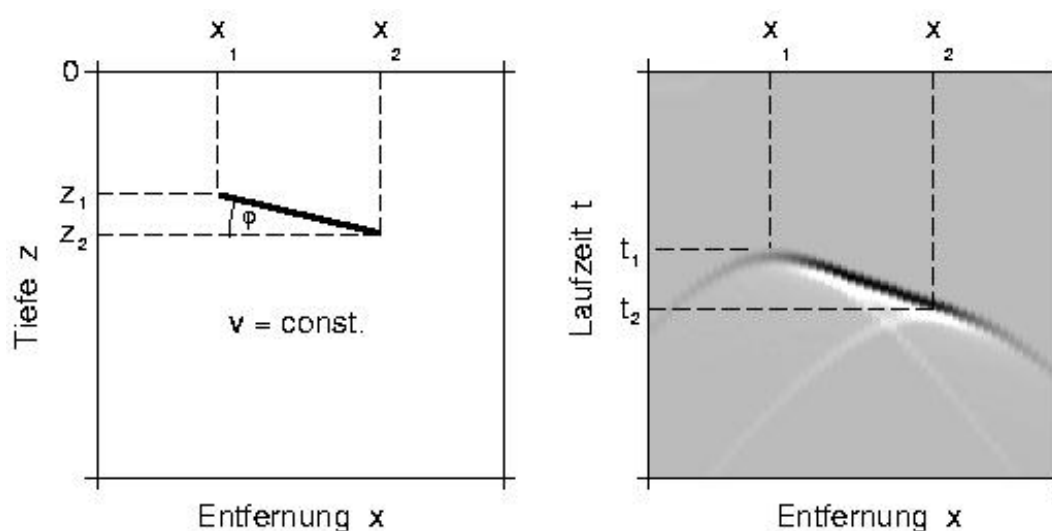


Abbildung 5.19: Modell (links) und Radargrammsection (rechts) des geneigten Reflektorsegments.

$$\sin\varphi = \frac{v \Delta t}{2 \Delta x}.$$

In Abb. 5.20 sind Radargramme zu einer ingenieurgeophysikalischen Auswertung in einer romanischen Kirche aus dem 12. Jahrhundert zu sehen. Die Messungen dienten als Planungshilfe für den Einbau einer neuen Heizungsanlage und hatten zum Ziel, historische Substanzen und Bauten bis in ca. 1 m Tiefe zu erkennen und zu kartieren. Typische Darstellungen sind Farbbilder als Zeitscheiben (Horizontalschnitte in unterschiedlichen Zeiten/Tiefen) und Profil-Radargramme zur Deutung der Strukturen in der Tiefe. In den Radargrammen sind Hohlräume, Gewölbeoberkanten, Mauerwerk und Leitungen deutlich zu sehen.

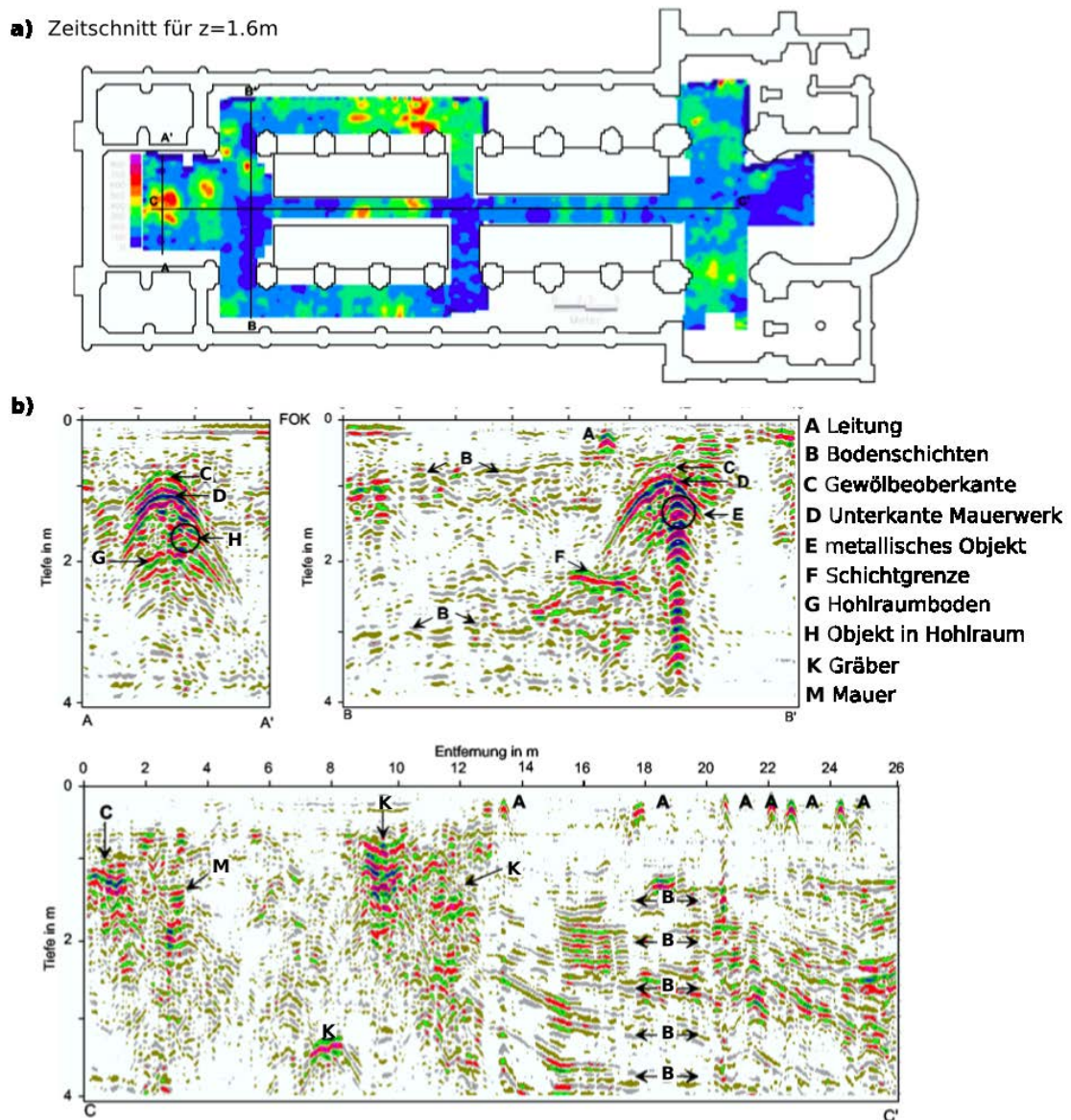


Abbildung 5.20: a) Zeitscheiben (umgerechnete Tiefe ist ca.  $1.6\text{ m}$ ) durch flächenhaft gemessene Radargramme in einer Kirche (Grundriss eingezeichnet, GGU mbH Karlsruhe). Rote und blaue Farben zeigen groß und kleine Intensitäten der Reflexionsamplituden. b) Tiefenschnitte entlang der Profile in (a).

## 5.4 Seismische Wellenfelder und seismische Verfahren

Seismische Wellen in der Erde können durch unterschiedliche Prozesse entstehen. Die häufigste Ursache sind Erdbeben an Plattengrenzen. Bei Starkbeben durchstrahlen die seismischen Wellen den gesamten Erdkörper und werden weltweit von Messgeräten aufgezeichnet. Seismische Wellen können aber auch kontrolliert durch chemische Explosionen in Bohrlöchern angeregt werden. In sogenannten seismischen Verfahren werden die Wellen z.B. mit Sprengladungen angeregt, die genügend Energie haben, um die Erdkruste bis zur Kruste-Mantel-Grenze zu durchstrahlen. Wegen der großen Tiefenwirkung und weil seismische Wellen eine relativ gute Auflösung von Strukturen in der Tiefe erlauben, sind die aktiven seismischen Verfahren in der Geophysik sehr verbreitet. Sowohl mit den aktiven seismischen Verfahren, wie auch mit Hilfe von Erdbebenregistrierungen, kann die Geschwindigkeitsstruktur in der Erde bestimmt werden. Aus den seismischen Geschwindigkeiten können dann wiederum Aussagen über die elastischen Module der Gesteine und die Gesteinsdichte getroffen werden.

Die Theorie der seismischen Wellen in der Erde wurde vor etwas mehr als 200 Jahren als Teilaspekt der **elastischen Kontinuumsmechanik** entwickelt. Man spricht daher auch von **elastischen Wellen**. Die ersten seismischen Messinstrumente mit hoher Zeitauflösung und ohne störende Eigenresonanzen sind jedoch erst vor etwa 100 Jahren entwickelt worden. Erst dann konnten die theoretischen Vorhersagen zu den Eigenschaften und Typen von elastischen Wellen bestätigt werden. Erwähnenswert sind die hochempfindlichen, **mechanischen Seismographen** von **Emil Wiechert**, die in Göttingen seit den 1890-er Jahren gebaut und kurz nach 1900 weltweite Verbreitung fanden. Wiechert Seismographen haben zum Teil noch bis in die 1980-er Jahre registriert. Die ersten Seismographen zeichneten die Bodenverschiebung kontinuierlich auf Ruß- oder Fotopapier auf. Spätere Messinstrumente zeichneten die Bodenschwinggeschwindigkeit zuerst analog z.B. auf Magnetband und seit etwa 1980 digital auf moderne Datenträger auf. Moderne Messinstrumente sind z.B. **Feedback Breitbandseismometer**. Die gemessenen Zeitspuren mit hohen Abtastraten von 50 oder mehr Werten pro Sekunde werden **Seismogramme** genannt.

Eine wichtige Motivation für die Entwicklung von Seismometern war die Untersuchung von Erdbebenquellen und des Aufbaus der Erde. Die junge Disziplin der **Seismologie** hat sich in den letzten 100 Jahren schnell entwickelt, und heute werden seismische Messungen und Methoden für eine Vielzahl von Problemstellungen angewandt. Ein wichtiger industrieller Bereich betrifft die **Rohstoff-Exploration**, aus welcher sich der Zweig der **Angewandten Seismik** entwickelt hat. **Ludwig Mintrop** aus Werden bei Essen war einer der Pioniere in der angewandten Seismik; er hatte sich 1911 bei Wiechert in Göttinger promoviert und 1921 die erste Seismik Firma in Deutschland gegründet (SEISMOS

GmbH), die hauptsächlich in der Rohstoff-Exploration tätig war und bis 1992 existierte. Mintrop's Messungen wurden mit mechanischen Feldsensoren und u.a. mit einem Fallgewicht als künstliche Quelle durchgeführt (z.B. "Mintrop-Stahlkugel" in der Erdbebenwarte in Göttingen). In den Daten wurden gewisse Wellentypen, sogenannte **refraktierte Wellen** erkannt, woraus sich der Zweig der **Refraktionsseismik** entwickelte. Etwas später ist die **Reflexionsseismik** als wichtige Technik der angewandten Seismik hinzugekommen.

### 5.4.1 Theorie seismischer Wellen

#### *Raumwellen: Kompressions- und Scherwellen:*

Bei kleinen und kurzzeitigen Belastungen verhalten sich die meisten Gesteine der

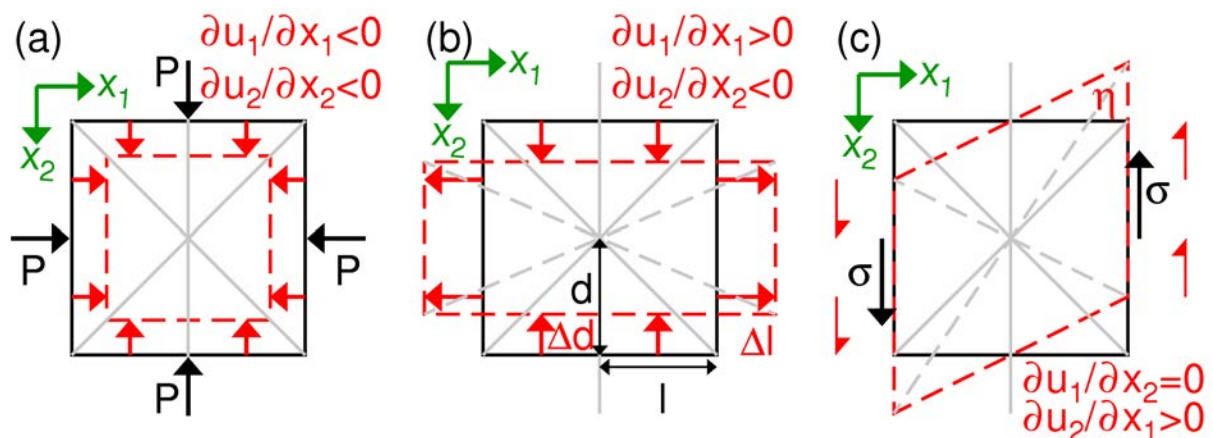


Abbildung 5.21: Skizze zur 2D Deformation. Dargestellt ist die Randverschiebung (rot gestrichelte Viereck) und die Diagonalen eines ursprünglich quadratischen Probekörpers (schwarz). (a) Symmetrische Verkleinerung des Quadrats bei allseitiger Kompression mit dem Druck  $P$ . Da sich der Schnittwinkel der beiden Diagonalen nicht verändert, handelt es sich um eine reine Volumenverkleinerung ohne Scherung, (b) Extension des Probekörpers in  $x_1$  Richtung bei gleichzeitiger Stauchung in  $x_2$  Richtung, z.B. infolge einer uniaxialen Zugkraft nur in  $x_1$  Richtung. Die Deformation wird als Querkontraktion beschrieben. Die Querkontraktion ist immer mit einer Scherung verbunden (Pure Shear Fall), der Winkel zwischen den beiden Diagonalen verändert sich. Die Deformation kann abhängig von der Querkontraktionszahl zusätzlich mit einer Volumenveränderung verbunden sein. (c) Ein sogenanntes "Simple Shear Experiment", bei dem  $\partial u_2/\partial x_1 > 0$  und  $\partial u_1/\partial x_2 = 0$  ist. Die Scherung (die Winkeländerung zwischen den Diagonalen) ist kleiner als im Pure Shear Fall. Simple Shear bewirkt keine Volumenänderung, jedoch immer eine Rotation zusätzlich zur Scherung.

Erde elastisch. Wird das Gestein zusammengedrückt oder geschert (oder allgemein deformiert), dann treten Rückstellkräfte auf, die das Gestein in seine ursprüngliche



Form zurückbringen wollen. Wird die Last zurückgenommen kehren alle Partikel des Kontinuums in ihre ursprüngliche Position zurück, das Gestein hat sich rein elastisch verformt. Die Rückstellkräfte werden durch **elastische Konstanten** beschrieben, sogenannte **elastische Module**, die vom Gestein, dem mittleren Druck und der Temperatur abhängen.

Das Kompressionsmodul  $\mathcal{K}$  ist der Widerstand des Gesteins gegen Volumenverkleinerung und wird definiert als Proportionalitätskonstante zwischen hydrostatischem Druck  $+P$  und der induzierten Volumenverkleinerung  $-|\Delta V|/V$  (Abb. 5.21a),

$$P = -\mathcal{K} \frac{|\Delta V|}{V} . \quad (5.19)$$

Das Schermodul  $\mathcal{N}$  gibt den Widerstand gegen Scherung an. Wenn  $\sigma$  die Scherspannung ist, und  $\eta$  die Scherung (Scherwinkel bei kleinen Deformationen, Abb. 5.21c), dann gilt

$$\sigma = \mathcal{N} \eta . \quad (5.20)$$

Die Einheit von  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{N}$  ist  $Pa$ ; beide Module liegen für Gesteine im Bereich von 20 - 100  $GPa$ , wobei in der Regel  $\mathcal{K} > \mathcal{N}$  ist.

Ein weiteres elastisches Modul von Bedeutung ist die **Poisson-Zahl**  $\nu$  (auch **Querkontraktion**), die angibt, um wieviel ( $\Delta d$ ) sich der Probendurchmesser  $d$  eines zylindrischen Stabes verkleinert bei Verlängerung des Stabes der Länge  $l$  um  $\Delta l$ ,

$$\nu = \frac{\Delta d/d}{\Delta l/l} . \quad (5.21)$$

Die Poisson-Zahl ist dimensionslos und muß zwischen -1 und 0.5 liegen. Für eine Flüssigkeit ist  $\nu = 0.5$ . Für Gesteine ist  $\nu \approx 0.25$  (standard elastic solid).

Die beschriebenen Module gehen in die Bewegungs- und Wellengleichungen für seismische Wellen ein. Wellengleichungen für eine skalare Feldgröße wie den Druck oder das Kompressionspotenzial werden als skalare Wellengleichung bezeichnet. Solche, die für die Komponenten eines Vektorfeldes gelten, als vektorielle Wellengleichung. Entsprechend kann man zwischen **skalaren** und **vektoriellen Wellen** unterscheiden.

In der festen Erde gibt es zwei Typen von Raumwellen, **Kompressions-** und **Scherwellen**<sup>66</sup>. Die Bodenbewegung der Kompressionswelle läßt sich aus dem Gradienten des Kompressionspotenzials berechnen. Für eine ebene Welle ergibt sich damit, dass die Par-

<sup>66</sup>nicht zu verwechseln mit Schwerewellen in Ozeanen oder in der Atmosphäre.

tikel des Mediums sich nur in Ausbreitungsrichtung verschieben, d.h. die Bodenbewegung der Kompressionswelle linear in Ausbreitungsrichtung polarisiert ist (Abb. 5.22a). Die Polarisation in Ausbreitungsrichtung bleibt auch für gekrümmte Wellenfronten erhalten, d.h. für gekrümmte seismische Strahlen. Man spricht von einer **Longitudinalwelle**, die in Strahlrichtung polarisiert ist. Die Scherwellen sind dagegen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle polarisiert (Transversalwellen). Breitet sich die ebene Welle in  $y$ -Richtung aus (Abb. 5.22), dann wird die in  $x$ -Richtung horizontal polarisierte Scherwelle als SH-Welle bezeichnet (Abb. 5.22c) und in  $z$  Richtung polarisierte Scherwelle (allg. in  $y$ - $z$  Ebene polarisiert) als SV-Welle (Abb. 5.22b). Die Deformation einzelner Elementarvolumen in Abb. 5.22a-c verdeutlicht, dass die ebene Kompressionswelle mit einer reinen Volumendilatation ohne Scherung verknüpft ist, und die ebenen Scherwellen mit einer Pure Shear Deformation, d.h. einer Scherung mit Rotation ohne Volumenveränderung.

Die kinematischen Gleichungen zur Beschreibung der Wellenausbreitung und der Phasengeschwindigkeit von Wellen stehen in Kapitel 5.1. Die Phasengeschwindigkeit der Kompressionswellen ist

$$c = v_p = \sqrt{\frac{\mathcal{K} + \frac{4}{3}\mathcal{N}}{\rho}} . \quad (5.22)$$

$\rho$  ist die **Gesteinsdichte**,  $\mathcal{K}$  das **Kompressionsmodul**, und  $\mathcal{N}$  das **Schermodul** des Gesteins. Für Granit in der Kruste liegt  $v_p$  zwischen 5.6 und 6.3  $km/s$  und für Peridotit im oberen Mantel zwischen 7.9 und 8.1  $km/s$  (Abb. 5.23). Die Phasengeschwindigkeit der Scherwellen ist

$$c = v_s = \sqrt{\frac{\mathcal{N}}{\rho}} . \quad (5.23)$$

Da  $\mathcal{N} \geq 0$  und  $\mathcal{K} \geq 0$  gilt ist die **Kompressionswellengeschwindigkeit**  $v_p$  immer größer als die **Scherwellengeschwindigkeit**  $v_s$ . Für Gestein mit  $\nu = 0.25$  ist

$$v_p \approx \sqrt{3}v_s . \quad (5.24)$$

Da  $v_p > v_s$  ist, kommen die Kompressionswellen eines Erdbebens vor den Scherwellen an der Station an. Die Kompressionswellen werden deshalb auch **Primärwellen** oder kurz **P-Wellen** genannt und die Scherwellen **Sekundärwellen** oder kurz **S-**

**Wellen**<sup>67</sup>. Abb. 5.24 zeigt tieffrequente Raumwellenanteile in den Seismogrammen des Deutschen Regionalnetzes (GRSN) von dem Magnitude  $M_W 7.8$  Erdbeben in Nepal am 25 April 2015. Das Beben lag in etwa  $57^\circ$  bis  $60^\circ$  Epizentralentfernung zu den Stationen. Die Einsatzzeiten der P- und S-Wellen sind mit  $P$ ,  $SV$  und  $SH$  markiert. Die P-Welle erreicht die ersten GRSN Stationen etwa 10 Minuten nach Bruchbeginn des Bebens, die S-Welle nach etwa 18 Minuten. Da die Strahlwege der P- und S-Welle nahezu identisch sind (Abb. 5.25), bestimmt der Quotient ihrer Laufzeiten das mittlere Verhältnis  $\langle v_P/v_S \rangle \approx 1.8$ . Die Güte dieser Messung hängt allerdings davon ab, wie gut die Herzzeit bestimmt wurde. Genauer ist es das  $v_P/v_S$  Verhältnis aus der Differenz der Einsatzzeiten an mehreren Stationen zu bestimmen (siehe Kapitel unten).

#### Box 5.4.1, Dynamische Bodenkennwerte:

Dynamische Bodenkennwerte (effektive elastische Moduln und Dämpfung des Bodens) dienen der Bodenklassifizierung und Tragfähigkeitsermittlung des Baugrundes und bilden die Grundlage zur Bestimmung der Bauwerksbeanspruchung (z.B. erwartete Setzung) sowie der Tragfähigkeit des Bodens. Ebenso beeinflussen diese Kennwerte das Potenzial möglicher Hangrutschungen. Seismische Methoden wie Refraktionsseismik, Bohrlochdurchschallung (Crosshole-Seismik) und Bohrlochgeophonmessungen (Downhole-Seismik, Vertical Seismic Profiling) können dynamische Bodenkennwerte integral, räumlich und zerstörungsfrei erfassen. Aus seismischen Geschwindigkeiten werden folgende dynamische Kennwerte in situ ermittelt,

$$\mathcal{N} = \rho v_s^2, \quad \mathcal{K} = \rho \left( v_p^2 - \frac{4}{3} v_s^2 \right),$$

$$\nu = \frac{v_p^2 - 2v_s^2}{2(v_p^2 - v_s^2)}, \quad \mathcal{E} = \rho v_s^2 \frac{3v_p^2 - 4v_s^2}{v_p^2 - v_s^2}.$$

$\mathcal{E}$  ist das Elastizitätsmodul. Es ist zwischen **dynamisch und statisch bestimmten Moduln** (z.B. aus Belastungsexperimenten im Labor) zu unterscheiden. Dynamisch bestimmte Moduln sind i.d.R. kleiner und werden über empirische Beziehungen mit den statischen Moduln in Verbindung gesetzt.

<sup>67</sup> Weiterhin gibt es sogenannte Tertiärwellen, die nicht in der festen Erde sondern im Ozean mit etwa der Geschwindigkeit der Wasserschicht laufen. Diese können aber nur für bestimmte Quelle-Empfänger-Geometrien beobachtet werden

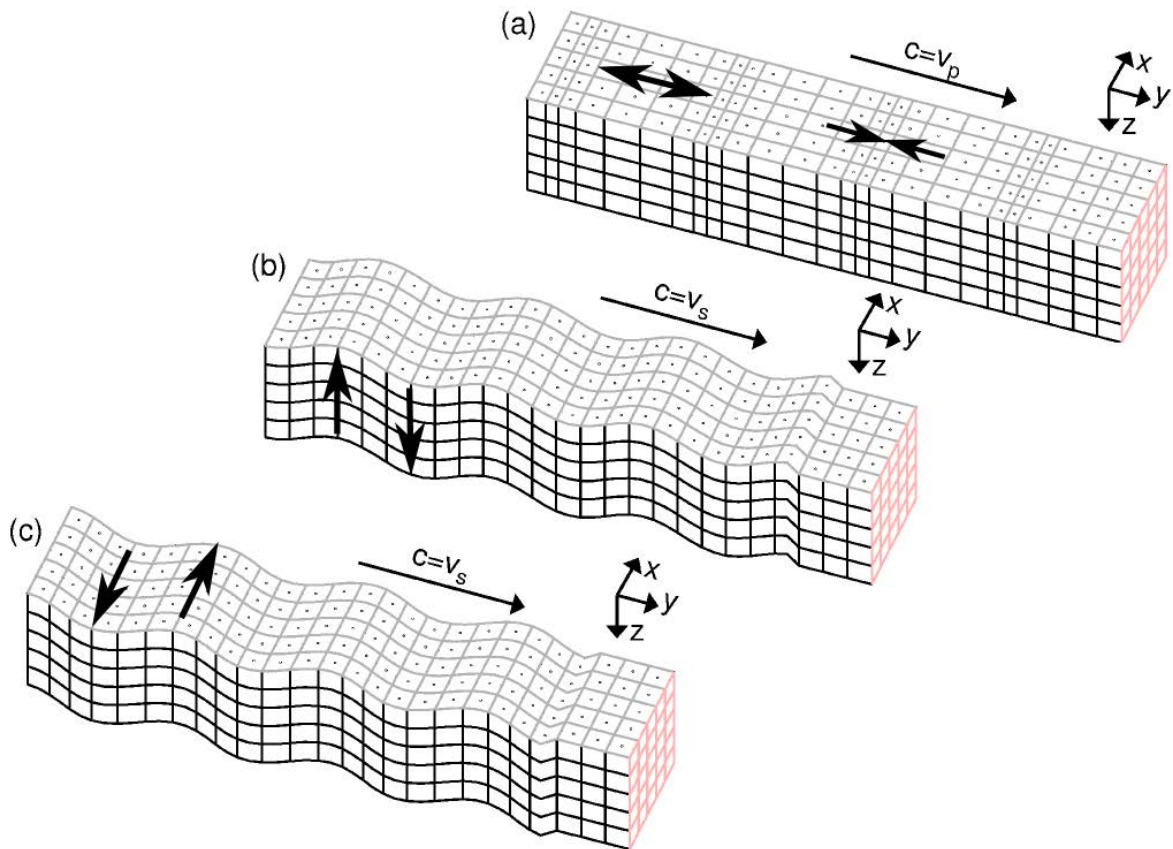


Abbildung 5.22: Zeitschnitte zur Veranschaulichung von ebenen, harmonischen Raumwellen, die sich in  $y$ -Richtung mit der Phasengeschwindigkeit  $c$  ausbreiten. Die Darstellung der Deformation / Verzerrung ist überhöht. (a) Die ebene Kompressionswelle breitet sich mit der Geschwindigkeit  $c = v_p$  als Longitudinalwelle aus. Die Partikelbewegung ist in  $y$  Richtung polarisiert. Es treten reine Volumendilatationen (Kompressionsanteile) und keine Scherungen von einzelnen Elementarvolumen auf. (b und c) Die ebene Scherwelle ist transversal zur Ausbreitungsrichtung polarisiert und breitet sich mit der Phasengeschwindigkeit  $c = v_s$  aus. Im dargestellten Fall ist die Partikelbewegung entweder in  $z$ - (SV Welle, b) oder in  $x$ -Richtung (SH Welle, c) polarisiert. Beide Fälle repräsentieren eine Pure Shear Deformation mit Scherung und Rotation ohne Volumenänderung (vgl. Abb. 5.21).

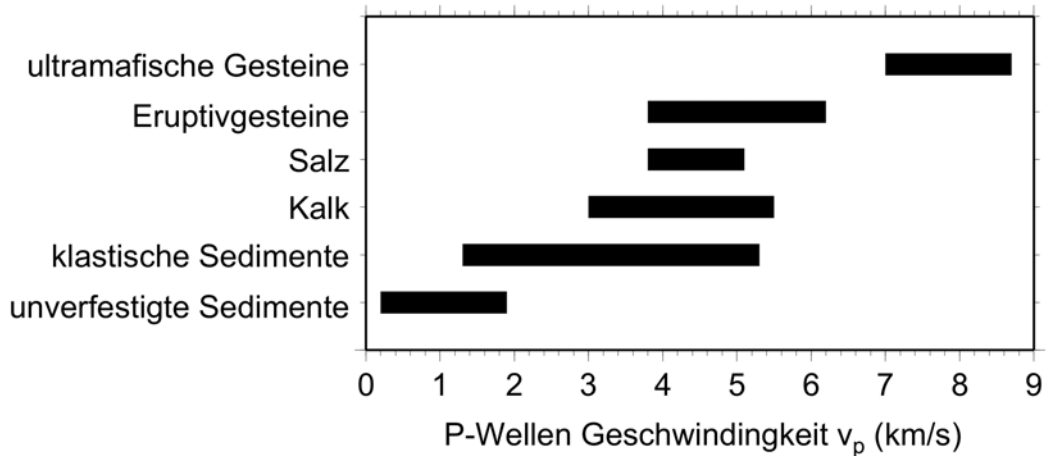


Abbildung 5.23: Geschwindigkeitsbereich für P-Wellen ( $v_p$ ) für Gesteine der Erdkruste.

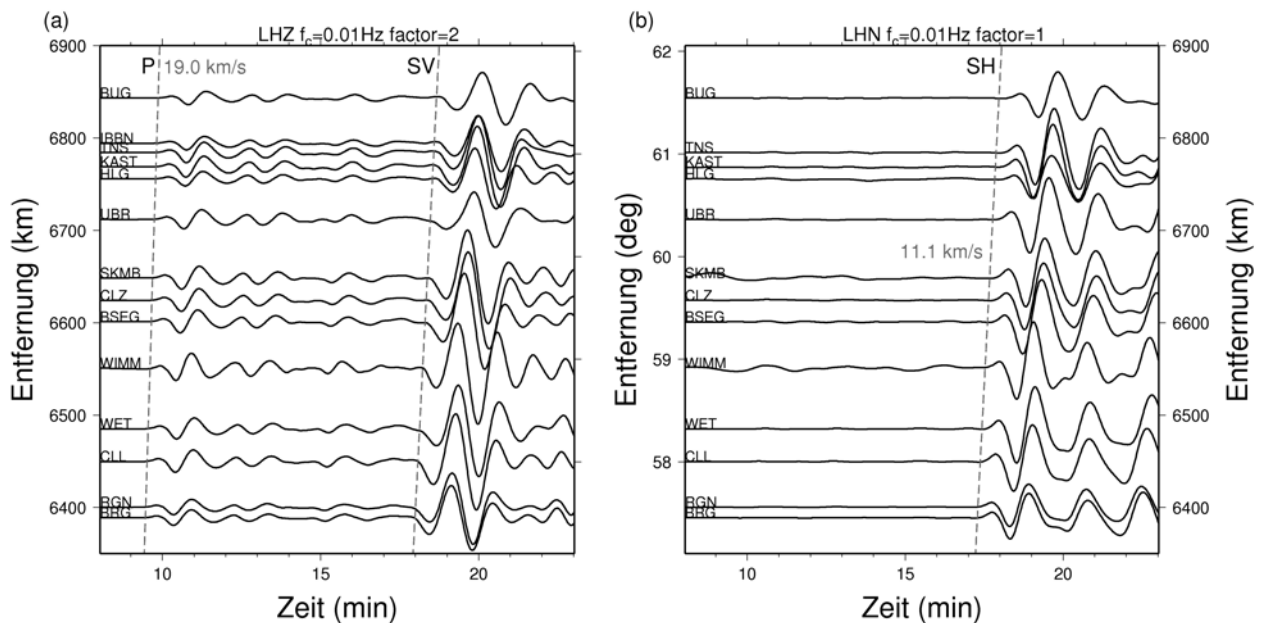


Abbildung 5.24: Seismogramme des Deutschen Regionalnetzes (Breitbandstation, tiefpassgefiltert bei  $0.01\text{ Hz}$ ) des  $M_W 7.8$  Nepal Bebens (25 April 2015 6:11:58,  $27.7^\circ\text{ N}$ ,  $85.37^\circ\text{ E}$ ). Geplottet sind Vertikal- (LHZ, a) und Nordkomponenten (LHN, b) als Funktion der Epizentralentfernung (sogenannte Recordsection; Zeit in Minuten nach dem Bruchbeginn, Spuren in (a) und (b) jeweils auf gemeinsames Maximum normiert - LHZ um Faktor 2 verstärkt). Die Scheingeschwindigkeit der Einsatzzeiten der P- und SV-Wellen sind auf der LHZ und die der SH-Welle auf LHN Komponente zu erkennen. Die gestrichelten Linien markieren theoretische Einsatzzeiten für Scheingeschwindigkeiten von  $19\text{ km/s}$  (P-Welle, a) und  $11.1\text{ km/s}$  (SH-Welle, b).

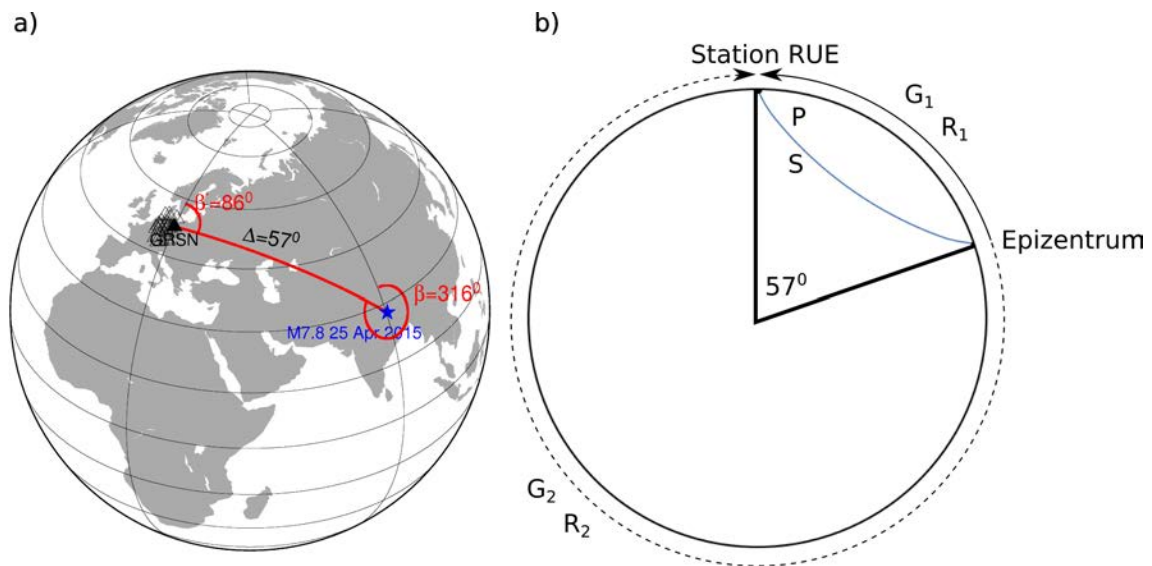


Abbildung 5.25: Strahlwege der Raum- und Oberflächenwellen entlang eines Großkreises zwischen dem Epizentrum des Nepal 2015  $M_W 7.8$  Erdbebens und den Stationen des Deutschen Regionalnetzes (z.B. Rüdersdorf, RUE). (a) zeigt die Strahlwege entlang der Oberfläche und (b) in einem Tiefenschnitt durch den Erdmittelpunkt. Die Epizentralentfernung beträgt etwa  $57^\circ$  ( $6377 \text{ km}$ ). Der Backazimuthwinkel des Strahls in RUE ist etwa  $86^\circ$ , d.h. die Wellenfront fällt nahezu von Osten auf die Station ein. Der kurze  $G_1$  und lange Laufweg  $G_2$  der Lovewellen ist eingezeichnet (entsprechend für Rayleighwellen mit  $R_1$  und  $R_2$ ). Die Raumwellen durchlaufen den Mantel bis in eine Tiefe von etwa  $2100 \text{ km}$ , d.h. der Scheitelpunkt des Strahls liegt etwa  $800 \text{ km}$  über der Kern-Mantel-Grenze. Der Auftauchwinkel der Raumwellen (P und S) an der Station ist etwa  $21^\circ$ .

Die P-Welle in Abb. 5.24 ist nur auf der Vertikalkomponente (LHZ) zu sehen, die SH-Welle hingegen nur auf der Nordkomponente (LHN). Beides hängt damit zusammen, dass der Strahl entlang des Großkreises durch Epizentrum und Station genau aus Osten einfällt (Abb. 5.25), so dass die Nordkomponente der Bodenbewegung nur die transversale SH-Welle und keine P-Welle aufzeichnet. Die SV-Welle kann hingegen auf der Z-Komponente aufgezeichnet werden. Die Raumwellen durchstrahlen den unteren Erdmantel und haben ihren Scheitelpunkt etwa  $800 \text{ km}$  oberhalb der Kern-Mantel-Grenze. Der Auftauchwinkel der Strahlen an den GRSN Stationen beträgt etwa  $21^\circ$  (Abb. 5.25). Das erklärt neben der Abstrahlcharakteristik des Bebens warum die Amplituden der SV-Wellen in Abb. 5.24 um den Faktor 2 kleiner sind als die der SH-Wellen.

Für Perioden größer als  $100 \text{ s}$  kann der Bruchverlauf des Bebens als einfache Stufenfunktion angenommen werden. Im Nahfeld zum Erdbeben sind daher Stufen in der Bodenverschiebung zu erwarten. Im Fernfeld ergibt sich die Wellenform der Bodenverschiebung als Zeitableitung der Herdzeitfunktion an der Quelle, also als einseitiger Puls. Da die Rohdaten der Breitbandstationen bis  $120 \text{ s}$  proportional zur Schwinggeschwindigkeit des

Bodens aufzeichnen, ergeben sich die Wellenformen der P- und S-Pulse in Abb. 5.24 als Zeitableitung der Bodenverschiebung im Fernfeld, also in erster Näherung als zweiseitige Pulse.

Da die GRSN Stationen relativ nah zusammen stehen sind die Wellenformen an allen Stationen ähnlich. Aus dem Zeitversatz der Peaks der P- und S-Wellen kann die horizontale Scheingeschwindigkeit der P- und S-Wellen bestimmt werden (Abb. 5.24). Die Scheingeschwindigkeit der P-Welle ist um den Faktor  $\sqrt{3}$  größer als die der SH-Welle. Die Scheingeschwindigkeiten sind außerdem deutlich größer als die Wellengeschwindigkeiten im Erdmantel. Über Inversionsverfahren (z.B. Wiechert-Herglotz) läßt sich aus den Scheingeschwindigkeiten die Scheiteltiefe und die reale Wellengeschwindigkeit in der Scheiteltiefe ableiten. Bei teleseismischen Entfernungen wie in Abb. 5.24 muss dafür allerdings mit sphärischen Koordinatensystemen gerechnet werden.

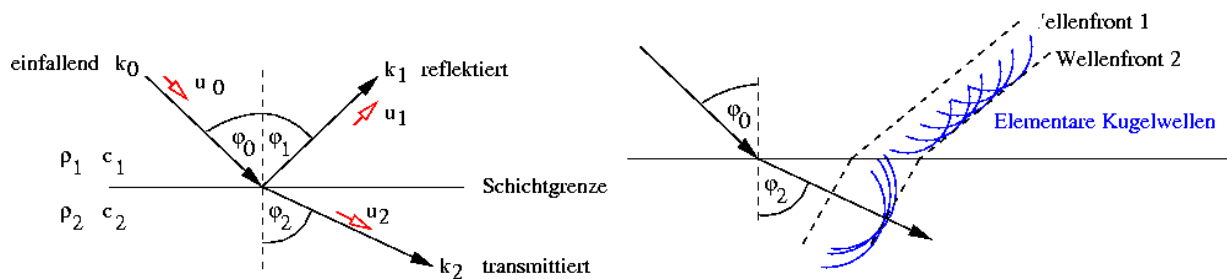


Abbildung 5.26: *Links*: Reflexion und Brechung einer einfallenden, ebenen Welle an einer ebenen Schichtgrenze (fest-fest). *Rechts*: Konstruktion der ebenen einfallenden und gebrochenen Wellenfront durch Überlagerung von elementaren Kugelwellen (Huygensprinzip).

Die berechneten Raumwellenstrahlen durch den Erdmantel in Abb. 5.25 sind konkav gekrümmt. Das kann durch die Brechung des Strahls in einer Erde mit zunehmender Geschwindigkeit mit der Tiefe erklärt werden. Die **Reflexion** und **Brechung** von Raumwellen an (ebenen) Grenzflächen (auch Schichtgrenzen) wird für die Einführung in die refraktions- und reflexionsseismischen Verfahren weiter unten benötigt. Grenzflächen (Diskontinuitäten erster Ordnung) können z.B. die Kruste-Mantel-Grenze (Moho) sein oder die Grenze zwischen Sedimenten und Grundgebirge, sowie Grenzen zwischen unterschiedlichen Sedimentgesteinen, z.B. Salz angrenzend an klastische oder an unverfestigte Sedimente. Die auf die Grenzfläche einfallende Welle wird durch den Winkel  $\varphi_0$  zum Lot charakterisiert. Reflexions- ( $\varphi_1$ ) und Brechungswinkel ( $\varphi_2$ ) werden durch das **Snellius-Gesetz** als Funktion des Einfallswinkels ( $\varphi = \varphi_0$ ) berechnet (Abb. 5.26),



$$k_0 \sin \varphi_0 = k_1 \sin \varphi_1 = k_2 \sin \varphi_2 \quad \text{oder} \quad \frac{\sin \varphi_0}{c_1} = \frac{\sin \varphi_1}{c_1} = \frac{\sin \varphi_2}{c_2}, \quad (5.25)$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  die Geschwindigkeiten der Welle oberhalb und unterhalb der Grenzschicht sind. Gleichung (5.25) kann so interpretiert werden, dass die horizontale Langsamkeit des Strahls immer konstant ist. Das seismische Snellius-Gesetz (5.25) kann durch das **Huygensprinzip** zur Überlagerung von Elementar-Kugelwellen erklärt werden. Man denkt sich die Wellenfront zu einem Zeitpunkt  $t_0$  als eine "Linienquelle" (Flächenquelle), die aus eng benachbarten Punktquellen besteht. Jede Punktquelle strahlt eine kugelförmige Welle ab (Abb. 5.26). In der Zeit  $t_0 + \Delta t$  ist die Wellenfront der Elementarwelle unterschiedlich weit gelaufen, je nachdem ob die Huygensquelle oberhalb oder unterhalb der Schichtgrenze war, also z.B. in dem schnellen oder langsamen Medium lag. Die neue Wellenfront zu einem Zeitpunkt  $t_0 + \Delta t$  wird dann als Überlagerung der Wellenfronten der einzelnen Huygensquellen konstruiert (Abb. 5.26).

#### ***Oberflächenwellen und Eigenschwingungen:***

**Oberflächenwellen** sind ein weiterer Typ von Wellen in der Erde. Sie sind an eine Oberfläche gebunden und breiten sich entlang der Oberfläche aus. Ihre Amplituden fallen mit der Tiefe ab. Es gibt zwei wichtige Typen von Oberflächenwellen, **Rayleighwellen** und **Lovewellen**. Die Partikelbewegung beider Wellen ist in Abb. 5.27 dargestellt. Da Oberflächenwellen entlang der Oberfläche laufen, die kinetische Energie der Wellen sich also nur entlang einer Fläche und nicht über den Raum verteilt, ist ihre geometrische Dämpfung kleiner als die von Raumwellen. Die Amplituden der Oberflächenwellen nehmen bis zu einer Epizentraldistanz von  $90^\circ$  zum Epizentrum erstmal ab. In größeren Entfernung bewirkt der Geometrieffekt auf der Erdkugel dann wieder eine Amplitudenzunahme. Für die vertikale Bodenbewegung der Rayleighwellen ist aufgrund konstruktiver Überlagerung im Antipodenpunkt sogar ein zweites Amplitudenmaximum zu erwarten. Die intrinsische Dämpfung der Wellen, mögliche Laufwegeffekte durch die 3D Struktur der Erde und die Dispersion von Oberflächenwellen schwächen die Oberflächenwellen allerdings ab, sodass Wellenamplituden im Antipodenpunkt deutlich kleiner als am Epizentrum sind. Die Amplituden der Oberflächenwellen klingen insgesamt deutlich langsamer mit der Epizentralentfernung ab als die von Raumwellen, weshalb in großen Entfernungen zum Erdbeben die Oberflächenwellen meist die größten Einsätze im Seismogramm bilden (Abb. 5.28). Oberflächenwellen, welche die Erde mehrmals umrunden, können nach Starkbeben in den langperiodischen Seismogrammen von Breitbandstationen gut beobachtet werden (Abb. 5.28). Die dominanten, langperiodischen Mehrfach-Einsätze werden für Mantel-Lovewellen mit  $G_1, G_2, G_3, \dots$  und für Rayleighwellen mit  $R_1, R_2, \dots$  gekennzeichnet. Die Analyse von 6 h langen Zeitreihen

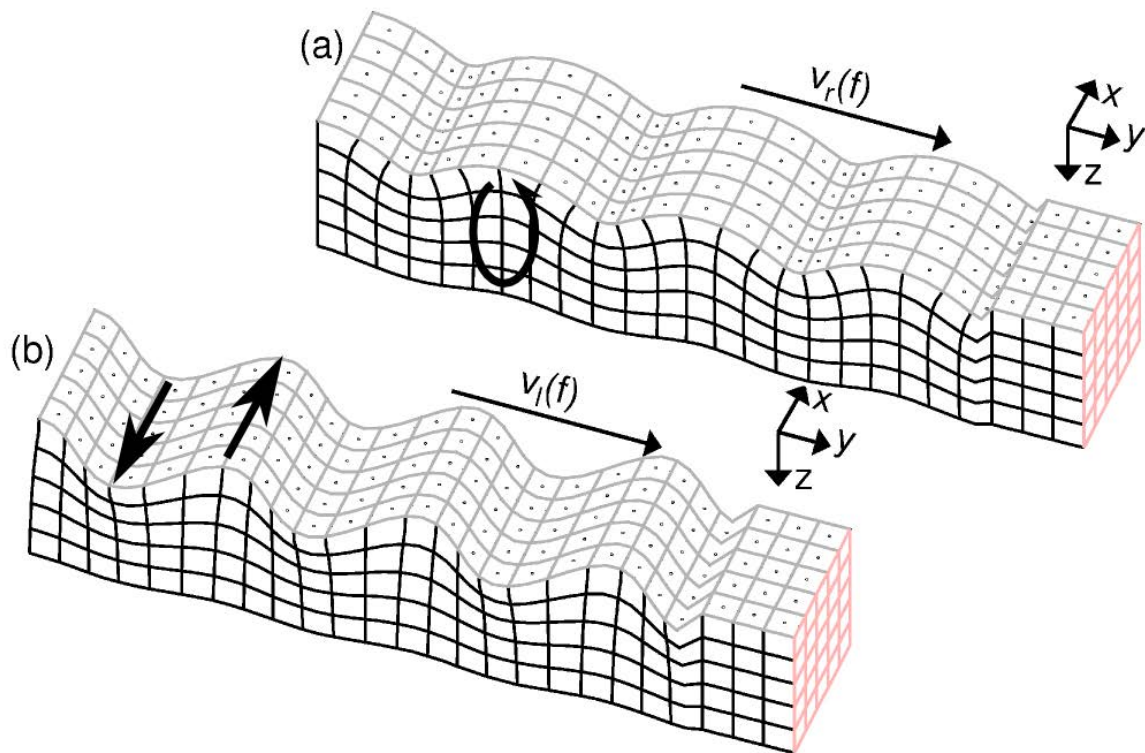


Abbildung 5.27: Zeitschnitte nach dem Muster von Abb. 5.22 für ebene, harmonische Rayleigh- (a, homogene Halbraum) und Lovewellen (b, Schicht über Halbraum). Die Partikelbewegung der Rayleighwelle ist nahe der Oberfläche retrograd elliptisch, die der Lovewelle rein transversal in  $x$ -Richtung. Für Oberflächenwellen nimmt die Amplitude der Wellenbewegung generell mit der Tiefe ab. Im allgemeinen Fall eines geschichteten Halbraums hängen die Geschwindigkeiten der Rayleigh- und Lovewellen von der Frequenz  $f$  ab. Die Rayleighwelle involviert Volumendilatationen und Scherung, die Lovewelle nur Pure Shear Deformation.

des Nepal Bebens auf Stationen des GRSN zeigt, dass sich die Gruppe der Lovewellen mit 5 min Perioden mit etwa  $4.45 \pm 0.5 \text{ km/s}$  ausbreiten und damit schneller sind als die entsprechenden Rayleighwellen mit etwa  $3.65 \text{ km/s}$  (Abb. 5.28; generell zwischen  $3.5 - 3.9 \text{ km/s}$ ). Die langperiodische Lovewellen Gruppe benötigen zur Umrundung der Erde etwa 150 min, die langperiodische Rayleighwellen Gruppe etwa 180 min.

Die Amplitudenabnahme der Rayleigh- und Lovewellen mit jeder Erdumrundung kann in Abb. 5.28 aus den Verhältnissen  $R_{i+2}/R_i$  und  $G_{i+2}/G_i$  jeweils gemessen werden, z.B. mit  $\frac{A_{i+2}}{A_i} = e^{-\pi/Q} = e^{-[\pi/(QvT)]\Delta}$ , wobei  $v$  die Wellengeschwindigkeit,  $T$  die Periode,  $\Delta$  die Epizentralentfernung,  $\pi/Q$  das sogenannte Dekrement und  $Q$  der Qualitätsfaktor

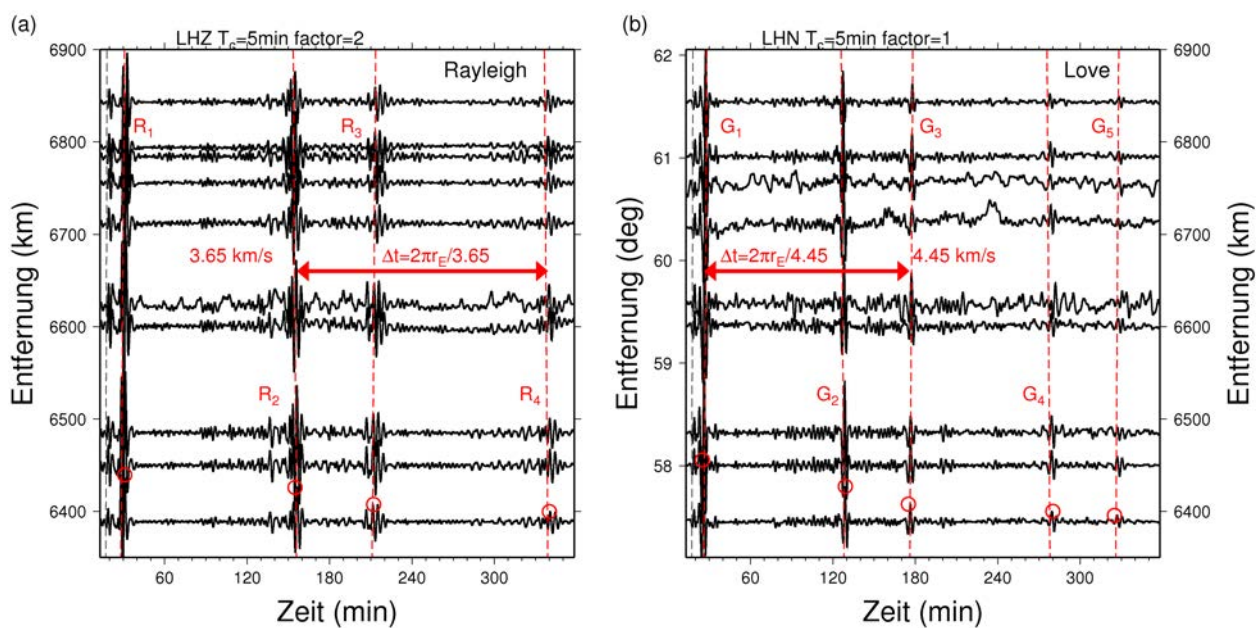


Abbildung 5.28: Recordsection der langperiodisch ( $5 \text{ min}$ ) gefilterte Daten aus Abb. 5.24 (LHZ in a, LHN in b) des  $M_W 7.8$  Nepal Beben 2015. Scheingeschwindigkeit und Einsätze der langperiodischen Rayleigh- ( $R_1, R_2, R_3$  und  $R_4$ , siehe a) und Lovewellen ( $G_1-G_5$ , siehe b) sind durch gestrichelte Linien markiert. Die ungeraden Indizes ( $i = 1, 3, 5$ ) der  $R$  und  $G$  Gruppe bezeichnen mehrfache Erdumrundungen der Oberflächenwellen, welche die kürzeste Richtung zur Station nehmen, wohingegen die geraden Indizes ( $i = 2, 4, \dots$ ) die Wellen in entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung angeben (vgl. Abb. 5.25). Die Peakamplituden der Wellengruppen sind exemplarisch für eine Station durch offene Kreise markiert. Sowohl die Steigung der Laufzeitgeraden wie auch der Abstand aufeinanderfolgender  $R_i$  und  $G_i$  ergibt eine Gruppengeschwindigkeit der Rayleigh- und Lovewellen von  $3.65 \text{ km/s}$  und  $4.45 \text{ km/s}$ .

ist. Für den Großkreis durch Nepal und GRSN ergibt sich ein mittleres Dekrement für Rayleighwellen von  $0.01$  ( $Q(5 \text{ min}) \approx 100$ ) und für Lovewellen von  $0.0118$  ( $Q(5 \text{ min}) \approx 84$ ). Die Rayleighwelle mit Perioden von  $5 \text{ min}$  verliert ohne geometrische Dämpfung pro Wellenlänge nur etwa  $1\%$  ihrer Amplitude.

Oberflächenwellen in der Erde haben noch eine weitere Eigenschaft; sie sind in der Regel **dispersiv**, d.h. ihre effektive Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt von der Frequenz ab. Abb. 5.29 zeigt dispersive Rayleighwellen an der Station Gräfenberg (GRFO) von dem  $M_W 6.2$  29 Januar 2011 Jan Mayen Beben in der Norwegischen See. Die Raumwellen (P und S) sind als kurze, hochfrequente Einsätze nach 5 und 9.4 Minuten erkennbar. Der Rayleighwellenzug hingegen ist langperiodisch und über mehr als 6 Minuten ausge dehnt. Tiefe Frequenzen der Rayleighwelle erscheinen zuerst, hohe Frequenzen später. Dies wird als normale Dispersion bezeichnet. Da die tiefen Frequenzen mit größeren

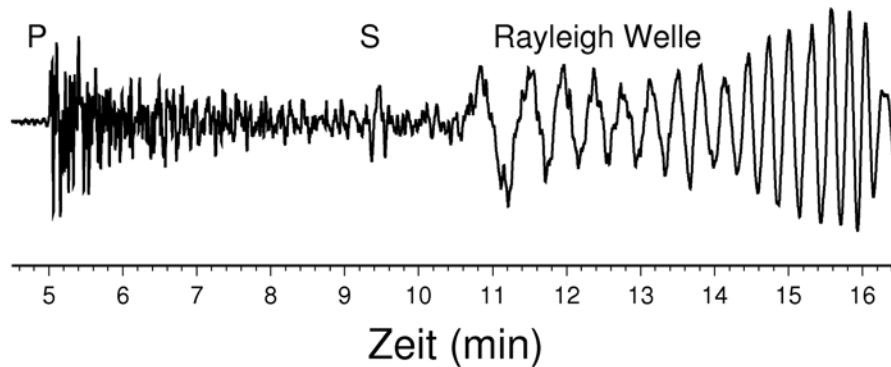


Abbildung 5.29: Seismogramm der Station Gräfenberg (GRFO, BHZ) von dem  $M_W 6.2$  Jan Mayen Erdbeben vom 29 Januar 2011 6:55 ( $z = 6 \text{ km}$ ). Die Zeit ist in Minuten nach Bruchbeginn angegeben.

Wellenlängen verknüpft sind haben diese Wellenanteile eine größere Eindringtiefe in die Erdkruste. Die Untersuchung der frequenzabhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Oberflächenwellen (Dispersionsanalyse) ermöglicht Rückschlüsse auf die tiefenabhängige Wellengeschwindigkeit in der Erdkruste.

Wenn Oberflächenwellen die Erde mehrmals umrunden wie in Abb. 5.28, dann können sie sich konstruktiv oder destruktiv überlagern und **stehende Wellen** bilden. So werden **Eigenschwingungen der Erde** angeregt. Stehende Wellen und Eigenschwingungen sind bei Saiten wohlbekannt. Dort werden die Wellen an den zwei festen Enden (zwei losen Enden) der Einspannung reflektiert, so dass sich vor- und rücklaufende Wellen überlagern und dadurch Eigenschwingungen (stehende Wellen) aufbauen können (Abb. 5.30). Typisch für die Eigenschwingung einer Saite ist, dass sich neben der **Grundschwingung** auch **Schwingungen höherer Ordnung** (Obertöne) ausbilden. In der Regel sind die Frequenzen der Obertöne ganzzahlige Vielfache der **Grundfrequenz**. Alternativ zu den Frequenzen kann man auch die Schwingungsbäuche und Knoten, also die **Schwingungsmoden** betrachten. Die **Grundmode** der beidseitig fest eingespannten Saite hat nur einen Schwingungsbauch in der Mitte der Saite. Die Grundmode der Saite mit zwei losen Enden hat einen Knoten in der Mitte. Die **höhere Mode  $l$**  der Saite mit zwei losen Enden zeigt  $l$  Schwingungsknoten zwischen den Enden (Abb. 5.30). Die Eigenschwingungen der Erde durch Überlagerung von entgegenlaufenden Oberflächen- oder Raumwellen entstehen im Prinzip genauso wie bei der eindimensionalen Saite. Abb. 5.31 zeigt eine Prinzipskizze zur Bildung von stehenden Wellen durch gegenläufigen Rayleighwellen auf der Erdkugel (vgl. Abb. 5.31). Das Schwingungsmuster aller in unterschiedlichen Azimuthen abgestrahlt Oberflächenwellen ergibt für  $l = 2$  genau 2 Knotenlinien auf der

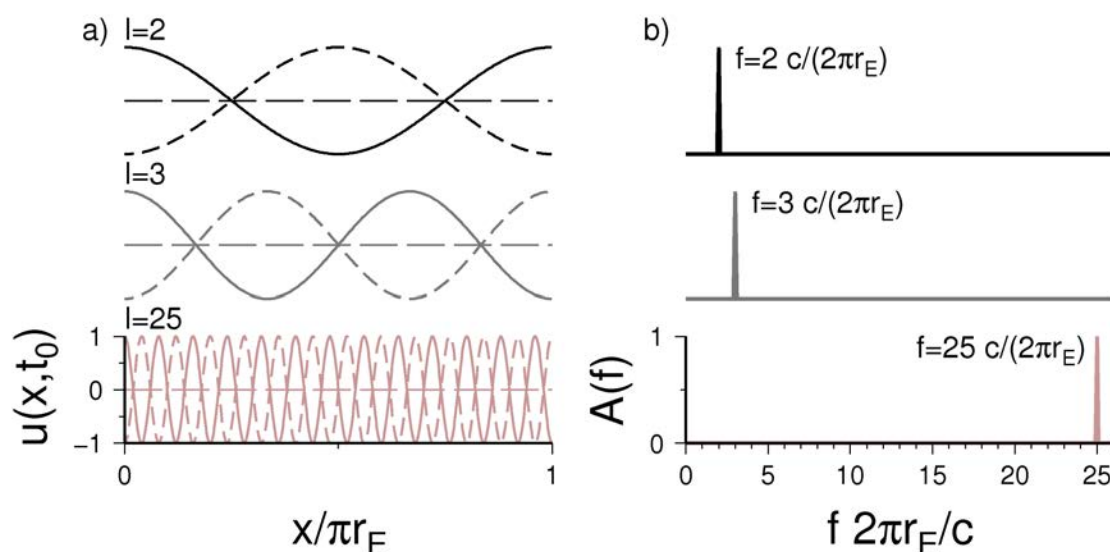


Abbildung 5.30: (a) Eigenschwingungsmoden (Auslenkung  $u(x) = \cos(l \frac{\pi x}{d})$ ) zu unterschiedlichen Zeiten  $t_0$ ) einer Saite der Länge  $d = \pi r_E$  mit zwei losen Enden. Der Index  $l$  bestimmt die Anzahl der Schwingungsknoten der Mode. (b) Amplitudenspektrum der Eigenschwingungen. Jeder Eigenschwingung  $l$  wird ein Peak im Spektrum bei  $f_l = l \frac{c}{2d}$  zugeordnet. Für  $l = 1$  erhält man die Eigenfrequenz der Fundamentalmode,  $l > 1$  ergibt gleichabständige Eigenfrequenzen der harmonischen Obertöne.

Erdoberfläche (Epizentrum liegt im Pol). Für  $l = 3$  erhält man 3 und für  $l = 25$  entsprechend 25 Knotenlinien. Ganz allgemein stehen die Indizes der Modenbezeichnung für die Anzahl der Knoten oder Schwingungsbäuche auf der Erdoberfläche (Länge und Breite) oder in der Tiefe in radialer Richtung. Die  ${}_0S_2$  Mode (**football mode**) stellt mit 54 Minuten die die **tiefste Eigenfrequenz** der Erde dar ( ${}_0S_1$  existiert nicht, da sich das Massenzentrum der Erde aus der Ruhelage bewegen würde).

Abb. 5.31 zeigt bereits, dass die 3D Eigenschwingungen der Erde komplizierter als für die Saite sind. Überlagern sich Rayleigh- und P-SV-Wellen, dann entstehen sogenannte **sphäroidale Eigenschwingungen**, bei Love- und SH-Wellen entstehen **toroidale Eigenschwingungen** (Abb. 5.32). Bei sphäroidalen Eigenschwingungen ist die Bodenbewegung in den durch Epizentrum und Antipodenpunkt aufgespannten Radialebenen polarisiert. Dazu gehören auch die rein radialen Schwingungen, sogenannte "Breathing-Moden"  ${}_nS_0$  (Eigenperiode bei 20.468 min), bei denen sich der Boden nur nach oben und unten bewegt. Bei den toroidalen Eigenschwingungen (Skizzen in Abb. 5.32) verschiebt sich die Erdoberfläche horizontal entlang von Kleinkreisen um den Pol des Epizentrums (siehe Zürn and Widmer-Schmidrig, 2002; Clauser, 2014, für quantitativ korrekte Darstellungen). Man spricht von sogenannten "Twisting Modes". Die Eigenfrequenz der fundamentalen toroidalen Eigenmode  ${}_0T_2$  (zum ersten Mal am seismologischen Observatorium



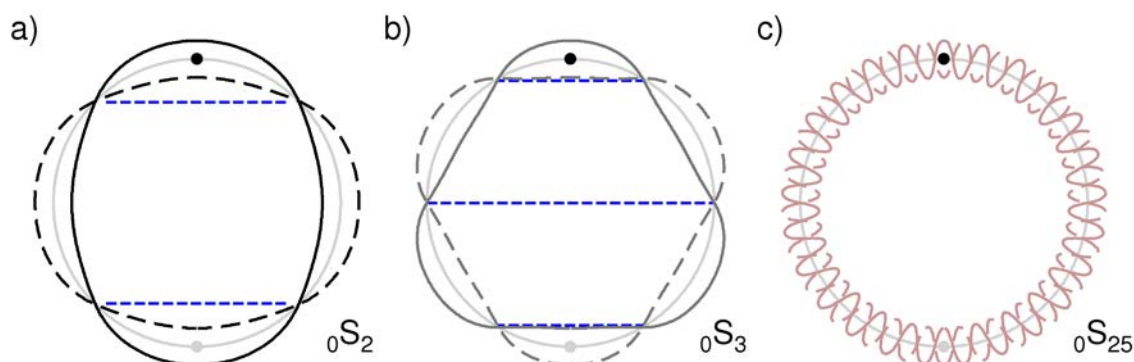


Abbildung 5.31: (a) Skizze der sphäroidalen Fundamentalschwingungen  ${}_0S_2$  (a),  ${}_0S_3$  (b) und  ${}_0S_{25}$  (c) (vgl. Abb. 5.30 zu Konstruktion). Die 1D Konstruktion ist für Epizentrum und Antipodenpunkt (schwarze und graue Punkte) nicht ganz korrekt, da Interferenzeffekte durch die Überlagerung von Wellenfronten nicht berücksichtigt sind (z.B. polar phase shift um  $\pi/2$ ). Der hintergestellte Index  $l$  in  ${}_nS_l$  gibt die Anzahl der Nodallinien auf der Erdoberfläche an (blau gestrichelt). Der vorgestellte Index  $n$  gibt die Anzahl der Knotenflächen in radialer Richtung im Erdinnern an. Für  $m = 0$  (Fundamentalmoden, hier dargestellt) gibt es im Erdinnern keine Schwingungsknoten, d.h. die Bodenverschiebung ist Null im Erdmittelpunkt und hat ein Maximum an der Erdoberfläche.

im Schwarzwald (BFO) beobachtet, siehe Widmer et al., 1992) ist mit  $43.9 \text{ min}$  kleiner als die von  ${}_0S_2$ , was wegen der höheren Geschwindigkeit der Love- gegenüber der Rayleighwellen (Abb. 5.28) zu erwarten ist. Tabelle 5.1 listet die Eigenperioden einiger sphäroidaler und toroidaler Eigenschwingungen.

Tabelle 5.1: Eigenperioden  ${}_nT_l$  ( $\text{min}$ ) und Eigenfrequenzen  ${}_nfl$  ( $\text{mHz}$ ) einiger sphäroidaler und toroidaler Eigenschwingungen.

Mode	${}_nT_l$	${}_nfl$	Beschreibung	Mode	${}_nT_l$	${}_nfl$	Beschreibung
${}_0S_0$	20.52	0.812	"breathing"	${}_0T_0$	-	-	nicht existent
${}_0S_1$	-	-	nicht existent	${}_0T_1$	-	-	nicht existent
${}_0S_2$	53.89	0.309	"football"	${}_0T_2$	43.99	0.379	fund. torsional
${}_0S_3$	35.57	0.468	"pear-shaped"	${}_0T_3$	28.46	0.585	fund. torsional
${}_0S_{25}$	4.96	3.36	fund. Rayleigh	${}_0T_{25}$	5.0	3.33	fund. Love
${}_0S_{30}$	4.37	3.81	fund. Rayleigh	${}_0T_{30}$	4.32	3.85	fund. Love
${}_1S_0$	10.22	1.63	rad. Oberton	${}_1T_0$	-	-	nicht existent
${}_1S_1$	325.0	0.05	Slichter	${}_1T_1$	13.47	1.24	toroidale Oberton

Abb. 5.33 zeigt Amplitudenspektren der Eigenschwingungen der Erde. Einzelne Peaks der fundamentalen sphäroidalen und toroidalen Moden sind markiert. Die Atmungsmoden der Erde ( ${}_0S_0$ ) erzeugt einen großen Peak bei etwa  $0.81 \text{ mHz}$ . Die tiefste Mode ( ${}_0S_2$

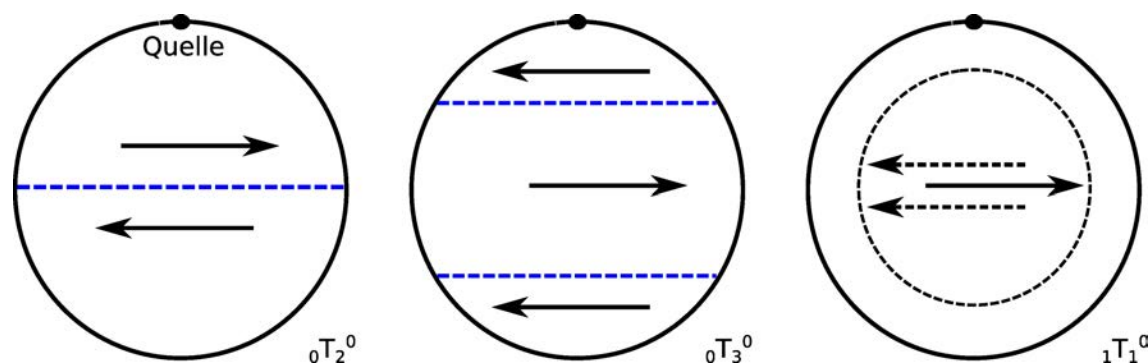


Abbildung 5.32: Beispiele für das Verschiebungsfeld toroidaler Eigenmoden (Skizzen für  $m = 0$  Singulets). Die blauen Linien zeigen Nodalflächen ohne Transversalverschiebung. Pfeile geben die Verschiebungsrichtung der jeweiligen Moden an. Der nachgestellte Index  $l$  (angular degree) in  ${}_nT_l^m$  gibt die Anzahl der Nodalflächen auf der Erdoberfläche an. Der vorgestellte Index  $n$  (overtone order) gibt die Anzahl der Nodalflächen im Erdinnern an, an denen der Richtungssinn der Transversalbewegung in der Erde wechselt (gestrichelte Linie und Pfeile bei  ${}_1T_1^0$ ). Beachte: Die hier dargestellten Kartoons repräsentieren Lösungen für die Entartung  $m = 0$  und können nicht durch Dipolquellen (Erdbeben) angeregt werden. Erdbebenquellen regen fundamentale ( $n = 0$ ) toroidale Moden für  $|m| \geq 2$  an.

„football mode“) liegt bei etwa  $0.3 \text{ mHz}$  ( $54 \text{ min}$ ). Toroidale Moden werden nur auf den Messgeräten bzw. Komponenten registriert, die für Schwingungen in Horizontalrichtung sensitiv sind (z.B. Strainmeter in  $N2^\circ E$  aufgestellt). Die Aufspaltung der einzelnen Peaks (Doppel- oder Dreifachpeaks) ist eine Folge der Erdrotation (vgl. auch Zeemann Effekt) und Erdabplattung und repräsentiert Schwingungsmoden mit unterschiedlich vielen Schwingungsknoten entlang der Kleinkreise zwischen Beben und Station.

Aus den Eigenschwingungen können auch Phasengeschwindigkeiten der Wellenausbreitung abgeleitet werden. Zum Beispiel ist die Eigenperiode der fundamentalen Lovewelle  ${}_0T_{25} = 5 \text{ min}$  (Tab. 5.1). Zwischen der Phasengeschwindigkeit  $c_L$  der Lovewellen und der Eigenfrequenz gilt (Jeans Formel)

$$2\pi f = \frac{(l + 0.5)c_L}{r_E}$$

Daraus ergibt sich eine Phasengeschwindigkeit der  $5 \text{ min}$  Lovewellen von  $c_L \approx 5.23 \text{ km/s}$ . In Abb. 5.33 wurde für entsprechend gefilterte Lovewellen eine Gruppengeschwindigkeit von  $4.45 \text{ km/s}$  abgeschätzt. Wegen der Dispersion der Oberflächenwellen unterscheiden sich Gruppen- und Phasengeschwindigkeit der Lovewellen.



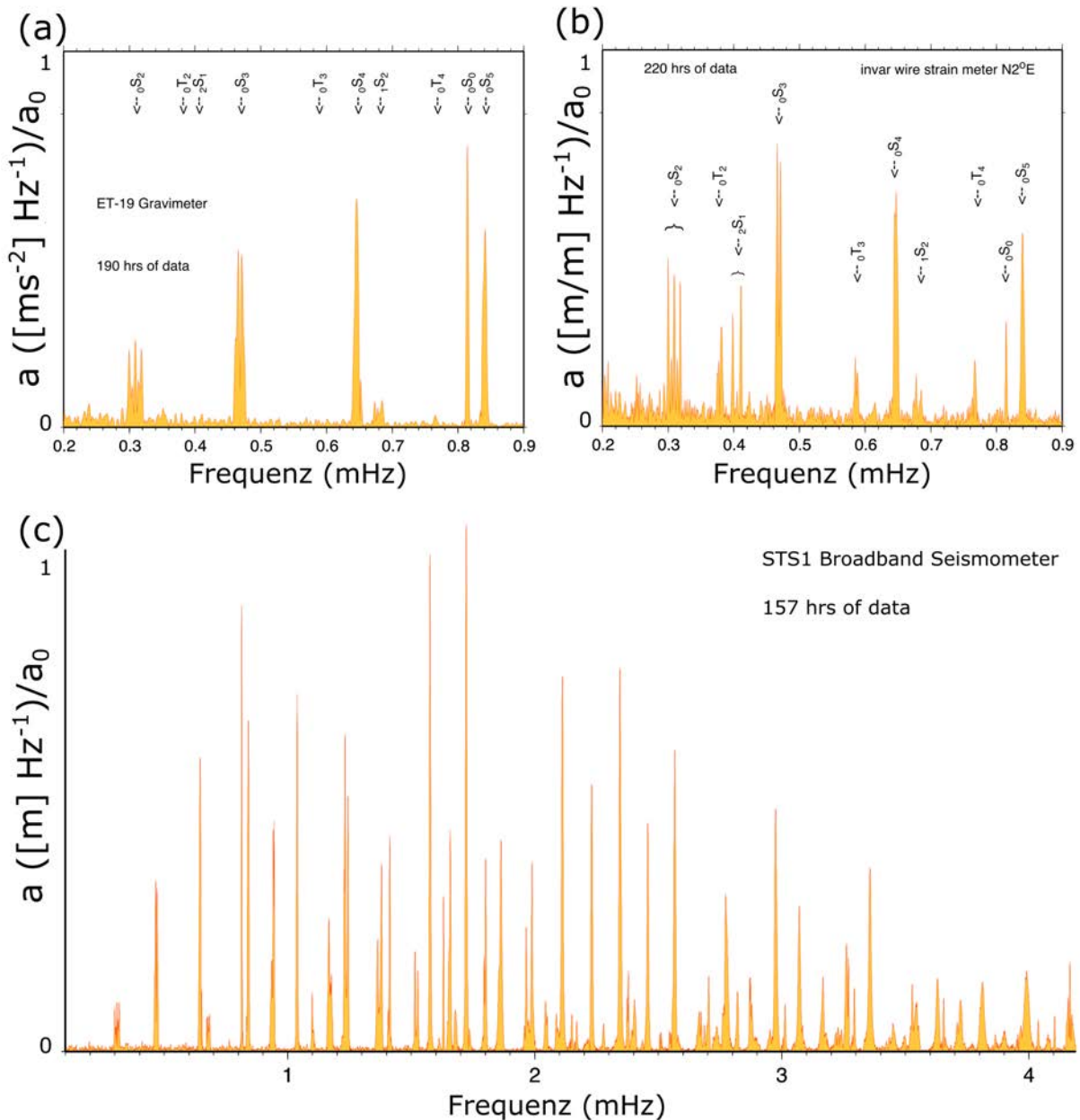


Abbildung 5.33: Sphäroidale und toroidale Eigenfrequenz-Peaks (lineare Amplitude, normiert), die am Black Forest Observatorium (BFO) im Schwarzwald nach dem Dezember 2004,  $M_W$  9.1, Sumatra-Erdbeben aufgezeichnet wurden. Die analysierten Zeitfenster (Hanning-Taper) hatten Längen zwischen 157 und 220 Stunden. (a) Frequenzspektrum der Schweremessung eines supraleitenden Gravimeters (ET-19, Anfangsamplitude  $1.5 \text{ nms}^{-2}$ ), (b) sphäroidale und toroidale Peaks von einem modernen Strainmeter (Invar Wire, Anfangsamplitude  $1 \cdot 10^{-11}$ ), und (c) Peaks im Spektrum der Vertikal-komponente eines Breitbandseismometers (STS1, Anfangsamplitude  $0.05 \text{ mm}$ ) (von R. Widmer-Schmidrig, siehe auch [Zürn et al., 2015](#)).

### 5.4.2 Messgeräte und Quellen

#### *Seismometer und Hydrophone:*

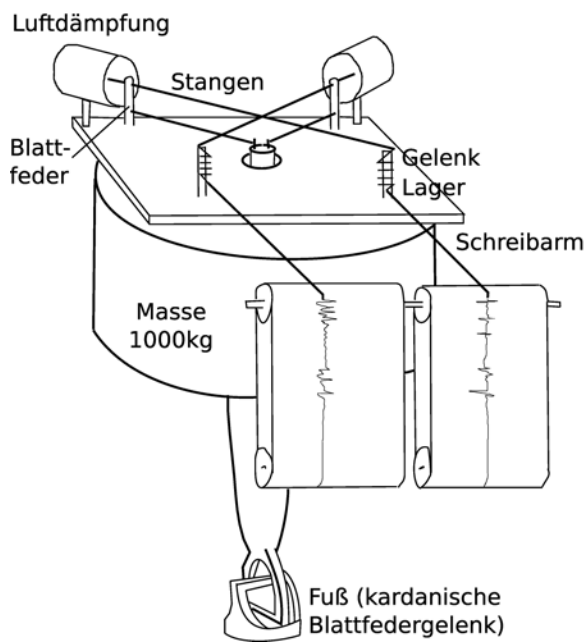
In der Seismologie und Seismik untersucht man elastische Wellen und Deformationen. Die typischen Messgrößen sind **Bodenverschiebung**, **-geschwindigkeit** oder **-beschleunigung** und **Druck**. Interessiert man sich für sehr große Periodendauern, z.B. im Bereich der Eigenschwingungen, Gezeiten oder tektonischer Deformationen, dann misst man auch die Dehnung und Neigung der Erdoberfläche, die Schwereschwankungen oder die Änderung der Bodenhöhe gegenüber Referenzpunkten (z.B. Satellitenbahn, Eichpunkte, etc.).

Seismische Sensoren und Aufnahmesysteme müssen in der Lage sein, (1) kleine transiente Signale innerhalb eines bewegten Referenzsystems zu messen (das Instrument bewegt sich mit dem Boden), (2) **kontinuierlich** und mit **absoluter Zeit** zu messen, um sogenannte **Seismogramme** zu erzeugen (Bodenbewegung als Funktion der Zeit), und (3) eine lineare und bekannte **Übertragungs-** oder **Antwortfunktion** haben, so dass die Bodenbewegung aus den Messungen rekonstruiert werden kann. So ein System wird **Seismograph**, der eigentliche Sensor **Seismometer** oder **Geophon** oder, bei Druckmessungen, **Hydrophon** genannt. Die Entwicklung und das Design von Systemen heißt **Seismometrie**.

Fast alle Seismometer und Geophone sind gedämpfte Massenpendel (-schwinger), die die Bodenbewegung in einer definierten Richtung messen (z.B. horizontal oder vertikal). Der Rahmen des Seismometers ist fest mit der Erdoberfläche verbunden und bewegt sich mit dem Boden mit. Die Pendelmasse führt aufgrund ihrer Trägheit eine **Relativbewegung** gegen den bewegten Rahmen aus. Jedes Pendel hat eine **Ruheposition**, in die es bei Auslenkung zurückkehren will. Beim Vertikalseismometer wird die **Rückstellkraft** durch eine Feder aufgebracht, beim Horizontalpendel entweder durch die Gewichtskraft der Masse oder auch durch Blattfedern. Um ein langes Nachschwingen und die Resonanzschwingung der Pendelmasse zu verhindern werden Seismometer gedämpft. In Abb. 5.34 ist das Prinzip von zwei der ersten mechanischen Horizontal-Seismographen abgebildet. Emil Wiechert hatte als erster kontrollierte Luftdämpfung für seine Seismographen eingeführt. Der Wiechert'sche 1000 Kilogramm Zweikomponenten-Horizontalpendel funktionierte nach dem Prinzip des invertierten Pendels und war für seine Zeit bereits sehr breitbandig und mit einer 200-fachen Verstärkung relativ empfindlich. Der Bosch-Omori Einkomponenten-Seismographen funktionierte wie ein gewöhnlicher Massenpendel nach dem Gartentür-Prinzip. Durch die schräge Aufhängung der Hebelachse bewegt sich die Masse immer wieder in die Ruhelage des tiefsten Punktes.

Zu Beginn der Seismometrie waren mechanische und optische Registriersysteme auf

## a) Wiechert Pendel



## b) Bosch-Omori Pendel

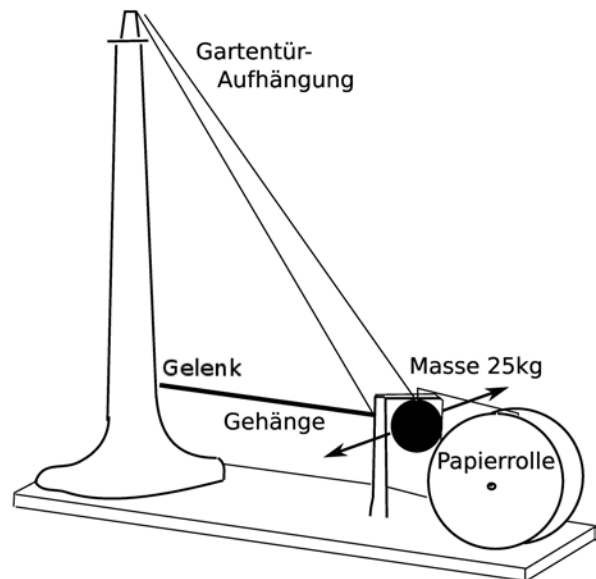


Abbildung 5.34: Frühe, mechanische Horizontalseismographen mit einer Registrierung auf Rußpapier. (a) Das 1000-Kilogramm-Pendel von Wiechert mit einer Verstärkung von 200 und einer Eigenperiode von etwa 15 Sekunden (1904). Der Wiechert Seismograph hatte luftgefüllte Dämpfungstöpfe. Die Masse wurde auf einem kardanischen Nadelgelenk am Fuß des Seismographen im labilen Gleichgewicht gelagert und durch Rückstellfedern (Blattfedern) am oberen Gestänge in der Ruhelage gehalten. (b) Das Bosch-Omori Pendel (1905) mit einer Verstärkung von 10 und einer Eigenperiode von etwa 60 Sekunden. Die Rückstellkraft wurde beim Omori Pendel durch die leicht schräge Aufhängung nach dem Gartentorprinzip erreicht.

Papierrollen oder Rollfilmen üblich. In Abb. 5.34 ist die Datenerfassung auf eine Rußpapier-Rolle dargestellt (**Heliokorder-Rollen**), welche sich mit konstanter Drehgeschwindigkeit unter der Registriernadel fortbewegte. In gleichen Zeitabständen und nach vorgegebenen Mustern wurde die Nadel kurz angehoben, so dass sich im Nachhinein die Uhrzeit der Registrierung rekonstruieren lies. Die mechanische Aufzeichnung ist seit den 1960-er Jahren durch eine Registrierung auf Magnetbänder abgelöst worden, und später durch die digitale, elektronische Datenerfassung auf moderne Speichermedien (Festplatten).

Die Seismographen-Uhren müssen sehr genau und in Absolutzeit registrieren. Früher wurden astronomische mechanische Uhren verwendet, die z.B. durch Zeitsignale über Funk gangkorrigiert wurden. Seit etwa 1934 wurden Quarzuhren mit einer Genauigkeit

von 0.1 ms pro Tag eingesetzt. In 1967 wurden Atomuhren eingeführt und als physikalisches Zeitmaß die Atomsekunde über die Schwingung von Atomen definiert<sup>68</sup>. Die Drift der Atomuhren ist kleiner als  $10^{-13}$  s pro Tag. Heutzutage werden die internen Uhren der Datenerfassungssysteme mit Hilfe von Satellitensystemen (GPS) oder Funk-Sendern (DCF, OMEGA) in kurzen Abständen auf die genaue Atomzeit nachjustiert. DCF Sender in Deutschland stehen in Braunschweig und Frankfurt.

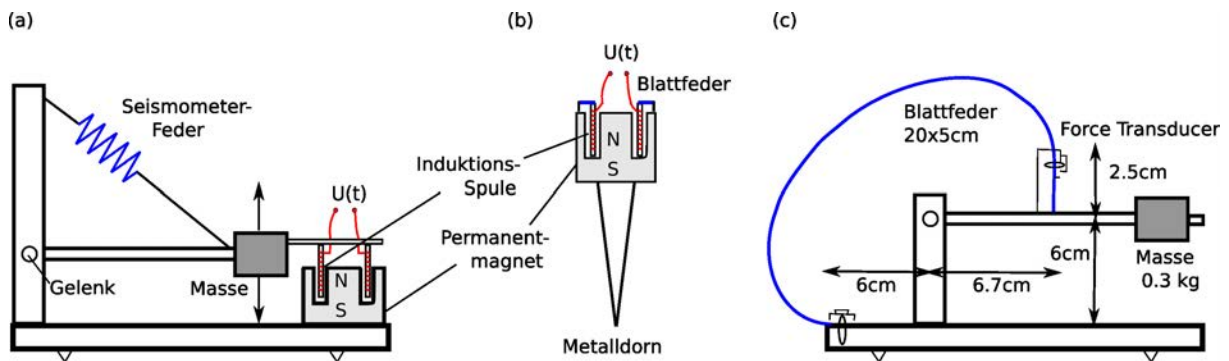


Abbildung 5.35: (a) Prinzip des elektrodynamischen Vertikalseismometers mit einem induktiven Geschwindigkeitsaufnehmer. (b) Schematische Darstellung eines hochfrequenten Vertikalgeophons für den Einsatz in der Reflexionsseismik. (c) Schema eines Forced Feedback Breitbandseismometers (STS1), das mit einer Blattfeder, einem Aufnehmer und einem Force Transducer arbeitet. Der elektronische Feedback Mechanismus zur Steuerung der Rückkopplung zur Aufbringung einer Rückstellkraft auf die Schwingmasse ist nicht dargestellt.

Die mechanischen Seismometer wurden bald durch **elektrodynamische Seismometer** abgelöst, die bis heute vorwiegend verwendet werden. Genau wie beim "mechanischen" Instrument schwingt eine Masse im Bezugssystem des Seismometerrahmens. Die Pendelbewegung wird aber nicht mehr mechanisch oder optisch erfaßt, sondern durch einen induktiven Geschwindigkeitsaufnehmer. Das ist in der Regel eine fest mit der Masse verbundene Induktionsspule, die im Feld eines am Seismometerrahmen befestigten Permanentmagneten schwingt (Abb. 5.35a). In der bewegten Spule wird eine elektrische Spannung induziert, die gemessen wird. Da die induzierte Spannung proportional zur Schwinggeschwindigkeit ist, sind die Messgrößen (Spannungen) beim elektrodynamischen Seismometer **geschwindigkeitsproportional**. Die Übertragungsfunktion der rein mechanischen Instrumente war in der Regel **wegproportional**. Das Tauchspulprinzip hat nicht nur den Vorteil, dass die Bewegung eine Spannung induziert, sondern auch, dass die Dämpfung der Massenschwingung durch einen elektrischen

<sup>68</sup> Zur Definition einer Atomsekunde wird die Schwingungsperiode der Strahlung benutzt, die beim Übergang der Hyperfeinniveaus des Grundzustandes von Caesium-133-Atomen entsteht.

Widerstand erreicht und beliebig eingestellt werden kann. Der Dämpfungswert kann so eingestellt werden, dass die Masse nach einer Impulsanregung überhaupt nicht mehr oszilliert und schnellstmöglich in die Ruhelage zurückkehrt (kritische Dämpfung, aperiodischer Grenzfall; s.u.).

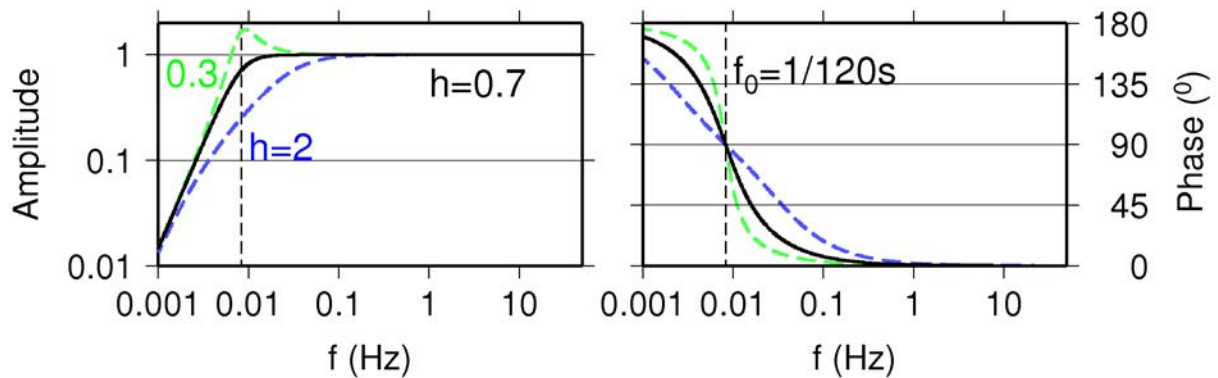


Abbildung 5.36: Übertragungsfunktionen (Nadelimpuls-Eingang, Amplituden- (links) und Phasenausgang (rechts), geschwindigkeitsproportional) eines STS2 Breitbandseismometers (120 s Eigenperiode). Die Dämpfung  $h$  des Seismometers ist normalerweise auf  $h = 0.7$  eingestellt. Zum Vergleich ist die Übertragungsfunktion für  $h = 0.3$  und  $h = 2$  dargestellt.

Die **Übertragungsfunktion** eines Seismometers gibt an, wie die Amplitude und Phase einer monofrequenten Anregung (Bodenbewegung) von dem Seismometersystem verstärkt und phasenverschoben wird. Die Übertragungsfunktion wird als Amplitude und Phase über die Frequenz aufgetragen. Sie läßt sich aus den Parametern des Sensors oder auch empirisch bestimmen. Abb. 5.36 zeigt die Übertragungsfunktion eines STS2 Breitband-Seismometers (allg. elektrodynamische Seismometer) für unterschiedlich eingestellte Dämpfungskonstanten  $h$  (siehe Kapitel 5.1). Ohne oder mit geringer Dämpfung hat man bei der Eigenfrequenz des Seismometers eine Amplitudenverstärkung, was unerwünscht ist. Die Dämpfung wird in der Regel auf  $h = 0.7$  eingestellt, da dann die Empfindlichkeit des Seismometers auch im Bereich der Eigenfrequenz nahezu konstant ist (Abb. 5.36). Für anregende Frequenzen kleiner als die Eigenfrequenz des Sensors fällt die Empfindlichkeit stark ab. (Abb. 5.36)

Äquivalent zur Übertragungsfunktion im Frequenzbereich kann die **Impulsantwort** des Seismometers im Zeitbereich betrachtet werden. Abb. 5.37 zeigt die Ausschwingkurve eines STS2 Breitbandseismometers nach einer Stufenanregung der Bodenverschiebung oder der Bodenbeschleunigung. Bei einer Dämpfung von  $h = 0.7$  und einer Stufenanregung in der Beschleunigung schwingt die Seismometermasse nach einer Impulsanregung nur unwesentlich nach. Für kleinere Dämpfungen misst man dominante Schwingungen

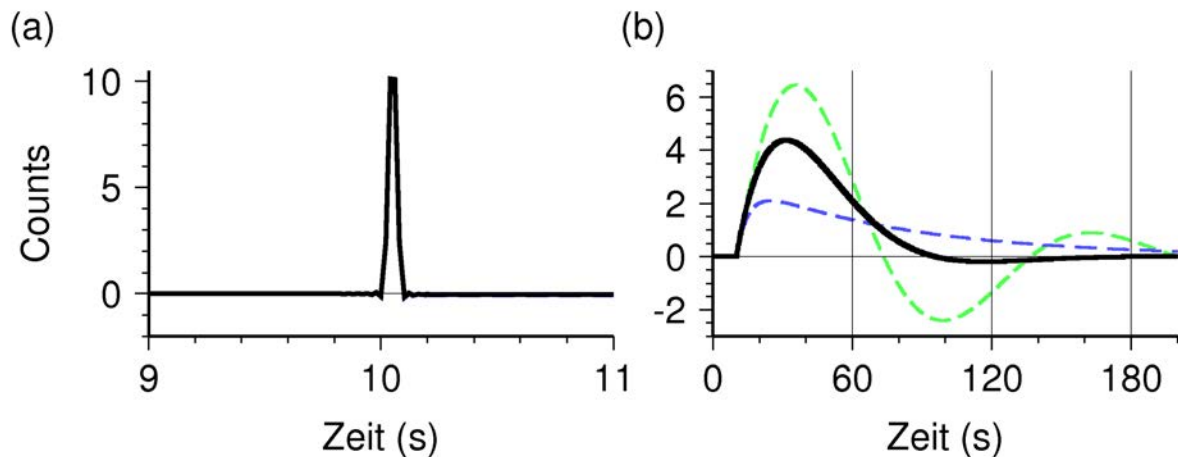


Abbildung 5.37: Theoretische Ausschwingkurve (Impulsantwort, Geschwindigkeitsproportional) eines STS2 Breitbandseismometers nach einer Stufenanregung der Bodenverschiebung (a) und der Bodenbeschleunigung (b) (zur Zeit 10 s mit einer Dauer von 0.1 s). Die schwarze, grüne und blaue Kurve gehören zu Dämpfungen  $h$  von 0.7, 0.3 und 2 (vgl. Abb 5.36).

mit der Eigenfrequenz des Sensors, und für  $h > 1$  werden Rückschwingungen zwar unterdrückt, jedoch benötigt die Masse sehr lange, bis sie wieder in die Ruhelage kommt (Abb. 5.37b). Eine Stufenanregung der Bodenverschiebung (Abb. 5.37a) ist äquivalent zu einer Impulsanregung der Bodenschwinggeschwindigkeit, wie sie z.B. für Raumwellen im Nahfeld und Fernfeld nach einem Erdbeben erwartet wird. Das Seismometer registriert in diesem Fall einen kurzen Puls, nahezu unabhängig von der realisierten Dämpfung  $h$ . Abb. 5.37b zeigt die Antwort des Seismometersystems auf eine Stufenanregung der Bodenbeschleunigung. Diese Art der Anregung kann für die Horizontalkomponenten durch eine kleine Neigung des Sensors entstehen. Der Sensor reagiert mit einer Schwingung mit Perioden im Bereich der Eigenfrequenz des Sensors. Neigungen des Erdbodens können z.B durch Variationen des Auflastdrucks der Atmosphäre bei Wetterwechsel entstehen, und stellen für die Horizontalkomponenten eines Breitbandseismometers eine der Hauptstörquellen bei der Aufzeichnung dar.

Aus technischen Gründen hat man in der Seismologie lange Zeit Seismographen eingesetzt, die zur Registrierung von entweder hochfrequenten ( $> 1 \text{ Hz}$ ) oder von tieffrequenten Signalen ( $< 0.1 \text{ Hz}$ ) gebaut wurden (**kurzperiodische** und **langperiodische** Seismographen, z.B. WWSSN-SP und WWSSN-LP). In Abb. 5.38 sind die Unterschiede solcher Systeme zu erkennen. Bessere breitbandigen Systeme (BB) wurden etwa ab 1977 eingeführt und erhalten die größtmögliche Information der Wellenformen über den



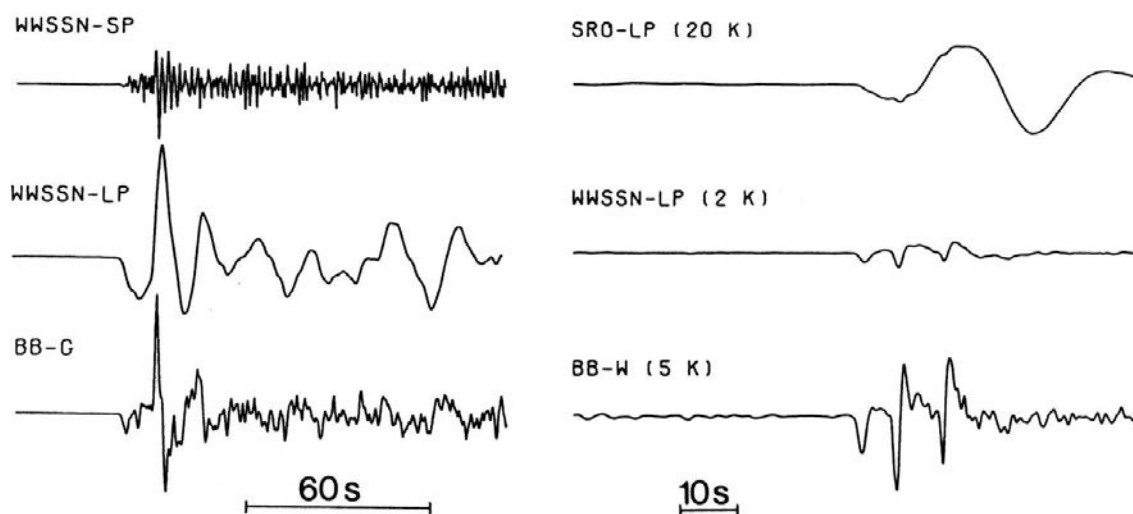


Abbildung 5.38: Vergleich von Seismometerspuren mit unterschiedlicher Übertragungsfunktion für ein Beben vom 4 März 1977 aus Bucharest (links), und ein Fiji Beben vom 23 April 1979 (rechts). Alle Spuren wurden in Gräfenberg bei Erlangen aufgenommen. BB ist eine Breitbandstation, WWSSN-LP und SP die lang- und kurzperiodische Version eines World Wide Standard Seismograph Network, und SRO-LP eine Global Digital Seismic Network Station (aus Seidl, 1980; Harjes et al., 1980).

gesamten Frequenzbereich. Die ersten Breitbandseismometer wurden am Gräfenberg Array in Oberfranken eingesetzt (Streckeisen STS1). Heutzutage werden in fast allen seismologischen Observatorien Breitbandseismometer eingesetzt.

Das STS1- und STS2-Seismometer (kapazitiver Wegaufnehmer) von Wieland und Streckeisen (Abb. 5.35c) ist ein modernes **Breitbandinstrument**, das im Deutschen Seismologischen Regionalnetz (GRSN) und weltweit in Observatorien verwendet wird. Das mechanische Prinzip ist gleich wie beim Pendelseismometer (Abb. 5.35a), nur dass eine Blattfeder verwendet wird. Die hohe Empfindlichkeit und Dynamik erhält der Sensor durch den Feedback-Mechanismus. Anstatt dass die Masse aus der Ruhelage ausgelenkt wird, sorgt eine elektronische Feedback-Steuerung durch Anlegen einer Gegenspannung auf die Induktionsspule dafür, dass die Masse „in Ruhe“ bleibt. Gemessen wird nicht die Ausgangsspannung des Wegaufnehmers, sondern die Gegenspannung zum Verhindern der Auslenkung der Schwingmasse. Dieser oder ähnliche Feedback-Mechanismen vergrößern die Empfindlichkeit und Bandbreite eines Sensors.

Permanente Breitbandstationen an Observatorien werden in Gebäudekellern auf von Grundmauern entkoppelten Betonsockeln installiert, oder in speziell gebauten Betonbunkern oder Bohrlöchern. Für temporäre, seismologische Feldmessungen, z.B. zur Untersuchung von Erdbeben, werden einfachere Installationen aufgebaut. Zum Beispiel

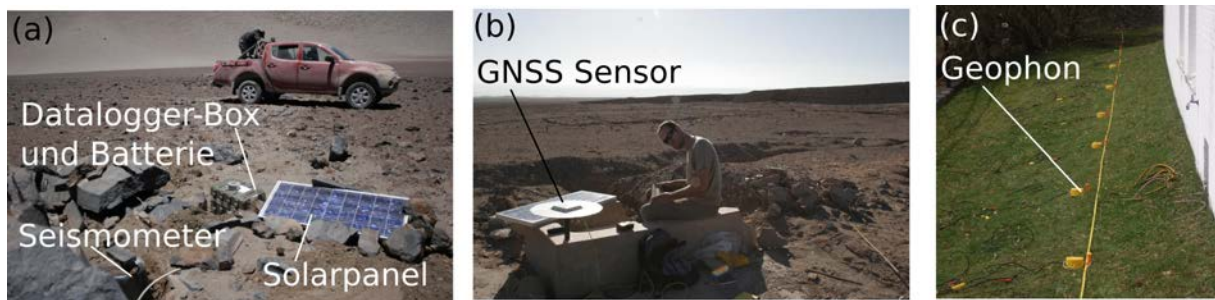


Abbildung 5.39: Beispiele für seismische Feldmessungen: (a) Aufbau einer temporären, breitbandigen Feldstation in den Anden (b) Aufbau eines GNSS Sensors auf einem Beton Fundament (c) Geofon-Kette im Stadtgebiet von Hamburg zur Messung von Scherwellenseismik (Fotos: T. Dahm).

vergräbt man die Seismometern in der Erde und schützt diese vor Temperatur, Feuchtigkeit und Wind (z.B. Abb. 5.39a). Eine freistehende Station wird z.B. über Solarpanels und Batterien versorgt. Zur Untersuchung sehr langperiodischer Signale, z.B. interseismische Deformationen oder koseismische Verschiebungen nahe der Verwerfung, werden neben Neigungs- Creep- und Strainmetern auch kontinuierlich messende GPS-Sensoren installiert (Continuous GNSS (Globales Navigations Satelliten System) Feldstation, Abb. 5.39b) Einzelstationen in Observatorien wie auch Feldstationen erhalten ihre Zeitbasis über die Synchronisation des Dataloggers mittels einer Satelliten GPS-Antenne.

In der angewandten Seismik arbeitet man mit **Geophonen** oder **Geophon-Ketten** (Abb. 5.35b). Geophone sind leichte, robuste, hochfrequente Seismometer mit einer **Eigenfrequenz**, zwischen 7 und 30  $Hz$  für Reflexion- und zwischen 4 und 10  $Hz$  für Refraktionsseismik. Eine typische Messung besteht aus vielen, linienartig angeordneten Geophonen, die z.B. über ein Mehrkanalkabel mit der Registriereinheit verbunden sind (Abb. 5.39c). Alle Kanäle haben dadurch die gleiche Zeitbasis der zentralen Registriereinheit.

Für seismologische Messungen am Meeresboden werden Ozeanbodenstationen verwendet. Freifall-Stationen werden an gewünschter Stelle ins Wasser gesetzt, sinken dort ab, und zeichnen autonom für einen vorgegebenen Zeitraum die Bodenbewegung am Meeresboden auf. Die Station muß am Meeresboden mit elektrischer Spannung versorgt werden (Batterien) und die innere Uhr muss hochgenau laufen. Anspruchsvoll ist auch eine gute Ankopplung des Sensors an den Meeresboden zu erreichen. Abb. 5.40 zeigt eine „Hamburger“ Ozeanbodenstation beim Absetzen. Neben Sensoren und Datalogger benötigen Freifall-Ozeanbodenstationen noch einen Trägerrahmen, einen abwerfbaren Anker und ein intelligentes Release-System, Auftriebskörper und Bergungshilfen wie

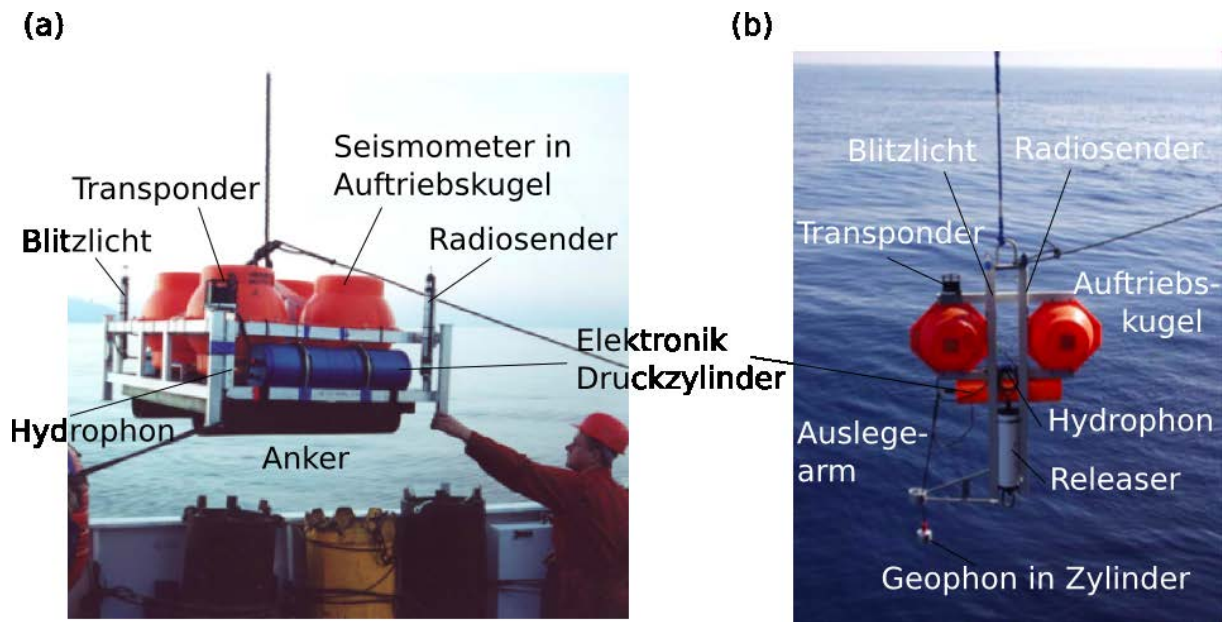


Abbildung 5.40: (a) Breitbandige seismische Ozeanbodenstation (Hamburger OBS 2000) beim Absetzen im Tyrrhenischen Meer. (b) Absetzen einer kurzperiodischen Ozeanbodenstation (Hamburger GFK-OBH), wie sie für die marine Refraktionsseismik verwendet wird. Die Komponenten sind jeweils beschriftet. (Fotos: T. Dahm, 2000).

Blitzer und Sender.

Für Druckmessungen im Wasser werden **Hydrophone** eingesetzt. In der Regel bestehen Hydrophone aus **synthetischer piezoelektrischer Keramik** (Kristallen) wie z.B. Barium-Titanat. Ein Keramikblättchen erzeugt bei Biegung eine elektrische Spannung zwischen gegenüberliegenden Seiten. Scheibenhydrophone sind im Prinzip zwei kreisförmige Blättchen, die auf die Stirnseiten eines Hohlzylinders montiert sind (Abb. 5.41a). Die elektrischen Anschlüsse an beiden Blättchen werden so verbunden, dass eine Biegung nach innen ein erhöhtes Spannungssignal erzeugt. Wird das Hydrophon einer Beschleunigung ausgesetzt, dann biegen sich beide Blättchen in dieselbe Richtung und das Signal löscht sich aus (Abb. 5.41a). Ein zylindrisches Hydrophon besteht aus einer dünnen, zylindrischen Keramik, die an beiden Enden geschlossen wird (Abb. 5.41b). Ein Druckanstieg auf der Außenfläche erzeugt eine elastische Spannung im Keramikzylinder und dadurch eine elektrische Spannung zwischen der inneren und äußeren Oberfläche.

Hydrophone werden in der marinen Seismik in langen **Streamer-Ketten** eingesetzt, die in 10 bis 20 m Wassertiefe hinter dem Schiff geschleppt werden (Abb. 5.42). Der Streamer ist in Sektionen (25 - 75 m) unterteilt, und jede Sektion besteht aus mehreren Gruppen von Hydrophonen (ca. 35 Hydrophone, gleichförmig verteilt innerhalb 7 bis 25 m), deren Ausgänge direkt überlagert werden. Durch die Gruppenbildung erreicht man,

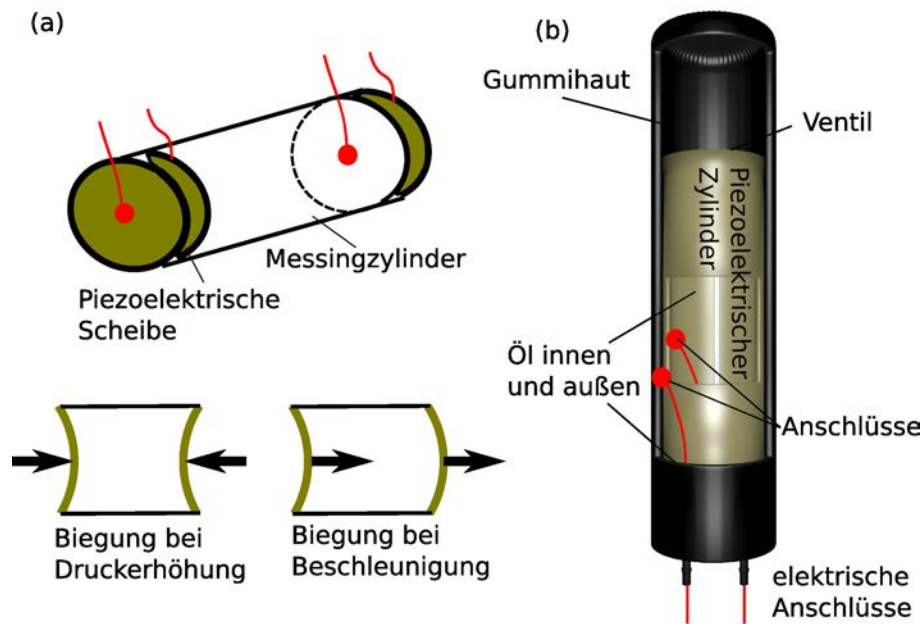


Abbildung 5.41: Prinzip eines Scheibenhydrophons (disc hydrophone) für Flachwasseranwendungen in einem Streamer (a) und eines zylindrischen Hydrophons für Hochdruckanwendungen in der Tiefsee (b). Beim Scheibenhydrophon sind die Anschlüsse an die Piezoscheiben an der Stirnfläche des Zylinderrahmens so verdrahtet, dass sich die Spannungseffekte durch eine horizontale Beschleunigung destruktiv und die durch eine Druckzunahme positiv überlagern. Beim Tiefseehydrophon ist der Piezozylinder von innen und außen von inkompressiblem Öl umgeben, welches bei langsamen Druckschwankungen durch ein dünnes Lochventil fließen kann. Durch den Druckausgleich verhindert man das Zerquetschen des Hydrophons beim Absinken an den Meeresboden.

dass senkrecht von unten einfallende Wellen verstärkt und horizontal laufende Wellen entlang des Streamers abgeschwächt werden. Die Hydrophone und die Kabelverbindungen liegen innerhalb eines Gummi- oder Neoprenschauches (ca. 9 cm Durchmesser), der mit einem spezifisch leichteren Fluid als Wasser gefüllt ist (z.B. Öl), so dass der Streamer auftriebsneutral im Wasser schwebt. 1994 hatten die meisten Streamer bis zu 500 Kanäle und eine Länge bis zu 6 km.

#### ***Künstliche seismische Quellen:***

In der aktiven Seismik werden kontrolliert seismische Wellen angeregt. Das Ziel ist, eine definierte Wellenenergie mit definierter Abstrahlcharakteristik und möglichst pulsformigen Signalen, oder alternativ mit wohl definierter Zeitfunktion anzuregen.

**Spaltungen:** An Land sind Dynamitspaltungen in Bohrlöchern weit verbreitet. Die



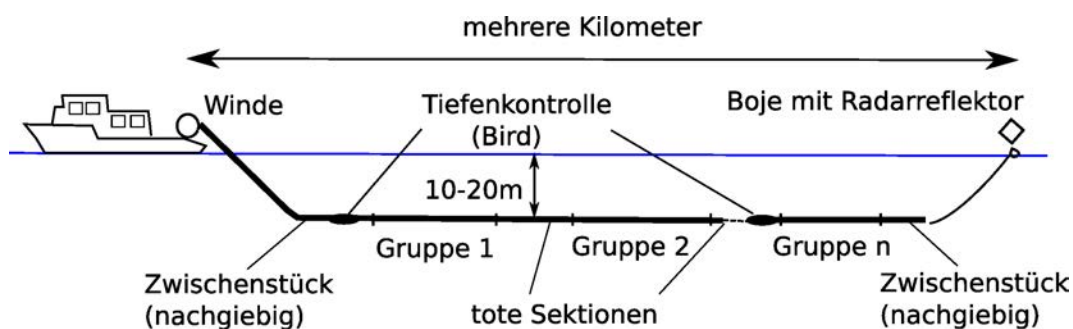


Abbildung 5.42: Skizze der wichtigsten Elemente eines marinen Mehrkanalstreamers.

Bohrlöcher sind meist zwischen 6 und 30 m tief mit einem Durchmesser von ca. 10 cm. Die Löcher werden z.B. mit einem portablen Bohrgerät gebohrt. Die explosive Ladung wird am besten unterhalb des Grundwasserspiegels gezündet, weil dann die Ankopplung besser ist. Ebenso werden die Löcher vor der Sprengung verfüllt. Gezündet werden bis zu mehreren Kilogramm Sprengstoff (1 - 50 kg). Zu Beginn der seismischen Exploration waren Seesprengungen ebenso üblich; darauf wird heutzutage meist verzichtet.

**Fallgewichte und andere kleine Quellen:** Fallgewichte sind einfache und wenig gefährliche Quellen, die aber keine große Eindringtiefe haben und nur für flachseismische Fragestellungen eingesetzt werden. Bei den größten Ausführungen werden immerhin bis zu 3 t von etwa 3 m Höhe fallen gelassen. Unterschiedliche Quellentypen für die Flach- und Ingenieurseismik sind z.B. in [Sheriff and Geldart \(1995\)](#) aufgelistet.

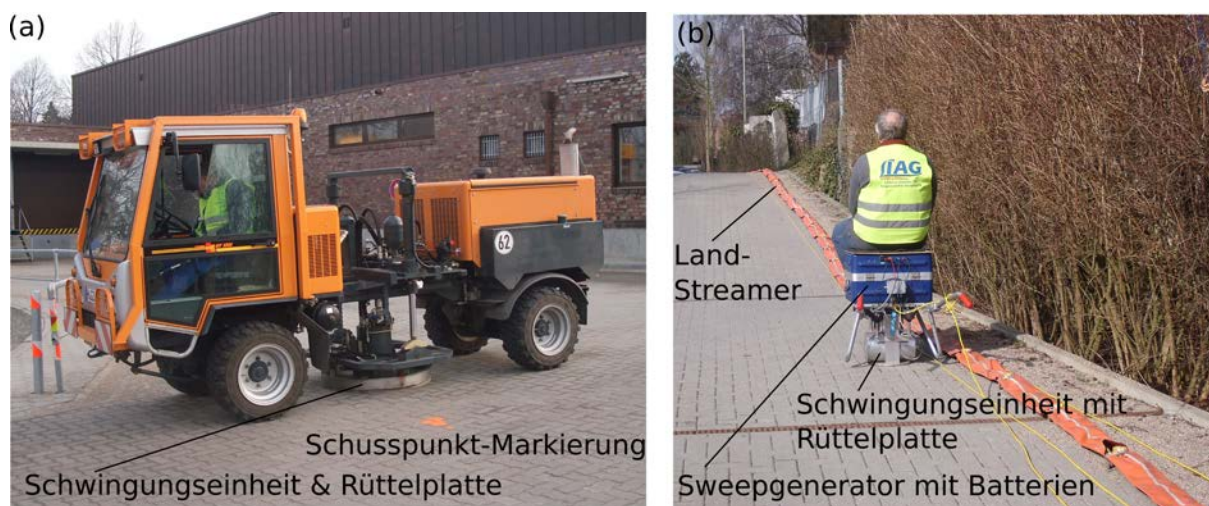


Abbildung 5.43: Beispiele für Vibratorenmessungen in urbanen Gebieten ([Krawczyk et al., 2011](#)). (a) P-Wellen Vibratorsystem (MHV 2.7, Leibniz Institut für Angewandte Geophysik, Hannover, LIAG, ca 3t, 27 kN, 16-500 Hz). (b) Elektro-dynamisches S-Wellen Vibratorsystem (Elvis, LIAG, ca. 100 kg, 20-500 Hz). Fotos: T. Dahm.

**Vibratoren:** Eine Alternative zu Sprengungen an Land bieten Vibratoren. Die Vibrator Schwingungseinheit wird auf einen LKW oder ein kleineres Fahrzeug montiert (Abb. 5.43) und regt über eine Rüttelplatte einen langen (5 bis 20 s) Sweep an, d.h. eine Sinusschwingung, deren Frequenz sich langsam und gleichförmig innerhalb einer definierten Bandbreite erhöht (z.B. 20-500 Hz). Die mit einer Sweep-Anregung aufgezeichneten Bodenbewegungen können nachträglich beim Prozessing auf das Signal einer impulsförmigen Quelle rückgerechnet werden. Die Vorteile eines Vibrators sind, dass die Quelle auch in unmittelbarer Nähe zu empfindlichen Strukturen oder Gebäuden eingesetzt werden kann. Da ein Vibrator effektiv schwächere Wellen als z.B. eine Sprengung anregt, wird der Sweep so oft an einem Anregungspunkt (Schusspunkt) wiederholt und mit dem vorhergehenden überlagert, bis das Signal-Rausch-Verhältnis ausreichend ist. Beim Aufsummieren überlagern sich die korrelierten Signale des Sweeps konstruktiv und unkorreliertes Rauschsignal destruktiv.

**Marine Airgun und Watergun:** In der marinen Seismik sind Airguns am weitesten

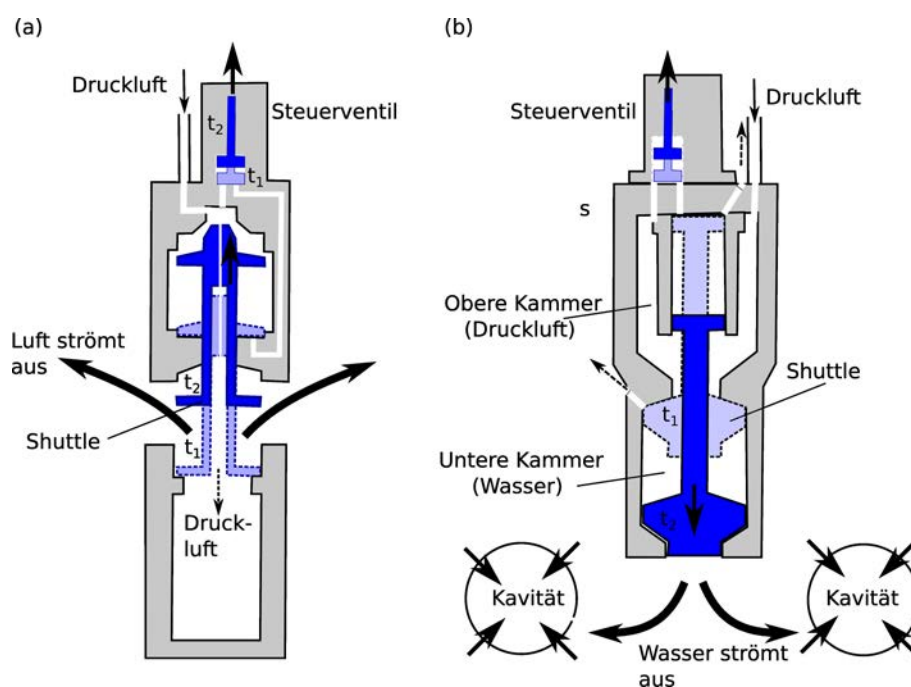


Abbildung 5.44: Schemazeichnung einer Air- (a) und Watergun (b). Doppelventil (Shuttle) und Steuerventil sind für Zeitpunkte  $t_1$  (geschlossenen) und  $t_2$  (öffnen, Entladung) eingezeichnet.

verbreitet. Die Airgun „schießt“ Luft unter hohem Druck (14 bis 70 MPa) ins Wasser (Abb. 5.44a). Durch die plötzlich entstehende Luftblase werden Druckpulse angeregt. Der Druck wird durch Kompressoren auf dem Schiff erzeugt. Die Airgun kann in kurzen Abständen feuern, so dass kontinuierlich während der Schiffsmessung Signale aufgezeich-



net werden. Ein Hydrophon nahe der Airgun zeichnet die abgestrahlte Wellenform auf, was für die spätere Datenanalyse wichtig ist. Die Gun besteht aus zwei luftgefüllten Kammern A und B, die beide miteinander verbunden sind und unter hohem Druck stehen. Ein Doppelventil (Shuttle) versperrt die Verbindung ins Wasser. Das Shuttle-Ventil ist so gebaut, dass während des Ladevorgangs die Kraft auf die schließende Flanke (C) größer ist als auf die öffnende (D, da D eine kleinere Auflagefläche hat). Zum Entladen wird ein kleines Ventil geöffnet (Steuerventil), das etwas Druck auf die Unterseite der schließenden Flanke C bringt, so dass sich das Shuttle-Ventil öffnet und die Luft unter hohem Druck ins Wasser strömt (etwa innerhalb 1 - 4 ms).

Die entstehende Luftblase oszilliert stark (Abb. 5.45a), was unerwünscht ist. Man behilft sich, indem z.B. mehrere Airguns in definiertem Abstand zueinander zu einem Array zusammengebunden und zu definierten Zeiten abgefeuert werden (Abb. 5.45b).

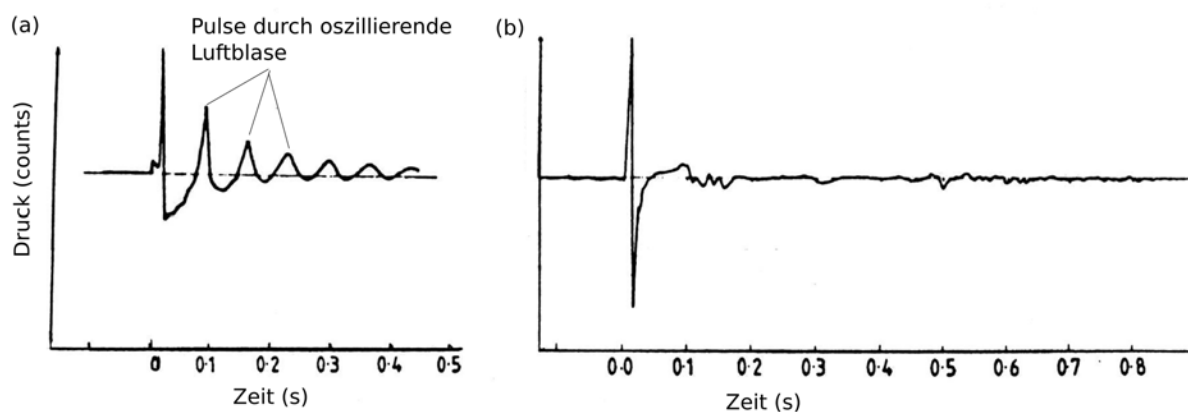


Abbildung 5.45: (a) Signalform einer einzelnen Airgun gemessen in 1 m Abstand. (b) Signalform eines Arrays aus 7 Airguns in optimierten Abständen und Schusszeiten zur Unterdrückung periodischer Codasignale (modifiziert aus Ziolowski et al., 1984).

Eine Watergun besteht aus einer oberen Kammer, die unter Druckluft steht, und einer unteren, wassergefüllten Kammer (Abb. 5.44b). Ein ähnlicher Steuermechanismus wie bei der Airgun führt zur schnellen Bewegung des Shuttle Ventils nach unten, so dass innerhalb von kurzer Zeit das Wasser aus der unteren Kammer in das umgebende Wasser gedrückt wird. Die extrem schnell fließende Wasserfront erzeugt allerdings eine Kavität (Vakuum) hinter sich, welche nach kurzer Zeit in sich zusammenfällt (implodiert) und dadurch seismische Energie anregt. Da keine oder kaum Luft ins Wasser gepumpt wird, wird die unerwünschte Gasblasenoszillation minimiert.

### 5.4.3 Reflexionsseismik

**Box 5.4.3a, Mutter- und Speichergesteine im Norddeutschen Becken:**

In den geologischen Perioden des **Paläozoikums** (225-570 *Ma*, Tab. B.1) war Nordeuropa vor allem von Ozeanen bedeckt. **Faulschlamm-Ablagerungen** aus Algen und Plankton haben sich in Gebieten mit wenig Sauerstoffzufuhr und Wasserzirkulation gebildet. Der sedimentierte Schlamm wurde im Laufe der Zeit in größere Tiefen transportiert und bildet **Muttergestein für Erdöl**, welches sich unter hohem Druck und Temperatur aus dem Schlamm entwickelt hat. Im **Karbon** (225-350 *Ma*) und zu Beginn des Perms war das Meer zurückgedrängt und Nordeuropa mit dichten Wäldern überzogen. Absterbende Wälder und Pflanzen bildeten Rohmaterial für Kohle (**Braunkohle** 2.5-65 *Ma*, **Steinkohle** 280-350 *Ma*). Je tiefer die Schichten liegen und je älter sie sind, desto höher ist die Qualität der Kohle. Das **Perm** des Paläozoikums wird in Deutschland traditionell in **Rotliegendes** und **Zechstein** eingeteilt. Nach langer Festlandzeit, die im Karbon begann, drang das Meer im Gebiet des heutigen Nord- und Mitteldeutschlands wieder vor. Aus dieser Zeit stammen mächtige Zechsteinablagerungen. An der Basis der Meeresablagerungen liegt ein wirtschaftlich bedeutender Kupferschiefer, der auch als markanter und auffällig rot gefärbter Leithorizont zu erkennen ist (**Rotliegendes**). Das Rotliegende ist ein bedeutendes Speichergestein für Erdgas. Das **Zechstein-Meer** versalzte mit der Zeit und bildete mächtige Salzschiefer (Zechsteinsalze) als abdeckende Schichtung des Rotliegenden. Marine Sedimentablagerungen aus dem **Mesozoikum** (105-225 *Ma*) stellen ein weiteres **Muttergestein für Erdöl** in Nordeuropa dar (**Muschelkalk**), mit Speichergesteinen in den überliegenden **Kreiden**.

**Ziel:**

In der Reflexionsseismik will man ein hochaufgelöstes Abbild der Geschwindigkeiten und Dichten der tieferen Sedimente und Erdkruste erhalten, um zum Beispiel Sedimentsequenzen, Schichtaufwölbung (**Antiklinalstrukturen**), Diskordanzen (unter einem Winkel aufeinanderstoßende Schichten), Salzstöcke, geologische oder tektonische Grenzschichten, Verwerfungen oder ähnliches zu erkennen (Abb. 5.46). In solchen strukturellen Abbildungen kann man Erdöl- und Erdgasfallen in potenziellen Speichergesteinen (Box 5.4.3a). und damit Lokationen von Öl- und Gasfeldern ausfindig machen. **Erdölfallen** sind stratigraphische oder tektonische Situationen, bei denen das poröse, öl- und gasführende Speichergestein eine Hochlage aufweist oder von undurchlässigen Schichten gekappt wird (Abb. 5.46). Über Bohrungen können Erdöl und Erdgas gefördert werden (Box 5.4.3b).

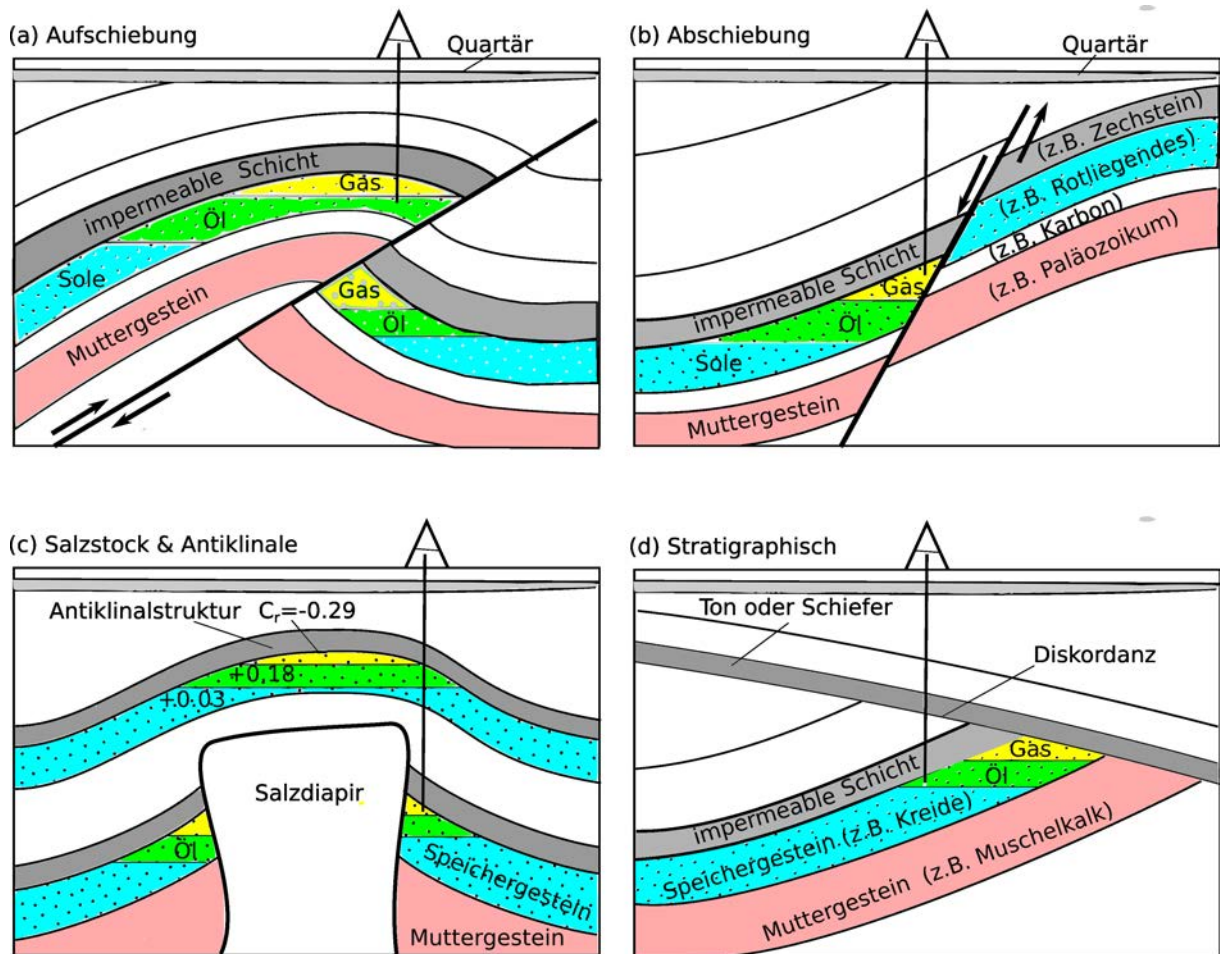


Abbildung 5.46: Vereinfachte Darstellung typischer Erdöl- und Erdgasfallen an Aufschiebungen (a), Abschiebungen (b), Salzdiapiren und Antiklinalstrukturen (c) und stratigraphischen Diskordanzen (d). Das Muttergestein (rot) und die impermeablen Deckschichten (grau) sind eingefärbt. Das Speichergestein ist durch Punkte markiert, wobei die typische Fluidschichtung in dem porösen Speichergestein aus Sole (blau), Öl (grün) und Erdgas (gelb) besteht. In (c) sind Reflexionskoeffizienten  $C_r$  abgeschätzt.

### Messgeometrie und -prinzip

Schiffe setzen heutzutage einen Echolot zur Messung der Wassertiefe ein. Das Messprinzip ist einfach und entspricht der Zero-Offset Geometrie (Nullauslage, vgl. Georadar in Kapitel 5.3). Ein Wasserschall-Puls wird unter dem Schiff ausgesendet und am Meeresboden reflektierte Wellen werden unter dem Schiff wieder aufgezeichnet. Die Laufzeit  $t_0$  (Lotzeit) der reflektierten Welle hängt von der Geschwindigkeit der Kompressionswelle im Wasser,  $v_p$ , und von der Wassertiefe  $h$  ab,  $t_0 = 2h/v_p$ . Ist  $v_p$  bekannt, dann kann  $h$  direkt bestimmt werden.

**Box 5.4.3b, Die Entwicklung und Förderung von Erdöl und Erdgas:**

Das Ursprungsmaterial des Faulschlammes wandelt sich unter hohem Druck und Temperatur erst in Kerogen und dann in Erdöl und auch Erdgas um. Dabei wird das Volumen vergrößert und die Dichte nimmt ab, was zu einem Druckanstieg im Porenraum führt. Dieser bewirkt, dass das Erdöl aus dem Muttergestein gepresst wird. Das Erdöl migriert aufgrund des Dichteunterschieds und durch Druckgradienten nach oben und kann teilweise mehrere 100 km in horizontale Richtung vom Muttergestein wegwandern. Druckgradienten entlang von Brüchen und Scherzonen stellen einen wichtigen Kontrollmechanismus für die Migration des Erdöls dar. Benachbarte poröse Formationen können das Erdöl wie ein Schwamm aufnehmen (primäre Migration). Tonschichten bilden Barrieren für die Migration. Eine konventionelle **Lagerstätte** erfordert ein **Speichergestein** mit Porositäten zwischen 5-30% und entsprechende abdichtende Schichten. Das leichtere Erdgas dringt ganz nach oben und trennt sich vom Öl, das sich selbst über dem Salzwasser ansammelt.

Die **Eruptivförderung** von Erdöl kann durch den Sprudelflaschen-Effekt erklärt werden. Durch die Druckabnahme im Reservoir bei Förderung löst sich Gas, dehnt sich dabei aus und erhöht den Druck, so dass das Erdöl von alleine das Steigrohr aufsteigt. **Sekundäre Förderverfahren** sind dann nötig, wenn die Eruptivförderung nicht mehr möglich ist. Hierunter fällt das **Pumpen** und die **Gasliftförderung**, bei der leichtes Gas im Steigrohr beigemischt wird. Ebenso kann Sole-Wasser unterhalb des Ölspiegels eingepresst werden. Beim Erdgas ist die **Eruptivförderung** die Regel. Bei modernen Horizontalbohr- und Fracking-Verfahren kann die Durchlässigkeit einer Lagerstätte durch die Schaffung von künstlichen Fließwegen (Risse mit mehreren 100 m Länge) erhöht werden. Die Fracking Flüssigkeit wird häufig mit Spezielsand "beladen", um den erzeugten Porenraum offen zu halten.

Ziel der Reflexionsseismik ist die Einsätze von reflektierten Wellen zu messen. Der **seismische Reflexionskoeffizient**  $C_r$  einer Schichtgrenze gibt an, wie groß die **Amplitude der reflektierten Welle** ( $u_1$ ) im Verhältnis zur Amplitude der einfallenden Welle ( $u_0$ ) ist (vgl. Abb.5.26). Für den **senkrechten Einfall** ( $\varphi = 0^\circ$ ) der P-Welle gilt

$$C_r = \frac{u_1}{u_0} = -\frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}, \quad (5.26)$$

wobei  $\rho_k$  und  $v_k$  die Dichte und die Kompressionswellengeschwindigkeit der Schicht  $k$  ist. Das Produkt  $\rho v$  wird **akustische Impedanz** genannt. Die Amplitude der reflektierten Welle ist groß, wenn  $|C_r|$  und damit der **Impedanzkontrast** zwischen den beiden

Tabelle 5.2: Beispiele für Reflexionskoeffizienten nach (5.26)

Schichtgrenze	$v_1$ (km/s)	$\rho_1$ (g/cm <sup>3</sup> )	$v_2$ (km/s)	$\rho_2$ (g/cm <sup>3</sup> )	$C_r$
Kruste / Mantel	8.1	3.3	6.8	2.9	0.15
Sediment / Salz	3.8	1.9	4.2	2.2	0.12
Wasser / Sediment	1.45	1.0	2.5	2.2	0.58

Schichten groß ist.  $|C_r|$  ist Null, wenn  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$  ist. Es gilt  $|C_r| \leq 1$ <sup>69</sup>, wobei  $C_r$  auch negativ sein kann. Für schrägen Einfall hängt der Reflexionskoeffizient auch vom Einfallswinkel ab (vgl. 5.25 für Reflexionswinkel<sup>70</sup>).

Tabelle 5.2 gibt einige Beispiele für Reflexionskoeffizienten. Demnach ist  $C_r$  an der Kruste-Mantel Grenze etwa 0.15, für eine oberflächennahe Sediment-Salz Grenze etwa 0.12, und an der Wasser-Sediment Grenze etwa 0.58. Die Schichtgrenzen in Sedimentbecken zwischen dem Deckgestein und dem Erdöl- und Erdgasführenden Speichergestein sind ebenfalls sehr klein (Abb. 5.46c), so dass Reservoirs nur indirekt über strukturelle Abbildungen des Untergrunds erkannt werden können. Die Reflexionen in der Kruste haben also häufig Amplituden von weniger als 10% der einfallenden Welle. Hinzu kommt, dass die Amplituden der Wellen mit wachsendem Laufweg (Tiefe) generell abnehmen. Im Vergleich zum Echolot ist es also schwieriger, Reflexionen zu messen.

Um trotzdem Reflexionen in verrauschten Spuren zu erkennen und auszuwerten, werden

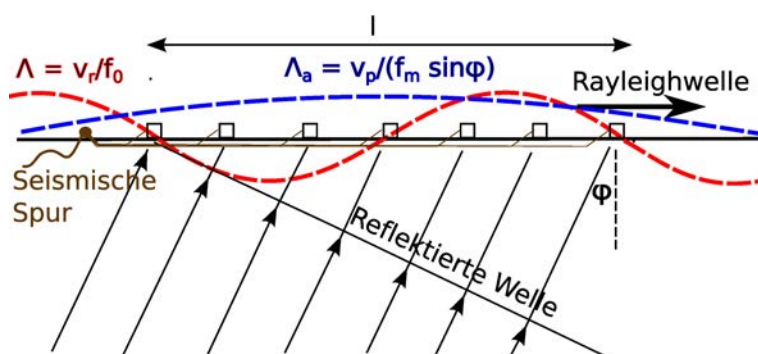


Abbildung 5.47: Bündelung von 7 Geophonen zur Abschwächung von Oberflächenwellen. Um Oberflächenwellen effizient abzuschwächen sollte die Bündellänge  $l$  größer als die halbe Wellenlänge der Rayleighwelle (rot gestrichelt),  $l > \Lambda = v_r/f_0$ , und kleiner als ein Viertel der scheinbaren horizontalen Wellenlänge der Reflexion (blau gestrichelt) sein,  $l < 0.25\Lambda_a = 0.25v_p/(f_m\varphi)$ , wobei  $f_m$  die maximale Signalfrequenz,  $f_0$  die dominante Frequenz der Rayleighwelle und  $\varphi$  der Einfallswinkel der reflektierten P-Welle ist.

<sup>69</sup> Der Transmissionskoeffizient  $T = C_r + 1$  liegt im Bereich zwischen 0 und 2

<sup>70</sup> Für nicht-konvertierte Phasen ist der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel



unterschiedliche Ansätze verfolgt:

1. Die Quelle wird nicht nur einmal, sondern mehrmals hintereinander "gezündet" (z.B. Vibrator). Die Signale nach jeder Anregung werden überlagert (**gestapelt** oder **stacking**). Unkorrelierte Rauschsignale werden dadurch im Vergleich zur korrelierten Signalstärke der Reflexionen abgeschwächt.
2. Eine wichtige Störquelle sind hochfrequente Oberflächenwellen durch Verkehr, Industrie oder die anregende Quelle selbst. Durch die Bündelung der Signale von mehreren Geophonen innerhalb einer Bündelauslage der Länge  $l$  werden die Störsignale horizontal laufender Oberflächenwellen abgeschwächt (z.B. Rayleighwellen, vgl. Abb. 5.47). Ein ganz ähnliche Bündelung wird bei Hydrophonstreamern eingesetzt.
3. Es wird eine endliche Auslage mit einer Vielzahl von gleichabständigen Geophonen (Hydrophonen) aufgestellt (Mehrkanalregistrierung). Die Schusspunkte der Quelle werden nicht nur an eine sondern nacheinander an mehrere Positionen entlang des Profils gelegt, so dass für einzelne Untergrundpositionen eine Mehrfachüberdeckung mit Strahlen entsteht. Die Reflexionen einer Messung zeigen sich auf benachbarten Geophonspuren als korrelierbare Einsätze. Mit Hilfe von Stapelverfahren kann einerseits die seismische Geschwindigkeiten als Funktion des Profils und der Tiefe bestimmt werden, und andererseits ein Profil aus konstruierten, scheinbaren Nullauslagen mit verbessertem Signal-Rausch-Verhältnis errechnet werden.

Für die Interpretation der Reflexionsseismik und ein weiterführendes Processing strebt man Seismogramm Sektion entlang von Linienprofilen an, die Aufzeichnungen von Nullauslagen zeigen (vgl. Georadar). Um Ansatz 3 zu realisieren werden jedoch endliche Auslagen bis zu mehreren Kilometer Länge realisiert (Geophone oder Hydrophone stehen entfernt zur Quelle). Man benutzt unterschiedliche Messanordnungen für Empfänger und Quellen wie **Common Shot Gather**, **Common Receiver Gather** oder **Common Midpoint Gather** (Abb. 5.48). Die Quellen können auch seitlich versetzt zum Empfängerprofil gezündet werden. Generell müssen alle Empfänger- und Quellpositionen eingemessen werden. Auslagenlänge, Quell- und Empfängerabstand, Anzahl der Sensoren, Aufzeichnungsdauer und Abtastrate wird der jeweiligen Problemstellung angepasst, so dass die Eindringtiefe, Geschwindigkeitsauflösung und räumliche Auflösung von Strukturen gewährleistet wird. Die Aufzeichnungszeit nach jedem Schuss muss lang genug sein, um die Einsätze von den tiefsten, interessierenden Schichtgrenzen aufzuzeichnen. Eine lange Auslage verbessert die Geschwindigkeitsbestimmung, sollte aber nicht so groß gewählt werden, dass sogenannte refraktierte Wellen die Reflexionen überholen. Als Faustregel wird die Auslagenlänge  $l_{\text{Auslage}}$  etwa so groß wie die Tiefe  $h$



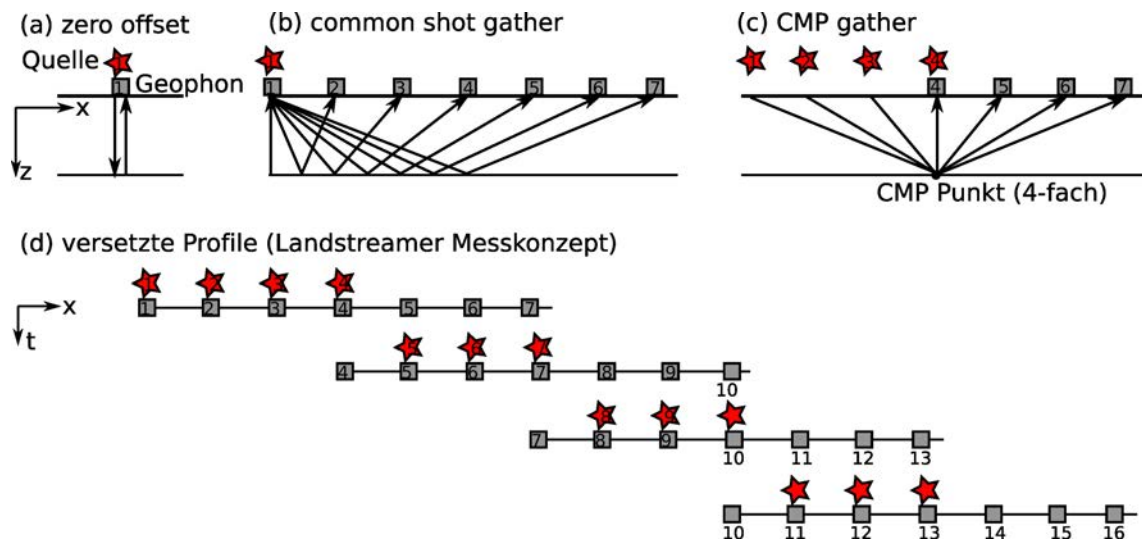


Abbildung 5.48: Messanordnungen in der Reflexionsseismik: (a) Nullauslage (zero offset). (b) Einzelschuss Anordnung (Common Shot Gather) mit einer Quelle am unteren Ende. Bei einem Common Receiver Gather hat man einen Sensor und mehrere Quellen entlang eines Profils (typisch für marine und amphibische Experimente). (c) Common Midpoint Geometrie (CMP Gather) für eine Auslage (Spread) von 7 Geophonen und einer Mehrfachüberdeckung 4. Durch Umsortierung werden Quell-Empfänger-Paare so zusammengestellt, dass alle Reflexionen den gleichen Mittelpunkt (CMP) treffen. (d) Messschema einer Landstreamer Reflexionsseismik mit einer Länge von 7 Geophonbündeln. Für die liegende Auslage werden nacheinander Quellpunkte bis zur Mitte des Profils abgeschossen. Danach wird die Auslage um die halbe Streamerlänge weiter gezogen und wieder mit wandernden Quellpositionen vermessen (roll-over Messung). Nach der Messung kann durch Umsortierung der Aufzeichnungen ein CMP Gather über die gesamte Profillänge konstruiert werden.

des tiefsten Reflektors gewählt.

Ein geringer Sensorabstand erlaubt die Rekonstruktion des Wellenfeldes bei kurzen Wellenlängen (hohen Frequenzen), erhöht also die räumliche Auflösung der Strukturen im Untergrund. Generell gilt, dass die scheinbare horizontale Wellenlänge der Reflexionsstrahlen ( $\Lambda_a$ ) von mindestens zwei Empfängern (Kanälen oder Bündelgruppen) abgetastet werden sollte. Bei der Reflexionsseismik arbeitet man mit Signalfrequenzen  $> 20 \text{ Hz}$ <sup>71</sup>. Für sehr oberflächennahe Problemstellungen werden maximale Signalfrequenzen bis  $250 \text{ Hz}$  realisiert. Die kleinste zu erwartende Wellenlänge der P-Welle für gesättigte, unverfestigte Sedimente beträgt dann etwa  $\Lambda \approx 1500 \text{ m/s} / 250 \text{ Hz} = 6 \text{ m}$ . Die scheinbaren horizontalen Wellenlängen  $\Lambda_a$  eines direkt von unten auftauchenden Strahls ist unendlich. Taucht die Welle schräg unter dem Winkel  $\varphi$  an der Oberfläche

<sup>71</sup>Die gewählte Abtastfrequenz der Messung muss jedoch mindestens das Doppelte der maximalen Signalfrequenz sein.

auf, dann ist  $\Lambda_a \approx \Lambda / \sin \varphi$  (vgl. Abb. 5.47). Um z.B. die Reflexion eines unter dem Neigungswinkel  $\delta$  liegenden Reflektorsegments noch aufzulösen zu können, sollte der maximale Stationsabstand  $0.5\Lambda_a / \sin \delta = 0.5\langle v_P \rangle / (f_{\max} \sin \delta)$  sein. Für  $45^\circ$  geneigte Schichtreflexionen in den allerersten Sedimenten schätzt man damit bei  $250 \text{ Hz}$  einen Empfängerabstand (Abstand der einzelnen Geophonbündel) von etwa  $2 \text{ m}$  ab. Das ist sehr anspruchsvoll und erfordert zur Realisierung i.d.R. Landstreamer.

Die Auflösung von Reflektorsegmenten in der Tiefe  $h$  (Lotzeit  $t_0$ ) wird über den Radius der ersten Fresnelzone abgeschätzt wie  $r_{\text{Fresnel}} = \sqrt{h\Lambda/2} = 0.5v_P \sqrt{t_0/f_{\max}}$ . Der Empfängerabstand sollte auch mindestens die Hälfte der Fresnelzone betragen.

Die Quellen werden im besten Fall in die Mitte der Geophonauslage gelegt, um geneigte Schichten gut zu erkennen und eine Mehrfachüberdeckung auch an den Enden des Profils zu gewährleisten. Aufgrund der endlichen Zahl von Kanälen (oder bei marinen Streamermessungen) werden häufig einseitige Quellpositionen an einem Ende der Auslage realisiert. Die Quelle wird dann z.B. schrittweise in Profilrichtung versetzt, und die Geophonauslage hinter dem Profil ab- und an der Spitze angebaut. Bei einem gezogenen, marinen Streamer ergibt sich die beschriebene Quellgeometrie automatisch. Quellpositionen werden häufig an Sensorpositionen gesetzt. Der Quell- oder Schussabstand  $\Delta x_{\text{Quelle}}$  variiert je nach Fragestellung und kann zwischen wenigen 10-er und  $1000 \text{ m}$  liegen. Durch das Versetzen des Schusspunktes erreicht man eine Mehrfachüberdeckung von mittleren Punkten zwischen Geophon und Quelle (**Common Mid Points (CMP)**) mit Strahlen, welche in den verschiedenen Messungen unter unterschiedlichem Winkel einfallen. Bei der CMP Auslage mit gleichabständigen Schusspunkten beträgt die Mehrfachüberdeckung dann  $l_{\text{Auslage}} / (2\Delta x_{\text{Quelle}})$  (Abb. 5.48).

Abb. 5.49 zeigt den Strahlverlauf und die Laufzeitkurven für einen einseitigen Einzelschuss (Common Shot Gather). Die Quelle sitzt bei Profilkordinate 0. Die **direkte Welle** läuft mit der Geschwindigkeit  $v_1 = v$  der oberen Schicht entlang der Oberfläche. Die Laufzeit zu den Geophonen wird durch eine Geradengleichung mit der Steigung  $s_x = |\mathbf{s}| = 1/v_1$  berechnet. Die an der Schichtgrenze in der Tiefe  $h$  **reflektierte Welle** kommt später an der Station an mit der Laufzeit (siehe Abb. 5.49)

$$t = \frac{1}{v} \sqrt{x^2 + 4h^2} = \frac{2h}{v} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4h^2}} = t_0 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4h^2}} \quad (5.27)$$

oder

$$1 = \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 - \left(\frac{x}{t_0 v}\right)^2 \quad (\text{Hyperbelgleichung}) \quad . \quad (5.28)$$

Gleichung (5.28) ist die Gleichung der **Reflexionshyperbel**<sup>72</sup>. Sie kann geometrisch

<sup>72</sup>Beim Georadar trat formal die gleiche Formel für die Diffraktionshyperbel eines Punktdiffraktors auf.

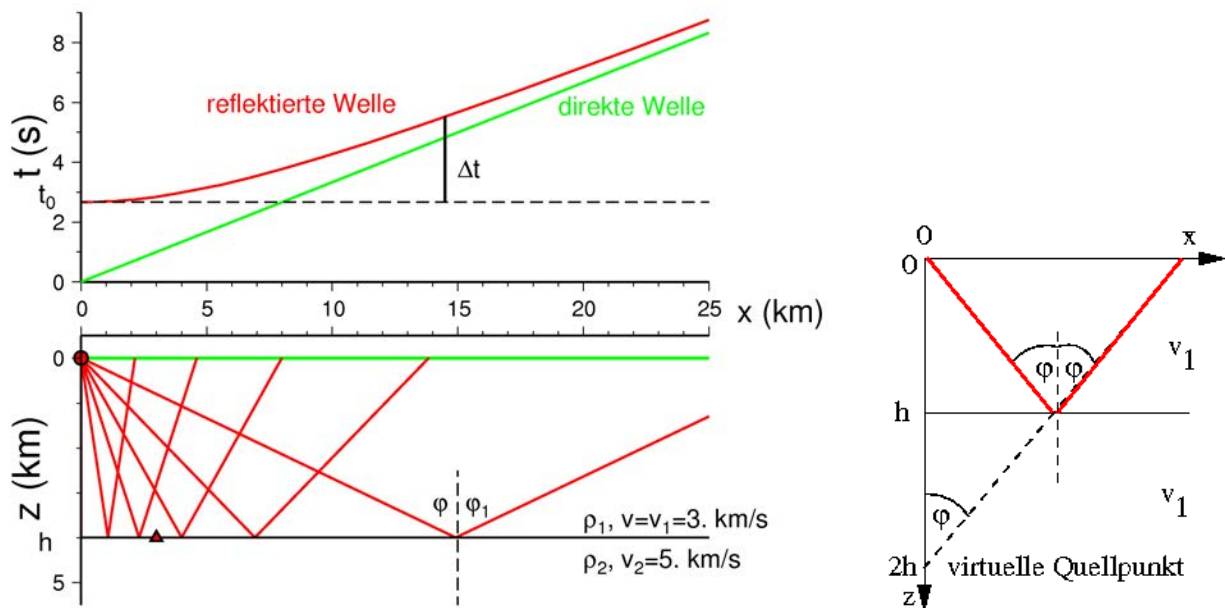


Abbildung 5.49: *Links*: Reflexionen seismischer Wellen an einer horizontalen Schichtgrenze (Geschwindigkeitssprung von  $v = v_0$  auf  $v_1$ ). Der Strahlenverlauf eines Einzelschusses ist unten, die Ankunftszeit der reflektierten und direkten Wellen oben aufgetragen. *Rechts*: Konstruktionsskizze zur Berechnung der Reflexionslaufzeit eines geradlinigen Ersatzstrahls im Halbraum, der von einem virtuellen Quellpunkt bei  $(0, 2h)$  abgestrahlt wird.

konstruiert werden in dem ein virtueller Quellpunkt in der doppelten Schichttiefe unterhalb der Quelle eingeführt und die Laufzeit des geradlinigen Strahls zum Empfänger gerechnet wird (Abb. 5.49). Die Scheitellaufzeit  $t_0 = \frac{2h}{v}$  ist die **Lotzeit** und entspricht der doppelten Laufzeit (two-way traveltime, TWT) des vertikalen Strahls (Lotstrahls auf die Schichtgrenze).

Für kleine Auslagen ( $x^2 \ll 4h^2$ ) kann (5.27) in eine Taylorreihe entwickelt werden und es gilt die Näherung

$$t = t_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{4h^2} \right] - \frac{1}{8} \left[ \frac{x^2}{4h^2} \right]^2 \pm \dots \right) \approx t_0 + \frac{t_0 x^2}{8h^2} = t_0 + \Delta t \quad . \quad (5.29)$$

$\Delta t = \frac{x^2}{4vh} = \frac{t_0 x^2}{8h^2} = \frac{x^2}{2v^2 t_0}$  ist die **Hyperbelauslenkung** oder auch **normal move out (NMO)**. Die Hyperbelauslenkung spielt für automatisierte Stapelverfahren eine Rolle.

Aus der Hyperbelauslenkung der Reflexionshyperbel und  $t_0$  kann die Geschwindigkeit  $v$  und die Tiefe  $h$  bestimmt werden (vgl. auch Georadar). Prinzipiell sind drei Verfahren möglich:

---

Der Strahlenverlauf war anders; die Wellen sind von einem Punkt an der Oberfläche zurück zu demselben Punkt gelaufen.

1. Für zwei Ablesungen 1 und 2 entlang der Hyperbel hat man:

$$v^2 t_1^2 = 4h^2 + x_1^2 \text{ und } v^2 t_2^2 = 4h^2 + x_2^2 \text{ und daraus } v^2 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{t_2^2 - t_1^2}.$$

2. Ein besserer Weg ist es,  $t^2$  über  $x^2$  aufzutragen. Dann erhält man eine Gerade, deren Steigung  $1/v^2$  durch lineare Regression bestimmt werden kann ( $t^2$ - $x^2$ -Methode).
3. Wird die Auslenkung der Hyperbel mit der korrekten Geschwindigkeit  $v$  korrigiert, dann erscheinen die Einsätze entlang von  $x$  alle zur gleichen Zeit. Dieser Ansatz zur Bestimmung von  $v$  kann mit einer Stapelprozedur verknüpft werden und wird unten nochmal aufgegriffen.

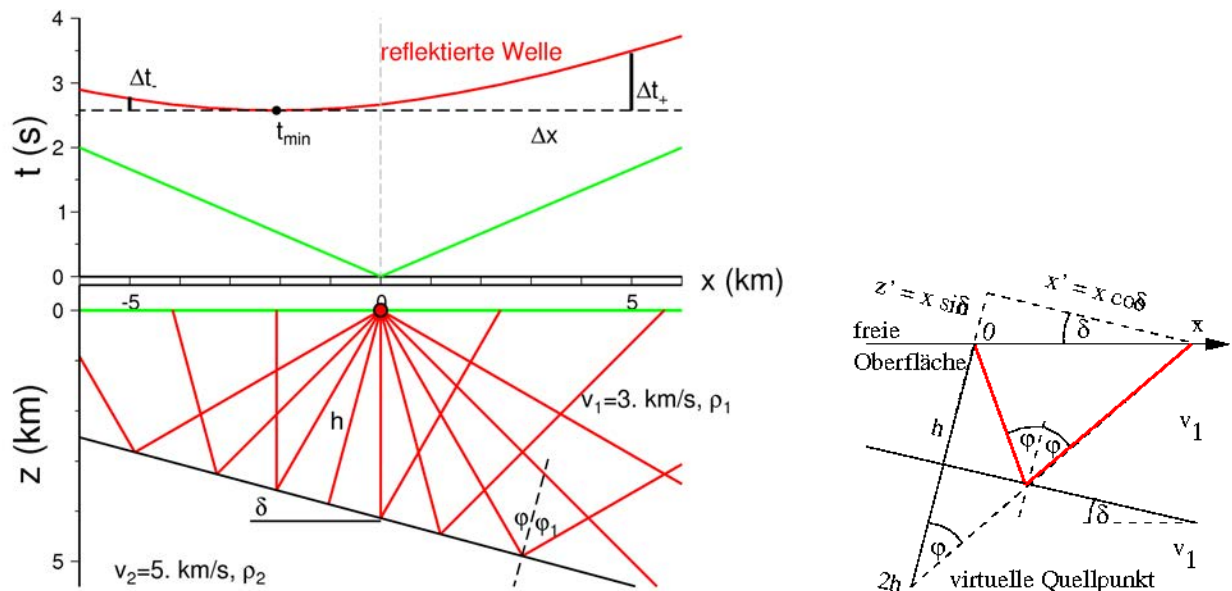


Abbildung 5.50: *Links*: Reflexion an einer geneigten Schichtgrenze (Dip Winkel  $\delta$ ) für einen Einzelschuss mit symmetrischer Auslage. *Rechts*: Konstruktionsskizze zur Berechnung der Reflexionslaufzeit mit Hilfe eines virtuellen Quellpunkts in der doppelten Lottiefe.  $x' = x \cos \delta$ ,  $z' = x \sin \delta$ .

Reflexionen an **geneigten Schichten** verändern die Reflexionshyperbeln (Gleichung 5.9 und Abb.5.50),

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{v} \sqrt{(2h + z')^2 + (x')^2} \\ v^2 t^2 &= (2h + x \sin \delta)^2 + x^2 \cos^2 \delta \\ &= 4h^2 + 4hx \sin \delta + x^2 \\ t &= \frac{2h}{v} \left[ 1 + \frac{x^2 + 4hx \sin \delta}{4h^2} \right]^{1/2} \\ &\approx \frac{2h}{v} \left( 1 + \frac{x^2 + 4hx \sin \delta}{8h^2} \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Die quadratische Ergänzung gibt

$$v^2 t^2 = x^2 + 4hx \sin \delta + 4h^2 \sin^2 \delta - 4h^2 \sin^2 \delta + 4h^2$$

$$1 = \frac{v^2 t^2}{(2h \cos \delta)^2} - \frac{(x + 2h \sin \delta)^2}{(2h \cos \delta)^2} \quad . \quad (5.31)$$

Das ist die Gleichung einer Hyperbel mit dem bergauf verschobenem Minimum bei  $x = -2h \sin \delta$ . Die minimale Laufzeit im Apex ist  $t_{\min} = 2h \cos \delta / v$  und ist geringer als die Lotzeit  $t_0 = 2h/v$ . Für kleine Auslagen kann die Laufzeit wieder in einer Taylorreihe entwickelt werden. Mißt man die Hyperbelauslenkung  $\Delta t_{\pm}$  in der Entfernung  $\pm \Delta x$  auf beiden Seiten des Schußpunkts, dann kann aus der Zeitdifferenz die Neigung der Schichtgrenze ableitet werden wie

$$(\Delta t_+ - \Delta t_-) = \frac{2\Delta x \sin \delta}{v} \quad \text{oder} \quad \sin \delta = \frac{v}{2\Delta x} (\Delta t_+ - \Delta t_-) \quad .$$

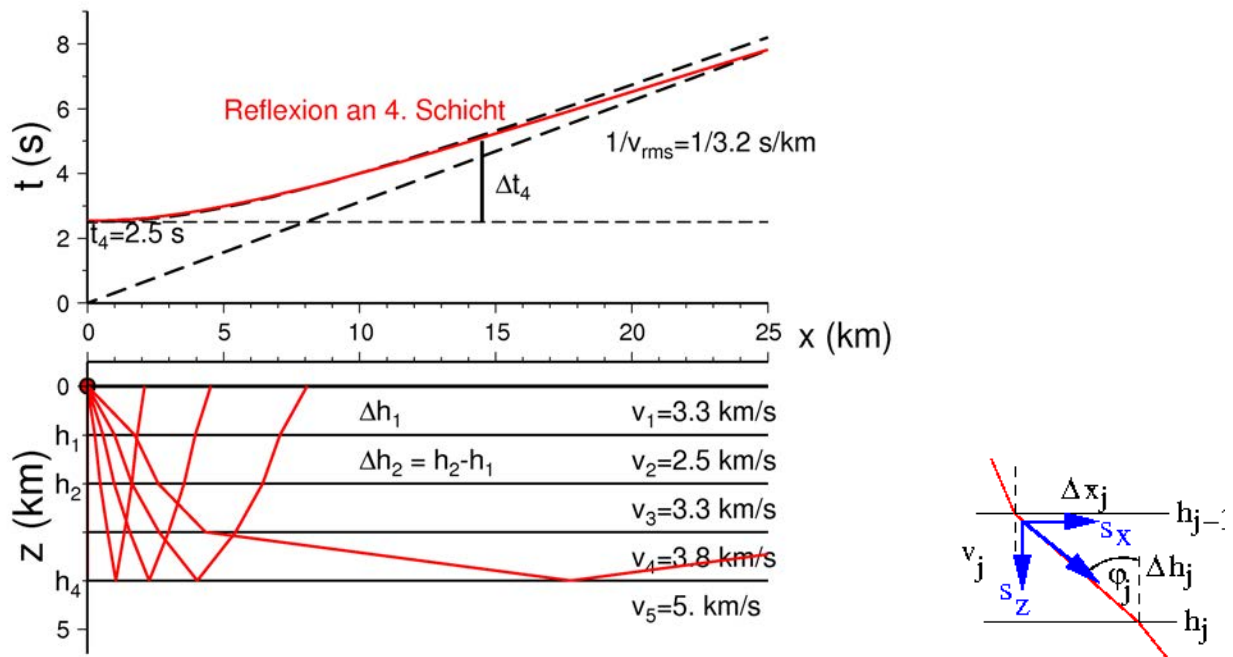


Abbildung 5.51: *Links:* Reflexion an der 4-ten Schichtgrenze eines söhligen Schichtstapels.  $t_4$  ist die Lotzeit der Primärreflexion der 4. Schicht. Die gestrichelte Laufzeithyperbel stellt die Näherung für eine Schicht in der Tiefe  $h_4$  und mit der Ersatzgeschwindigkeit  $v_{\text{rms}}$  dar. *Rechts:* Konstruktionsskizze zur Berechnung des Laufzeitanteils in einer einzelnen Schicht des Pakets.

Im Regelfall liegen mehrere Schichten mit etwas unterschiedlichen Geschwindigkeiten und Dichten übereinander (**Schichtpaket**, Abb. 5.51). Sind die Schichtgrenzen horizontal spricht man von **söhliger Schichtung**. Die Laufzeit der Reflexion an der  $n$ -ten Schichtgrenze ist dann (vgl. (5.9))

$$t_n(x) = 2 \sum_{j=1}^n s_x \Delta x_j + 2 \sum_{j=1}^n s_{zj} \Delta h_j \quad .$$

Bei vorgegebenem Abstrahlwinkel, z.B.  $\sin \varphi_1 = s_x v_1$ , ist die Auftauchentfernung der Reflexion an der  $n$ -ten Schichtgrenze  $x^* = 2 \sum_{j=1}^n \Delta x_j$ , mit  $\Delta x_j = \Delta h_j \tan \varphi_j = \Delta h_j \sin \varphi_j / \cos \varphi_j = \Delta h_j s_x / s_{zj}$ . Eingesetzt ergibt sich

$$t_n(x) = 2 \sum_{j=1}^n \left( \frac{s_x^2}{s_{zj}} + s_{zj} \right) \Delta h_j = 2 \sum_{j=1}^n \frac{s_x^2 + s_{zj}^2}{s_{zj}} \Delta h_j = 2 \sum_{j=1}^n \frac{\Delta h_j}{v_j \cos \varphi_j}, \quad (5.32)$$

wobei bis zur  $n$ -ten Schichtgrenze  $\varphi_i < 90^\circ$  gelten muß. Für den senkrechten Strahl ist  $\varphi_j = 0$  und (5.32) berechnet die Lotzeit der  $n$ -ten Reflexion.

Die Reflexion an der  $n$ -ten Schichtgrenze kann in erster Näherung wieder durch eine Reflexionshyperbel beschrieben werden (Abb. 5.51 und z.B. Sheriff and Geldart, 1995),

$$t^2 = \frac{x^2}{v_{\text{rms}}^2} + t_n^2 .$$

Die Lotzeit der  $n$ -ten Reflexion ist die Laufzeit des entsprechenden senkrechten Strahls,  $t_n = 2 \sum_{j=0}^n \frac{\Delta h_j}{v_j}$ . Die Geschwindigkeit  $v_{\text{rms}}$  ist eine „mittlere Geschwindigkeit“ des Schichtpakets über dem betrachteten Reflektor, die sogenannte rms-Geschwindigkeit (**root-mean-square velocity**). Ist  $v_{\text{rms}}$  für jede Reflexion bekannt, kann die Geschwindigkeit in jeder einzelnen Schicht berechnet werden. Die Ableitung der Hyperbelgleichung der  $n$ -ten Reflexion nach der Profilkordinate ergibt

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{t v_{\text{rms}}^2} .$$

Die Entfernung des Strahls kann berechnet werden wie

$$x = 2 \sum_{j=0}^n v_j \Delta t_j \sin \varphi_j = 2 \frac{\sin \varphi_0}{v_0} \sum_{j=0}^n v_j^2 \Delta t_j$$

oder

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin \varphi_0}{v_0} = \frac{x}{2 \sum_{j=0}^n v_j^2 \Delta t_j} .$$

Der Vergleich ergibt

$$v_{\text{rms}}^2 = \frac{(2 \sum_{j=0}^n v_j^2 \Delta t_j)}{t} \approx \frac{2(\sum_{j=0}^n v_j \Delta h_j)}{t_n} .$$

Die Näherung ist für den vertikalen Strahl abgeleitet und nur für kleine Auslagen gültig. Die Geschwindigkeit ist dann die mit der Laufzeit des Strahls gewichtete rms-Geschwindigkeit des Mediums.



Ist die rms-Geschwindigkeit und die Lotzeit der  $(n - 1)$ -ten und der  $n$ -ten Reflexion bekannt, kann daraus die **Intervall-Geschwindigkeit** der  $n$ -ten Schicht bestimmt werden (**Dix Gleichung**)

$$v_n^2 = \frac{v_{\text{rms}n}^2 t_n - v_{\text{rms}n-1}^2 t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} .$$

### Spezielle Stapelverfahren:

Reflexionsseismische Verfahren sind aufwändiger als bisher beschrieben. Das liegt dar-

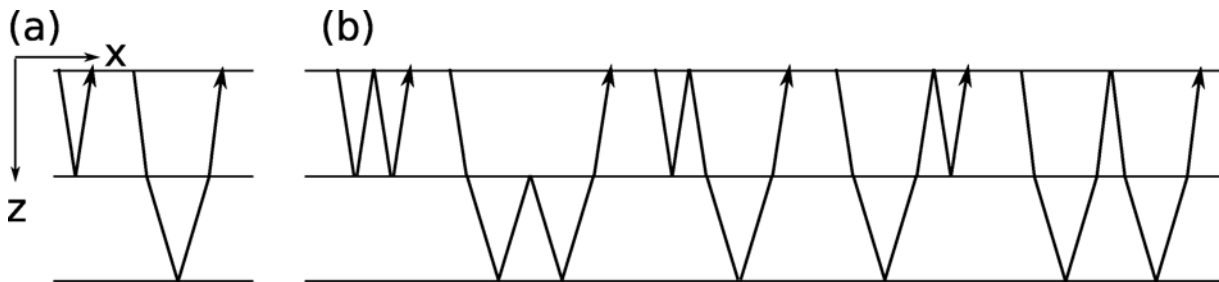


Abbildung 5.52: Beispiel Strahlwege für Primär- (a) und Mehrfachreflexionen (b).

an, dass reflektierte Wellen relativ kleine Amplitude haben und häufig kaum über den "Rauschpegel" einer Spur ragen. Noch wichtiger ist aber, dass die Kruste in aller Regel aus vielen Schichten besteht (approximiert wird), und die Geschwindigkeiten und Impedanzen der Schichten variieren. Zwischen den Schichtgrenzen treten **Mehrfachreflexionen** auf (**Multiple**), die ganz unterschiedliche Strahlwege haben können (Abb. 5.52) und als **Störsignal** oder Rauschsignal angesehen werden.

Sowohl das unkorrelierte Rauschen als auch die korrelierbaren Störsignale der Multiplen können durch spezielle Stapelverfahren abgeschwächt werden. Für **söhlig geschichtete Sedimente** hat sich die **Mehrfachüberdeckung eines Reflektorsegments (common depth point method, CDP oder CMP-Geometrie)** bewährt (Abb. 5.48). In Abb. 5.53 ist das Verfahren der **CDP Stapelung** schematisch dargestellt. Voraussetzung ist, dass man nicht nur eine sondern viele Schußpositionen entlang des Profils vorliegen hat (Abb. 5.48d). Aus den Einzelschüssen (**Shot Gather**, Abb. 5.48b) wird ein **CDP Gather** (Abb. 5.48c) konstruiert. Die Laufzeitkurven sind sowohl für das Shot wie auch das CDP Gather Reflexionshyperbeln, wobei im CDP Gather die  $x$ -Achse scheinbar um den Faktor 2 gedehnt ist (Abb. 5.53b).

Ziel ist dann, eine Korrekturgeschwindigkeit oder besser **Stapelgeschwindigkeit**  $v_{\text{stack}}$  (**stacking velocity**) zu finden, so dass die Hyperbelauslenkung  $\Delta t$  rückgerechnet wird und alle Einsätze zum gleichen Zeitpunkt  $t_0$  erscheinen. Für eine ebene Schichtung ist  $v_{\text{stack}} \approx v_{\text{rms}}$ .

Werden die umsortierten Zeitreihen mit der richtigen Stapelgeschwindigkeit zeitverschoben und aufsummiert, dann hat die Stapelspur zur Zeit  $t_0$  eine maximale Amplitude

(oder maximale *Semblance*). Mit diesem Auswahlkriterium kann die Stapelgeschwindigkeit über eine Gittersuche für jede Zweiweglaufzeit  $t_0$  bestimmt werden. Man erhält eine Stapelgeschwindigkeit  $v_{\text{rms}}$  als Funktion von  $t$ , die für ein Zeitintervall  $t - \delta t \leq t \leq t + \delta t$  gilt. Nach Entfernen der Hyperbelauslenkung (Abb. 5.53c) werden für jedes Zeitintervall die Spuren im CMP Gather gestapelt. Die Einsätze von primären Reflexionen werden dadurch optimal verstärkt. Sekundäre Einsätze (z.B. Multiple) werden abgeschwächt (vergleiche Zero Offset Spur und Stapelspur in Abb. 5.53d).

Die Stapelung wie in Abb. 5.53 beschrieben wird für jeden CDP Punkt entlang des Profils durchgeführt, und man erhält schließlich eine **Stapelsektion**, die geometrisch wie eine **Zero-Offset Sektion** interpretiert werden kann (CMP oder CDP Sektion). In der CMP Sektion sind die Einsätze der Multiplen stark abgeschwächt und primäre Reflexionen von der ebenen Schichtgrenze verstärkt worden. Jede Zeitspur entspricht der Geometrie eines Lotstrahls.

Bei der reflexionseismischen Auswertung werden zusätzlich noch Filter, Normierungen und Korrekturen angebracht, die hier nicht weiter vertieft werden. Ein wichtiger Punkt ist allerdings die Umrechnung einer **Zeitsektion** in eine **Tiefensektion**, in der jede Reflexion an der richtigen Position und Tiefe liegt. In der Zeitsektion ist die vertikale Achse die Zeit  $t$ , in der Tiefensektion die Tiefe  $z$ . Beim Georadar wurde die Umrechnung "von Hand" für eine Zero-Offset Sektion bereits besprochen und in Übungsaufgaben vertieft. Es gibt bessere, allgemeinere Verfahren zur Umrechnung einer Zeit- in eine Tiefensektion, z.B. die **Migration**. Eine Migration vor der Stapelung (Pre-Stack Migration) ist rechen-technisch aufwändiger, liefert aber ein noch besseres Abbild der Untergrundstruktur.

Abb. 5.54 zeigt die Prozessingsschritte anhand einer flachseismischen Scherwellenuntersuchung in Flottbek / Hamburg mit einem Landstreamer (Abb. 5.43, siehe auch [Krawczyk et al., 2011](#)). Innerhalb von drei Tagen wurden zwei Reflexionslinien in einem roll-over Verfahren mit jeweils 500 m Länge vorbereitet und geschossen. Ziel war die Untergrundstruktur in einem Erdfallgebiet bis etwa 100 m Tiefe hochauflösend zu kartieren. Als Quelle wurde der lineare, frequenzmodulierte Sweep des Kleinvibrators (Abb. 5.43b) mit einer Dauer von 10 s verwendet. Jeder Quellpunkt wurde mit zwei Sweeps mit entgegengesetzter Polarität geschossen, um ungewollt angeregte P-Wellen abzuschwächen. Die Abtastrate betrug 1 ms und die Aufzeichnungsdauer 2 s. Der nominale Quellabstand von 2 m führt bei der Streamerlänge von 120 m auf eine 30-fache Überdeckung der Untergrundpunkte mit unterschiedlichen Strahlen. Die S-Wellen Geschwindigkeit in den obersten Metern beträgt nur etwa 150 m/s. Die dominante Frequenz der Quelle lag zwischen 60-70 Hz und eine kleinste Quellenlänge von etwa 2 m. Die CMP Punkte wurden auf 0.5 m Intervalle interpoliert.

Tabelle 5.3: Prozessingschritte der Scherwellen Flachseismik in Flottbek / Hamburg. (siehe [Krawczyk et al., 2011](#)).

Nr	Prozessing Schritt	Parameter / Funktion
1.	Quality control, geometry check	inspect uncorrelated seismic data, optimization of geodetic data
2.	Vibroseis correlation	by individually recorded pilot sweeps
3.	Vertical stacking of records	2-fold
4.	Crooked line geometry installation	0.5 <i>m</i> bin interval
5.	Amplitude scaling	350 <i>ms</i> automatic gain control (AGC)
6.	Trace editing, time-variant spectral balancing, top muting, time-variant filter	kill distorted traces, SNR improvement
7.	Interactive velocity analysis	nominal analysis interval 40 <i>m</i>
8.	Residual static corrections	
9.	Normal move-out (NMO) correction	
10.	Common mid-point (CMP) stacking	up to 50-fold (nominal: 30)
11.	Amplitude scaling	trace normalization
12.	FX-deconvolution	
13.	Finite-difference (FD) migration	45° operator
14.	Time-to-depth conversion	smoothed velocities of NMO correction

In den Common Shot Gather (Rohdaten, automatische Amplitudenskalierung, AGC) kann man starke, kohärente Reflexionen bei etwa 400 *ms* Zweiweglaufzeit erkennen (Abb. 5.54a). Reflexionseinsätze oberhalb zwischen 0 und 150 *ms* (etwa 10 *m* Tiefe) sind zwar schwach aber kontinuierlich. Zwischen 150 und 400 *ms* folgt ein nahezu transparenter, unkorrelierter Bereich.

Die Shot Gather wurden umsortiert und nach Anwendung unterschiedlicher Prozessingschritte (Tabelle 5.3) in eine CMP Stapelsektion überführt (Abb. 5.54b). Die aus den Stapelgeschwindigkeiten bestimmten Intervallgeschwindigkeiten sind farbig über die tiefenkonvertierte CMP Sektion geplottet und erlauben eine erste, qualitative Interpretation. Die S-Wellen Geschwindigkeit variiert insgesamt zwischen 150 und 650 *m/s* und steigt mit der Tiefe an. Die obersten 50 *m* zeigen geringe Geschwindigkeiten von nur 150 – 300 *m/s*, was typische Werte für nicht verfestigte Tone, Sande und Lehm Böden sind. Innerhalb dieser Schicht deutet sich eine Niedriggeschwindigkeitszone mit nur 150-200 *m/s* an, die evtl. durch feinkörnige, eingeschobene Sandsequenzen gedeutet werden kann. Unterhalb der starken Reflexionen bei 400 *ms* (etwa 40-50 *m* Tiefe) steigt die Geschwindigkeit stark auf 350-500 *m/s* an.

Die tiefenmigrierte Sektion wird für die strukturelle Interpretation genutzt (Abb. 5.54c). Der Untergrund zeigt eine muldenartige Deformation der Schichtenfolge mit einem Zentrum bei etwa 120 *m* entlang des Profils. Der Absenkungsbetrag nimmt mit der Tiefe zu. Der starke Reflektor zwischen 40 *m* und 80 *m* Tiefe deutet bruchartige Deformation durch Abschiebungen an. Die Strukturen sind typische für lösungs- und subrosionsbedingte Erdfälle, wie sie im Messgebiet vorliegen. Das Lösungszentrum muss deutlich unterhalb 40 *m* Tiefe liegen.

Abb. 5.55 zeigt eine CMP Zeitsektion einer marinen Streamer Reflexionsseismik in der Framstrasse im polaren Nordatlantik. Gefaltete und deformierte Sedimentstrukturen verlaufen geneigt und unabhängig zum Meeresboden und werden von Meeresbodenparallelen Reflexionen an sogenannten Gashydrathen (Einschlussverbindungen, Clathrate, in festem Aggregatzustand aus verschiedenen Gasen und Fluiden) gekreuzt (Bottom Simulating Reflectors BSR). Methanhydrath Lagerstätten unter dem Meeresboden können als BSR in reflexionsseismischen Messungen zusätzlich über Phasendrehungen in der Signalamplitude und Amplitudenverstärkung identifiziert werden.

Abb. 5.56 zeigt eine zeitmigrierte CMP Sektion in der Abyssal Plain östlich von Grönland. Die vertikalen Diskordanzen im Reflexionsbild deuten auf Aufstiegzonen von freien Gasen, Fluiden und Schlamm bis an den Seeboden hin (sogenannte Chimneys). Entlang der Aufstiegzonen bilden sich vertikale Verwerfungen. Am Meeresboden können die Aufstiegzonen von Schlammhügeln, sogenannten Schlammvulkanen, begleitet sein.

Das Kapitel und die Beispiele haben nur einen kleinen Teil der in der Reflexionsseismik entwickelten Methoden und Techniken angesprochen. Eine vertiefte Darstellung findet man z.B. in [Sheriff and Geldart \(1995\)](#); [Yilmaz \(2001\)](#) oder in weiterführenden Vorlesungen.

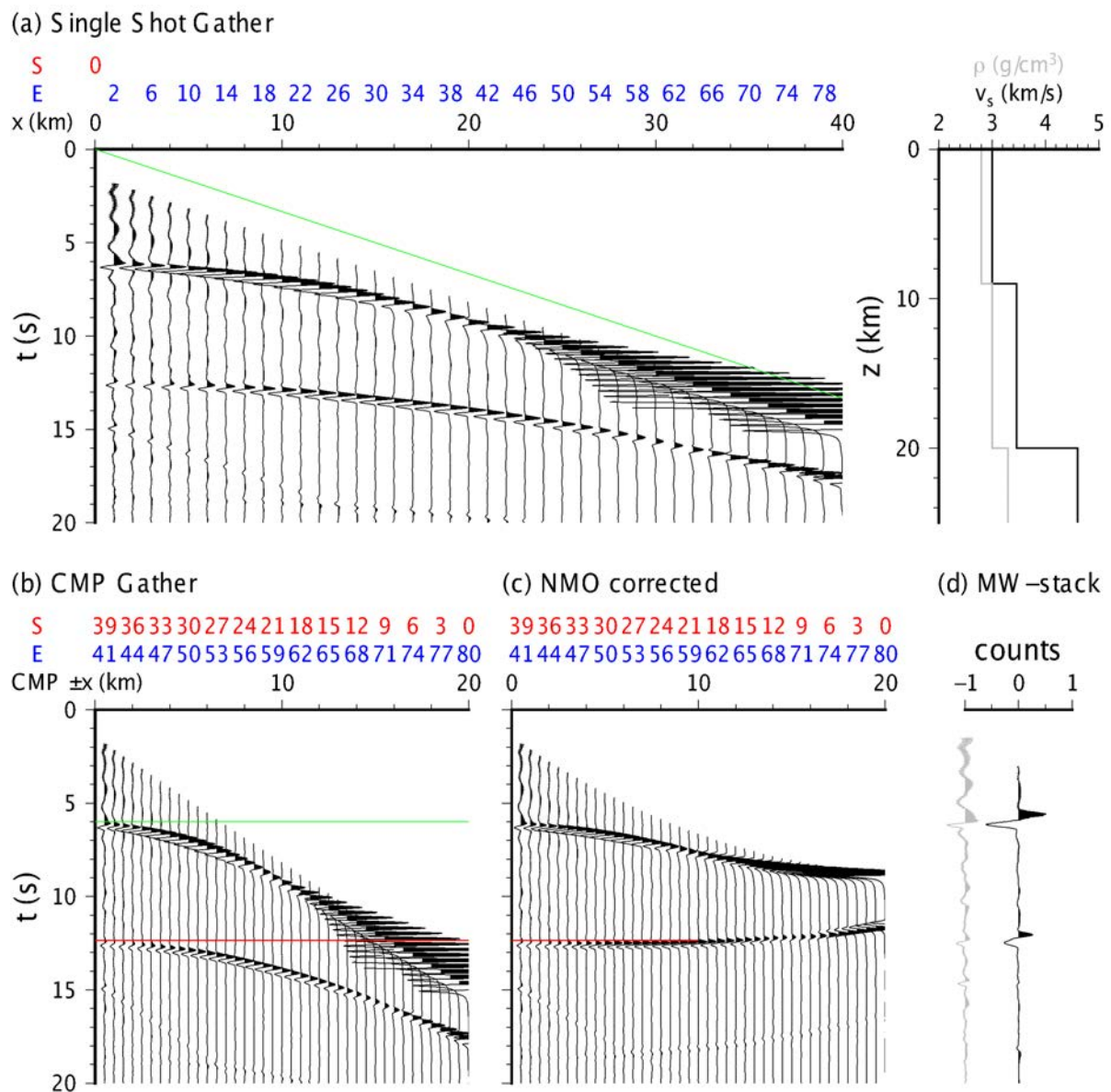


Abbildung 5.53: Schematische Darstellung der CMP Stapelung anhand synthetischer Seismogramme (SH-Fall) für ein zwei Schichten über Halbraum Modell (Programm *shwell*; Strike-Slip Quelle an der Oberfläche; nur Reflexionen berechnet - direkte Welle ausgeblendet; Dimensionen nicht repräsentativ für Reflexionsseismik). (a) Single Shot Gather (Schussposition S in rot) für 80 Empfängerkanäle (Kanal E in blau) im Abstand von 500 m. Alle Spuren sind mit gemeinsamem Faktor normiert. Das verwendete Geschwindigkeits-Dichte Modell ist rechts geplottet. (b) CMP Gather für den Profilmittelpunkt bei 20 km. Die Schuss-Empfänger Paare sind durch Kanalnummern angegeben. (c) NMO-korrigierte CMP Gather für den durch die rote Linie markierten Zeitpunkt der Zweiweglaufzeit. Die  $v_{rms}$  Stapelgeschwindigkeit wurde theoretisch berechnet. (d) Stapelspur (schwarz) aufsummiert für den Steilwinkelbereich bis  $\pm 10$  km und gleitende NMO Korrekturen für jeden Zeitsample. Die ursprüngliche Zero-Offset Spur (grau) ist zum Vergleich dazu geplottet.



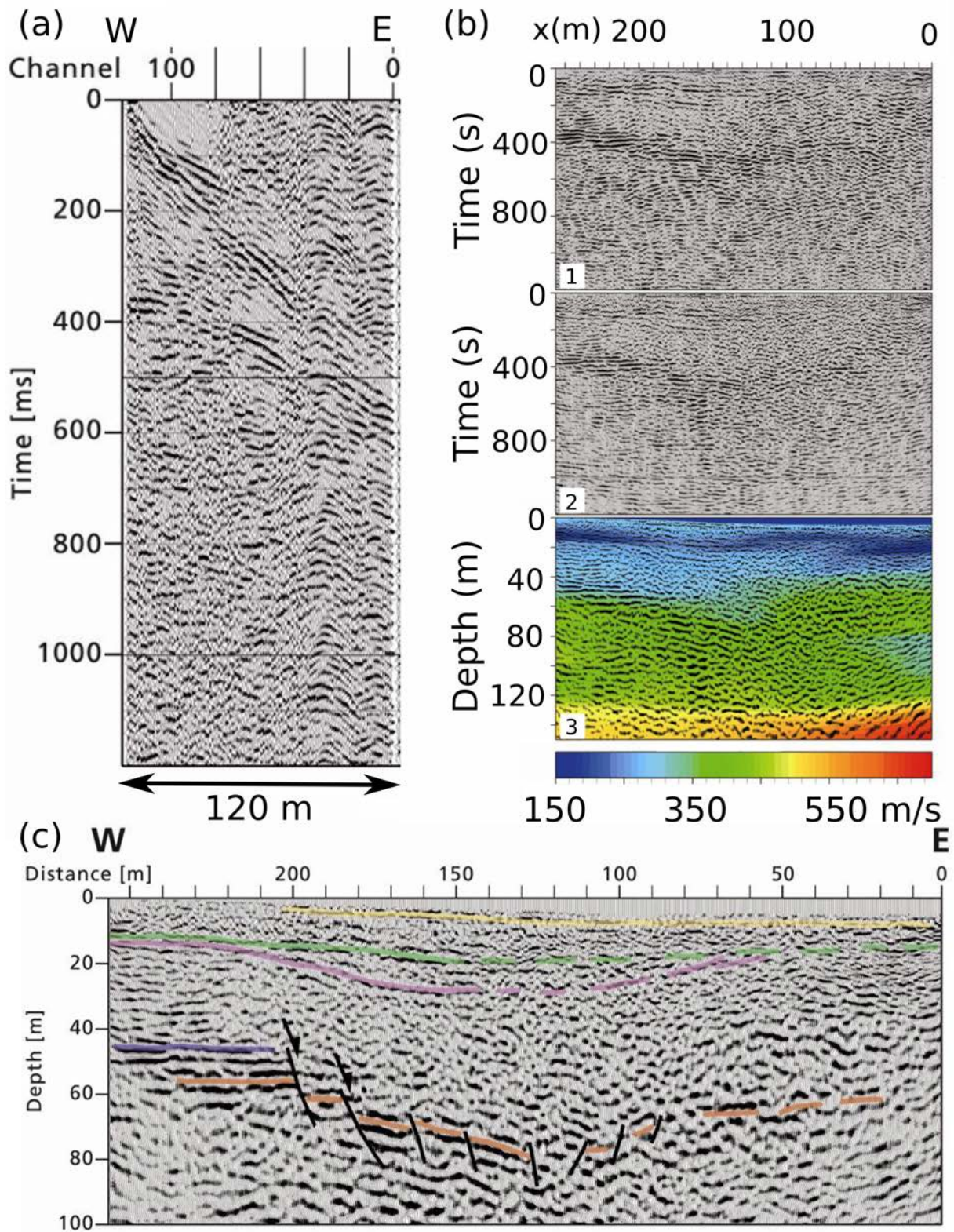


Abbildung 5.54: S-Wellen Reflexionsseismik in Flottbek/Hamburg (Abb. 5.39c, 5.43). (a) Common Shot Gather Rohdaten einer Streamer Auslage. (b) CMP Sortierung mit unterschiedlichen Processingschritten: b1. CMP Stapelung im Zeitbereich. b2. Zeitmigierte Stapelung (FD), b3. Tiefenkonvertierte Sektion. Die Intervallgeschwindigkeiten sind farbig hinterlegt. (c) Interpretation der tiefenmigrierten Sektion mit Senkenstruktur und eingezeichneten Abschiebungen (Krawczyk et al., 2011).



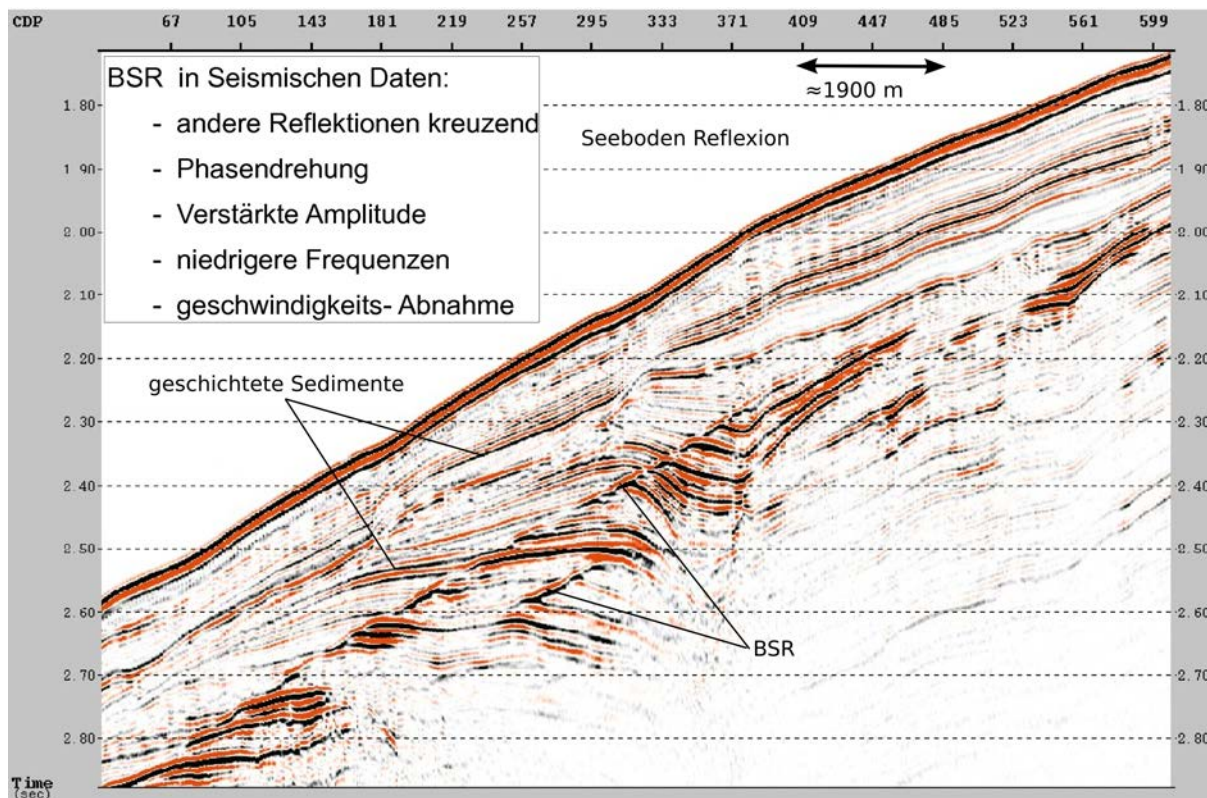


Abbildung 5.55: CMP Sektion einer marinen Mehrkanal Reflexionsseismik in der Framstrasse (vgl. Abb. 3.34, von P. Pulm, siehe Geissler et al., 2014). Aufnahme mit R/V Polarstern in 2002 und 2004, 24-l Airgun Array, 600 m Streamer mit 96 Kanälen und 6.25 m Gruppenabständen. Prozessierung: CDP Sortierung in 25 m Intervallen, Frequenzfiltern, Geschwindigkeitsanalyse, Geschwindigkeitsfiltern, CMP Stapeln (40 bis 60-fache Überdeckung), Zeitbereichsmigration. Markiert sind Sedimentstrukturen und Bottom Simulating Reflectors (BSR).

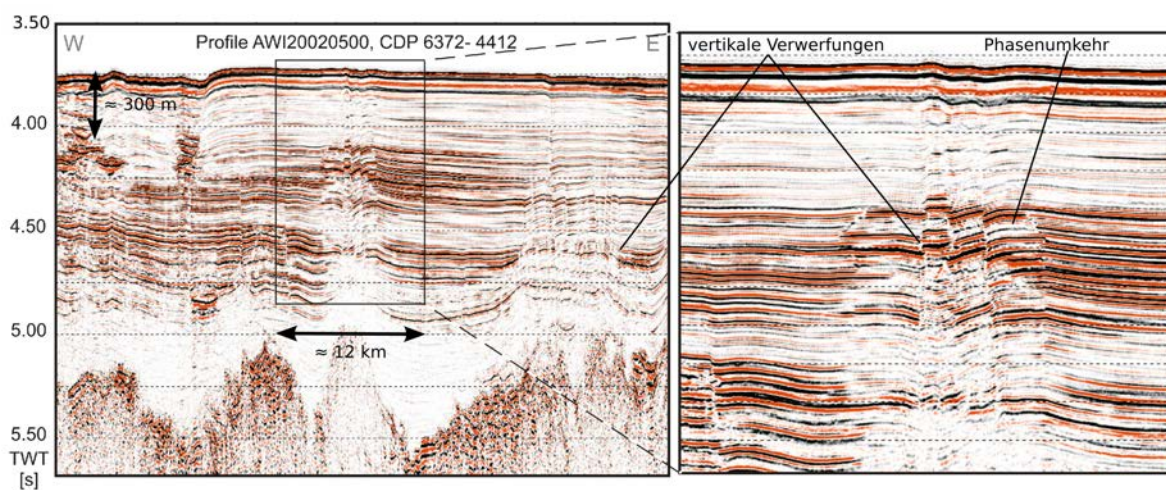


Abbildung 5.56: Zeitmigrierte CMP Sektion in der Abyssal Plain östlich von Grönland (P. Pulm, Erläuterungen in Abb. 5.55, siehe Geissler et al., 2014). Vertikale Verwerfungsstrukturen und Phasenumkehrungen sind markiert.

#### 5.4.4 Transmissionseismik in Bohrlöchern

Einzelne Verfahren der Seismik zielen auf die Auswertung transmittierter anstelle reflektierter Wellen ab. Dazu gehören insbesondere Bohrlochverfahren, bei denen entweder Empfänger oder Quellen im Bohrloch positioniert werden und das Gestein zwischen der Oberfläche und der Bohrlochposition oder zwischen zwei benachbarten Bohrlöchern durchstrahlt wird. Die direkten Wellen (transmittiert) erlauben eine hochaufgelöste Bestimmung der Schichtdicken und -geschwindigkeiten. Ein typischer Einsatz findet zur Erkundung oder zur Überwachung/Charakterisierung einer Kohlenwasserstoff-Lagerstätte statt. Dort sind in der Regel tiefe Bohrlöcher bereits vorhanden. Im flachseismischen Bereich werden die Verfahren aber auch zur Bestimmung von tiefenabhängigen Bodenkennwerten oder zur tomographischen Kartierung von Geschwindigkeitsanomalien bis hin zu Hohlräumen in Karstgebieten genutzt.

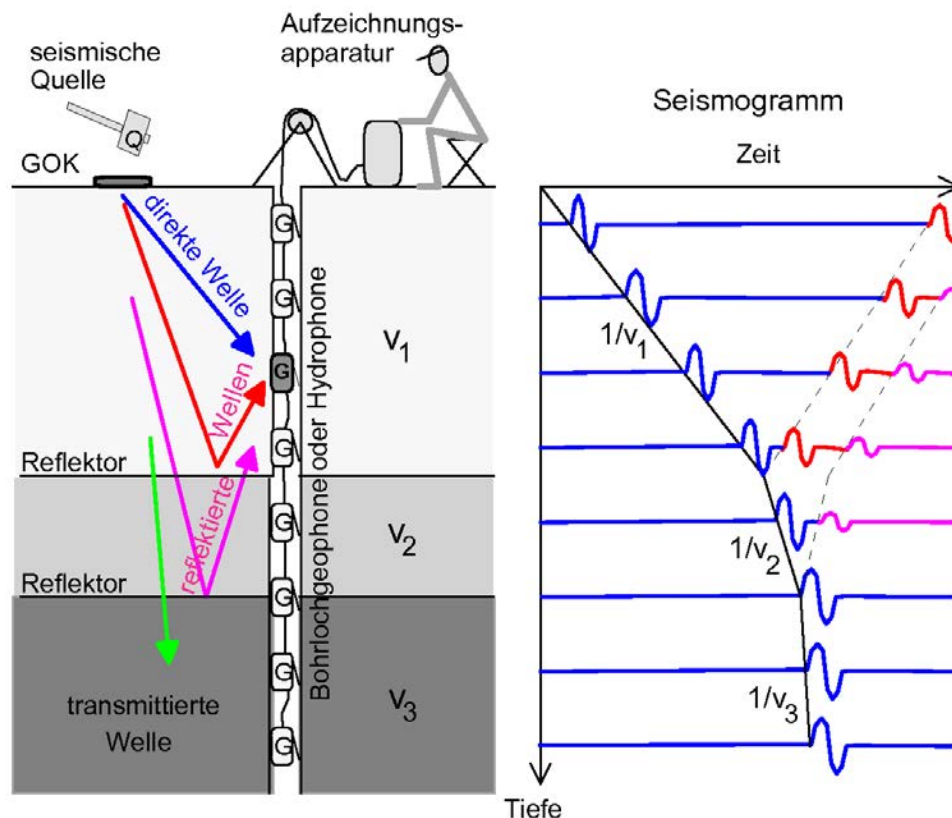


Abbildung 5.57: Messprinzip der Bohrlochseismik wie bei der Downhole-Seismik oder des Vertical Seismic Profiling. Laufzeitkurven der nach unten laufende Welle (blau) haben eine negative Steigung (durchgezogene Linie), die der nach oben reflektierten Wellen (rot und rosa) eine positive Steigung (gestrichelt). (GGU mbH Karlsruhe).

**Bohrlochseismik (Vertical Seismic Profiling, Downhole-Seismik):** Bei der Zero-Offset Downhole-Seismik (Vertical Seismic Profiling oder VSP) wird die Quelle in der Nähe des Bohrlochs positioniert. Der Sensor zeichnet im Bohrloch in unterschiedlichen Tiefen auf (Abb.5.57). Die Quellen sind in der Regel niederenergetisch und müssen wiederholt anregen können (Hammerschlag, Fallgewichte, Vibratoren). Quellen für sowohl P- wie S-Wellen sind von Interesse. Als Sensor wird ein Bohrlochgeophon oder -hydrophon benutzt. Die seismischen Strahlen verlaufen nahezu vertikal. Erstankommende Einsätze sind direkt nach unten laufende P- oder S-Wellen, und später ankommende Einsätze gehören zumeist zu den nach oben laufenden Reflexionen. Die gemessenen Seismogramme eines VSP Experiments werden über die Tiefe des Sensors geplottet (Zeit-Tiefen Sektion). Die Laufzeitkurve  $t_P(z)$  der nach unten laufenden P-Welle hat in der Sektion eine negative und die der nach oben laufenden Reflexion eine positive Steigung (Abb.5.57). Nach unten und nach oben laufende Wellen können bei einem VSP Experiment also einfach voneinander getrennt werden. Ein Geschwindigkeitsprung an einer Schichtgrenze äußert sich durch einen Knick in der Laufzeitkurve der direkten Welle,  $t_P(z)$ , sowie durch den Ursprung eines Reflexionseinsatzes (Abb.5.57). Die Geschwindigkeit des Gesteins in der Tiefe  $z$  kann aus dem Kehrwert der Steigung der Laufzeitkurve,  $t'_P = dt_P/dz$ , bestimmt werden, also mit  $v(z) = \frac{1}{t'_P(z)}$ . Die Steigung einer reflektierten Welle hat bei söhlicher Schichtung den gleichen Betrag aber ein anderes Vorzeichen als die der direkten Welle. Weicht der Betrag der Steigung der Reflexion jedoch ab, dann kann daraus auf die Schichtneigung geschlossen werden.

Neben der Schichtdicke und -geschwindigkeit kann bei einem VSP Experiment auch die Reibungsdämpfung des Mediums bestimmt werden, wenn die Amplitudendämpfung der erstankommenden Wellen ausgewertet wird.

**Crosshole Seismik:** Bei der Crosshole-Seismik werden Quellen und Sensoren (Geophone oder Hydrophone) in zwei benachbarten Bohrlochern positioniert (Abb.5.58). Als Quellen werden z.B. Sparker oder kleine Airguns verwendet. Die Quellen sollten das Bohrloch nicht beschädigen. Der Sensor wird bei einer Messung i.d.R. in der gleichen Tiefe wie die Quelle gesetzt. Die Seismogramme aus mehreren Einzelschüssen in unterschiedlicher Tiefe werden wieder in einer Zeit-Tiefen Sektion dargestellt. Aufgrund der Messgeometrie hat man jetzt bevorzugt horizontale Strahlwege, und die Einsätze der direkten Wellen erscheinen zu ähnlichen Zeiten. Die mittlere Geschwindigkeit des Mediums in der Tiefe  $z$  kann einfach aus dem Quotienten zwischen Bohrlochabstand  $d$  und Laufzeit  $t_P$  bestimmt werden,  $v(z) = \frac{d}{t_P(z)}$ . Der Bohrlochabstand muss für die Bestimmung genau bekannt sein. Ebenso kann die Reibungsdämpfung aus der Abnahme der Amplituden geschätzt werden. Geschwindigkeitanomalien im Untergrund zeigen sich in der Sektion als Laufzeitanomalien. Für den Extremfall eines Hohlraums zwi-



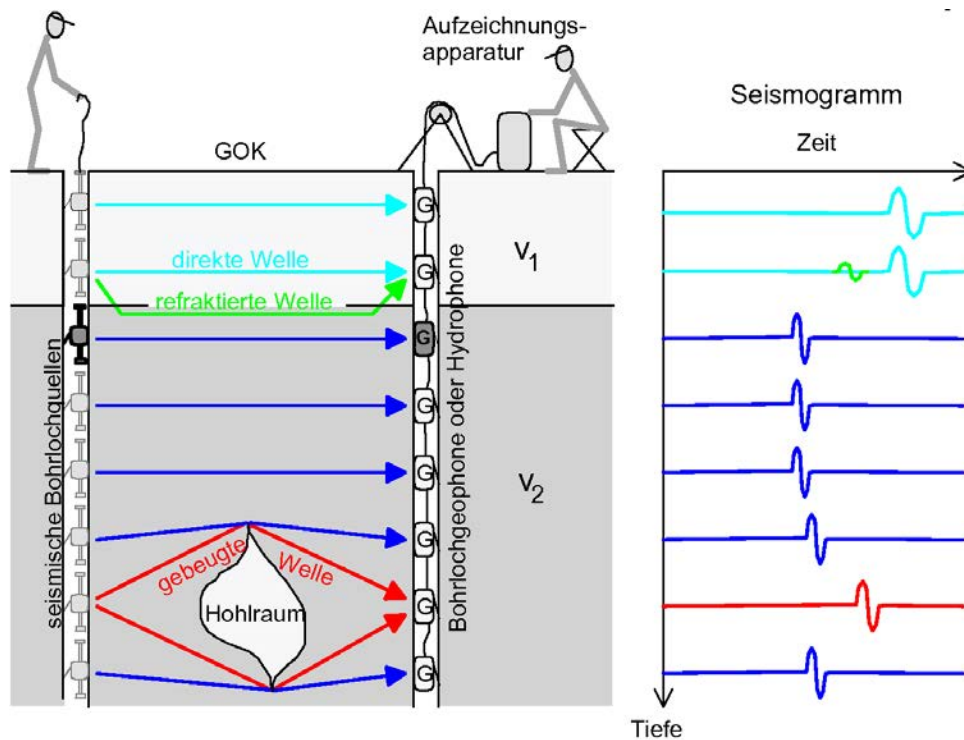


Abbildung 5.58: Messprinzip der seismischen Durchschallung bei der Crosshole-Seismik. Sender (Quelle) und Empfänger (Geophon oder Hydrophon) werden in zwei benachbarten Bohrlochern in der Regel in gleicher Tiefe positioniert (links). Die Seismogramme (rechts) zeichnen vor allem horizontal laufende, direkte Wellen auf (blau). In der Nähe von Schichtgrenzen können auch refraktierte Wellen (grün) als Ersteinsätze auftreten. Liegen starke Geschwindigkeitserniedrigungen vor, wie z.B. durch einen Hohlraum, dann treten gebeugte Wellen zu späteren Ankunftszeiten auf (rot). (GGU mbH Karlsruhe).

Wenn die Bohrlocher nicht in gleicher Tiefe liegen, sondern die Empfänger tiefer als die Quellen positioniert sind, wird keine direkte Welle mehr aufgezeichnet, sondern nur die an den Hohlraumkanten gebeugten Wellen, die deutlich später einsetzen (Abb.5.58, rote Strahlwege und rote Seismogramme). Eine Crosshole Tomographie ist gut geeignet, um Verkarstung und Hohlräume zu untersuchen. Nahe zu Schichtgrenzen können refraktierte Wellen die Ersteinsätze bilden (Abb.5.58, grüne Strahlweg, grüne Seismogramm), was als unterstützende Beobachtung für die Interpretation einer Crosshole Seismik verwendet werden kann.

Crosshole Seismik ist zeitaufwändiger und teurer als ein VSP Experiment und wird relativ selten durchgeführt.

### 5.4.5 Refraktionsseismik

#### Ziel:

Wie bei der Reflexionsseismik will man Informationen über Schichtdicken und Wellengeschwindigkeiten erhalten. Bei der Refraktionsseismik wertet man vor allem an Schichtgrenzen **refraktierte Wellen** aus und keine Reflexionen. Die refraktierten Wellen treten nicht nahe des Schußpunktes auf, sondern erst in einiger Entfernung zur Quelle. Aus den refraktierten Wellen kann die Wellengeschwindigkeit unter der Schichtgrenze abgeleitet werden. Man erhält direkte Informationen über Geschwindigkeiten und weniger genaue Informationen über die laterale Struktur der Schichtgrenze. Die refraktionsseismische Methode findet einerseits Anwendung für kleinräumige, flachseismische Probleme (bis ca. 50 m) und insbesondere zur sprengseismischen Erforschung des Gesamtaufbaus der Kruste und des oberen Mantels.

#### Die Laufzeitkurven bei horizontaler Schichtung:

Beim refraktionsseismischen Verfahren werden gebrochene Wellen betrachtet. Der Bre-

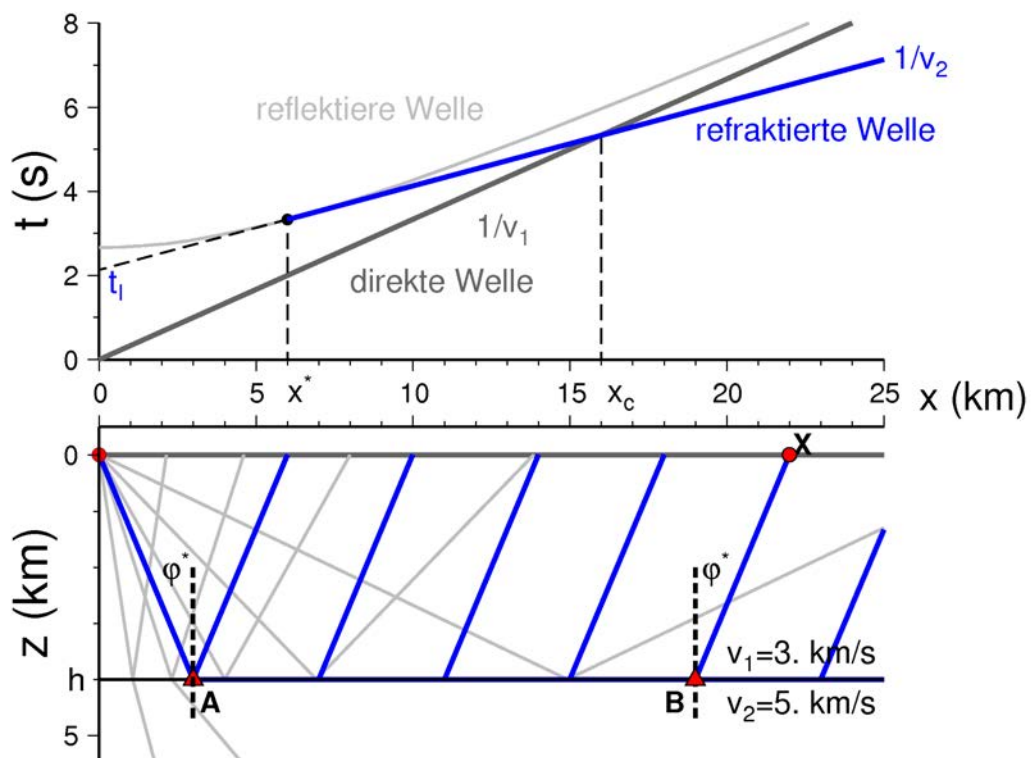


Abbildung 5.59: Strahlverlauf (unten) und Laufzeitkurven (oben) für die direkte (hellgrau), reflektierte (grau) und refraktierte Welle (blau) für eine Schicht über dem Halbraum.

chungswinkel  $\varphi_2$  wird durch das Snelliussche Gesetz mit dem Winkel  $\varphi$  der einfallenden



Welle verknüpft (vgl. 5.25 und Abb. 5.26),

$$\frac{\sin \varphi_2}{v_2} = \frac{\sin \varphi_0}{v_1} = \frac{\sin \varphi_1}{v_1} .$$

Ist die Geschwindigkeit  $v_2$  im unteren Halbraum größer als  $v_1$  in der Schicht wird der Strahl vom Lot weggebrochen. Dann gibt es einen **kritischen Einfallswinkel**  $\varphi^*$ , bei dem der Brechungswinkel gerade  $90^\circ$  ist (Abb. 5.59),

$$\sin \varphi^* = \frac{v_1}{v_2} .$$

Der gebrochene Strahl der **kritisch refraktierten Welle** läuft horizontal unterhalb der Schichtgrenze mit der Geschwindigkeit  $v_2$ . Für die Ableitung der Laufzeitkurven ist in Abb. 5.59 der Strahlverlauf der (kritisch) refraktierten Welle eingezeichnet. Wie bei der Reflexionsseismik liegt die Quelle an der Oberfläche (bei  $x = 0$ ). Die Laufzeit besteht aus zwei Anteilen, zum einen der Reflexion unter dem Winkel  $\varphi^*$ ,

$$t_{\text{reflex}} = s_x x^* + s_{z1} 2h = \frac{\sin \varphi^*}{v_1} x^* + \frac{\cos \varphi^*}{v_1} 2h ,$$

sowie dem Anteil der über die Länge  $x - x^*$  entlang der unteren Schicht laufenden Welle,

$$t_{\text{kopf}}(x) = \frac{1}{v_2} (x - x^*) = \frac{x}{v_2} - \frac{\sin \varphi^*}{v_1} x^* .$$

Die Summe ergibt

$$\begin{aligned} t(x) &= t_{\text{reflex}} + t_{\text{kopf}}(x) = \frac{x}{v_2} + \frac{2h \cos \varphi^*}{v_1} \\ &= \frac{x}{v_2} + \frac{2h \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2} = \frac{x}{v_2} + t_I . \end{aligned} \quad (5.33)$$

Das ist eine Geradengleichung mit der Steigung  $1/v_2$  und dem Ordinatenabschnitt  $t_I$ .  $t_I$  wird auch **Intercept-Zeit** genannt und wird aus den Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  und der Lottiefe  $h$  der Schicht an der Quelle bei  $x = 0$  berechnet. Die Intercept-Zeit ist eine **abgeleitete Messgröße** und gehört zu keinem physikalischen Strahl, d.h. sie **kann nicht** direkt aus Einsätzen im Zero-Offset Seismogramms abgelesen werden. Wird die Laufzeitkurve der refraktierten Welle in einer Seismogrammsektion erkannt, dann kann aus den Parametern der Geraden die Geschwindigkeit der unteren Schicht und  $t_I$  berechnet werden. Die Schichttiefe berechnet sich aus

$$h = \frac{t_I v_1 v_2}{2 \sqrt{v_2^2 - v_1^2}} . \quad (5.34)$$

Die Gleichung (5.33) und (5.34) lassen sich für den **Mehrschichtfall** verallgemeinern. Die Laufzeit der unter der  $n$ -ten Schichtgrenze refraktierten Welle ist (vgl. (5.9)).

$$\begin{aligned} t(x) &= 2 \sum_{j=1}^n s_x \Delta x_j + 2 \sum_{j=1}^n s_{zj} \Delta h_j = \frac{1}{v_{n+1}} x + 2 \sum_{j=1}^n s_{zj} \Delta h_j \\ &= \frac{1}{v_{n+1}} x + 2 \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{1}{v_j^2} - s_x^2} \Delta h_j = \frac{1}{v_{n+1}} x + t_{In} \quad , \end{aligned}$$

wobei  $s_x = 1/v_{n+1}$ ,  $v_j < v_{n+1}$  und  $x \geq x^*$ .  $t_{In}$  ist die Intercept-Zeit der refraktierten Welle unter der  $n$ -ten Schicht.

Die Laufzeitkurven in Abb. 5.59 können wie folgt interpretiert werden. Die Laufzeit der direkten Welle wird durch eine Gerade durch den Quellpunkt mit der Steigung  $1/v_1$  beschrieben. Sie ist bis zur **Überholentfernung**  $x_c$  die erstankommende Welle im Seismogramm. Durch Messung der Steigung kann  $v_1$  der obersten Schicht bestimmt werden.

Die reflektierte Welle erscheint immer später als die direkte Welle. Am **Abriß-Geophon** (Geophon am Quellpunkt) wird direkt die Lotzeit gemessen. Weit entfernt von der Quelle nähert sich die Laufzeitkurve der reflektierten Welle der Geraden der direkten Welle asymptotisch an.

Die Laufzeitkurve der refraktierten Welle ist eine Halbgerade mit der Steigung  $1/v_2$ . Sie erscheint erst nachdem der kritische Einfallswinkel an der Schichtgrenze erreicht wurde ( $\varphi^*$  in Abb. 5.59). Die zugehörige **kritische Entfernung**  $x^*$  ist Abb.(5.59)

$$x^* = 2h \tan \varphi^* = \frac{2hv_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \quad . \quad (5.35)$$

Die Amplitude der refraktierten Welle ist relativ klein. Zwischen  $x^*$  und  $x_c$  kommt die refraktierte Welle erst nach der direkten Welle an. Sie ist deshalb in diesem Entfernungsbereich schwer zu messen. Ab dem Punkt  $x_c$  (**Überholentfernung** oder **cross-over-distance**) überholt die refraktierte die direkte Welle. In der Entfernung  $x = X$  in Abb. 5.59 stellt die refraktierte Welle den Ersteinsatz im Seismogramm, und wird deshalb auch bei kleiner Amplitude gut zu erkennen sein. Man bestimmt in der Praxis die Geradensteigung und damit  $v_2$  also erst für Entfernungen  $x > x_c$ . Um die Intercept-Zeit der Geraden zu bestimmen, wird die Gerade zurückprojiziert bis zum Quellpunkt bei  $x = 0$ . Die Rückprojektion kann durchgeführt werden, auch wenn für  $x < x^*$  keine refraktierte Welle existiert. Mit bekannten  $t_I$ ,  $v_1$  und  $v_2$  kann dann über (5.34) die Schichttiefe  $h$  berechnet werden.

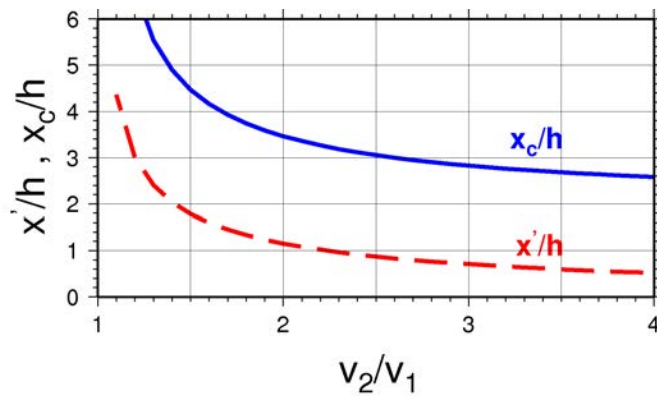


Abbildung 5.60: Dimensionslose Auftragung der kritischen Entfernung  $x^*$  und der Überholentfernung  $x_c$  für eine Quelle an der Oberfläche.  $h$  ist die Schichttiefe, und  $v_1$  und  $v_2$  sind die Phasengeschwindigkeiten in Schicht und Halbraum.

Am Profilverpunkt  $x_c$  ist  $t_{\text{direkt}}(x_c) = t_{\text{refrakt}}(x_c)$ , so dass für die **Überholentfernung** gilt

$$\frac{x_c}{v_1} = \frac{x_c}{v_2} + \frac{2h \cos \varphi^*}{v_1} \quad \text{oder} \quad x_c = 2h \sqrt{\frac{v_2 + v_1}{v_2 - v_1}}. \quad (5.36)$$

Die Schichtdicke kann damit bei bekanntem  $v_1$  und  $v_2$  alternativ durch Ablesen von  $x_c$  anstatt  $t_I$  erfolgen; allerdings ist die Bestimmung über  $t_I$  in der Regel genauer. In Abb. 5.60 ist die kritische Entfernung  $x^*$  für das erste Auftreten der refraktierten Welle und die Überholentfernung  $x_c$  dimensionslos dargestellt. Für typische Geschwindigkeitskontraste ist  $x^*$  grob im Bereich der doppelten und  $x_c$  im Bereich der drei- bis fünffachen Schichttiefe zu erwarten<sup>73</sup>. Darüber kann bereits die Krustendicke abgeschätzt werden. Nimmt man eine mittlere Krusten- und Mantelgeschwindigkeit von  $5.8 \text{ km/s}$  und  $8.2 \text{ km/s}$  an, dann findet man  $h \approx 0.2 x_c$ . Die Refraktionsseismik erfordert ganz entgegen der Reflexionsseismik große Profillängen. Für die Untersuchung einer etwa  $30 \text{ km}$  dicken Kruste müssen die Stationsprofile z.B. deutlich länger als  $150 \text{ km}$  sein. Der Stationsabstand bei solchen Auslagen liegt im Bereich  $2 - 10 \text{ km}$ .

### Wellenfronten und horizontale Langsamkeit:

Bevor wir zum Fall der Schichtneigung kommen ist die Diskussion der Wellenfronten und horizontalen Scheingeschwindigkeit von Interesse. Abb. 5.61 zeigt Momentaufnahmen (Snap-Shots) der Wellenfronten. Die Wellenfront der direkten Welle in der Schicht ist zu jedem Zeitpunkt  $t_i$  kreisförmig mit dem Radius  $r_i = v_1 t_i$  um den Quellpunkt an der Oberfläche. Die Wellenfront der Reflexion ist ebenso kreisförmig und kann mithilfe

<sup>73</sup> Liegt die Quelle unterhalb der Oberfläche, dann sind  $x_c$  und  $x^*$  kleiner.

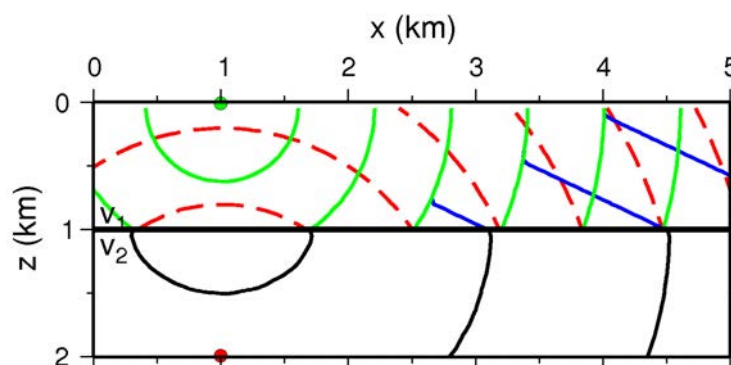


Abbildung 5.61: Momentaufnahmen (Snap-Shots) der Wellenfronten von einer Punktquelle an der Oberfläche (grüne Kreis) für ein Schicht-über-Halbraum Modell mit  $v_1 = 1.5 \text{ km/s}$  und  $v_3 = 3.5 \text{ km/s}$ . Gezeigt sind in der Schicht die direkte (grün), reflektierte (rot gestrichelt) und refraktierte Welle (blau), sowie die in den Halbraum gebrochene Welle (schwarz). Der Kreis (rot) in 2 Kilometer Tiefe zeigt die virtuelle Quelle zur Konstruktion der reflektierten Welle.

eines virtueller Quellpunktes in doppelter Schichttiefe konstruiert werden (Abb. 5.61). Die Wellenfront der direkten und reflektierten Welle überlagern sich auf der Grenzschicht und erfüllen zu jedem Zeitpunkt die Randbedingungen für Spannungen und Verschiebung sowie das Snellius Gesetz. Die Wellenfront der im Halbraum laufenden, gebrochene Welle ist komplizierter zu konstruieren. Für unterkritische Entfernungen setzt sich die gebrochene Welle aus der Überlagerung von Wellen zusammen, die von zeitlich und räumlich verschobenen Sekundarwellen an der Schichtgrenze abgestrahlt werden (Huygens Prinzip). In der Entfernung, in der die Wellenfront der gebrochenen Welle senkrecht auf der Schichtgrenze steht (entspricht der halben kritischen Länge), löst sich eine **refraktierte Welle** von der gebrochenen Welle ab und breitet sich entlang der Schichtgrenze horizontal mit der Geschwindigkeit  $v_2$  und der Langsamkeit  $s_x = 1/v_2$  aus. Im Strahlbild entspricht das dem streifenden Strahl entlang der Schichtgrenze. Die Welle ist entlang der Schichtgrenze **geführt**, da sie keine Energie tief in den Halbraum abstrahlt. Allerdings wird ständig Wellenenergie von der Schichtgrenze zurück in den oberen Halbraum gebrochen, wodurch eine in die Schicht refraktierte, ebene Welle entsteht (blaue Wellenfront in Abb. 5.61). Die Strahlen der refraktierten Welle im Halbraum sind alle parallel und fallen unter dem kritischen Winkel  $\varphi^*$  ein. Die **horizontale Scheingeschwindigkeit** der refraktierten Welle an der Oberfläche ist  $v_2 > v_1$ . Die **horizontale Langsamkeit** ist konstant und ist entsprechend  $s_x = 1/v_2 = \sin \varphi^*/v_1$ . Das geometrische Bild hat gewisse Ähnlichkeit zu dem einer Druckwelle, die von einem mit Überschall fliegenden Projektil erzeugt wird. Deshalb wird die Welle auch **Kopfwelle** genannt (in Analogie zur Machschen Kopfwelle). Ein anderer Name ist **Mintrop-Welle**.

**Die Laufzeitkurven bei Schichtneigung:**

Für eine **geneigte Schicht** (Abb. 5.62) hat man neben  $v_1, v_2$  auch die Tiefe und

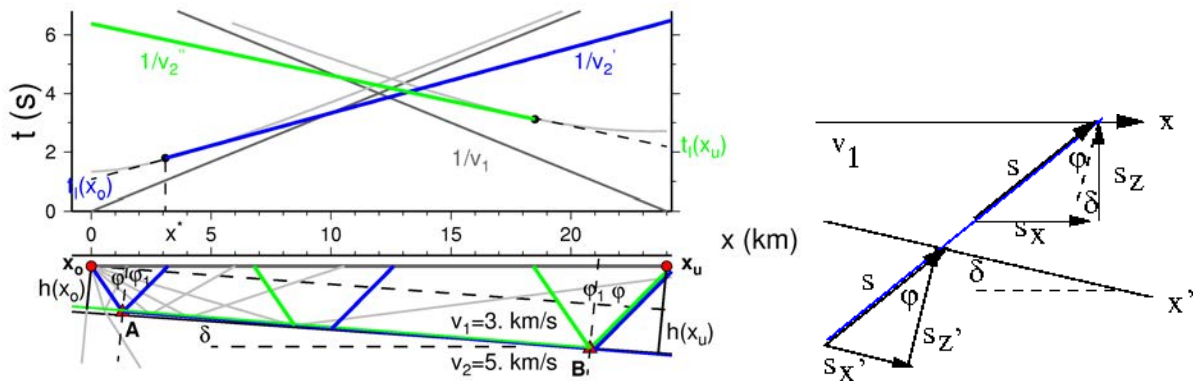


Abbildung 5.62: *Links:* Strahlweg und Laufzeitkurven der refraktierten Welle der geneigten Schichtgrenze für Schuss bei  $x_o$  und Gegenschuss bei  $x_u$ . *Links:* Skizze zur Orientierung des Langsamkeitsvektors und seiner Zerlegung in Komponenten.

Neigung der Schicht zu bestimmen. Abb. 5.61 hat verdeutlicht, dass die Wellenfront der refraktierten Welle eben ist (parallele Strahlen) und unter dem kritischen Winkel  $\varphi^*$  auf die Oberfläche trifft. Im Fall der Schichtneigung kann Abb. 5.61 für eine geneigte Schichtgrenze und geneigte schichtparallele Fläche (entlang  $x'$ ) durch den Quellpunkt bei  $x_o$  oder  $x_u$  übernommen werden. Entlang der geneigten Fläche breitet sich die Welle mit der Scheingeschwindigkeit  $v_1/\sin\varphi^*$  aus. Die horizontale Langsamkeit ist entsprechend  $s_{x'} = \sin\varphi^*/v_1$ . Richtung und Betrag des Langsamkeitsvektors in der oberen Schicht sind für die refraktierte Welle entfernungsunabhängig und konstant<sup>74</sup>. Die Langsamkeit der refraktierten Welle entlang der Oberfläche wird dann durch die Komponente des Langsamkeitsvektors in  $x$ -Richtung bestimmt. Im Fall des Schichtfallens ergibt sich  $s_x = \frac{\sin(\varphi^* + \delta)}{v_1}$  und Fall des Schichtsteigens  $s_x = \frac{\sin(\varphi^* - \delta)}{v_1}$  (Abb. 5.62) Die Laufzeitkurve der refraktierten Welle ist damit

<p>Schichtfallen: <span style="float: right;">(5.37)</span></p> $t_o(x) = \frac{\sin(\varphi^* + \delta)}{v_1}(x - x_o) + \frac{2h(x_o) \cos \varphi^*}{v_1} = \frac{1}{v_2'}(x - x_o) + t_I(x_o)$
<p>Schichtsteigen: <span style="float: right;">(5.38)</span></p> $t_u(x) = \frac{\sin(\varphi^* - \delta)}{v_1}(x_u - x) + \frac{2h(x_u) \cos \varphi^*}{v_1} = \frac{-1}{v_2''}(x - x_u) + t_I(x_u).$

$t_I(x_o)$  und  $t_I(x_u)$  ist die abgeleitete Intercept-Zeit zu dem oberen ( $x_o$ ) und unteren Quellpunkt ( $x_u$ ). Die Schichttiefe  $h = h(x)$  (Lottiefe) ist als Funktion der  $x$ -Koordinate

<sup>74</sup>so lange  $v_1 = \text{konst}$  und  $v_2 = \text{konst}$ .

definiert.

Formal hat man für das Schichtsteigen und -fallen dieselbe Gleichung wie (5.33), nur dass die Intercept-Zeiten mit Hilfe der Lottiefen  $h(x)$  des jeweiligen Quellpunkts berechnet werden und die **Scheingeschwindigkeiten**  $v'_2$  und  $v''_2$  die reziproken Geradensteigungen sind, mit

$$\begin{aligned} v'_2 &= \frac{v_1}{\sin(\varphi^* + \delta)} < v_2, & (\text{Schichtfallen}) \\ v''_2 &= \frac{v_1}{\sin(\varphi^* - \delta)} > v_2, & (\text{Schichtsteigen}). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Aus beiden Gleichungen läßt sich eine Bestimmungsgleichung für den kritischen Winkel  $\varphi^*$  und den Neigungswinkel  $\delta$  der Schicht ableiten,

$$\varphi^* = \frac{1}{2} \left[ \sin^{-1} \left( \frac{v_1}{v'_2} \right) + \sin^{-1} \left( \frac{v_1}{v''_2} \right) \right] \quad \text{und} \quad \delta = \frac{1}{2} \left[ \sin^{-1} \left( \frac{v_1}{v'_2} \right) - \sin^{-1} \left( \frac{v_1}{v''_2} \right) \right] \quad (5.40)$$

Für kleine Neigungswinkel ist  $\sin \delta \approx \delta$  und  $\cos \delta \approx 1$ , so dass

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{v'_2} &= \sin(\varphi^* + \delta) = \sin \varphi^* \cos \delta + \cos \varphi^* \sin \delta \approx \sin \varphi^* + \delta \cos \varphi^* \\ \frac{v_1}{v''_2} &= \sin(\varphi^* - \delta) = \sin \varphi^* \cos \delta - \cos \varphi^* \sin \delta \approx \sin \varphi^* - \delta \cos \varphi^* \end{aligned}$$

Die Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$\sin \varphi^* = \frac{v_1}{v_2} \approx \frac{v_1}{2} \left( \frac{1}{v'_2} + \frac{1}{v''_2} \right) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{v_2} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v'_2} + \frac{1}{v''_2} \right). \quad (5.41)$$

Das Problem der Schichtneigung kann also gelöst werden, wenn an jedem Ende des Geophonprofils eine Quelle gezündet wird. Man spricht von **Schuß** und **Gegenschuß**. Durch Messen der Intercept Zeiten an den beiden Quellpunkten und der beiden Scheingeschwindigkeiten  $v'_2$  und  $v''_2$  kann die wahre Geschwindigkeit  $v_2$  des unteren Halbraums und die Neigung  $\delta$  der Schicht bestimmt werden.

### Beispiel: Flachseismische Erkundung mittels Refraktionsseismik

Refraktionsseismik wird zur Untersuchung des nahen Untergrundes für unterschiedliche Fragestellungen durchgeführt. Die mehrere Meter dicke Locker- und Verwitterungsschicht verzögert die Ankunftszeit von P- und S-Wellen und beeinflusst dadurch z.B. die Nor-



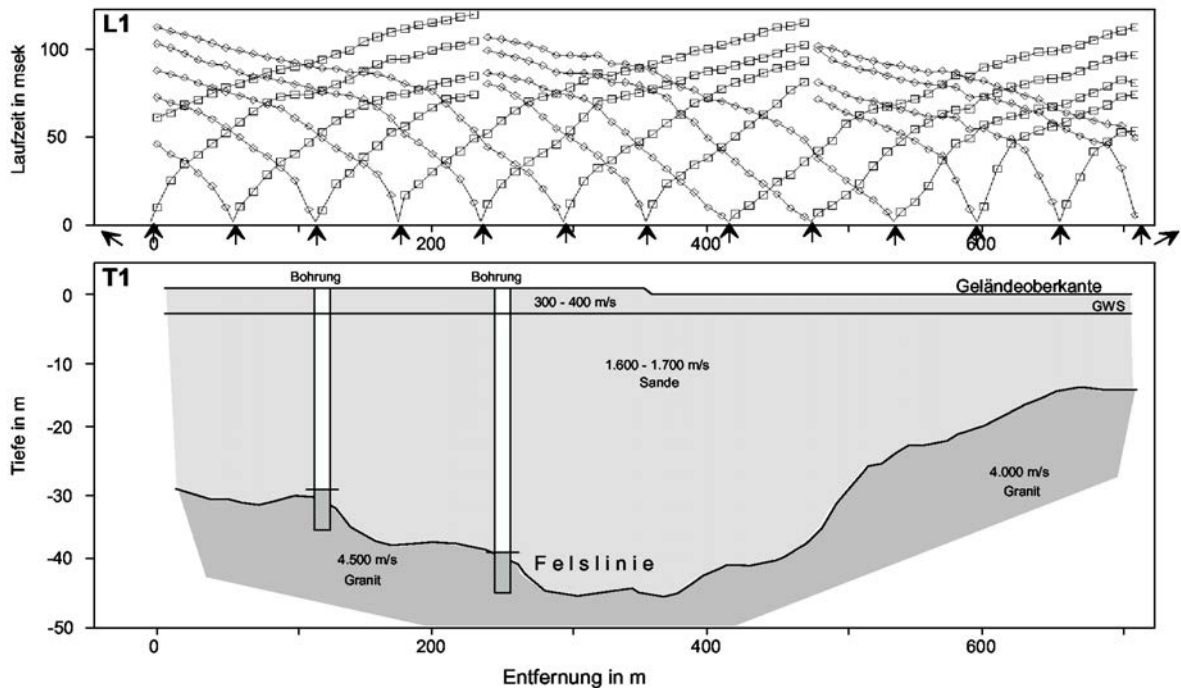


Abbildung 5.63: Ersteinsatzzeit Sektion (oben) und Geschwindigkeitstiefenmodell (unten) einer refraktionsseismischen Nahlinie. Das aus Ersteinsätzen abgeleitete Geschwindigkeitsmodell wurde anhand zweier Bohrungen überprüft (GGU mbH Karlsruhe).

mal Move Out Korrektur einer reflexionsseismische Stapelung. Daher wird häufig entlang eines reflexionsseismischen Profils eine sogenannte **Nahlinien Refraktionsseismik** durchgeführt, d.h. ein Refraktions-Kurzauslage von wenigen 10-er oder 100-er Metern, um Dicke und Geschwindigkeiten der obersten Schichten zu bestimmen. Nahlinien Refraktionsseismik, manchmal auch Hammerschlag-Seismik genannt, ist aber auch für viele baugewissenschaftliche, hydrogeologische oder Umweltfragen von Bedeutung. Abb.5.63 zeigt die Auswertung eines refraktionseismischen Profils zur Beurteilung eines Grundwasservorrates in einem sandigen Aquifer, um einen Förderbrunnen an der tiefsten Stelle des Aquifers zu plazieren. Die weichen Sande des Aquifers haben eine P-Wellen Geschwindigkeit von nur 1.5 - 1.7 km/s und liegen über festem Granit mit einer Geschwindigkeit von etwa 4 - 4.5 km/s. Oberhalb des Grundwasserspiegels gibt es eine wenige Meter dicke Schicht von trockenen, unverfestigten Sanden mit Geschwindigkeiten von nur 0.3 - 0.4 km/s. Das Messprofil war 700 m lang. Die Quellen (z.B. Hammerschlag) wurden gleichabständig an 13 Positionen gelegt, und es wurde jeweils der Vor- und der Rückschuß ausgewertet. In Abb.5.63 (oben) sind die Ersteinsätze der Vor- und Rückschüsse durch Linien dargestellt. Man erkennt jeweils zwei bis drei Geradensegmente mit unterschiedlichen Steigungen. Die reziproken Steigungen geben die Geschwindigkeiten bzw. Scheingeschwindigkeiten einzelner Schichten an. Variationen der Steigung der Segmente

der direkten Welle müssen durch laterale Geschwindigkeitsvariationen in den obersten trockenen Sanden erklärt werden. Unterschiedliche Dicken der Trockensande führen auf variierende Überholentfernungen in den Laufzeitkurven zu den einzelnen Schüssen (vgl. 100 m und 600 m). Variationen der Steigung in den Laufzeitkurven der ersten und zweiten refraktierten Welle können sowohl durch laterale Geschwindigkeitsvariationen wie auch durch Schichtneigung verursacht werden. Daher betrachtet man Paare von Schuß und Gegenschuß, da sich damit die mögliche laterale Variation der Schichtgeschwindigkeit ausschließen läßt. Das abgeleitete Schichtenmodell ist in Abb. 5.63 (unten) dargestellt. Die Granitschicht liegt in Tiefen zwischen 20 und 30 m. Das Schichtmodell wurde durch zwei Bohrungen bestätigt. (Abb.5.63). Der geplante Brunnen konnte so an die tiefste Stelle des sandigen Aquifers gebaut werden.

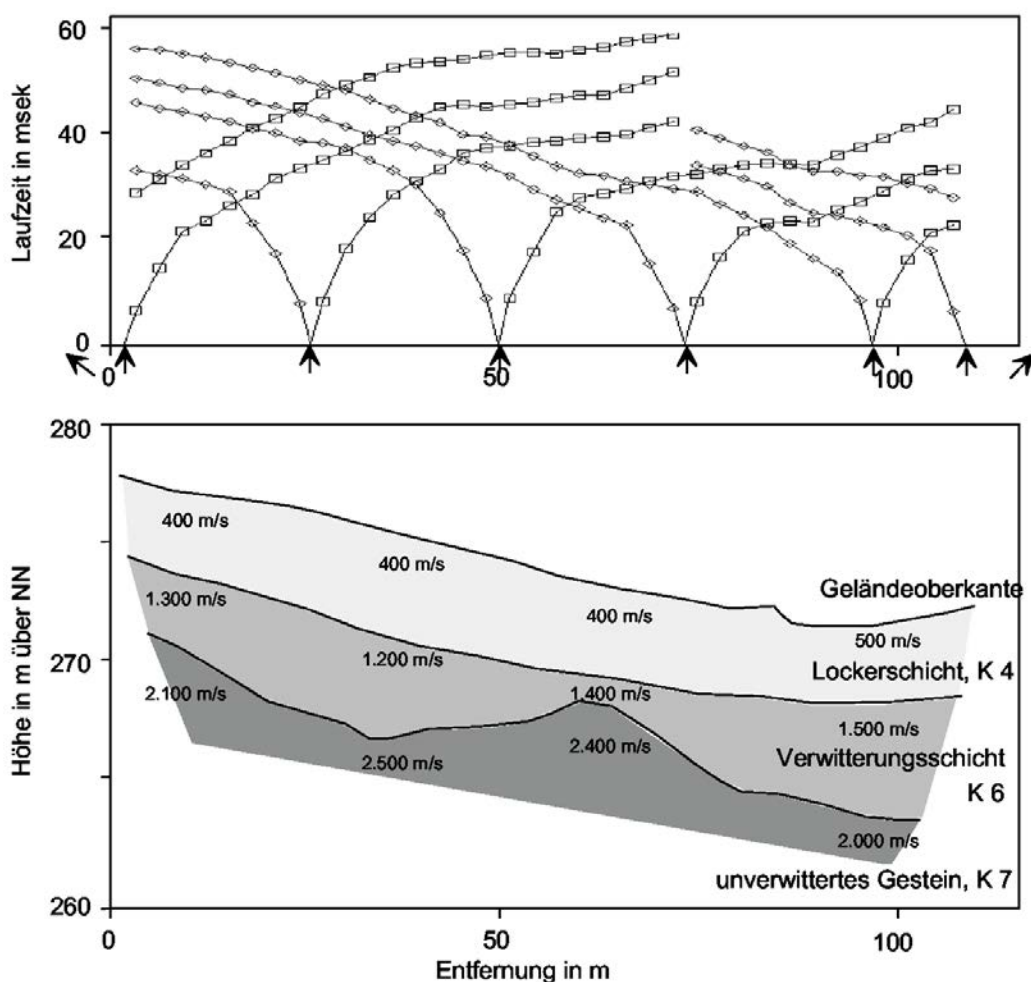


Abbildung 5.64: Ersteinsatzzeit Sektion (oben) und Geschwindigkeitstiefenmodell (unten) einer refraktionsseismischen Nahlinie. Die Ersteinsätze lassen sich durch ein Dreischichten-Modell erklären (GGU mbH Karlsruhe).

Abb.5.64 zeigt eine ähnliche Untersuchung von Bodenschichten zur Vorerkundung eines

Baugrundstückes. Die Untersuchungstiefe reicht bis etwa 20 m unter die Geländeoberkante, so dass eine Profillänge von etwa 100 m ausgelegt wurde. In den Ersteinsatz-Laufzeitkurven der einzelnen Schüsse sind deutlich jeweils drei Segmente mit unterschiedlichen Steigungen zu erkennen. Das unterste Segment gehört zur direkten Welle durch trockene Lockerböden (Löß-, Ton- und Schlufflagen), das mittlere zur refraktierten Welle in der Verwitterungsschicht (Wechsellagen von Ton- und Sandstein), und das untere zur 2. refraktierten Welle in unverwittertem Sandstein. Der Sandstein der liegenden Schicht hatte in diesem Fall relativ geringe Geschwindigkeiten, da er von dünnen Tonsteinschichten durchsetzt war. Das mittlere Refraktionssegment kann nur dann als Ersteinsatz erkannt werden, wenn die mittlere Verwitterungsschicht genügend dick ist. Ansonsten erscheint die refraktierte Welle der mittleren Schicht nicht als Ersteinsatz und kann nicht einfach in den Seismogrammen erkannt bzw. ausgemessen werden.

Die Auswertungen in Abb.5.63 und Abb.5.64 wurden durch die optimale Anpassung aller Laufzeitkurven mithilfe eines Raytracing Programms durchgeführt, wobei dabei auch Geschwindigkeitsgradienten und laterale Geschwindigkeits-Variationen berücksichtigt werden. Sie gehen über die einfachen, in diesem Skript abgeleiteten Gleichungen hinaus.

### **Beispiel: Kontinental Kruste Nord- und Mitteleuropas**

In der Krustenuntersuchung hat man in den vergangenen 30 Jahren mehrere Langprofile realisiert. Beispiele sind europäische Geotraversen, bei denen meist im Rahmen internationaler Kooperation die Krustenstruktur von ganz Nord- und Westeuropa untersucht wurde. Als Quellen wurden in der Regel chemische Sprengungen verwendet. Die stärksten Sprengungen wurden vermutlich in der ehemaligen UDSSR gezündet. In einem großangelegten nationalen Programm hatte die UDSSR atomare Sprengungen als Quellen für Profilauslagen von über 1000 km Länge gezündet.

Abb. 5.65 zeigt Ausschnitte von drei Langprofilen zur Untersuchung der europäischen Kruste: I. der zentrale Teil der europäischen Geotraverse (EGT86), II. das SW-NE Profil des Sudetes Projektes (SUDETES), und III. das Hauptprofil des Fennolora Projektes (FENNOLORA). Der Stationsabstand betrug zwischen 1 und 2.5 km (EGT), 3 - 12 km (FENNOLORA), und 2.7 - 4 km (SUDETES). Bei EGT wurden insgesamt 15 Einzelprofile und 9 starke Bohrloch bzw. Seesprengungen verwendet. In FENNOLORA wurden überwiegend Seesprengungen als Quellen verwendet, wobei Wellen mit Eindringtiefen bis 400 km in den Erdmantel aufgezeichnet wurden. Die Auswertung der seismischen Sektionen erfolgte in allen drei Projekten mit einer flexiblen Raytracing Modellierung, welche Geschwindigkeitsgradienten und laterale Geschwindigkeitsvariationen berücksichtigt. Ebenso wurden, wenn möglich, später ankommende Reflexionseinsätze in den Seismogrammen zusätzlich modelliert.

Abb.5.66 zeigt Seismogrammsektionen auf einem zentralen Segment des FENNOLORA

Profils (Profil III, Schußpunkt E und Gegenschuß F). Am Punkt E wurde eine See- und am Punkt F eine Landsprengung durchgeführt, wobei bei E vermutlich weniger hohe Frequenzen angeregt wurden und sich deshalb der Frequenzgehalt der Seismogramme für Schuß E und F unterscheidet. Abb.5.66 ist mit  $x/6\text{ km/s}$  reduziert, wodurch Einsätze mit einer horizontalen Scheingeschwindigkeit von  $6\text{ km/s}$  als horizontale Einsätze erscheinen, und kleinere oder größere Scheingeschwindigkeiten durch eine positive oder negative Steigung erkennbar werden. Durch die Reduktion der Zeitachse wird die Auflösung der Laufzeitkurven in der Darstellung erhöht. Typische Reduktionsgeschwindigkeiten in der Krustenseismik sind  $6\text{ km/s}$  oder  $8\text{ km/s}$ . In den Seismogrammen sind die erstankommenden, direkten Wellen ( $P_g$  und  $P_{g'}$ ) durch nahezu horizontale Ersteinsatz-Segmente erkennbar. Bei Schußpunkt E sind die obersten Krustengeschwindigkeiten kleiner als bei Schußpunkt F. In beiden Sektionen ist zwischen der direkten ( $P_g$ ) und im oberen Mantel refraktierten Welle ( $P_n$ , Refraktion an der Moho Diskontinuität) eine weitere Phase mit mittlerer Scheingeschwindigkeit zu erkennen ( $P_b$ ), die als refraktierte Welle innerhalb der Kruste interpretiert wird (Refraktion an der Conrad Diskontinuität). Typisch sind kleine Amplituden der Ersteinsätze der  $P_n$  Phase (Moho-refraktierte Welle), und dagegen deutlich stärkere Amplituden der direkten Welle oder der später einsetzenden Moho-Reflexion. Die späteren Reflexions-Einsätze können durch theoretische Laufzeiten gut erklärt werden (durchgezogene Linien in Abb.5.66). Die Überholentfernung der  $P_n$  Phase liegt bei etwa  $205\text{ km}$ . Geht man von einer mittleren Krusten und Mantelgeschwindigkeit von  $5.8\text{ km/s}$  und  $8.2\text{ km/s}$  aus, dann ergibt Gleichung (5.36) eine Krustendicke von etwa  $41\text{ km}$ . Die Steigung der  $P_n$  Phase für Schüsse E und F beträgt  $0.122\text{ s/km}$  und  $0.123\text{ s/km}$ , oder in Scheingeschwindigkeit  $8.20\text{ km/s}$  und  $8.14\text{ km/s}$ , woraus sich ein leichtes Schichtfallen in Richtung Norden andeutet. Die Mantelgeschwindigkeit wird auf etwa  $8.16\text{ km/s}$  abgeschätzt.

Abb.5.67 zeigt vergleichbare Seismogrammsektionen (Schuß und Gegenschuß) des EGT (I) und SUDETES Profils (II). Die Reduktionsgeschwindigkeit ist für EGT  $6\text{ km/s}$  und für SUDETES  $8\text{ km/s}$ . Deshalb erscheinen bei EGT  $P_g$  und bei SUDETES  $P_n$  Phasen nahezu horizontal. In beiden Profilen sind die Überholentfernungen der  $P_n$  Phase kleiner bei etwa  $130\text{ km}$ , was mit der gleichen Abschätzung  $h \approx 0.2x_c$  eine geringere Krustendicke von nur  $27\text{ km}$  ergibt. Die mittleren Mantelgeschwindigkeiten aus der Steigung der  $P_n$  Phase sind  $8.25\text{ km/s}$  (EGT) und  $8.1\text{ km/s}$  (SUDETES). Die leicht unterschiedlichen Steigungen der  $P_n$  Phase für Schuß und Gegenschuß deuten für EGT zwischen Sprengung H und D auf eine anwachsende Krustendicke in S- und für SUDETES in NE- Richtung hin. Aus den direkten  $P_g$  Phasen kann in beiden Profilen auf Regionen mit langsamerer Oberkruste geschlossen werden (z.B. Sedimentbecken). In den Sektionen des SUDETES Profils kann außerdem ein Sprung in der Laufzeitkurve der direkten Welle erkannt werden. Conrad refraktierte Wellen ( $P_b$ ) sind in beiden Sektionen nicht einfach zu erkennen.

Abb. 5.68 zeigt die abgeleiteten Krustenmodelle entlang Profil I, II und III. Die Kruste unter I und II ist deutlich dünner als unter Profil III. Ausgeprägte Sedimentbecken sind am nördlichen Ende von I (Norddeutsche Becken) und am NE Ende von II (Polnische Becken) zu finden. Eine interkrustale Conrad Diskontinuität ist nur auf II und III durchgehend in etwa 20-25 *km* Tiefe zu erkennen. Auf Profil I ist die Conrad nördlich der Elbe (die Unterkruste ist dort schneller als südlich der Elbe) und südlich der Hessischen Senke erkennbar. Die Moho taucht im Süden von Profil I unter dem Molasse Becken und kurz vor den Alpen tiefer in den Mantel ein. Ähnliches findet man am NE Ende des Profil II, wo das Profil auf den dicken Baltischen Kraton zuläuft (East European Craton). Auf Profil II sind mehrere krustale Verwerfungen eingezeichnet, die sich aber mit Ausnahme des Bereichs des Egergrabens nicht bis in Manteltiefen durchprägen. In Schweden entlang Profil III erkennt man mehrere tiefgehende Verwerfungen, die die Morphologie der Moho beeinflussen. Prominent ist die Steep Mylonitic Zone zwischen Schußpunkt B und C, die den Übergang der dünnen kontinentalen Kruste Norddeutschlands in den Skandinavischen Schild markiert.



Abbildung 5.65: Übersicht über drei europäische Refraktions-Langprofile (I=EGT, II=SUDETES, und III=FENNOLORA). Schußpunkte (Sprengungen) sind durch Buchstaben markiert. Tektonische Einheiten an der Oberfläche sind schematisch eingezeichnet. Transversale Mercatorprojektion mit einem zentralen Meridian bei 10°.



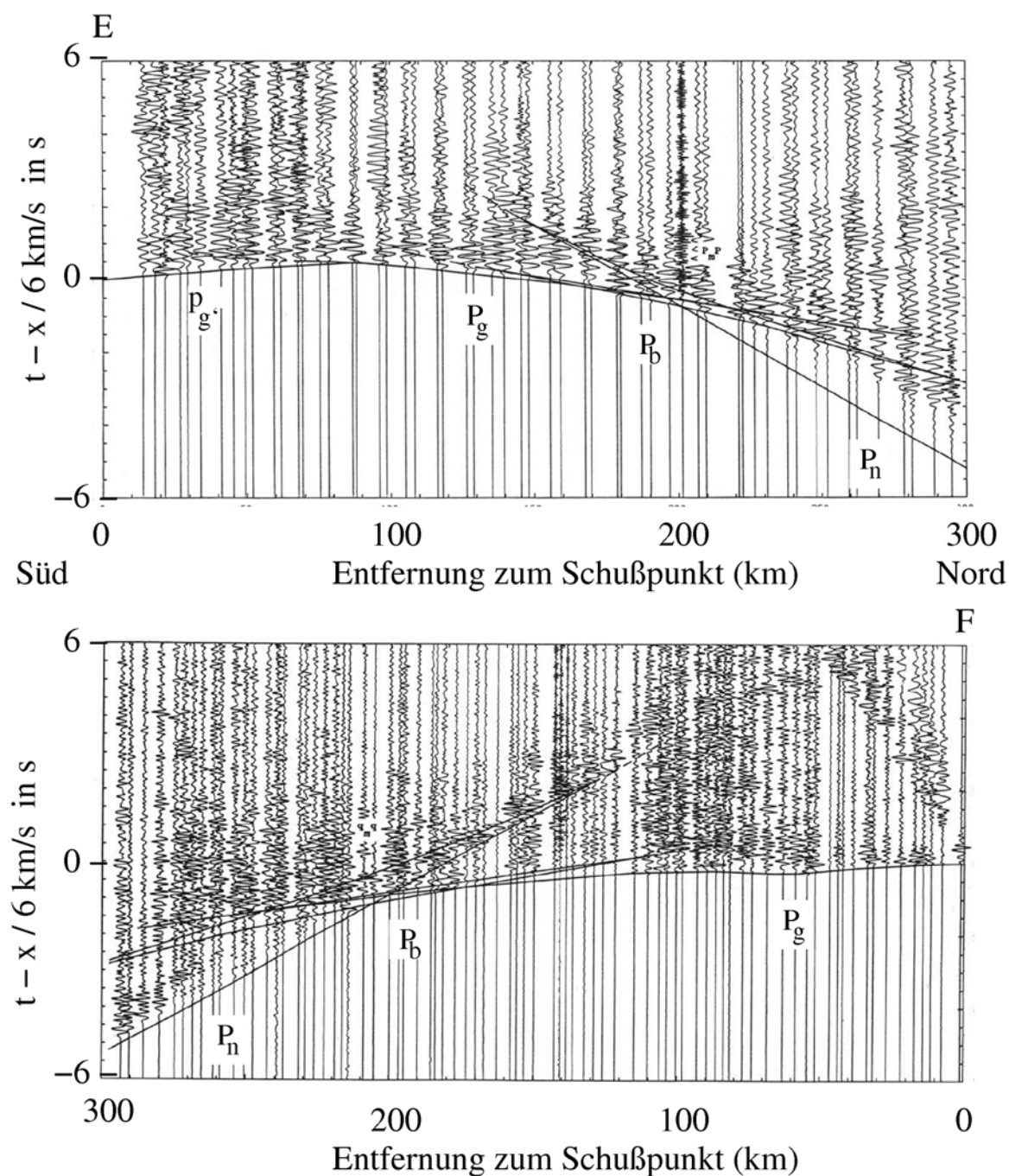


Abbildung 5.66: Seismogrammensektionen auf Profil III (FENNOLOGRA, Schuß bei Schußpunkt E und Gegenschuß bei F, Bandpass 1.3 - 33 Hz). Schußpunkt E war eine Seesprengung und erzeugte tieffrequente Seismogramme. Aufgetragen sind mit 6 km/s reduzierte Zeiten. Die direkten P-Wellen in der Kruste sind mit  $P_g$  und  $P_{g'}$  und die refraktierten Kopfwellen im Mantel mit  $P_n$  markiert (modifiziert nach Guggisberg et al., 1991).

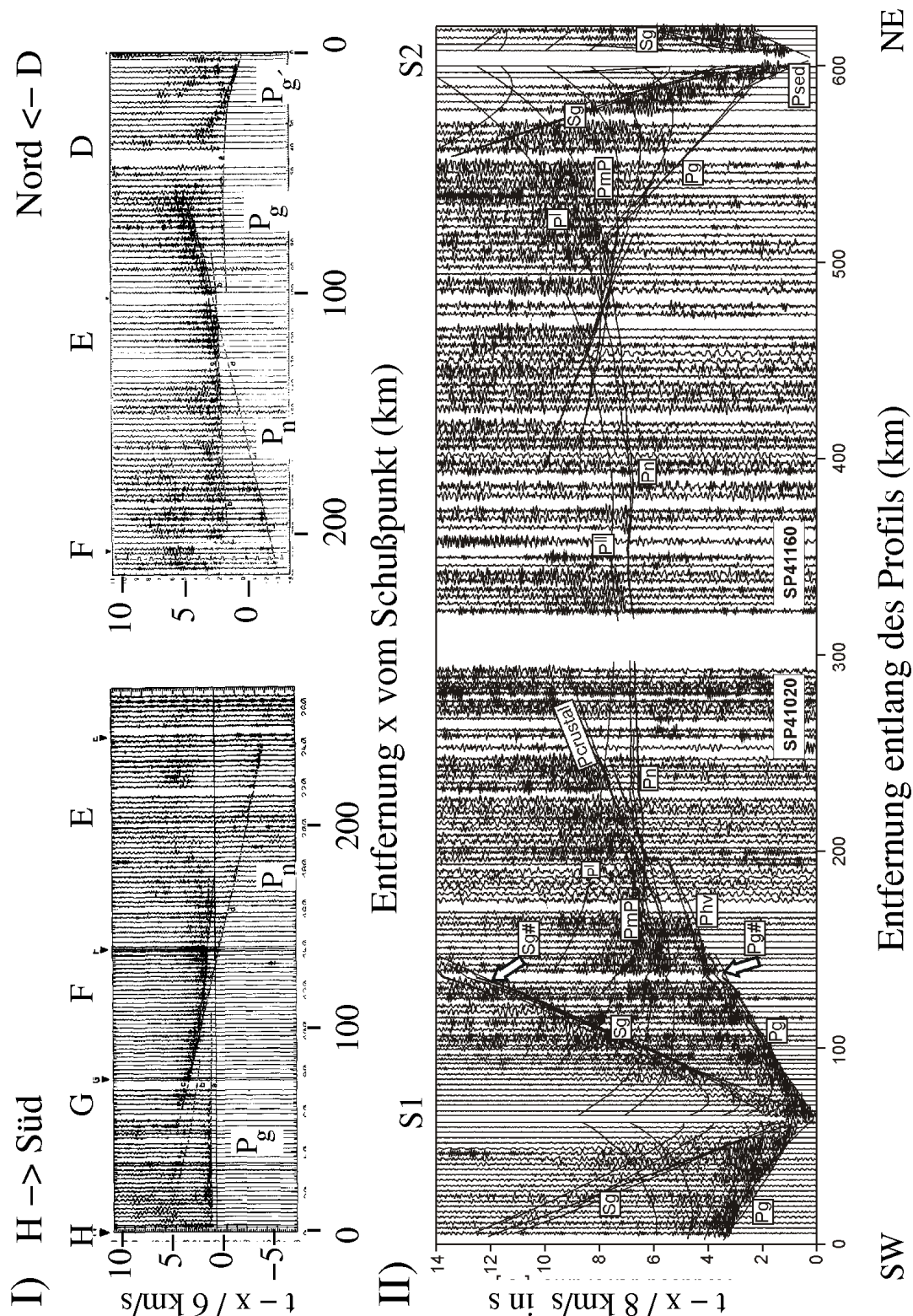


Abbildung 5.67: Seismogrammsectionen für Schuß und Gegenschuß auf Profil I (EGT, oben, Schußpunkte H und D, Bandpassfilter 1.5-5  $Hz$ ) und auf Profil II (SUDETES, unten, Schußpunkte S1 bei 70km und S2 bei 600km). Aufgetragen sind mit 6  $km/s$  (oben) und 8  $km/s$  (unten) reduzierte Zeiten. Die direkten P-Wellen in der Kruste sind mit  $P_g$  und  $P_g'$  und die refraktierten Kopfwellen im Mantel mit  $P_n$  markiert (modiziert nach Aichroth et al., 1992; Grad et al., 2008).

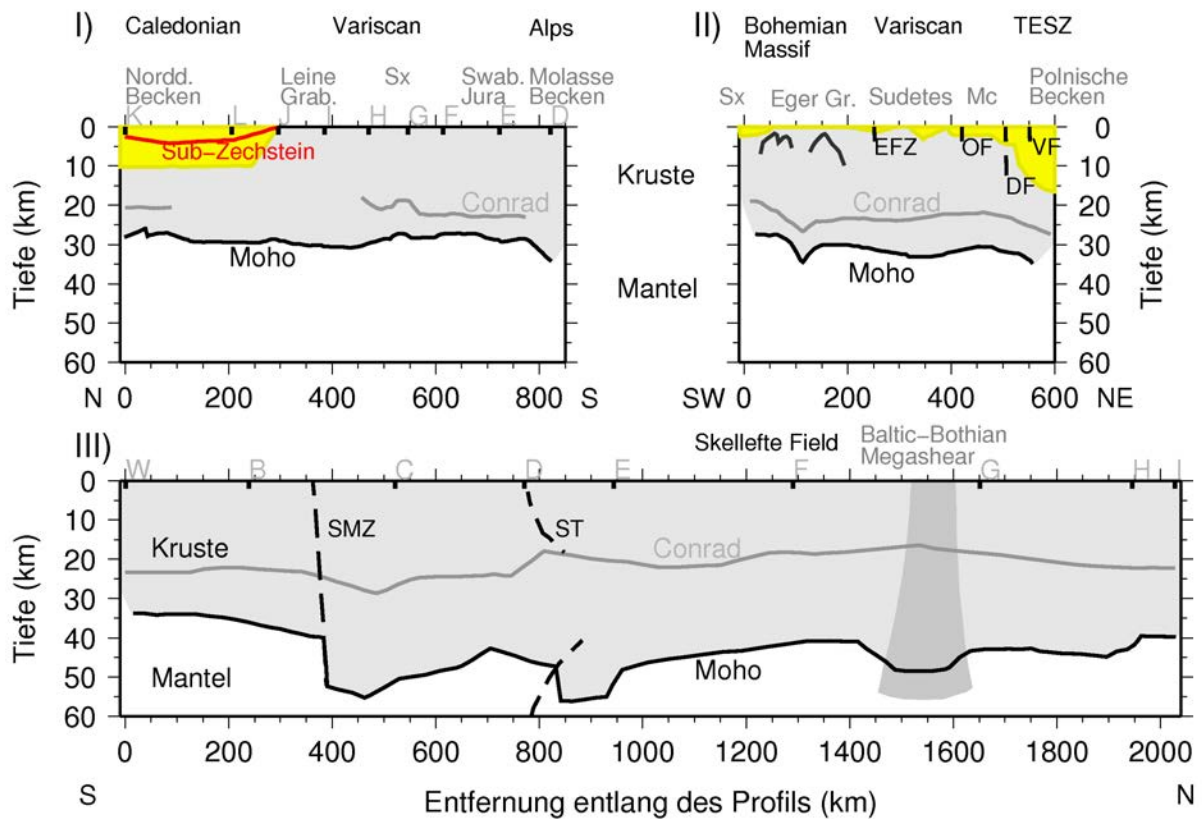


Abbildung 5.68: Krustenmodelle (schematisiert) unter den Refraktionsprofilen I (EGT), II (SUDETES) und III (FENNOLORA), vgl. Abb. 5.65. Eingezeichnete Schichtgrenzen mit Geschwindigkeitssprüngen sind die Moho (von  $\approx 6.9 \text{ km/s}$  auf  $\approx 8.1 \text{ km/s}$  und Conrad (von  $\approx 6.3 \text{ km/s}$  auf  $\approx 6.6 \text{ km/s}$ ). Wichtige Sedimentbecken sind gelb gefüllt, und einzelne Verwerfungen und Scherzonen sind eingezeichnet (gestrichelt, EFZ = Elbe Fault Zone, OF = Odra Fault, DF = Dolsk Fault, VF = Variscan Fault, SMZ = Steep Mylonite Zone, ST = Svecofennian Thrust). Tektonische Einheiten und Perioden sind über den Profilen genannt, ebenso wie Schußpunkte (modifiziert nach Aichroth et al., 1992; Grad et al., 2008; Guggisberg et al., 1991).



## 6 Erdbeben

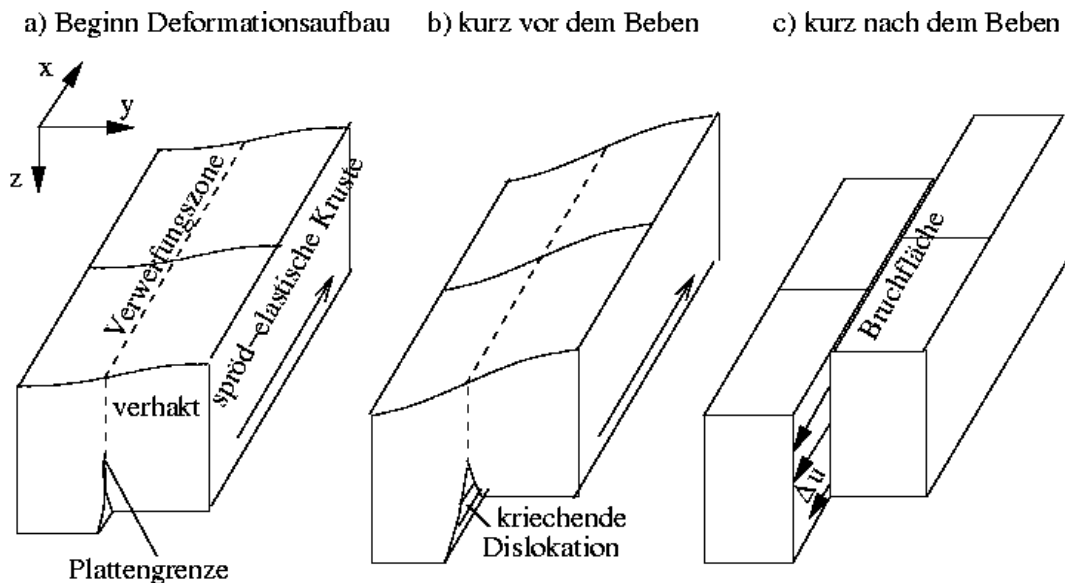


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung des Elastic-Rebound Modells und eines seismischen Zyklus zur Erklärung tektonischer Erdbeben an vertikalen Plattengrenzen. Während der interseismischen Periode (a und b) ist der obere Bereich der Plattengrenze verhakht, während der untere Bereich der Plattenbewegung folgt (Kriechbewegung). Während des Erdbebens (c) erfährt der ursprünglich verhakhte Teil ruckartige Dislokationen  $\Delta u$ , welche die aufgebauten Spannungen auf der Bruchfläche abbauen.

Bei einem **tektonischen Erdbeben** verschieben sich die Gesteinsblöcke auf beiden Seiten einer **Verwerfungszone** ruckartig gegeneinander, so dass hochfrequente seismische Wellen abgestrahlt werden. Die Wellen werden von der Bevölkerung eventuell verspürt und können bei Starkbeben oder in unmittelbarer Nähe zum **Bebenherd** zu Schäden führen. Durch die Verschiebung am Bebenherd und die Deformation des Gesteins wird elastische Spannung abgebaut, die sich zuvor innerhalb von vielen Jahrzehnten oder Jahrhunderten im Gebiet der Verwerfungszone aufgebaut hat. **Elastische Scherspannungen** in der spröden Erdkruste sind die eigentliche Ursache für tektonische Beben. Die Bewegung der Erdschollen bei dem Beben wird als **Scherbruch** bezeichnet. Die Scherspannung auf der Verwerfung kann sich aus unterschiedlichen Gründen aufgebaut haben. Die häufigste Ursache ist die Bewegung der starren Lithosphärenplatten gegeneinander, die zu einer erhöhten Deformation- und Spannungsrate im Bereich einer verhakten Plattengrenze führt. Abb. 6.1 erklärt das **Elastic-Rebound Modell** für die Entstehung von Erdbeben an Plattengrenzen. Während der interseismischen Phase eines Bebenzyklus (a und b) baut sich auf dem verhakten Bereich der Verwerfungszone Deformation und Spannung konzentriert auf, da im unteren Bereich der Plattengrenze Kriechbewegung stattfindet oder aber dort Spannung viskoelastisch oder duktil abgebaut wird. Die

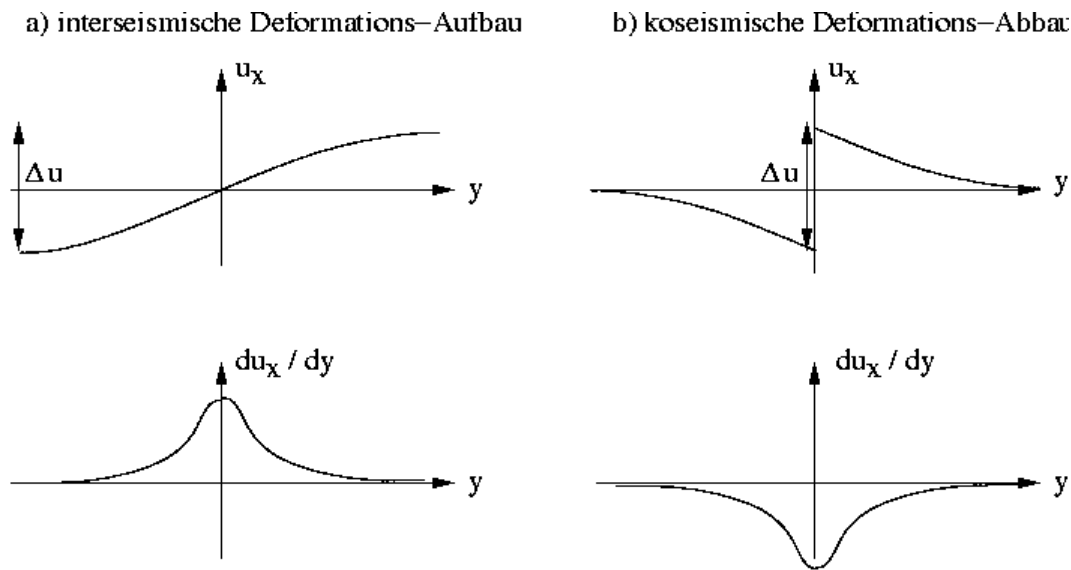


Abbildung 6.2: Skizze der Verschiebung  $u_x$  und Deformation  $du_x/dy$  links und rechts der Verwerfungszone nahe der Oberfläche bei  $y = 0$  während des interseismischen Phase des Deformationsaufbaus (a) und der Phase des koseismischen Deformationsabbaus (b).

während des Erdbebens entstehende Deformation ist gerade so groß, dass die zwischen zwei Beben aufgebaute Deformation wieder abgebaut wird (Abb. 6.2).

Die Untersuchung von Erdbeben kann daher unterschiedliche Ziele haben: (1) die Bestimmung von Parametern des Erdbebenherdes und Bruches (Quellparameter), (2) die Untersuchung und Kartierung der aktiven Verwerfungszonen, (3) die Untersuchung des Spannungsfeldes, oder (4) die Bewertung von Bodenerschütterungen durch die angeregten seismischen Wellen und die Zuordnung von seismisch verursachten Schäden. Erkenntnisse aus den ersten drei Bereichen fließen in Bebenvorhersage-Modelle ein.

## 6.1 Parameter von Erdbeben

In erster Näherung werden Erdbeben als Punktquellen betrachtet, die durch ihren Ort, ihre Stärke und ihre Abstrahlcharakteristik charakterisiert werden.

### 6.1.1 Hypozentrumsbestimmung

Der Punkt des Bruchbeginns auf der Bruchfläche wird **Hypozentrum** genannt. Die Projektion dieses Punktes auf die Erdoberfläche ist das **Epizentrum** (Abb. 6.3). Der Bruch, d.h. die Dislokation der beiden Erdschollen, breitet sich vom Hypozentrum aus auf der **Bruchfläche** aus. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Bruchs, oder besser der Bruchfront, liegt im Bereich von einigen  $km/s$  und ist in der Regel etwas kleiner als die

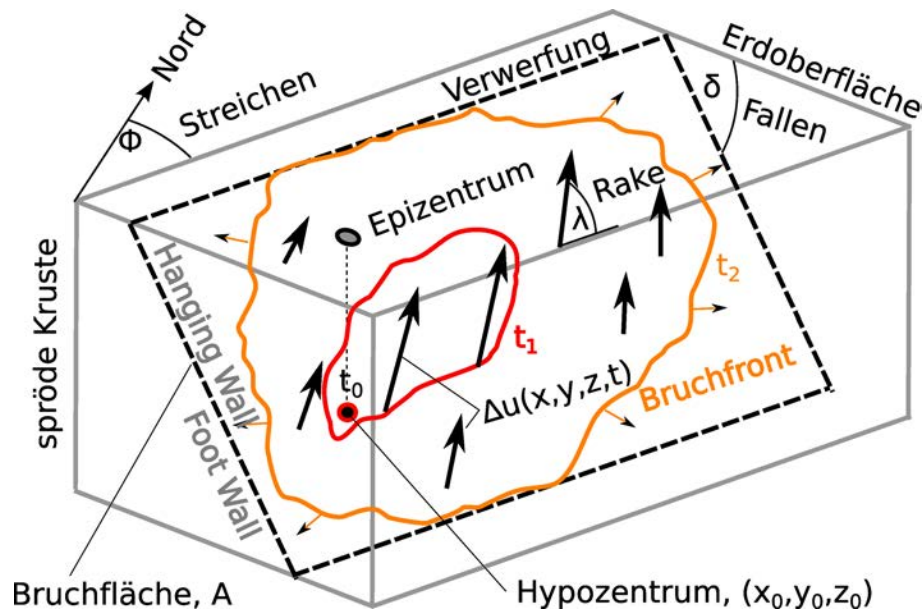


Abbildung 6.3: Schematische Skizze des Erdbebenbruchs: Herdzeit  $t_0$ , Hypozentrum, Epizentrum, Isochronen der Bruchfront zu Zeiten  $t_1$  und  $t_2$ , Dislokation  $\Delta u$  mit Orientierung  $\lambda$  und das Streichen  $\Phi$  und Fallen  $\delta$  der Verwerfung sind markiert.

Geschwindigkeit der Scher- oder der Rayleighwellen im Tiefenbereich des Bebenherdes. Die Bruchfläche stellt den nach dem Beben gebrochenen Bereich auf der geologischen Verwerfung (Plattengrenze) dar (Abb. 6.3) und kann bei sehr starken Beben über hunderte von Kilometern lang oder breit sein.

Bei der **Lokalisierung** von Erdbeben wird das Hypozentrum und der Zeitpunkt des Bruchbeginns (**Herdzeit**) bestimmt. Die Eingangsdaten dafür sind Ankunftszeiten und Laufzeiten unterschiedlicher Wellen vom Erdbebenherd. Gemessen werden z.B. die Ankunftszeiten der direkten Kompressions- ( $t_P$ , P- oder Primär-Welle) und Scherwelle ( $t_S$ , S- oder Sekundär-Welle). Die Geschwindigkeit der P-Wellen ist größer als die der S-Wellen. Im Bebenherd werden sie zur gleichen Zeit  $t_0$  angeregt, und der Abstand zwischen beiden Phasen,  $t_S - t_P$ , wächst mit dem Laufweg (Abb. 6.4). Aus  $t_S - t_P$  an einer Station kann die Entfernung  $r$  des Herdes zu dieser Station abgeschätzt werden. Für krustale Beben und Entfernungen bis etwa 300 km gilt  $l \approx 8 \text{ km/s} \cdot (t_S - t_P)$  (Abb. 6.4). In größeren Entfernungen wird die Abschätzung aus numerisch berechneten **Laufzeitkurven** der P- und S-Welle berechnet. Abb. 6.6 zeigt ein (historisches) Beispiel für numerisch berechnete Strahlwege und Laufzeiten von P-Wellen durch den Erdkern (Gutenberg and Richter, 1939). Unterschiede des  $v_p$  Modells aus 1939 zu heutigen Erdmodellen lagen vor allem im Bereich des oberen Mantels und des inneren Kerns.

Mit der Aufzeichnungen der linear polarisierten P-Welle auf den drei Seismometer-



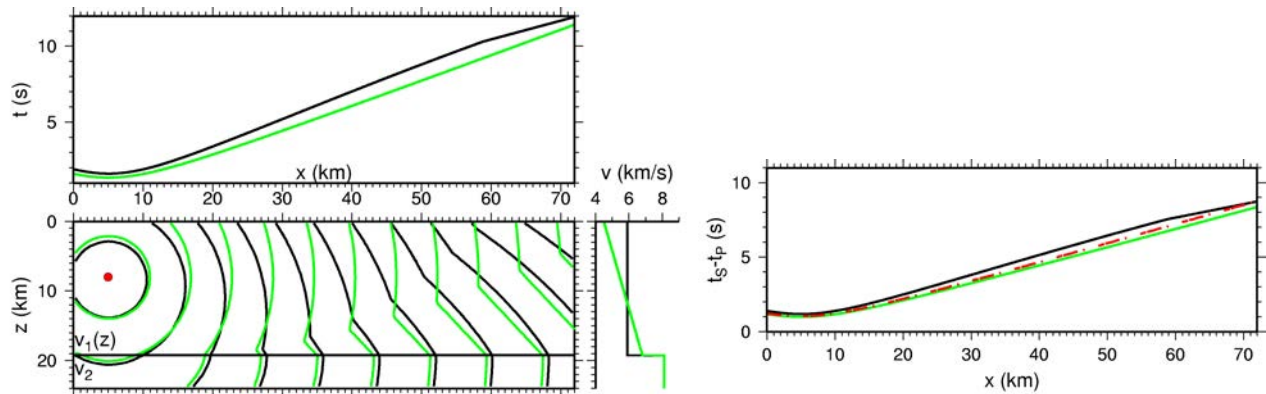


Abbildung 6.4: Wellenfronten und Laufzeitkurven der erstankommenden P-Welle für ein Krustenbeben ( $x_0 = 5 \text{ km}$ ,  $z_0 = 8 \text{ km}$ ). Die S-Welle hat bei  $v_p/v_s = \text{const}$  die gleichen Strahlwege aber spätere Ankunftszeiten. **Links:** Vergleich der Laufzeiten der erstankommenden Welle für eine Kruste mit konstanter (gün) oder kontinuierlich ansteigender Geschwindigkeit (schwarz) in der Kruste. **Rechts:** Auftragung der Differenzzeit  $t_s - t_p$  für beide Modelle als Funktion der Epizentralentfernung, wobei  $v_p = \sqrt{3}v_s$  angenommen wurde. Die rote Kurve gibt die theoretische S-P Zeit mit der Abschätzung  $t_s - t_p = \sqrt{(x - x_0)^2 + z_0^2}/(7.7 \text{ km/s})$  an.

Komponenten an der Station kann die Richtung des Erdbebens „grob gepeilt“ werden. Die „Lokalisierung des Erdbebens“, d.h. die Bestimmung der Richtung und Entfernung zur Messstation, kann also bereits mit nur einem Seismometer durchgeführt werden. Die Lokalisierung ist dann aber noch sehr ungenau. Abb. 6.5 zeigt ein Lokalisierungs-Beispiel eines schwachen Lokalbebens direkt unter der Station Bad Segeberg (BSEG) in Norddeutschland. Die Station steht über einem Salzstock, und das Erdbeben könnte durch lokalen Spannungsaufbau im Zusammenhang mit Salzbewegung verursacht worden sein.

Die **Dreikreismethode** ist ein geometrisches Verfahren, das das Prinzip der Lokalisierung mit mehreren Stationen veranschaulicht (Abb. 6.7). Mit den abgeschätzten Entfernungen  $r_i$  an jeder Station  $i$  wird ein Kreis um diese Station gezeichnet. Das Hypozentrum liegt auf dem Kreis, oder genauer, auf der Oberfläche einer in der Erde liegenden Halbkugel mit dem Radius  $r_i$  um jede Station  $i$ . Lag das Hypozentrum in der Tiefe  $z = 0$ , d.h. direkt an der Oberfläche (z.B. Sprengung), dann schneiden sich die Entfernungskreise in einem Punkt an der Erdoberfläche, d.h. im Epizentrum des Bebens. Die gemessenen Ankunftszeiten von P- und S-Wellen an nur drei Stationen genügen bereits für eine eindeutige Lokalisierung (siehe Abb. 6.7). In der Regel liegt das Hypozentrum in mehreren Kilometern Tiefe und die Entfernungskreise der drei Stationen in der Ebene  $z = 0$  überlappen sich. Das Epizentrum kann dann durch den Schnittpunkt der zwei Sekanten gefunden werden, die jeweils durch die zwei Schnittpunkte der Kreise eines Stationspaares bestimmt sind. Die Tiefe des Erdbeben-Hypozentrums läßt sich nähe-

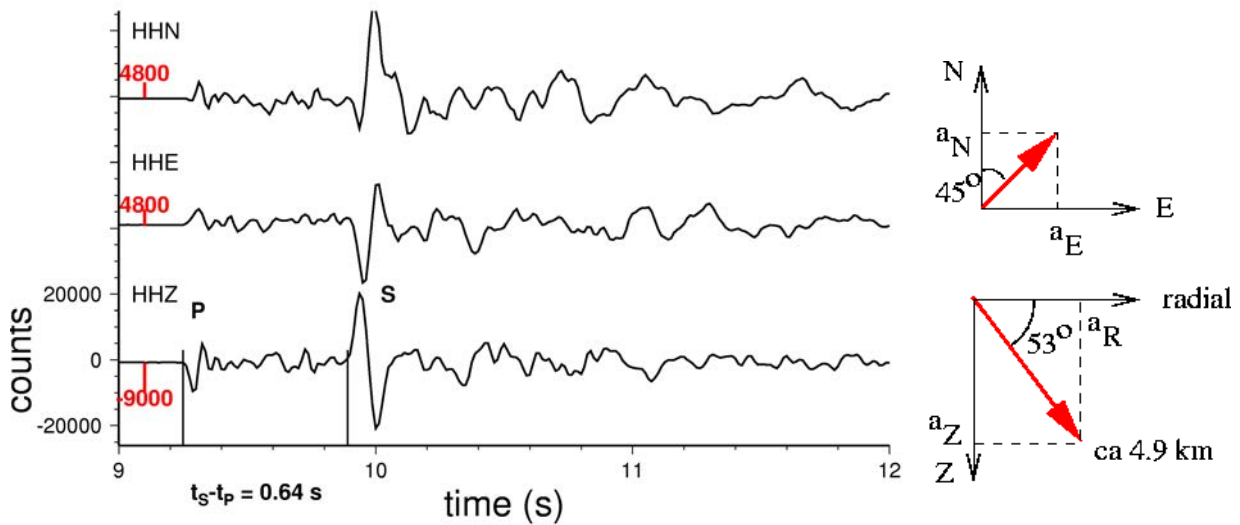


Abbildung 6.5: Abschätzung der Entfernung und Richtung eines lokalen Erdbebens (Quaal-Beben, 29 Okt. 1997) aus den Dreikomponenten Aufzeichnungen der Bodengeschwindigkeit der P-Welle an der Station BSEG in Norddeutschland (vgl. Abb. 6.7). Die Entfernung der Quelle wird aus der Zeitdifferenz  $t_S - t_P$  zu  $\approx 4.9 \text{ km}$  abgeschätzt. Die Richtung des Hypozentrums kann aus den Peak-Amplituden der P-Welle abgeschätzt werden, da die P-Welle linear in Ausbreitungsrichtung polarisiert ist und von unten auf die Erdoberfläche läuft.

rungsweise in einem Tiefenschnitt durch die vertikale Projektion des Epizentrums auf die „Entfernungs-Halbkugel“ bestimmen.

Die Dreikreismethode veranschaulicht das Prinzip der Erdbeben Lokalisierung. Liegen die drei Stationen in unmittelbarer Nähe zueinander und das Epizentrum außerhalb des Stationsnetzes, dann schneiden sich die Entfernungskreise in spitzem Winkel und kleine Fehler in der Entfernungsschätzung führen auf große Fehler der Lokalisierung. Ebenso problematisch ist die Tiefenbestimmung des Erdbebens, wenn keine epizentrumsnahen Station vorhanden sind. Werden mehr als drei Stationen benutzt, dann werden die Unsicherheiten bei der Abschätzung von Epizentrum und Hypozentrum kleiner. Unter Umständen treten jedoch Inkonsistenzen der unterschiedlichen Sekantenschnittpunkte auf, d.h. die Schnittpunkte liegen nicht alle in einem gemeinsamen Punkt. Dann muß die optimale Lokalisierung über eine Regression (Minimierung der Fehlerquadrate) errechnet werden. Moderne Verfahren zur Hypozentrumsbestimmung arbeiten nicht mehr graphisch wie die Dreikreismethode, sondern mit Hilfe von **rechnergestützten Inversionsverfahren**.

Sobald die Herdzeit des Erdbebens bekannt ist, kann die Entfernungsschätzung auch mit Hilfe der Einsatzzeit der P-Welle alleine gemacht werden. Eine robuste Methode zur Bestimmung der Herdzeit des Erdbebens wird durch ein **Wadati-Diagramm** bereitgestellt (Abb. 6.8). Dabei wird die Zeitdifferenz  $t_S - t_P$  über die Einsatzzeit  $t_P$  für

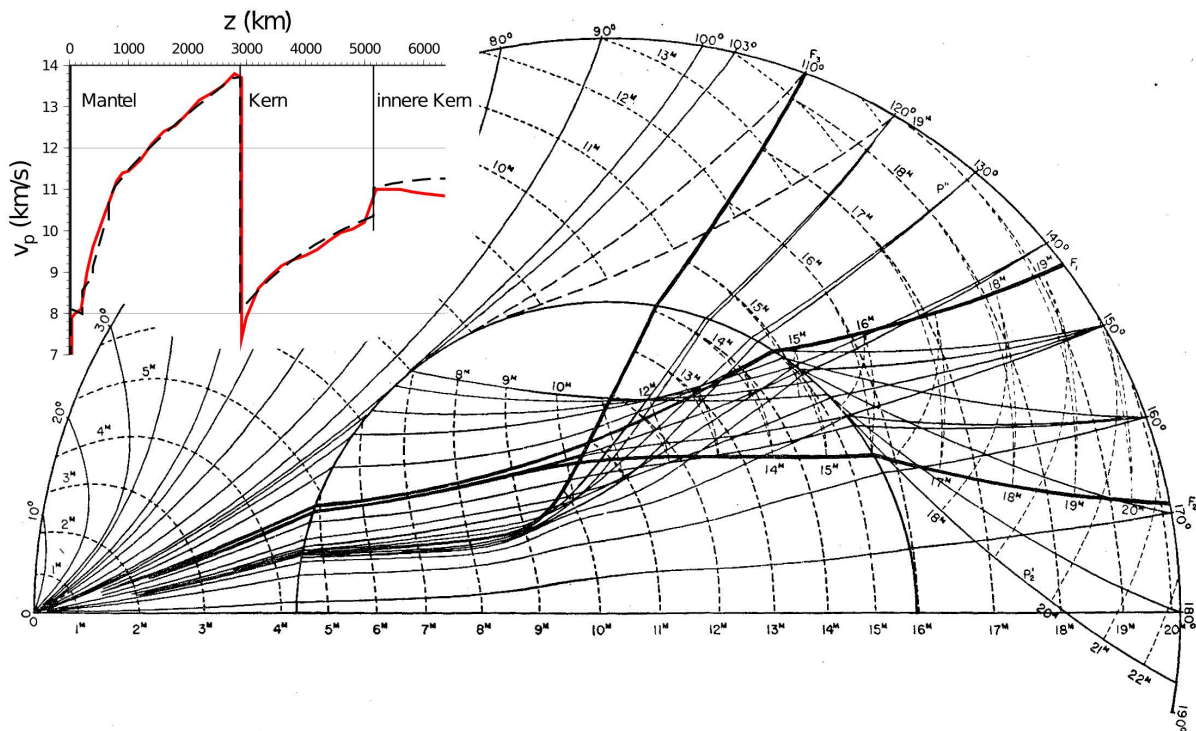


Abbildung 6.6: Theoretisch berechnete Strahlwege (durchgezogen), Wellenfronten (gestrichelt) und Ankunftszeiten (numerische Werte) von P-Wellen durch den Erdkern für ein Erdmodell aus 1939 (aus [Gutenberg and Richter, 1939](#),  $v_p$  Modell von Gutenberg in rot, PREM Modell zum Vergleich schwarz gestrichelt). Am Erdkern diffraktierte Strahlen sind dick gestrichelt gezeichnet. Die Quelle liegt an der Oberfläche bei  $0^\circ$  Epizentralentfernung.

unterschiedliche Stationen aufgetragen. Für Schichten mit konstanter Geschwindigkeit gilt ( $r$  ist der Abstand des Hypozentrums zur Station)

$$t_S - t_P = \left( t_0 + \frac{r}{v_S} \right) - \left( t_0 + \frac{r}{v_P} \right) = \left( \frac{v_P}{v_S} - 1 \right) \left( \frac{r}{v_P} \right) = \left( \frac{v_P}{v_S} - 1 \right) (t_P - t_0) .$$

Solange  $v_P/v_S$  konstant ist reihen sich die Messpunkte auch für kompliziertere Geschwindigkeitsmodelle auf einer Geraden auf. Die optimale Gerade kann wieder über eine lineare Regression bestimmt werden. Der Schnittpunkt der Regressionsgeraden mit der  $t_P$ -Achse ist die Herdzeit  $t_0$ . Die Steigung der Geraden bestimmt das Verhältnis  $v_P/v_S$ .

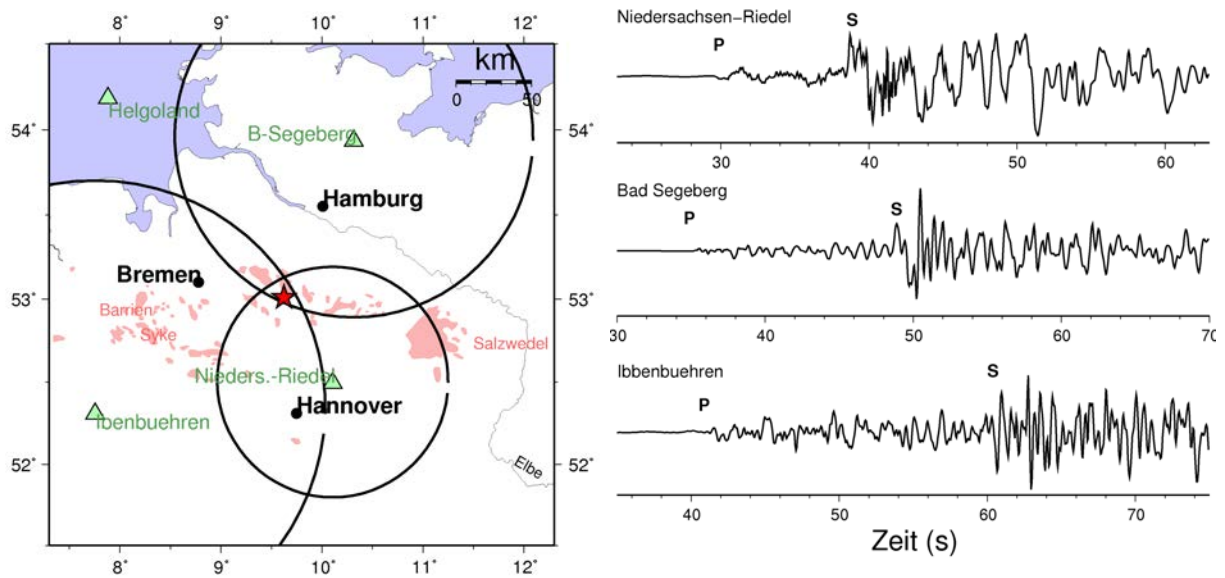


Abbildung 6.7: **Links:** Dreikreis-Methode zur Epizentrumsbestimmung des M4.5 Rotenburg 2004 Erdbebens. Das instrumentell bestimmte Epizentrum ist durch den roten Stern markiert. Die Entfernungskreise überlappen leicht. Das Erdbeben fand inmitten von produktionsstarken Gasfeldern (rot gefüllte Polygone) in einer Tiefe von etwa 6 km statt und steht im Verdacht, durch Erdgasförderung ausgelöst zu sein. **Rechts:** Seismogrammbeispiele an drei Stationen NRDL, BSEG und IBBN, für die Entfernungskreise gezeichnet wurden.

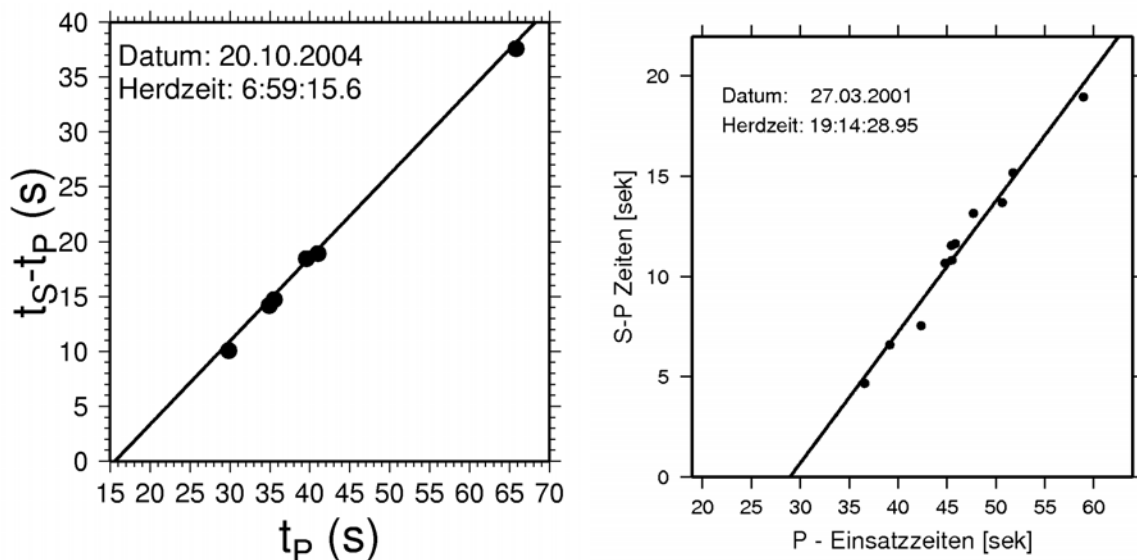


Abbildung 6.8: Wadati-Diagramme zur Bestimmung der Herdzeit  $t_0$ . **Links:** Ableitung von Stationen aus regionaler Entfernung für das M4.5 Rotenburg 2004 Erdbeben. **Rechts:** Ablesungen von lokalen Stationen im Tyrrhenischen Meer für ein Tiefherdbeben aus der Ionischen Wadati-Benioff Zone.

### 6.1.2 Intensität, Magnitude, Moment und Energie

#### Die Intensitätsskala:

Die ersten Verfahren zur Abschätzung der Stärke der Bodenerschütterung durch Erdbeben wurden bereits vor der instrumentellen Seismologie eingeführt und haben zur Entwicklung der Intensitätsskala auf Basis einer makroseismischen Erhebung geführt. Die weiterentwickelten makroseismischen Verfahren werden bei stärkeren Erdbeben bis heute eingesetzt. Seit 1998 dient dafür in Europa die **Europäische Makroseismische Skala EMS-98**. (Tabelle 6.1). Die **lokalen Intensitäten** werden auf Basis von aufgetretenen Schäden oder Beobachtungen bestimmt, z.B. durch die Beurteilung der Bauschäden vor Ort, die Befragung der Bevölkerung oder aufgrund (historischer) Berichte, Zeitungsmeldungen oder Internetseiten. Bauschäden werden in 5 Schadensgraden von Grad 1 (geringfügiger bis leichter Schaden) bis Grad 5 (Zerstörung) klassifiziert (vgl. EMS-98). In die Beurteilung des Schadensgrades an Bauwerken geht dabei die sogenannte **Vulnerabilität** (Verletzlichkeit) ein, d.h. die Einteilung von Bauwerkstypen in 6 Klassen A-F aufgrund ihrer Empfindlichkeit bei Erschütterungsbelastung. Die geringste Vulnerabilitätsklasse A haben Mauerwerksbauten aus unbehauenen Feldsteinen oder Lehmbauten. Stahlbeton und Holzbauten liegen im oberen Bereich D und E der Vulnerabilität, d.h. sind in Bezug auf Erdbebenerschütterungen relativ stabil (vgl. EMS-98). Tabelle 6.2 gibt Beispiele für Schadensschwellen für Schäden des Grades 1 (Haarrisse in wenigen Wänden, kleine Mauerrisse, geringe Putzschäden, etc.) und unterschiedliche Vulnerabilitätsklassen.

Wir besprechen zwei jüngere Schadensbeben aus der Niederrheinischen Bucht, Deutschland; (1) das  $M_L = 5.9$ ,  $M_W 5.3$  Roermond Erdbeben vom 13 April 1992 und (2) das  $M_L 4.9$  Alsdorf Erdbeben vom 22 Juli 2002, etwa 50 km südwestlich des Epizentrums des Roermond Bebens (Abb. 6.9). Bei Roermond (Niederlande, nahe der Grenze zu Deutschland) handelt es sich um das stärkste Erdbeben im 20. Jahrhundert im nördlichen Rhein Gebiet. Das Hypozentrum lag auf der Peelrand Verwerfung in etwa 18 km Tiefe. Der Mechanismus deutet auf eine Abschiebung entlang der Verwerfung mit einer für das Grabensystem der Niederrheinischen Bucht typischen Streichrichtung von etwa 138° (Braunmiller et al., 1994). Die maximalen Intensitäten  $I_0$  des Roermond Erdbebens lagen knapp über VII. Die entstandenen Schäden konzentrierten sich auf die Gebiete mit Intensität  $> V$  und wurden in Deutschland und Holland auf etwa 150 Millionen DM bzw. 170 Millionen Gulden abgeschätzt. Das Beben wurde über viele hundert Kilometer gespürt (z.B. im südlichen Rheingraben).

Das Alsdorf Ereignis in 2002 war das erste Schadensbeben der Region nach Roermond, dessen Bodenerschütterungen im Nahbereich ungeklippt auf einem engen Stationsnetz aufgezeichnet wurden. Abb. 6.9 zeigt die Ergebnisse der makroseismischen Erhebung nach dem Alsdorf Beben. Aus den einzelnen Rückmeldungen werden bewertete Inten-

Tabelle 6.1: Kurzform der Europäischen Makroseismischen Skala EMS-98. Die Kurzform ist nicht ausreichend für die Bestimmung makroseismischer Intensitäten. Die ausführliche Beschreibung ist übers Internet erhältlich.

EMS In- tensität	Definition	Beschreibung der maximalen Wirkung
I	<b>nicht fühlbar</b>	Nicht fühlbar
II	<b>kaum bemerkbar</b>	Nur sehr vereinzelt von ruhenden Personen wahrgenommen
III	<b>schwach</b>	Von wenigen Personen in Gebäuden wahrgenommen. Ruhende Personen fühlen ein leichtes Schwingen oder Erschüttern
IV	<b>deutlich</b>	Im Freien vereinzelt, in Gebäuden von vielen Personen wahrgenommen. Einige Schlafende erwachen. Geschirr und Fenster klirren, Türen klappern
V	<b>stark</b>	Im Freien von wenigen, in Gebäuden von den meisten Personen wahrgenommen. Viele Schlafende erwachen. Wenige werden verängstigt. Gebäude werden insgesamt erschüttert. Hängende Gegenstände pendeln stark, kleine Gegenstände werden verschoben. Türen und Fenster schlagen auf oder zu
VI	<b>leichte Gebäudeschäden</b>	Viele Personen erschrecken und flüchten ins Freie. Einige Gegenstände fallen um. An vielen Häusern, vornehmlich in schlechterem Zustand, entstehen leichte Schäden wie feine Mauerrisse und das Abfallen von z.B kleinen Verputzteilen
VII	<b>Gebäudeschäden</b>	Die meisten Personen erschrecken und flüchten ins Freie. Möbel werden verschoben. Gegenstände fallen in großen Mengen aus den Regalen. An vielen Häusern solidr Bauart treten mäßige Schäden auf (kleine Mauerrisse, Abfall von Putz, Herabfallen von Schornsteinteilen). Vornehmlich Gebäude in schlechterem Zustand zeigen größere Mauerrisse und Einsturz von Zwischenwänden
VIII	<b>schwere Gebäudeschäden</b>	Viele Personen verlieren das Gleichgewicht. An vielen Gebäuden einfacher Bau- substanz treten schwere Schäden auf; d.h. Giebelteile und Dachsimse stürzen ein. Einige Gebäude sehr einfacher Bauart stürzen ein.
IX	<b>zerstörend</b>	Allgemeine Panik unter den Betroffenen. Sogar gut gebaute gewöhnliche Bauten zeigen sehr schwere Schäden und teilweisen Einsturz tragender Bauteile. Viele schwächere Bauten stürzen ein
X	<b>sehr zerstörend</b>	Viele gut gebauten Häuser werden zerstört oder erleiden schwere Beschädigungen
XI	<b>verwüstend</b>	Die meisten Bauwerke, selbst einige mit guten erdbebengerechten Konstruktionsentwurf und -ausführung, werden zerstört
XII	<b>vollständig verwüstend</b>	Nahezu alle Konstruktion werden zerstört



Tabelle 6.2: Erdbeben-Schadenschwelle für Bauwerkschäden vom Grad 1 (Haarrisse in wenigen Wänden, Mauerrisse, geringe Putzschäden, etc.) für verschiedene Bauwerksvulnerabilitätsklassen (nach EMS92).

Vulnerabilität	typische Bauformen	Bebenintensität	Schwinggeschwindigkeits-Richtwert (Fundament)
A	Adobe (luftgetrocknete Lehmziegel)	V	25 <i>mm/s</i>
B	Stein, Ziegel und Betonstein mit nicht versteifenden Decken (Tram etc.)	VI	47 <i>mm/s</i>
C	Ziegel mit versteiften Decken (Fertigteil mit Stahlbetonauflage, Stahlbetonplattendecken, etc)	VII	87 <i>mm/s</i>

sität als Funktion des Ortes bestimmt, und daraus Linien (Radien) gleicher Intensität, sogenannte Isoleisten. Die Isoleiste zu  $I > III$  wird manchmal auch als Schütterradius bezeichnet, da sie für tektonische Beben in etwa die Spürbarkeitsgrenze markiert.  $I_0$  war bei Alsdorf etwa VI, Schäden traten generell für  $I > V$  auf.

Die Intensität und  $I_0$  sind **kein Maß für die Stärke eines Bebens**, sondern nur ein Anhaltspunkt für die Erschütterung oder maximale Beschleunigung am jeweiligen Beobachtungsort. Die maximale Beschleunigung hängt neben der Bebenstärke auch von der Entfernung zum Herd, der lokalen Untergrundstruktur und zu einem geringeren Teil von der Bruchkinematik ab. Zum Beispiel sind gemessene Beschleunigungen in weichen Sedimenten generell größer als die Beschleunigungen auf benachbartem, festen Gestein. Die Isoleistenkarte zeigt grob kreisförmige Zonen gleicher Intensitäten (Abb. 6.9). Die Zone größter Intensität liegen nicht im Zentrum des Schüttergebietes  $I > IV$  und teilen sich in zwei getrennte Gebiete mit  $I \geq V$  auf. Ähnliches wurde auch bei dem Roermond Beben beobachtet. Das kann sowohl an der lokalen Struktur des Untergrundes liegen, z.B. durch die Verstärkung der Bodenbeschleunigung in weichen Sedimenten, wie auch an einer ungleich vorhandenen Bevölkerungsdichte und dem lokalen Gebäudebestand. Da Bodenerschütterungen nur indirekt aus Schadensmeldung und anderen Beobachtungen erschlossen werden, hat das Verfahren der makroseismischen Erhebung große Unsicherheiten gegenüber der direkten Messung der Bodenbewegung (gemessene Bodenbewegungen für Alsdorf werden unten diskutiert). Ebenso ist die Bestimmung des Epizentrums, der Herdtiefe und die Abschätzung der Magnitude allein aus bewerteten Intensitäten mit größeren Unsicherheiten behaftet.

Trotzdem haben Intensitätsbestimmungen aus Befragungen und die Schadensbeurtei-

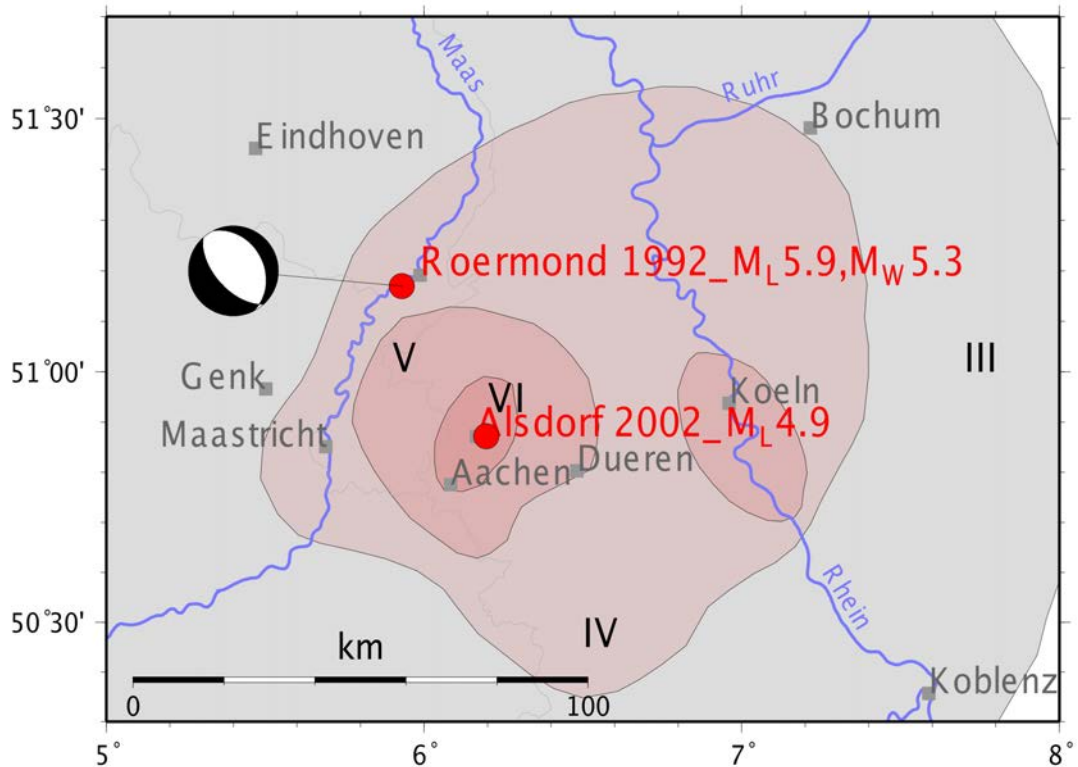


Abbildung 6.9: Epizentren und Intensitäten zweier Schadensbeben in der Niederrheinischen Bucht: (1) das  $M_L = 5.9$ ,  $M_W 5.3$ , Roermond, vom 13 April 1992 und (2) das  $M_L 4.9$ , Alsdorf, vom 22 Juli 2002. Für das Roermond Beben ist die Herdlösung eingezeichnet (Abschiebung, Projektion auf die untere Herdhalbkugel, aus Braunmiller et al., 1994). Beachte die Unterschiede zwischen  $M_L$  und  $M_W$ . Die Isoseisten sind nur für das Alsdorf Beben geplottet (aus Hinzen, 2005). Die maximale Intensität des Alsdorf Bebens war  $I_0 = VI$ , die des Roermond Bebens  $I_0 = VII$ .

lung vor Ort immer noch ihren Nutzen. So können Erdbeben aus vorinstrumenteller Zeit nur auf Basis von Intensitäten ausgewertet werden. Intensitäten stellen auch bis heute wichtige Basisdaten für die juristische Schadensregulierung nach einem Erdbeben. Im Bereich der induzierten Seismizität, und speziell im Bergbau, basiert die „Tiefenbestimmungen“ der Bergämter, die für die Frage der Ursache des Bebens und damit auch für die Schadensregulierung relevant ist, meist auf Schütteradien der Intensitäten (Abklingkurven der Isolinien gleicher Intensität). Ebenso beschreibt die DIN Norm zur Regulierung von Bodenerschütterungen durch Erdbeben und im Bauwesen zum Großteil (maximale) lokale Intensitäten sowie gemessene Bodenerschütterungen.

### Die Magnitudenskala:

Die dimensionslose Magnitude ist ein empirisches Maß für die relative Stärke eines Be-

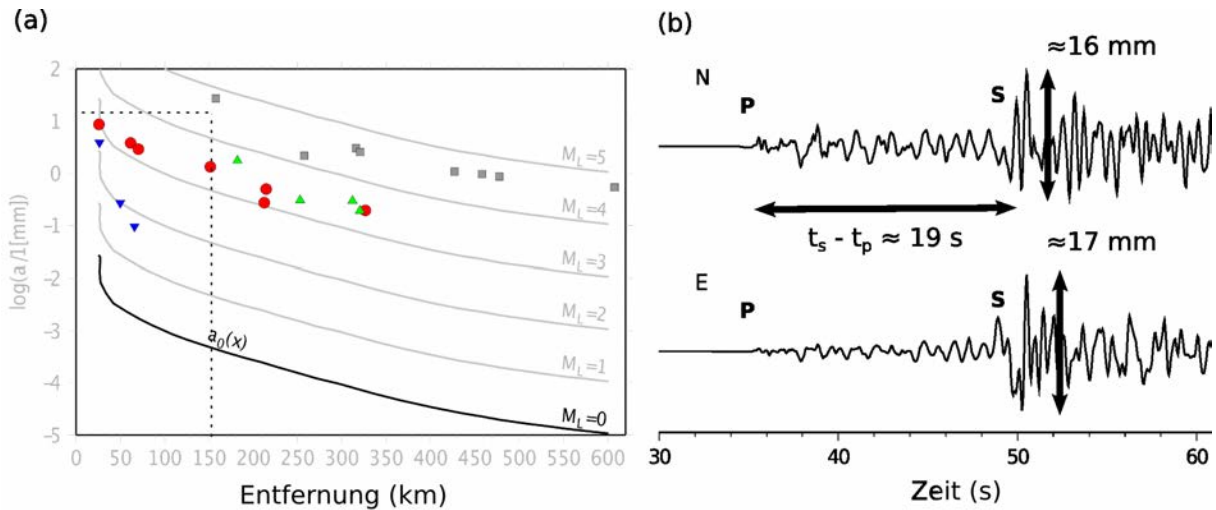


Abbildung 6.10: (a) Beispiele der historischen Dämpfungs-Entfernungskurven in Südkalifornien, die zur Definition der logarithmischen Lokalbeben Magnitude  $M_L$  geführt haben (Richter 1932, Daten aus Richter, 1958).  $a_0$  (durchgezogen, dick) gibt die Abklingkurve für ein virtuelles Erdbeben der Magnitude  $M_L = 0$  an. Die grauen Parameterkurven stellen erwartete Abklingkurven für größere Magnituden dar. Gemessene Amplituden  $a$  (in  $\text{mm}$  auf einem Wood-Anderson Horizontalpendel mit 2800-facher Verstärkung,  $T_0 = 0.8 \text{ s}$  und einer Dämpfung von  $h = 0.8$ ) sind jeweils für ein Erdbeben in unterschiedlich farbigen Symbolen eingezeichnet. (b) Beispielseismogramme (E und N Komponente) zur Veranschaulichung der Datenextraktion. Die Seismogramme müssen auf einen Wood-Anderson Seismograph simuliert werden. Aus der  $t_s - t_p$  Differenzzeit kann die Entfernung geschätzt werden. Die Spitze-Spitze Amplitude der S-Phase wird auf den beiden Horizontalkomponenten in Millimeter abgelesen.

bens. Sie wurde etwa 1930 von K. Wadati und C. Richter entwickelt. C. Richter arbeitete an dem ersten Erdbebenkatalog für Südkalifornien, der mehrere hundert Einträge hatte. Die Stärke der Beben wurde bis dahin durch stark, schwach oder gar nicht gefühlt angegeben. Alle Instrumente des Netzes waren Wood-Anderson Torsionspendel mit gleicher Instrumentencharakteristik (Horizontalpendel mit  $0.8 \text{ s}$  Eigenperiode, Verstärkung 2800). Richter hatte beobachtet, dass die maximale Bodenverschiebung,  $a$ , systematisch mit der Epizentralentfernung,  $x$  abnahm. Die sogenannten Dämpfungskurven von Erdbeben unterschiedlicher Stärke lagen in einem  $\log(a)$ - $x$  Plot vertikal verschoben zueinander (Abb. 6.10), was erwartet wird, wenn die Amplituden der abgestrahlten Wellen linear mit der physikalischen Stärke der Quelle (dem seismischen Moment) skalieren. Die empirisch eingeführte Magnitude gibt den Amplitudenfaktor  $a(x)/a_0(x)$  relativ zu einem Referenzbeben mit der Amplitude  $a_0(x)$  an. Der Verstärkungsfaktor wurde als Magnitude

allerdings logarithmisch definiert,  $M_L = \log_{10}(a(x)/a_0(x)) = \log_{10}(a) - \log_{10}(a_0)$ , wobei die Amplituden in  $mm$  auf den Horizontalkomponenten des Wood-Anderson Pendels gemessen wurden. Bei der Magnitudenbestimmung werden die Verhältnisse an mehreren Station  $i$  gebildet und gemittelt, um die vorhandenen Variationen in  $a_i(x)$  zu glätten. Das Referenzbeben hat eine willkürlich festgelegte Magnitude von  $M_L = 0$  und erzeugt in  $100\ km$  Entfernung eine Spitze-Spitze Amplitude auf dem Wood-Anderson Seismograph von  $0.001\ mm$ . Erdbeben, die stärker als das Referenzbeben sind, haben ein  $M_L > 0$  und schwächere ein  $M_L < 0$ . Eine um eine Magnitudeneinheit höhere Erdbebenstärke erzeugt eine Amplitudenverstärkung um den Faktor  $10^1 = 10$ . Magnituden zwischen  $M = 0$  und  $10$  erfassen 1- bis  $10^{10}$ -fache Amplitudenänderungen der Bodenbewegung.

Das Konzept der Lokalbeben-Magnitude  $M_L$  wurden von Gutenberg für die globale Seismologie übernommen. Gutenberg und Richter haben zwei weitere Magnitudenskalen eingeführt, die Raumwellenmagnitude  $m_b$  und die Oberflächenwellenmagnitude  $M_S$  (vgl. Anhang G). Die generelle Form einer jeden (späteren) Magnitudenskala ist

$$M_x = \log \left[ \frac{a/T}{a'_0(\Delta, h, C)/T} \right] \quad \text{oder} \quad M_x = \log\left(\frac{a}{T}\right) - f(\Delta, h) + C_s + C_r, \quad (6.1)$$

wobei  $a$  die **maximale Bodenverschiebung** der betrachteten Phase,  $T$  die **dominante Periode** des Signals maximaler Amplitude,  $f$  eine **empirische Dämpfungskurve** als Funktion der Epizentraldistanz  $\Delta$  und Beben tiefe  $h$ , und  $C_s$  und  $C_r$  Korrekturwerte für Stationsort und Quellregion sind ( $f$ ,  $C_s$  und  $C_r$  sind nicht dimensionslos). Formeln sind in Anhang G gelistet. Der Quotient  $a/T$  kann so gedeutet werden, dass Magnitudenskalen nach (6.1) auf einer empirischen Dämpfungskurve für **maximale Schwinggeschwindigkeiten** basieren. Weiter unten wird die Rolle dieser und anderer Dämpfungskurven für die Analyse der seismischen Gefährdung diskutiert.

Die Magnitudenskalen aus Amplituden haben, neben den genannten Vereinfachungen, zwei wichtige Einschränkung: (1) sie sättigen für besonders starke Erdbeben und (2) sie stellen keine direkte Verknüpfung zu Parametern des Bebenherdes her. Die Sättigung entsteht dadurch, dass die Bruchflächen von starken Erdbeben sehr groß werden und der Bruchprozess deshalb sehr lange dauert. Das Sumatra 2004 Beben hatte z.B. eine Bruchlänge von  $1200\ km$  und eine Bruchdauer von etwa  $T = 5$  Minuten. Das Hauptmoment der starken Beben wird dann bei sehr tiefen Frequenzen abgestrahlt (unterhalb etwa  $1/T$ ). Da Magnitudenskalen für enge Periodenbereiche definiert sind, und herkömmliche Sensoren außerdem die tiefen Frequenzen der Starkbeben eventuell gar nicht messen, müssen Magnitudenskalen sättigen. Die Raumwellenmagnitude sättigt bei  $m_b \approx 6.0$ , die Lokalbebenmagnitude bei  $M_L \approx 6.5$  und die Oberflächenwellenmagnitude bei  $M_S \approx 8.0$  (siehe Tab. 6.3).

**Das seismische Moment:**

Ein besseres Maß für die Stärke eines Bebens ist das **seismische Moment**  $M_0$  mit

$$M_0 = \mathcal{N} \Delta u A \quad (\text{in } Nm) \quad . \quad (6.2)$$

$\mathcal{N}$  ist das Schermodul im Herdgebiet,  $\Delta u$  die mittlere Dislokation und  $A$  die Fläche des Bruchs. Das seismische Moment kann z.B. bestimmt werden, indem nach einem Beben mit Oberflächenruptur die mittlere Dislokation und die Länge der Bruchfläche im Gelände festgestellt werden und die Bruchtiefe abgeschätzt wird (z.B. aus der Nachbebenverteilung oder der koseismischen Deformation der Oberfläche im Nahfeld). Eine andere Möglichkeit ist, das Integral über den ersten Puls der P-Welle im Seismogramm auszuwerten. Das seismische Moment, wenn korrekt bestimmt, sättigt nicht bei großen oder starken Beben und ist deshalb Magnituden vorzuziehen. Häufig wird anstelle des seismischen Moments eine über das seismische Moment definierte Magnitude angegeben, die z.B. aus der abgestrahlten Energie des Bebens abgeleitet wird.

**Zusammenhang zwischen Energie, Magnitude und Moment:**

Eine alternative Beschreibung der Bebenstärke ist die Angabe der freigesetzten Energie. Beim Durchlaufen einer Welle berechnet sich die verrichtete Arbeit oder Energie aus der Summe der potenziellen und kinetischen Energie der Bodenbewegung. Eine Quelle mit monochromatischer, harmonischer Wellenabstrahlung mit der Periode  $T$  erzeugt an der Station eine Bodenverschiebung  $u$  von z.B.

$$u = a \cos \frac{2\pi t}{T} \quad , \quad (6.3)$$

wobei  $a$  die gemessene Amplitude ist. Die Bodengeschwindigkeit ist  $\dot{u} = du/dt$  und die kinetische Energie der durch das Volumen normierten Masse (Einheitsmasse) ist  $0.5\rho\dot{u}^2$ , wobei  $\rho$  die Gesteinsdichte ist. Die kinetische Energiedichte  $Q_k$  wird aus der gemittelten Energie über einen Zyklus bestimmt, d.h.

$$Q_k = \frac{\rho}{2} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{u}^2 dt = \frac{\rho}{2} \left( \frac{2\pi a}{T} \right)^2 \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \left( \frac{2\pi t}{T} \right) dt = \rho \pi^2 \frac{a^2}{T^2} \quad . \quad (6.4)$$

Die Energiedichte  $Q$  der Welle ist die Summe aus kinetischer und potenzieller Energiedichte, die beide gleich groß sind, sodass  $Q = 2Q_k$ . Die geometrische Dämpfung führt allerdings zu einer Amplitudenabnahme mit dem Abstand zur Quelle, der korrigiert werden muss. Für eine Kugelwelle integriert man dazu die Amplitude über die sphärische Wellenfront im Abstand  $r$  (Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ ) und erhält

$$Q = f(r, \rho, c) \frac{a^2}{T^2} \quad , \quad (6.5)$$

wobei  $f$  eine analytisch oder experimentell bestimmbare Funktion ist. Die logarithmische Form der Gleichung ist

$$\log Q = 2 \log \frac{a}{T} + \log f(r, \rho, c) \quad . \quad (6.6)$$

Die Gleichung hat die gleiche Form wie (6.1). Der Logarithmus der abgestrahlten Energie einer streng harmonischen Quelle skaliert proportional zu  $\sim 2M$ , d.h. würde die Stärke der harmonischen Quelle um eine Magnitudeneinheit erhöht, dann würde man um den Faktor 10 höhere Amplituden und um den Faktor 100 höhere Wellenenergie messen. Erdbeben sind transiente Quellen mit kurzer Dauer, und die dominante Periode der abgestrahlten Wellen hängt von der Stärke des Bebens und dem Wellentyp ab. Zusätzlich sind Magnitudenskalen nur für eng begrenzte Periodenbereiche gültig. Gutenberg und Richter haben deshalb empirische Beziehungen zwischen der Energie und der Raum- und Oberflächenwellen-Magnitude aufgestellt wie

$$\log Q = 2.4m_b + 5.8 \quad \text{und} \quad \log Q = 1.5M_S + 11.8 \quad . \quad (6.7)$$

Für diese Gleichungen gelten dieselben Probleme wie für die Magnitudenskalen, insbesondere also die Sättigung bei starken Beben. Da  $M_S$  erst bei etwa 8 sättigt, ist die zweite Abschätzung relativ robust über einen weiten Magnitudenbereich. Ein Beben der Magnitude  $M_S = 7$  setzt im Vergleich zu einem  $M_S = 6$  Beben eine um den Faktor  $10^{1.5} = 32$  höhere Energie frei und hat einen Energiefaktor von etwa  $10^3 = 1000$  gegenüber einem  $M_S = 5$  Beben.

Das seismische Moment kann ebenfalls in Beziehung zur freigesetzten Energie gebracht werden. [Kostrov \(1974\)](#) hat gezeigt, dass die abgestrahlte Energie eines Bebens proportional zum Spannungsabfall  $\Delta\sigma$  auf der Bruchfläche ist,

$$Q_S \approx \frac{1}{2} \Delta\sigma \Delta u A \quad . \quad (6.8)$$

Mit (6.2) gilt

$$Q_S \approx \frac{\Delta\sigma}{2\mathcal{N}} M_0 \quad . \quad (6.9)$$

Das seismische Moment skaliert linear zur abgestrahlten seismischen Energie. Nimmt man an, dass der Spannungsabfall bei einem tektonischen Erdbeben konstant etwa  $3 \text{ MPa}$  (30 bar) ist, dann können Gleichungen (6.9) und (6.7) benutzt werden, um eine neue Magnitudenskala als Funktion des seismischen Moments abzuleiten ([Kanamori, 1977](#)),

$$\begin{aligned} \log \frac{M_0}{\text{dyne} \cdot \text{cm}} = 1.5M_s + 16.1 \quad \text{und damit} \quad M_W &= \left( \frac{\log(M_0/\text{dyne} \cdot \text{cm})}{1.5} \right) - 10.73 \\ \text{oder} \quad M_W &= \left( \frac{\log(M_0/\text{Nm})}{1.5} \right) - \frac{9.1}{1.5} \end{aligned} \quad (6.10)$$



Tabelle 6.3: Relationen zwischen Magnituden  $m_b$ ,  $M_S$ , Moment  $M_0$  und den Herdparametern  $A$  und  $\Delta u$  (Daten vorwiegend aus Stein and Wysession, 2003)

Erdbeben	$m_b$	$M_S$	$M_W$	$M_0(Nm)$	$A(km^2)$	$\Delta u(m)$
Truckee 1966	5.4	5.9	5.9	$8.3 \cdot 10^{17}$	10 x 10	0.3
San Fernando 1971	6.2	6.6	6.7	$1.2 \cdot 10^{19}$	20 x 14	1.4
Loma Prieta 1989	6.2	7.1	7.5	$3 \cdot 10^{19}$	40 x 15	1.7
San Francisco 1906		7.8	7.8	$5.4 \cdot 10^{20}$	450 x 10	4.0
Tohoku 2011			9.0	$4.4 \cdot 10^{22}$	510 x 210	11
Sumatra 2004			9.0	$4 \cdot 10^{22}$	1300 x 160	15
Alaska 1964	6.2	8.4	9.1	$5.2 \cdot 10^{22}$	500 x 300	7
Chile 1960		8.5	9.5	$2.4 \cdot 10^{23}$	800 x 200	21

Die **Momentmagnitude**  $M_W$  ist an  $M_S$  geknüpft, sättigt aber nicht für große Beben.

Tabelle 6.3 stellt Herdparametern (Magnituden, Moment, Bruchfläche, mittlere Slip) für einige Starkbeben zusammen. Tabelle 6.4 gibt Verstärkungsfaktoren für die Bodenverschiebung und kinetische Energie für Magnitudenänderungen an.

Tabelle 6.4: Verstärkung der Bodenverschiebung  $u$  ( $10^{\Delta M_W}$ ) und Energie  $Q_S$  ( $10^{1.5\Delta M_W}$ ) für Änderungen der Momentmagnitude um  $\Delta M_W$ .

Magnitudenänderung $\Delta M_W$	Verstärkungsfaktor für $u$	Verstärkungsfaktor für $Q_S$
0.1	x 1.3	x 1.4
0.3	x 2.0	x 2.8
0.5	x 3.2	x 5.6
1.0	x 10.0	x 31.6

### 6.1.3 Abstrahlcharakteristik

Ein dritter Herdparameter ist die Abstrahlcharakteristik eines Erdbebens. Ein tektonisches Erdbeben strahlt, wie jede seismische Quelle, P- und S-Wellen in einem spezifischen Abstrahlmuster ab. Ein Beispiel ist die Explosionsquelle im Vollraum, die P-Wellen mit gleicher Amplitude in jede Raumrichtung und keine S-Wellen abstrahlt. Ein Scherbruch hingegen strahlt P- und S-Wellen ab, aber in verschiedene Raumrichtungen mit unterschiedlichem Vorzeichen und unterschiedlicher Amplitude. In der Theorie vergleicht man die Wellenabstrahlung des Erdbebens mit der erwarteten Abstrahlcharakteristik durch Einzelkräfte oder Kräftepaare. Eine vertikale Einzelkraft in der Tiefe  $z = 0$  repräsentiert

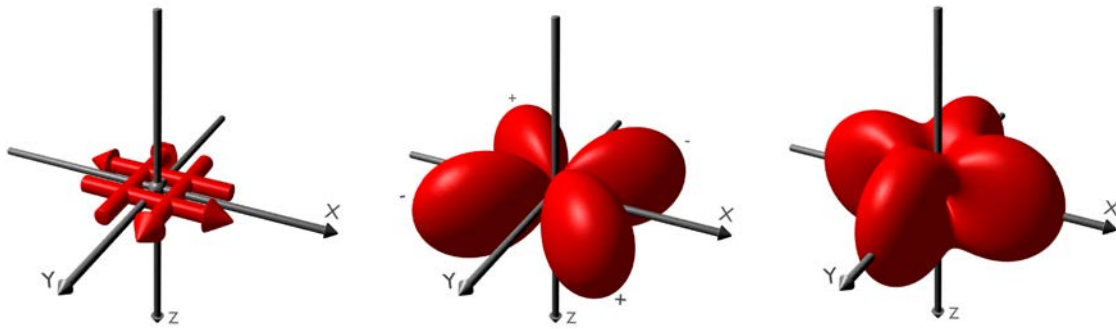


Abbildung 6.11: Doppelter Kräftedipol einer Punktquelle (links) und die zugeordnete Abstrahlcharakteristik für P- (mitte) und S-Wellen (rechts).

z.B. die Anregung durch einen Hammerschlag auf die Erdoberfläche. Für ein Erdbeben, d.h. einen Scherbruch, kann die Abstrahlung nicht durch Einzelkräfte sondern nur durch eine Kombination von Dipolkräften erklärt werden. Die **äquivalente Kraftquelle** sind zwei gegeneinander verdrehte Kräftedipole ohne Netto Drehmoment (Abb. 6.11) was zu dem Begriff **Double-Couple** geführt hat. Die Abstrahlcharakteristik der P-Wellen zeichnet sich dann durch **zwei Knotenebenen** aus, in denen die P-Amplituden gleich Null sind. Eine dieser Knotenebenen ist die **Bruchfläche** des Bebens, die andere die sogenannte **Hilfsfläche (Auxiliary Plane)** (Abb. 6.12). Über die Knotenebenen wechselt die P-Abstrahlung das Vorzeichen. Es gibt damit vier Quadranten der erstankommenden P-Welle mit unterschiedlichem Vorzeichen (Abb. 6.12). Für die Scherwelle gibt es drei Richtungen, für die die Amplituden gerade gleich Null sind (Abb. 6.13).

Aus diesen Abstrahlmustern kann die Abstrahlcharakteristik einer seismischen Quelle und die Orientierung der Knotenebenen eines Erdbebens allein aus den Vorzeichen der erstankommenden Wellen bestimmt werden. Man bestimmt dann die sogenannte **Herdlösung** des Erdbebens (vgl. Abb. 6.9). Die Herdlösung ist von Interesse, da sie Streichen und Fallen der Nodalflächen (potenzielle Bruchflächen) direkt angibt, und erste Aussagen über das vorherrschende Spannungsfeld erlaubt (vgl. Abb. 6.13).

In der Tektonik wird zwischen drei Haupttypen der Spannung unterschieden, **Kompression**, **Extension**, und **translatorische Spannung**. Entsprechend gibt es drei Haupttypen von Erdbeben, **Aufschiebungs-**, **Abschiebungs-** und **Blattverschiebungsbeben** (Abb. 6.14).

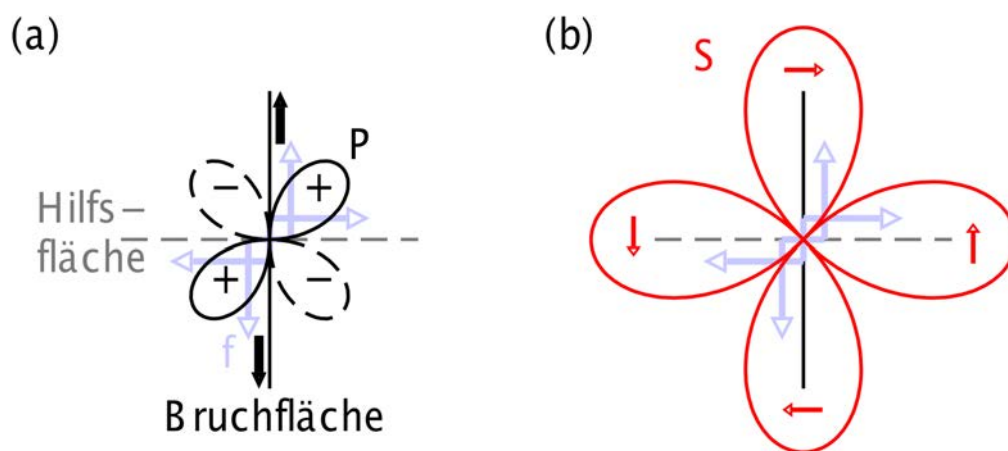


Abbildung 6.12: Projektion der Fernfeld Abstrahlcharakteristik eines Scherbruchs ( $x$ - $y$ -Ebene, vgl. Abb. 6.11). (a) zeigt die P- (um Faktor 2.5 verstärkt) und (b) die S-Wellen Abstrahlung. Die Vorzeichen "+" und "-" in (a) geben die Quadranten an, in denen die Polarität der P-Wellen entweder positiv oder negativ ist. Die Polarität der SV-Wellen in (b) ist durch rote Pfeile angezeigt. Der äquivalente Kräfte-Dipol (Double Couple) ist durch blaue Pfeile eingezeichnet. Die schwarzen Pfeile geben die Verschiebung auf der westlichen und östlichen Seite der Bruchfläche an. Die Hilfsfläche (grau gestrichelt) ist eine virtuelle Fläche, in denen die Abstrahlcharakteristik der P-Wellen wie für die Bruchfläche keine Abstrahlung hat (Nodalflächen).

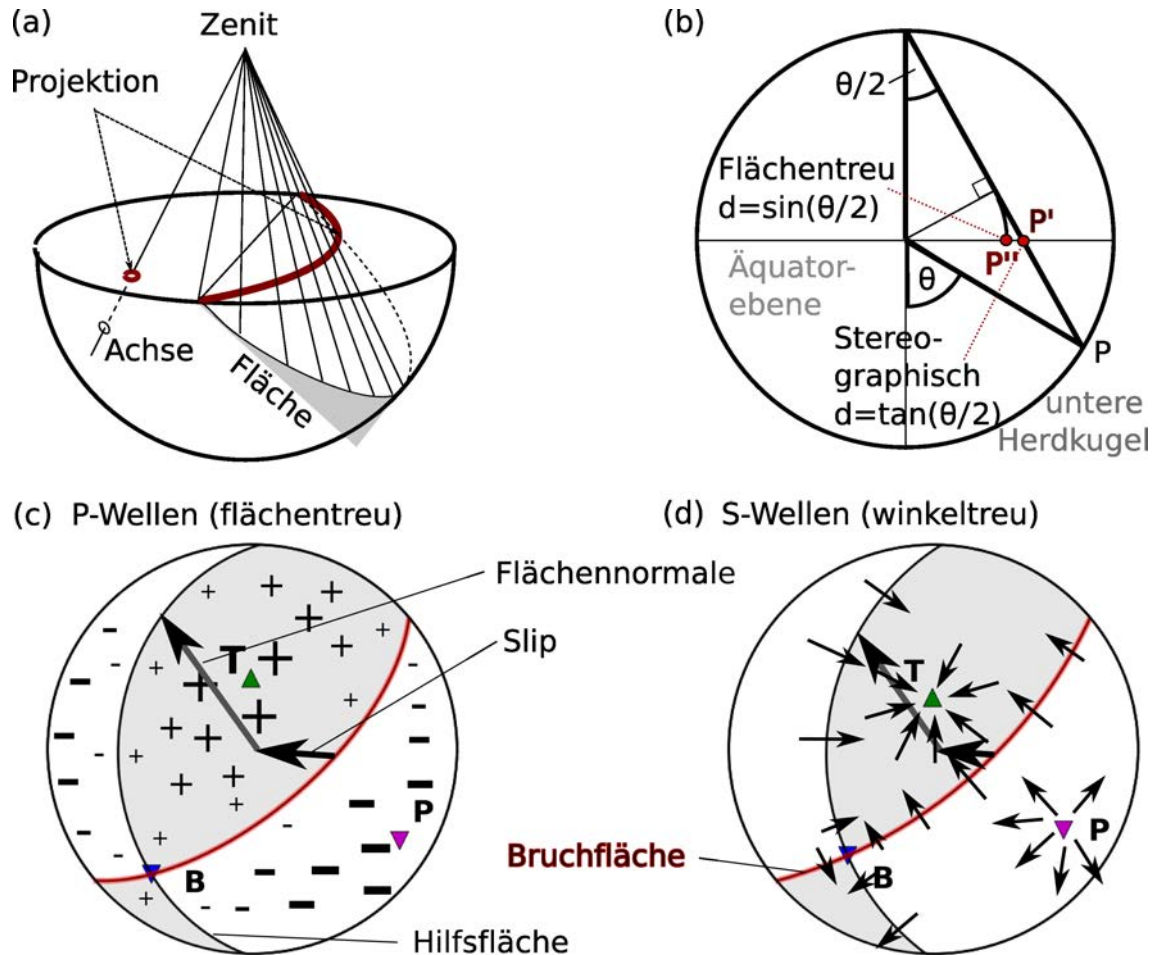


Abbildung 6.13: Projektion der Nodalflächen der P-Wellen Abstrahlcharakteristik auf die untere Herdhalbkugel. (a) Schematische Skizze zur Projektion einer Zentralfläche und Achse. (b) Skizze zu flächentreuen ( $P''$ , Equal Area) und winkeltreuen Projektion ( $P'$ , Stereographic) eines Punktes  $P$ . (c) Projektion (flächentreu) der Hilfs- und Bruchfläche (Streichwinkel (Strike)  $\Phi = 50^\circ$ , Einfallswinkel (Dip)  $\delta = 65^\circ$ , Rake Winkel des Slip Vektors  $\lambda = 115^\circ$ ) sowie der Abstrahlcharakteristik der P-Welle. Das Plus- und Minus-Zeichen verdeutlichen Polaritäten und relative Amplituden der P-Welle in den jeweiligen Abstrahlrichtungen. Die P- (Pressure), T- (Tension), und B-Achse (Null-Achse) ist eingezeichnet. (d) Wie in (c), jedoch für Bewegungsvektoren der S-Wellen (winkeltreue Projektion, nach Vorlage von [Aki and Richards, 2002](#)). Die Herdlösungen wurden mit dem Python Programm *mopad* geplottet ([Krieger and Heimann, 2012](#)).

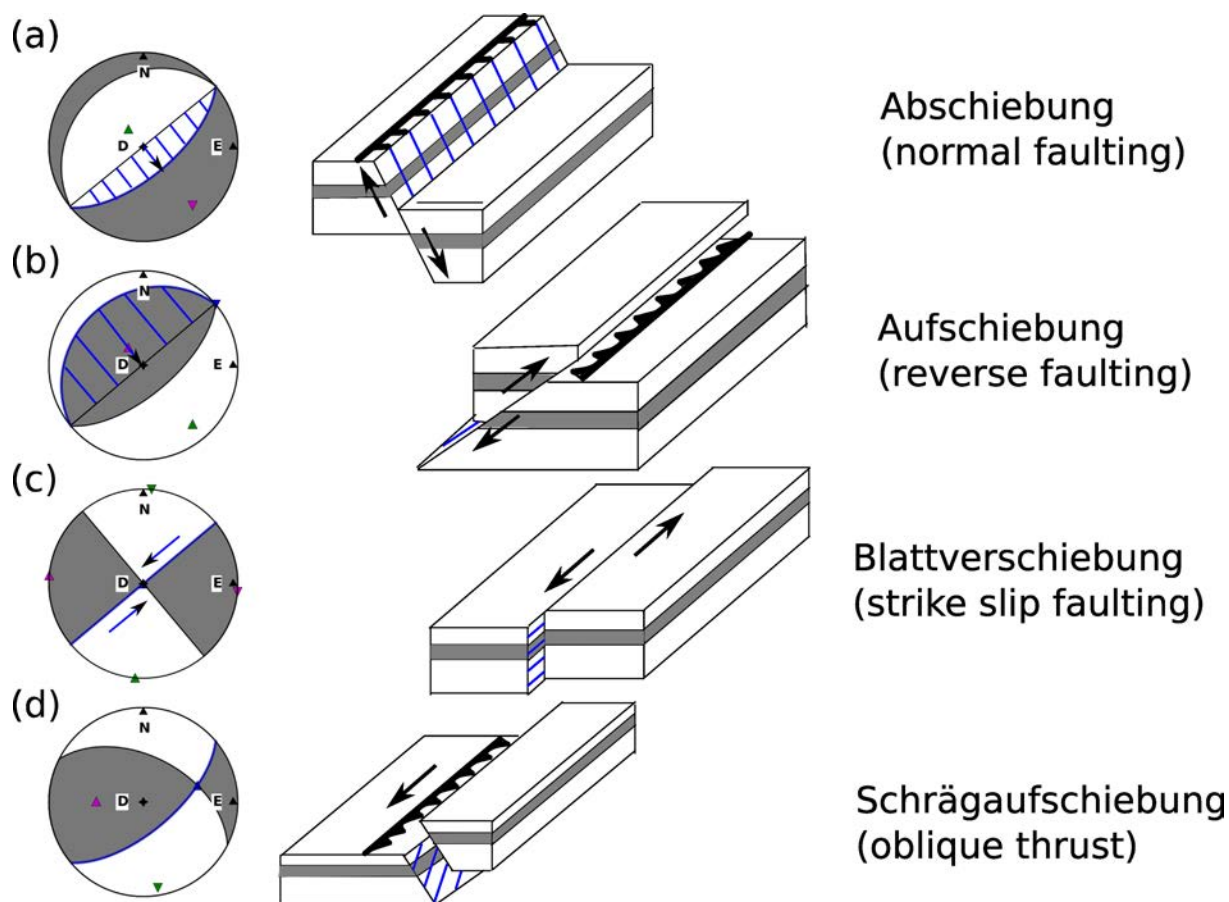


Abbildung 6.14: Herdlösungs-Typen und assoziierte tektonische Verwerfungen: (a) Abschiebung auf  $65^\circ$  fallender Fläche. (b) Aufschiebung auf  $25^\circ$  fallender Fläche. (c) Blattverschiebung. (d) Schrägaufschiebung. Die Streichrichtung der Bruchfläche (blau) ist jeweils  $50^\circ$  bzw.  $230^\circ$  (bei Aufschiebung) angenommen. Die Pfeile geben den Bewegungssinn zwischen Foot und Hanging Wall an. P- T und B-Achsen sowie N, E und D (down) Richtungen sind in den Herdlösungen markiert.

## 6.2 Bodenerschütterungen und seismische Gefährdung

Die Ingenieur-Seismologie befaßt sich u.a. mit dem Zusammenhang zwischen Bodenerschütterungen und der möglichen seismischen Gefährdung und Schäden. Erschütterungen des Bodens durch Erdbeben oder künstliche Quellen können so stark sein, dass Schäden an Gebäuden und Anlagen auftreten. Ebenso können Erschütterungen belästigend oder gar schädigend auf Personen einwirken. In Deutschland stellt das Bundes-Immissionsschutzgesetz (BImSchG) eine wesentliche Grundlage des Erschütterungsschutzes dar, mit dem Ziel Gefahren, Nachteile oder erhebliche Belästigungen durch Erschütterungen zu verhindern. Seismologen sind deshalb häufig in entsprechende Genehmigungsverfahren für Anlagen, eine seismologische Überwachung bzw. Überprüfung, oder in eine Prognose von Erschütterungen involviert. Sogenannte DIN Regeln charakterisieren Normen, Grenzwerte und Vorschriften. Mechanische Erschütterungen, die keine natürliche Ursache haben, werden allgemein durch die DIN 4150, Teil 1-3 geregelt. Die Analyse und Bewertung von stärkeren natürlichen Ereignissen, z.B. die Wirkung durch statistisch unabhängige Erdbeben<sup>75</sup>, wird durch die DIN 4149 geregelt. Weitere deutsche Normen sind VDI 2057, VDI 3831, DIN19700 und DIN45669. Bis 2009 lag allerdings noch kein verbindliches Verfahren für eine Prognose von Erschütterungsimmissionen vor.

In der Ingenieur-Seismologie geht es häufig um die Bewertung und Analyse von Schwinggeschwindigkeiten in Gebäuden und Anlagen, oder die Beurteilung von Rissen und sonstigen Bauwerkschäden. Die dafür notwendigen seismologischen Messungen sollten immer so erfolgen, dass das Schwingungsverhalten des Objektes möglichst wenig beeinflusst wird. Man betrachtet bei Einwirkungen auf Bauten gewöhnlich den Frequenzbereich zwischen 4 Hz und 80 Hz (im Schienenverkehr von 1 Hz bis 315 Hz), und mißt und bewertet die Bodenschwinggeschwindigkeit in mm/s. Die DIN4150-2 und 3 geben Anhaltswerte (Grenzwerte) vor für die maximale Schwinggeschwindigkeit, die z.B. auf dem Fundament oder in der Mitte der obersten Decke gemessen wird. Die Grenzwerte werden als Unbedenklichkeitswerte ausgelegt, bei denen in der Regel noch keine Haarrisse oder Schäden auftreten. Um unterschiedliche Verletzlichkeiten der Bauten zu berücksichtigen, werden drei **Gebäudeklassen 1-3** definiert (Abb. 6.15). Zusätzlich wird zwischen **kurzzeitigen Erschütterungen** (z.B. Rammsonden, Sprengungen) und **Dauererschütterungen** unterschieden (z.B. Meiselarbeiten, Vibrationsrammen), wobei für Dauererschütterungen kleinere Grenzwerte gelten (vgl. Abb. 6.15).

Mögliche Anwendungen sind die Prognose der Erschütterungen durch Sprengungen, z.B. Gewinnsprengungen bei einem Neuaufschluss eines Steinbruchs, oder die Prognose von Erschütterungen durch den Neubau einer U-Bahn Linie. Andere Anwendungen betreffen die Frage der Schadensregulierung nach dem Auftreten von induzierten Erdbeben.

---

<sup>75</sup> Man geht davon aus, dass natürliche Erdbeben einer Poisson Verteilung genügen



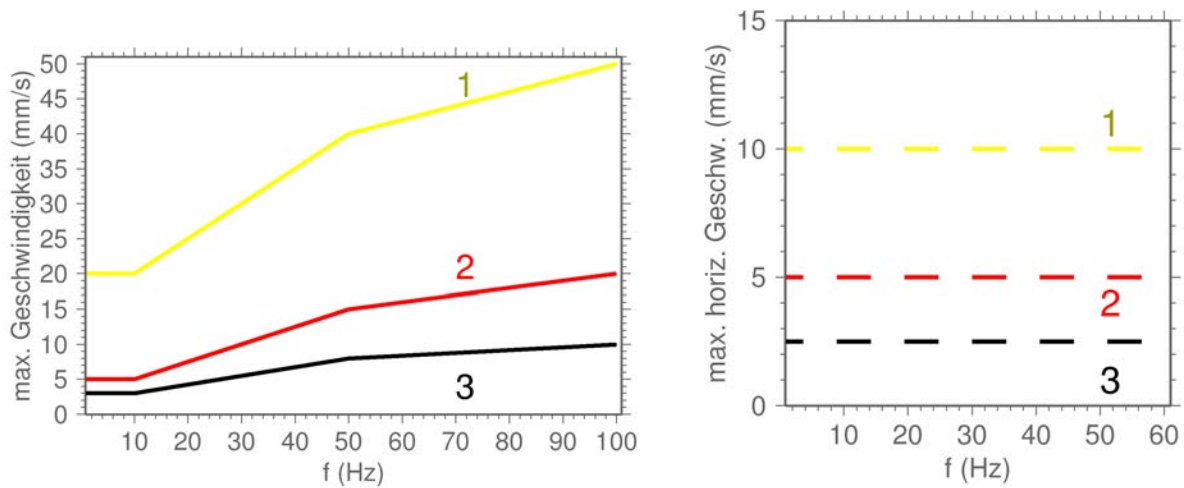


Abbildung 6.15: *Links:* Fundament-Anhaltswerte für die maximale Schwinggeschwindigkeit zur Beurteilung der Wirkung kurzzeitiger Erschütterungen auf Bauwerke unterschiedlicher Klasse (Auszug DIN4150-3). **Klasse 1:** Gewerblich genutzte Bauten, Industriebauten und ähnlich strukturierte Gebäude. **Klasse 2:** Wohngebäude und in ihrer Konstruktion und/oder Nutzung gleichartige Gebäude. **Klasse 3:** Bauten, die wegen ihrer besonderen Erschütterungsempfindlichkeit nicht denen aus Klasse 2 und 3 entsprechen und besonders erhaltenswert sind (z.B. unter Denkmalschutz).

*Rechts:* Anhaltswerte der Gebäudeklassen für die maximale horizontale Schwinggeschwindigkeit der obersten Deckenebene bei Dauererschütterungen (z.B. Vibrationsrammen).

Die stärksten induzierten Erdbeben in Deutschland bis 2015 sind im Kali- und Kohlebergbau aufgetreten (Tab.6.5). Induzierte Erdbeben durch Gasförderung und Fluideinpressungen im Zusammenhang mit Hydrothermalbohrungen sind in der Regel schwächer (z.B. Basel Erdbeben vom 08.12.2006,  $M_L = 3.4$ , 2300 Schadensmeldungen). Die Beurteilung der schwachen induzierten Erdbeben nahe der Grenze zu Schadensschwelle ist meist schwierig weil weniger Messdaten zur Verfügung stehen und kleine Schäden häufig auch andere Ursachen haben können. Ein möglicher Schadensausgleich erfolgt in der Regel nur, wenn Bodenbewegungen professionell gemessen und die Schadensursache dem Ereignis eindeutig zugeordnet werden kann (vgl. Box 6.2). Da die Beweisspflicht meist bei den Geschädigten liegt, sind unabhängige Messungen im Vorfeld genauso wie eine vorherige, unabhängige Aufnahme des Schadensbild eines Gebäudes (Rissvermessung mit Risslineal und Dokumentation) zu empfehlen. Kommen für mögliche Schäden noch andere Ursache als Erschütterungen durch induzierte Erdbeben in Frage, wie z.B. Setzungen, dann ist die Bewertung erschwert. In vielen Fällen werden juristische Einzelprüfungen durchgeführt (z.B. Kohlebergbau). Im Fall der induzierten Erdbeben bei Basel wurden Perimeter aufgrund von seismologischen Messungen bestimmt (Isolinien der Schwinggeschwindigkeit  $> 5 \text{ mm/s}$ ), welche die Zonen möglicher induzierter Schäden eingrenzen.

Tabelle 6.5: Induzierte seismische Ereignisse mit  $M_L > 4.0$  in Deutschland (Deutsche Bebenkatalog, BGR).

Datum	Herdort	$M_L$	$I_0$	Aktivität
25.04.1940	Krügershall (Saale-Revier)	4.9	VII	Kalibergbau
22.02.1953	Heringen (Werra-Revier)	5.0	VII-VIII	Kalibergbau
08.07.1958	Merkers (Werra-Revier)	4.7	VII	Kalibergbau
23.06.1975	Sünna (Werra-Revier)	5.2	VIII	Kalibergbau
13.07.1981	Ibbenbueren	4.1		Kohlebergbau
13.03.1989	Völkershausen (Werra-Revier)	5.6	VIII-IX	Kalibergbau
16.05.1991	Ibbenbueren	4.3		Kohlebergbau
11.09.1996	Teutschenthal (Saale-Revier)	4.9	VII	Kalibergbau
06.01.2003	Ibbenbueren	4.2		Kohlebergbau
20.10.2004	Rotenburg/Wümme	4.2		Gasförderung
23.02.2008	Primsmulde/Saarland	4.0-4.2		Kohlebergbau

Als **Strong Ground Motion** werden Bodenerschütterungen durch Erdbeben bezeichnet, welche potenziell zu Schäden führen können. Bei der Charakterisierung der Strong Ground Motion benutzt man traditionell maximale Bodenbeschleunigungen, sogenannte **Peak Ground Acceleration** (PGA), und heutzutage immer öfter auch maximale Schwinggeschwindigkeit, sogenannte **Peak Ground Velocity** (PGV). Als PGV an einer Station wird der Spitzenwert in dem gesamten, auf Geschwindigkeit umgerechneten Seismogramm jeweils auf der Nord-, Ost- und Vertikalkomponente extrahiert (Abb. 6.16). Der PGA Wert ist entsprechend der Spitzenwert des Akzellerogramms. Die PGA skalieren besser mit den eingetragenen Kräften, die auf ein Bauwerk wirken, und die PGV besser mit der eingetragenen Energie der Welle. Ob ein Schaden auftritt oder nicht hängt aber auch von Dauer und Frequenz der Anregung ab, evtl. auch von dem speziellen Verlauf der Bodenbewegung. Andere eingeführte Messgrößen sind daher die **Dauer der Erschütterung**, z.B.  $T_{5\%-95\%}$ . Die Dauer  $T_{5\%-95\%}$  wird zwischen den Zeiten im Geschwindigkeits-Seismogramm gemessen, zwischen denen 5% und 95% der gesamten Energie angekommen ist. Physikalische Parameter der Bodenbewegung, wie PGV, PGA oder  $T_{5\%-95\%}$ , skalieren häufig nur mäßig gut mit den klassischen Intensitätsskalen. So wurden teilweise PGA Werte über  $10 \text{ m/s}^2$  gemessen, ohne dass an diesen Orten extrem starke Zerstörung aufgetreten ist. Sogenannte **Arias Intensitäten**,  $I_A$  in  $\text{m/s}$ , sind ein anderer Parameter, um die Dauer der Erschütterung im Rahmen einer Intensität zu berücksichtigen,

$$I_A = \frac{\pi}{2g} \int_0^{\infty} \ddot{u}(t)^2 dt$$

wobei  $g$  die Gravitationsbeschleunigung und  $\ddot{u}(t)$  die Bodenbeschleunigung ist. Arias Intensitäten korrelieren häufig besser mit Gebäudeschäden, Bodenverflüssigung oder Hangrutschungen.

**Box 6.2a: Erschütterungswirkung auf Personen und bewertete Erschütterungen:**

In Anlehnung an die Beurteilung von Dauererschütterungen am Arbeitsplatz (LKW Fahrer, Arbeiten an Baumaschinen) werden die Einwirkung von Erschütterungen auf Menschen durch Erschütterungspegel, sogenannte **KB-Werte**, angegeben (bewertete Schwingstärke zwischen 1 und 80  $Hz$ , vgl. DIN 4150-2 und Tabelle). Gesundheitliche Folgen sind bei mehrmonatigen Einwirkungen von KB 8 und größer über mehrere Stunden täglich beobachtet worden. Kurzzeitige Erschütterungen bis  $KB \approx 20$  oder größer (z.B. beim Autofahren, Zufahren) führen in der Regel zu keinen offensichtlichen gesundheitlichen Schäden. Die Messung der Schwingstärke in einem Gebäude erfolgt am Ort der größten zu erwartenden Schwingung. Dies ist bei Decken z.B. immer die Deckenmitte. Die gemessenen Erschütterungen werden zusätzlich bewertet, d.h. z.B. Tageszeit, Häufigkeit, Lage des Wohngebiets und die dominante Frequenz werden entsprechend der Vorgaben berücksichtigt, was auf die Ermittlung sogenannter KB-Werte führt.

Zeile	Einwirkungsort	tags	nachts
3	Mischgebiete, Dorfgebiete	[0.20, 5, 0.10]	[0.15, 0.3, 0.07]
4	Wohngebiete	[0.15, 3, 0.07]	[0.10, 0.2, 0.05]
5	schutzbedürftige Orte (z.B. Krankenhäuser)	[0.10, 3, 0.05]	[0.10, 0.15, 0.05]

Die Tabelle zeigt einen Auszug aus DIN 4150-2 über  $KB$ -Richtwerte (bewertete Schwingstärke zwischen 1 und 80  $Hz$ ) zur Beurteilung der Einwirkung von Erschütterungen auf Menschen.  $[A_u, A_r, A_o]$  gibt jeweils den untere Unbedenklichkeitswert  $A_u$ , den Referenzwert  $A_r$ , für den weitere Messungen und Mittelwertbildung zu berücksichtigen ist, und den oberen Grenzwert  $A_o$  an. Der Zusammenhang zwischen  $KB$ -Werten und der menschlichen Empfindung ist: nicht spürbar ( $KB < 0.1$ ), gerade spürbar ( $0.1 \leq KB \leq 0.2$ ), gut spürbar ( $0.4 \leq KB \leq 1.6$ ), stark spürbar ( $0.4 \leq KB \leq 6.3$ ), und sehr stark spürbar ( $KB \geq 6.3$ ).

**Box 6.2b: Beurteilung von Riss- und Bauwerkschäden:** Praktisch alle Gebäude befinden sich ab dem Zeitpunkt ihrer Errichtung im Stadium eines langsam fortschreitenden Zerfallsprozesses. Es gibt daher praktisch kein Bauwerk, das frei von Rissen ist. Ob Risse entstehen oder wachsen hängt von den Spannungen in einem Bauteil ab. Man unterscheidet zwischen (quasi-) statischen Eigenspannungen und dynamischen Spannungen. **Statische Spannungen** werden durch Eigenspannungen, Temperatur- und Feuchtigkeitsänderungen, lastabhängige Verformungen oder Setzungen des tragenden Untergrundes und Grundwasserspiegelschwankungen beeinflusst. Zum Beispiel erzeugt die jahreszeitlichen Temperaturänderung und die Witterung eine erhebliche Spannungslast in den Außenwänden, weshalb thermisch induzierte Risse vorwiegend auf der Südseite auftreten (bis zu 70%). **Dynamische Spannungen** werden durch aufgezwungene Bewegungen (z.B. Windböen, Schall, Baumaschine) und Erschütterungen (z.B. Erdbeben, Sprengungen) erzeugt. Bei Erdbeben kommt hinzu, dass die typisch tieffrequenten Erschütterungen ( $< 10Hz$ ) oft im Bereich der Eigenfrequenzen der Gebäude liegen, und diese dadurch zu Resonanzschwingungen angeregt werden können.

Ein Riss entsteht oder wächst immer dann, wenn die Scher- und Zugspannungen in dem jeweiligen Bauteil die materialspezifischen Grenzwerte übersteigen. Man erwartet in Gebäuden der Vulnerabilitätsklasse B die ersten **direkt induzierten** Haarrisse, d.h. dynamische Schwellwertüberschreitungen, wenn die Schwinggeschwindigkeit der Erschütterung den Richtwert von etwa  $47 \text{ mm/s}$  übersteigt (Tab. 6.2). Risse können allerdings auch bei kleineren Schwingungsamplituden entstehen, wenn die statischen Spannungen in dem Bauteil bereits im kritischen Bereich liegen. Dann genügen u.U. sehr kleine Erschütterungen, um einen neuen Riss vorzeitig auszulösen (**zu triggern**), der ohne die dynamische Zusatzbelastung erst zu einem späteren Zeitpunkt entstanden wäre. Das Schadensbild der Rissursache ist für beide Klassen von Rissen, induziert und ausgelöst, häufig ähnlich, so dass die Unterscheidung schwierig sein kann. Z.B. sind für einseitige Setzungen des tragenden Untergrundes sowie für starke Erschütterungen **Diagonal- oder Zugrisse** charakteristisch (Spalling Effekt). Für eine belastbare Bewertung von Risschäden sind daher statistische Untersuchungen für mehrere Gebäude und als Funktion der Entfernung zur Erschütterungsquelle (Erdbeben, Sprengung) angebracht.

Erschütterungen können aber auch zu **indirekten Bauwerkschäden** führen. Ein Beispiel betrifft die Verflüssigung des unverfestigten, wassergesättigten Untergrundes (Sandes) unterhalb des Grundwasserspiegels. Die Bodenverflüssigung entsteht abhängig von Korngrößen und Wassersättigung der Sedimente durch starke oder länger anhaltende Erschütterungen, wie z.B. durch Vibrations-, Bagger und Rammarbeiten. Die kurzzeitige Bodenverflüssigung unterhalb der Oberfläche bleibt im Moment der Entstehung möglicherweise unbemerkt, kann aber im Anschluß an die Baumaßnahme zu Setzungserscheinungen führen, die u.U. erst lange (Monate) nach Abschluß der verursachenden Erschütterungen abklingen.

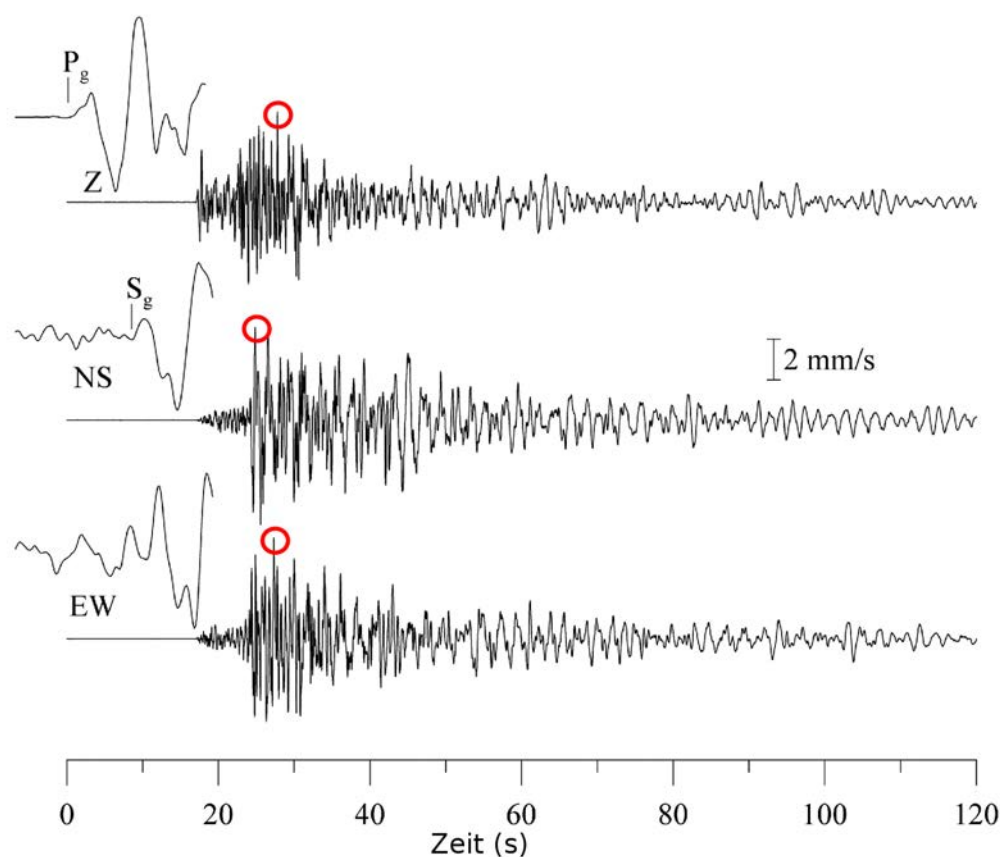


Abbildung 6.16: Strong motion Seismogramm des 22 Juli 2002,  $M_L 4.9$ , Asdorf 2002 Erdbebens, aufgezeichnet in 21.2 km Epizentralentfernung (aus Hinzen, 2005, vgl. Abb. 6.9). Maximale PGV Werte sind durch Kreise markiert.

Den frequenzabhängige Lasteintrag der Bodenerschütterungen wird häufig über sogenannte **Antwortspektren (Response Spectra)** parametrisiert. Man berechnet sich mit Hilfe der beobachteten Bodenbeschleunigung als Eingang die Antwort eines linearen harmonischen Oszillators für vorgegebene Eigenfrequenz  $f_i$  und Dämpfung. Die Oszillator Antwort stellt für unterkritische Dämpfung eine Schwingung dar, welche die größten Amplituden im Bereich der Eigenfrequenz  $f_i$  des Oszillators hat. Typische Dämpfungen liegen zwischen 2% und 20% der kritischen Dämpfungen. Die maximale Amplitude der Antwortschwingung wird abgelesen und als Amplitude des Antwortspektrums zur Frequenz  $f_i$  abgespeichert. Dann wird die Simulation für den nächst höheren Frequenzwert  $f_i + \Delta f$  berechnet, bis der interessierende Frequenzbereich des Antwortspektrums durchgemessen wurde (i.d.R. etwa 0.3 – 50 Hz, vgl. Abb.6.17). Antwortspektren sind keine Fourierspektren. Das Antwortspektrum bei 0% kritischer Dämpfung entspricht mehr oder weniger einer geglätteten Version des Fourierspektrums der Bodenbewegung (Einhüllende des Fourierspektrums). Mit wachsender Dämpfung wird das Antwortspektrum jedoch glatter und die Amplituden werden kleiner (vgl. Reiter, 1991). Mit Hilfe von Antwort-

spektren kann beurteilt und prognostiziert werden, ob und wie stark ein Gebäude zu Resonanzschwingungen (Spitzenwerte) angeregt werden kann. Aus den Antwortspektren an mehreren Stationen kann eine charakteristische Form eines normierten Antwortspektrums für die Region abgeleitet werden, die für die Prognose von zukünftigen Resonanzschwingungen in beliebigen Entfernungen verwendet wird (vgl. Reiter, 1991).

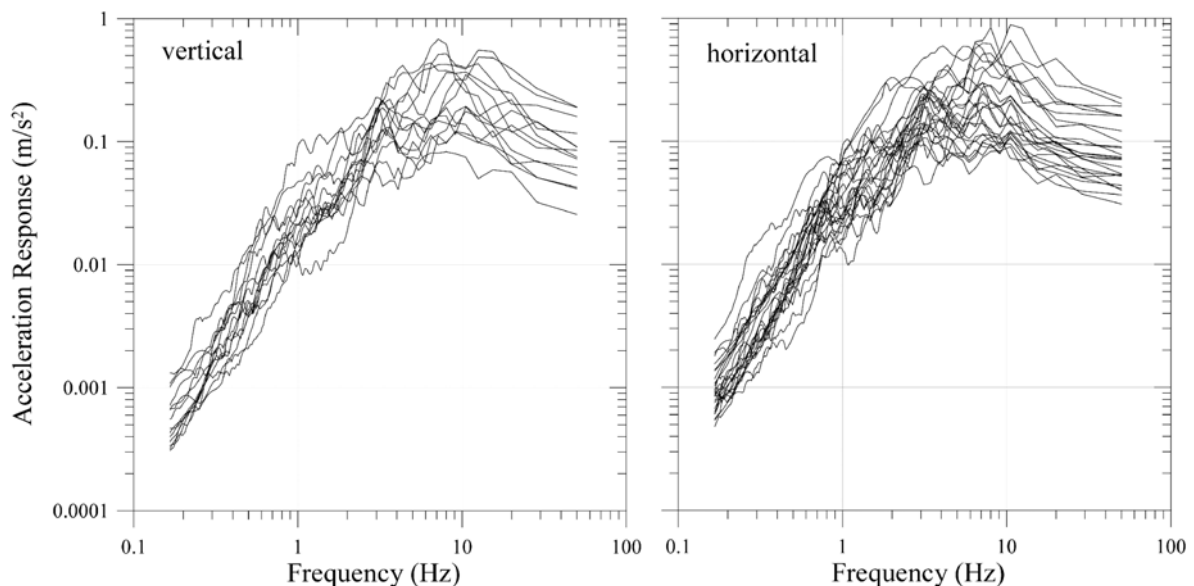


Abbildung 6.17: Antwortspektren (Beschleunigung, 5% der kritischen Dämpfung) von 13 Vertikal- (links) und 25 Horizontalkomponenten an Soft Rock Stationen, die das Alsdorf 2002 Erdbeben aufgezeichnet haben (aus [Hinzen, 2005](#)).

Die Strong Motion Seismologie verfolgt unterschiedliche Zielsetzungen wie

1. Dämpfungskurven und Perimeterradien für unterschiedliche Erschütterungsparameter zu bestimmen.
2. Zusammenhänge zwischen Schäden und Erschütterungen zu erfassen.
3. Prognosen und Wahrscheinlichkeiten für Bodenerschütterungen durch Erdbeben zu erstellen.

Eine wesentliche Rolle spielen die empirischen Dämpfungskurven (Abb.6.18), die ja bereits zur Definition einer Erdbebenmagnitude verwendet wurden (Gleichung 6.1). Die Dämpfungskurven für PGA, PGV, d.h. die Entfernungsabhängigkeit der jeweiligen Parameter, wird i.d.R. als Ausgleichswert aus vielen, für die Gegend charakteristischen Strong Motion Beobachtungen erstellt. Empirische Abklingkurven, die z.B. für flache bis mitteltiefe Erdbeben in Holland abgeleitet wurden, sind (Abb.6.18 und Dost et al.,



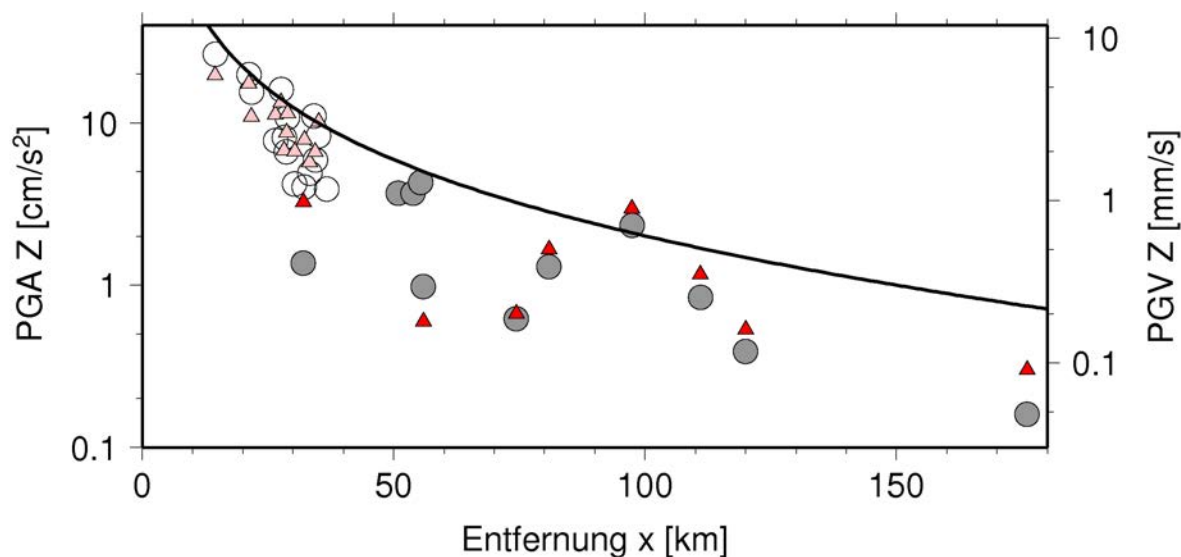


Abbildung 6.18: Gemessene PGA (Kreise) und PGV (Dreiecke) der vertikalen Bodenbewegung (Z) für das Alsdorf 2002 Erdbeben als Funktion der Epizentralentfernung (Hinzén, 2005). Station auf kompaktem Gestein sind dunkelfarbig gefüllt, Sedimentstationen offen bzw. hellrot.

2004),

$$\log(a_{\text{PGA}}) = -1.41 + 0.57M_L - 0.00139x - 1.33 \log(x)$$

und

$$\log(a_{\text{PGV}}) = -1.53 + 0.74M_L - 0.00139x - 1.33 \log(x)$$

wobei  $a_{\text{PGA}}$  in  $m/s^2$ ,  $a_{\text{PGV}}$  in  $cm/s$  und die Epizentralentfernung  $x$  in  $km$  ist. Entsprechend kann die Entfernungsabhängigkeit der Dauer der Strong Motion und eine Form des Antwortspektrums bestimmt werden. Die empirischen Dämpfungskurven, sogenannte Ground Motion Prediction Equations, gehen dann, zusammen mit Annahmen über Ort, Häufigkeit und Stärke von Erdbeben, in probabilistische oder deterministische Simulationen von Erschütterungsszenarien ein, die in einer seismischen Gefährdungskarte sublimiert werden. Die Gefährdungskarte wird für die Definition von Gebäudekodes und Richtlinien für Mindest-Baunormen von industriellen Anlagen wie z.B. von Kraftwerken oder chemischen Anlagen verwendet. Abb. 6.19 zeigt die seismische Gefährdung für Deutschland, Österreich und die Schweiz, angegeben in Form von EMS Intensitäten und eine Nichtüberschreitenswahrscheinlichkeit von 90% in 50 Jahren. Prognosen über 50 Jahre und mit 90%-tiger Sicherheit sind typische Werte, wie sie heutzutage für Kalkulation eines neuen Bauwerks herangezogen werden.

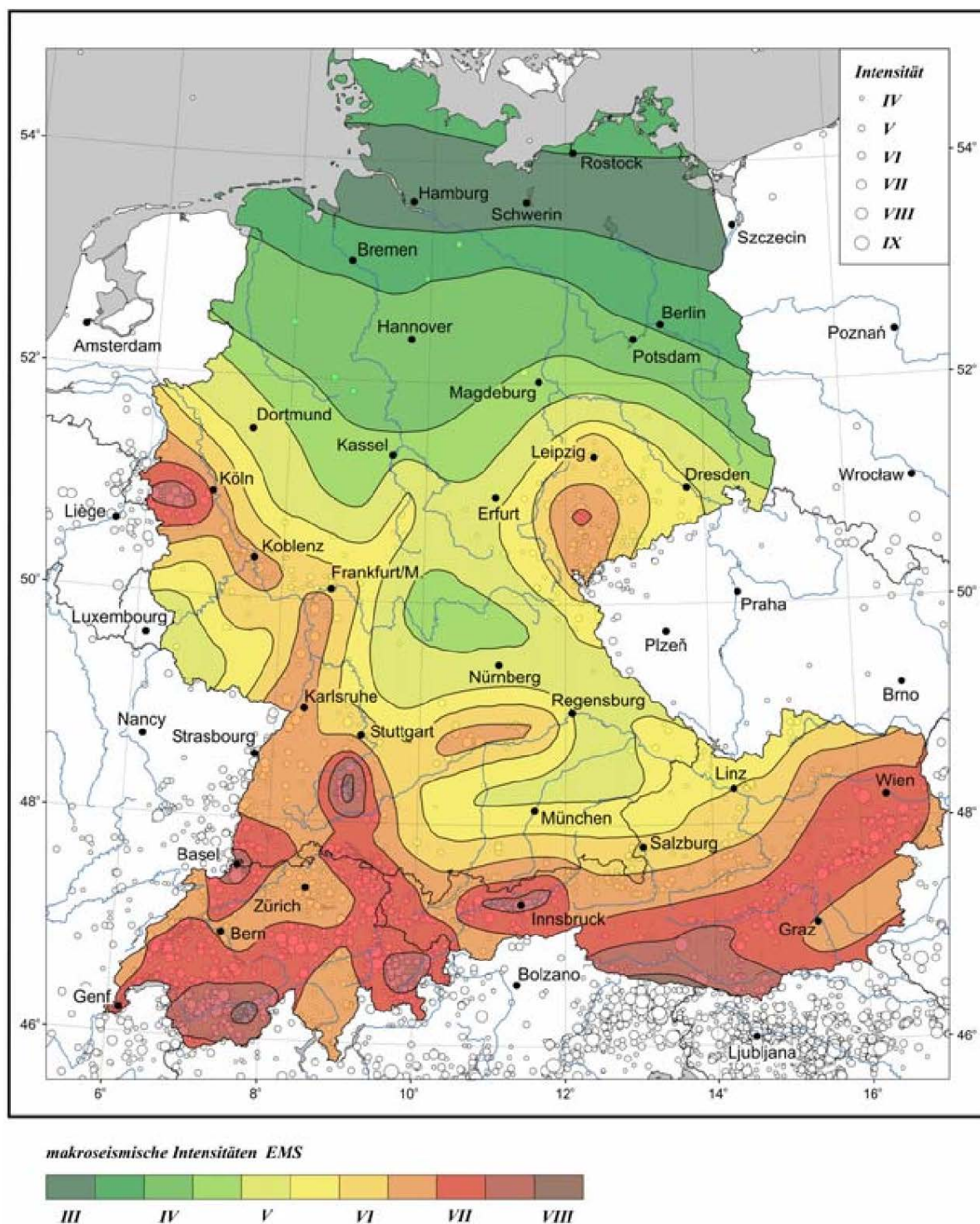


Abbildung 6.19: Erdbebengefährdung in Form berechneter Intensitätswerte für eine Nichtüberschreitenswahrscheinlichkeit von 90% in 50 Jahren (GSHAP Projekt, GFZ Potsdam, ETH Zürich, Uni Wien, siehe Grünthal et al., 1998).

### 6.3 Magnitude-Häufigkeit, b-Werte, Omoris Gesetz

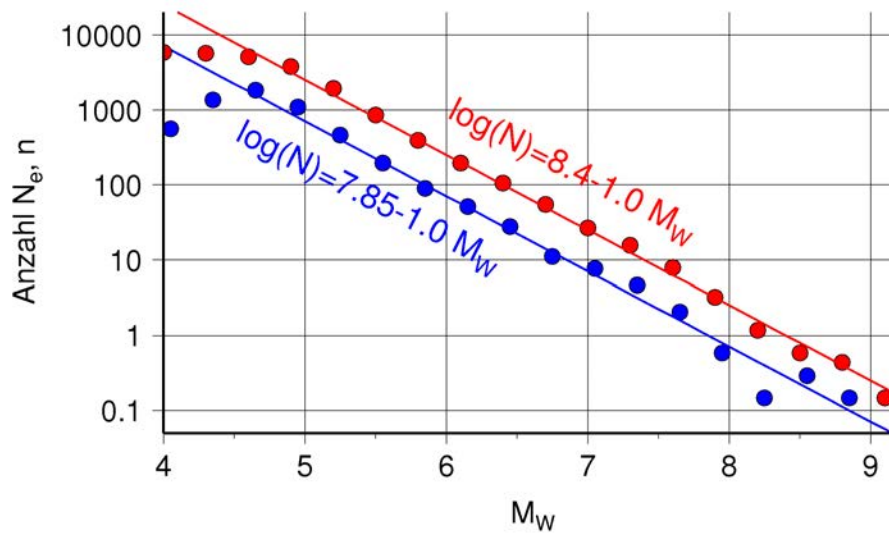


Abbildung 6.20: Magnitude-Häufigkeitsverteilung ( $M_W$ ) weltweiter, jährlicher Erdbeben (GEOFON Katalog, GFZ Potsdam, Daten 2008 - Mai 2015, auf 365 Tage normiert). Die roten Punkte zeigen die kumulative Anzahl  $N_e$  der Ereignisse für Beben  $N(M > M_W)$ . Die blaue Kurve zeigt die inkrementellen Anzahl  $n(M_W)$ . Binning Intervall ist 0.3. Die durchgezogenen Linien geben die Vorhersagen der Gutenberg-Richter-Beziehung für  $b = 1$  an.

Gutenberg und Richter hatten vorgeschlagen, dass für eine gegebene seismische Region innerhalb eines festen längeren Zeitintervalls die Häufigkeit von Erdbeben der Beziehung

$$\log N_c = a_1 - b M_W \quad (6.11)$$

genügt, wobei  $N_c$  die Zahl der Beben mit einer Magnitude  $\geq M_W$  (kumulativ, d.h.  $N_c = \sum_{M=M_W}^{M=\infty} N(M)$ ) und  $a_1$  und  $b$  Konstanten sind (z.B. Richter, 1958). Der  $a_1$ -Wert repräsentiert eine auf  $M_W = 0$  normierte Bebenproduktivität und variiert deutlich zwischen Regionen. Beträgt das Zeitintervall ein Jahr (übliche Angabe), dann gibt  $a_1$  gerade die Magnitude des maximalen, zu erwartenden Bebens pro Jahr an. Der sogenannte  $b$ -Wert ist für tektonische Verwerfungen in der Regel  $\approx 1$ . Weltweit hat man etwa ein  $M_W = 8+$  Beben pro Jahr ( $a_1 \approx 8$ ). Mit  $b = 1$  erwartet man dann etwa zehn  $M_W = 7$  und hundert  $M_W = 6$  Beben pro Jahr. Die empirische Beziehung (6.11) wird nicht nur zur Beschreibung der Beben weltweit verwendet, sondern auch für individuelle Regionen, einzelne Verwerfungen oder Verwerfungs-Segmente. Die **Magnitude-Häufigkeits-Beziehung** (Gutenberg-Richter-Beziehung) wird auch zur Beschreibung der Magnitudenverteilung von Nachbeben verwendet.

Abweichungen von  $b \approx 1$  werden insbesondere für Intraplatten-Beben und für nicht-tektonische Beben gefunden, wie z.B. für Schwarmbeben im Zusammenhang mit Vulkanismus oder für Mikrobeben / Mikrorisse im Bergbau, die durch äußere Belastungen hervorgerufen werden.

Eine mögliche Anwendung von (6.11) ist es, ein maximal zu erwartendes Erdbeben für eine Region über einen längeren Zeitraum zu extrapolieren. Weist z.B. eine seismische Region etwa ein  $M = 3.5$  Beben pro Jahr auf ( $a_1 = 3.5$ ), dann wird mit (6.11) im Mittel ein  $M \approx 4.5$  innerhalb von zehn und ein  $M \approx 5.5$  innerhalb von hundert Jahren erwartet. Diese Art der Extrapolation ist mit großen Unsicherheiten behaftet, besonders wenn die Statistik auf eine zu geringe Datenbasis baut.

Gleichung (6.11) kann umformuliert werden zu  $N_c = \int_{M=\infty}^{M=M_W} N(M) dM = 10^{a_1 - bM_W}$ . Der Logarithmus der differentiellen Form der Magnitude-Häufigkeitsbeziehung ist dann

$$\log n(M_W) = \log \frac{dN_c}{dM} = a_2 - b M_W \quad , \quad (6.12)$$

wobei  $n(M_W)$  die Anzahl der Beben in einem kleinen Intervall um  $M_W$  angibt. Die differentielle und kumulative Form von beobachteten Magnitude-Häufigkeitsverteilung aller  $M_W > 5$  Beben ist in Abb. 6.20 mit den theoretischen Kurven für  $b = 1$  verglichen.

Die Übereinstimmung mit der theoretischen Kurve in Abb. 6.20 ist zwischen  $M_W = 5.0$  und 7.5 gut. Die Abweichungen bei kleinen Magnituden werden durch die Detektionsschwelle für globale Beben erklärt (Vollständigkeitsmagnitude). Für lokale Untersuchungen und sehr kleine Magnituden unterhalb -1 wird allerdings diskutiert, ob es noch andere Gründe für Abweichungen zur "Gutenberg-Richter Relation" geben könnte. Für die stärksten Beben in Abb. 6.20 sind Schwankungen und mögliche Abweichungen gegenüber einer globalen Beziehung nach (6.11) schwierig zu untersuchen, da die Anzahl der Starkbeben sehr gering ist.

Mit (6.10) wird (6.11) als Funktion von  $M_0$  berechnet wie

$$\log N_c = \alpha - \frac{b}{1.5} \log(M_0) = \alpha - \beta \log(M_0) \quad (6.13)$$

Ein zweites empirisches Gesetz zur Bebenstatistik ist die **Omori-Beziehung**, die die Anzahl  $n$  der Nachbeben nach dem Hauptbeben als Funktion der Zeit  $t$  beschreibt,

$$n = \frac{C}{(t_1 + t)^{p_d}} \quad . \quad (6.14)$$

$n$  ist die Zahl der Nachbeben nach dem Hauptbeben und  $C$ ,  $t_1$  und  $p_d$  sind Konstanten.  $C$  hängt neben  $M_W$  des Hauptbebens auch von der **Vollständigkeitsmagnitude** des Datensatzes ab (kleinste  $M_W$ , die mit vorhandenem Stationsnetz sicher detektiert und

lokalisiert wird).  $t_1$  ist eine scheinbare Verzögerungszeit aufgrund Nicht-Vollständigkeit des Katalogs direkt nach Hauptbeben (hier auch durch zentrales Binning). Der Exponent  $p_d$  liegt in der Regel zwischen 0.8 und 1.2. Abb. 6.21 zeigt ein Beispiel für Nachbeben Verteilungen für das  $M_W$  8.6 Intraplatten Beben vor der Küste Sumatras am 11 April 2012. Gleichung (6.14) wird dazu benutzt die Nachbebenaktivität in der Epizentralregion nach Starkbeben abzuschätzen und z.B. festzustellen, wann die Seismizität nach einem großen Beben auf das normale Maß abgeklungen ist.

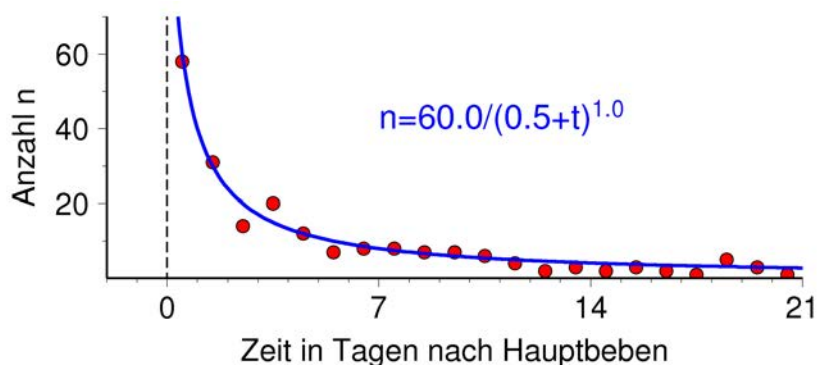


Abbildung 6.21: Anzahl der Nachbeben ( $M_W > 5$ ) in den ersten 21 Tagen nach dem  $M_W$  8.6 Beben vom 11 April 2012 in der ozeanischen Kruste etwa 200 km vor der Küste Sumatras (GEOFON Datenbank).

Die relative Magnitude des stärksten Nachbebens ist i.d.R. unabhängig von der Magnitude des Hauptbebens und liegt etwa 1 bis 1.2 Magnitudeneinheiten unter dieser (**Bath's Beziehung**). Allerdings ist die Abschätzung mit großen Unsicherheiten verbunden.

Nachbeben unterscheiden sich von Hauptbeben vor allem durch ihre hohe Bebenrate und aufgrund ihres raum-zeitlich konzentrierten Auftretens. Die Ursache von Nachbeben wird durch die Neuverteilung der lokalen Spannung nach dem Hauptbeben erklärt. Nachbeben treten vor allem in der unmittelbaren Umgebung des Hauptbebens auf, also in den Bereichen, in denen die größten Spannungsänderungen durch das Hauptbeben auftreten. An den Enden einer Bruchfläche werden z.B. die größten Spannungsspitzen kurz nach dem Beben erwartet, weshalb dort auch gehäuft mit Nachbeben zu rechnen ist. Der Bereich der Nachbeben der ersten zwei bis vier Tage nach dem Hauptbeben wird häufig zur Abschätzung der Bruchfläche benutzt.

## 6.4 Charakteristische Beben und Bebenintervall

Die Magnitude-Häufigkeits Beziehung sagt nichts über eine mögliche Periodizität von Beben an ein und demselben Verwerfungs-Segment aus. Gibt es Periodizitäten für Starkbeben, die möglicherweise für die Bebenvorhersage genutzt werden könnten? Das Elastic-



Rebound Modell für Plattengrenzen und Beobachtungen an einigen Plattensegmenten legen eine mögliche Periodizität und charakteristische Wiederkehrzeiten nahe. Ein häufig zitiertes Beispiel sind Starkbeben am Nankai Trough vor Japan (Abb. 6.22).

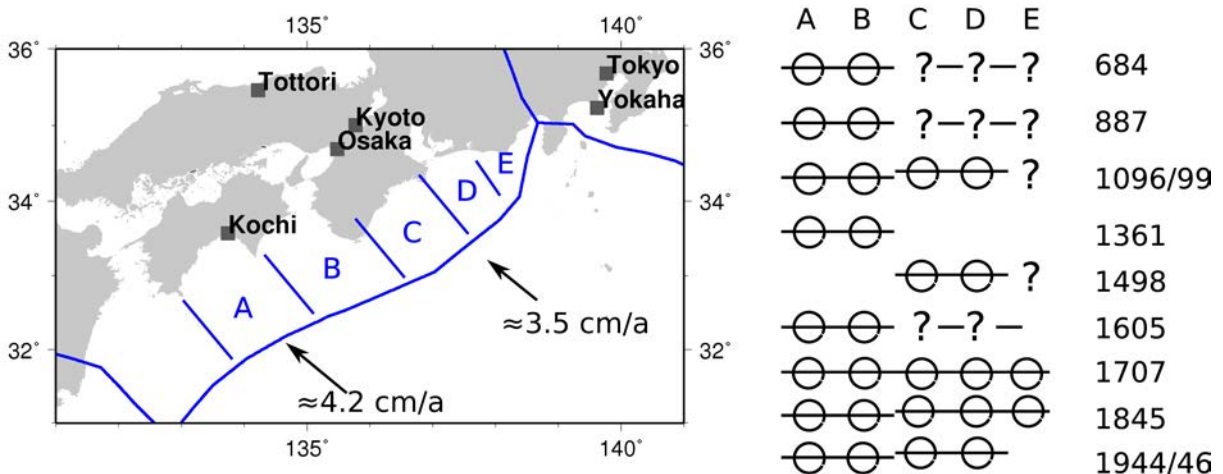


Abbildung 6.22: Historie von Starkbeben am Nankai Trough (Japan). Die Thrust-Zone der Subduktion lässt sich aufgrund der Plattenrandstruktur und der Beben Geschichte in vier bis fünf Segmente unterteilen (A-E), die in den letzten 1400 Jahren in relativ regelmäßigen Intervallen und Mustern gebrochen sind (nach Yonekura, 1975, Ando, 1975, siehe Scholz, 1990; Lay and Wallace, 1995; Stein and Wysession, 2003). 1707 sind alle 5 Segmente in einem großen Beben gebrochen. Das Segment E wird heute als seismische Lücke betrachtet, und liegt im Fokus der japanischen Erdbeben Frühwarnung und Vorhersage.

Nishenko and Buland (1987) hat Wiederkehrintervalle für Starkbeben des zirkumpazifischen Beben gürtels und deren relativen Schwankungen (Standardabweichungen) systematisch untersucht, und eine Gauss-ähnliche Verteilung mit einer Schwankungsbreite von mehr als  $\pm 17\%$  gefunden (Abb. 6.23). In einer weiterführenden Arbeit wurden Plattenrandsegmente rekonstruiert, die seit längerer Zeit kein Starkbeben mehr erfahren haben. Nishenko (1991) hat auf Basis der Wiederkehrintervalle für identifizierte charakteristische Erdbeben entlang des zirkumpazifischen Gürtels ein probabilistisches, zeitabhängiges Vorhersagemodell für Starkbeben abgeleitet (Abb. 6.24). Die zugrunde liegende Idee ist, dass Segmente, an denen die tektonischen Spannungen seit langer Zeit nicht mehr in Form von Starkbeben abgebaut wurden, eine besonders hohe Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines zukünftigen Bebens aufweisen (das **seismische Potenzial** ist groß). Das Konzept des seismischen Potenzials oder "der seismische Lücke" basiert auf dem Reid'schen Elastic Rebound Modell und ist physikalisch plausibel. Abb. 6.24 zeigt jedoch, dass in den 25 Jahren nach der Vorhersage von Nishenko (1991) Starkbeben genau so häufig oder sogar häufiger entlang von Segmenten mit geringem seismischen Potenzial



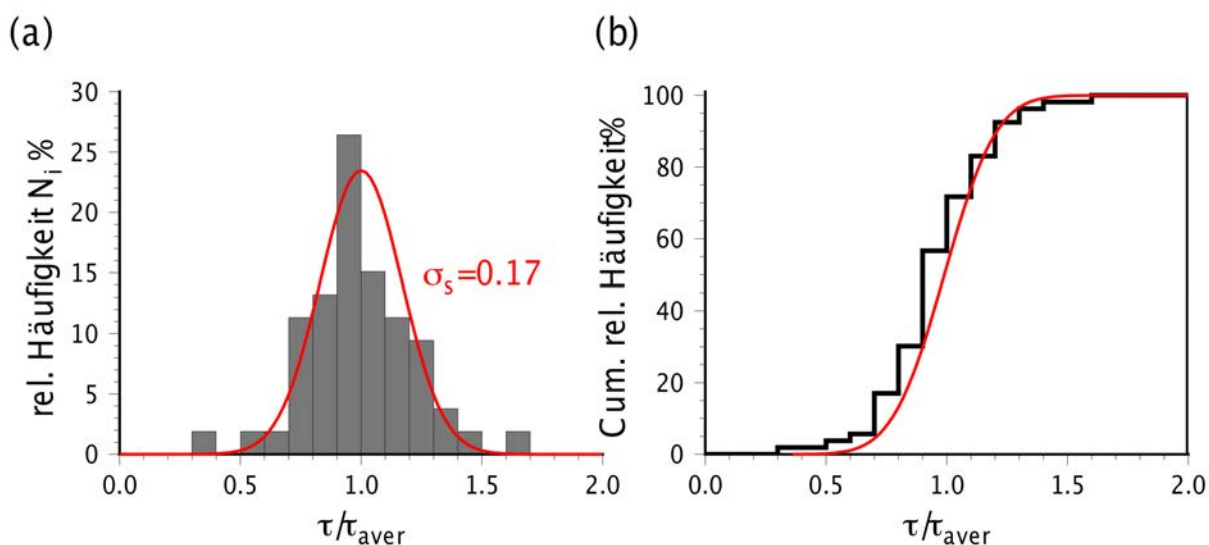


Abbildung 6.23: Statistik von Wiederkehrintervallen von Starkbeben im zirkumpazifischen Gürtel. Es wurden 53 Wiederkehrintervalle an 15 ausgewählten Plattenrandsegmenten untersucht, wobei mindestens drei charakteristische Beben am selben Ort auftraten ( $5.3 \leq M_W \leq 9.3$ ). Die Wiederkehrzeiten lagen zwischen 15 und 1300 Jahren (Daten aus [Nishenko and Buland, 1987](#)). Die roten Kurven zeigen die Approximation der Verteilung durch eine Gauss Verteilung mit einer Standardabweichung von 0.17.

aufgetreten sind wie an Segmenten mit hohem seismischen Potenzial. Rigorose Tests des Modells der seismischen Lücke haben ähnlich negative Ergebnisse erbracht (z.B. [Kagan and Jackson, 1991](#)), so dass die zeitabhängige, probabilistische Vorhersage von Starkbeben bis heute nicht allgemein akzeptiert und in probabilistische Gefährdungsmodelle eingeflossen ist. Eine Erklärung könnte sein, dass das Konzept der charakteristischen Erbeben für Plattenrandsegmente nicht gültig ist. Eine andere Möglichkeit ist, dass die Datenlage momentan noch zu unzureichend ist, um die Segmente und charakteristischen Erdbeben gut genug zu definieren.

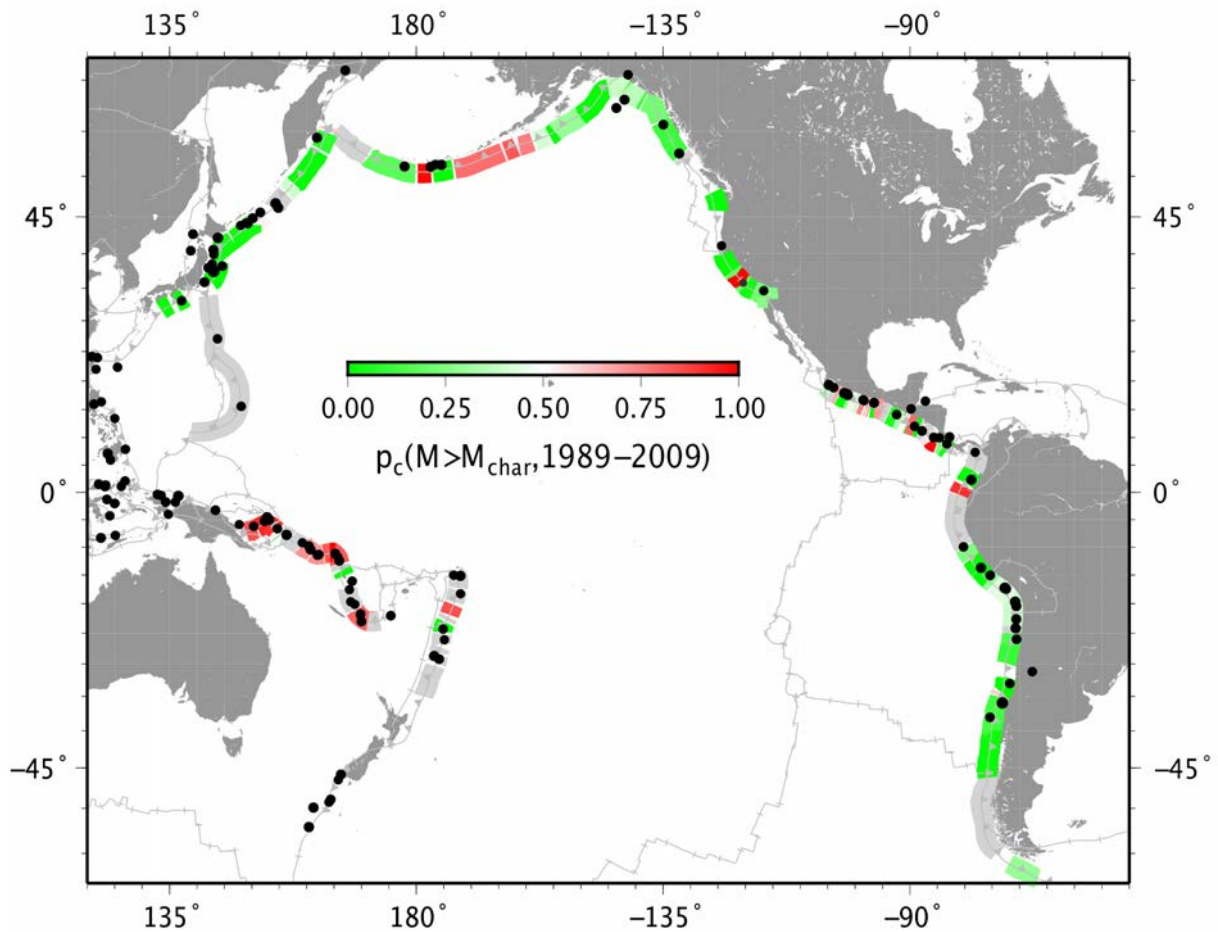


Abbildung 6.24: Bedingte Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Starkbeben an Plattengrenzen ( $M > M_{\text{char}}$ ) entlang des zirkumpazifischen Erdbebengürtels für den Zeitraum 1989-2009 (nach Nishenko, 1991, Mercator Projektion). Rote Segmente markieren Auftretswahrscheinlichkeiten  $> 50\%$ , grüne Segmenten  $< 50\%$ . Segmente, für die keine statistische Aussage möglich war, sind grau gefüllt. Die schwarz gefüllten Kreise geben die Epizentren (Centroids) von tatsächlich aufgetretenen Erdbeben mit  $M_W > 7.3$  und  $z < 40 \text{ km}$  zwischen August 1989 und August 2015 an (Global CMT). Das Parkfield 2004,  $M_6$  Beben in Californien ist grau eingezeichnet.

## 6.5 Bebenwahrscheinlichkeit

Ogleich die Zeitreihen zur Starkbebenseismizität in der Regel kurz und die Bebenstatistiken deshalb ungenügend sind, können Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines Bebens innerhalb eines Segments und innerhalb einer vorgegebenen Zeit geschätzt werden. Eine Grundvoraussetzung dafür ist die Kenntnis der **mittleren Wiederkehrzeit** und Standardabweichung eines **charakteristischen Bebens** an diesem Segment. Als charakteristisches Beben wird ein "typisches stärkstes Beben" bezeichnet, welches sich in der Vergangenheit mehrmals wiederholt hat. Ein Plattenrandsegment, für das die Vorhersage gemacht wird, spiegelt die Bruchlänge dieses stärksten Bebens wieder und wird evtl. auch durch strukturelle Parameter näher eingegrenzt. Zum Beispiel stoppen Bruchfronten von Starkbeben in Regionen mit Gesteins- und Beschaffenheitswechsel in der Verwerfung, oder aber in Regionen, in denen aufgrund des seismischen Verhaltens oder aufgrund der Orientierung der Verwerfung und des Spannungsfeldes keine großen Scherspannungen aufgebaut wurden.

Die probabilistische Vorhersage eines Bebens hängt neben der Wiederkehrzeit  $\tau$  und der Standardabweichung  $\sigma_s$  auch vom verwendeten Verteilungsmodell ab. Ein konservatives Modell, entwickelt für seltene Ereignisse, ist die **Exponentialverteilung** (Wahrscheinlichkeitsdichte, vgl. H.11)

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases},$$

wobei  $\tau$  die mittlere Wiederkehrzeit und  $1/\tau$  die Zahl der Ereignisse pro Jahr nach der Gutenberg-Richter-Verteilung ist (Magnitude-Häufigkeit).  $p$  ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten des ersten Erdbebens nach der Zeit  $t$  seit dem letzten Erdbeben, und wird aus der Poisson Verteilung abgeleitet (Anhang H). Das Poisson Modell wird häufig als die einfachste Null-Hypothese angesehen, gegen die andere Verteilungsmodelle getestet werden können.

Das Poisson Modell entspricht nicht den Erwartungen aus Recurrence Modellen wie Elastic-Rebound. Auch einfache mechanische Ersatzmodelle wie z.B. Stick-Slip oder Slider-Block Modelle erzeugen keine Exponentialverteilung für die Zeit zwischen zwei Erdbeben. Die allgemeine Erwartung ist, dass kurz nach dem Auftreten eines starken Bebens die Wahrscheinlichkeit für ein Wiederholungsbeben innerhalb eines Zeitintervalls  $\Delta t$  klein ist, und nach dem Überschreiten der mittleren Wiederkehrzeit für dasselbe Vorhersageintervall groß wird. Um ein "Gedächtnis" der Fault zu berücksichtigen, kann man z.B. mit einer **Normalverteilung** als Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion arbeiten, die neben  $\tau$  auch die **Standardabweichung** als unabhängigen Parameter verwendet

(vgl. H.1)

$$p(t') = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t')^2}{2}} \text{ mit } t' = \frac{t - \tau}{\sigma_s} .$$

$\sigma_s$  ist die Standardabweichung der mittleren Wiederkehrzeit und  $t'$  die dimensionslose Zeit.  $p(t' * \sigma_s + 1/\tau)$  ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten des ersten Erdbebens seit dem letzten Erdbeben.

Das letzte Beben an der Verwerfung definiert die Zeit 0. Bis zum jetzigen Zeitpunkt  $t$  soll kein Beben aufgetreten sein (Ereignis  $Y$ ). Die **kumulative Wahrscheinlichkeit** für das Nichtauftreten eines Bebens im Intervall  $[0, t]$  ist (vgl. Anhang H)

$$p(Y) = 1 - p_c(t) = 1 - \int_0^t p(x') dx' . \quad (6.15)$$

Die kumulative, gemeinsame Wahrscheinlichkeit (joint probability) für das Auftreten des ersten Bebens im Intervall  $[t, t + \Delta t]$  (Ereignis  $X$ ) und das Nichtauftreten im Intervall  $[0, t]$  (Ereignis  $Y$ ) ist

$$p_c(X \cap Y) = p_c(t + \Delta t) - p_c(t) .$$

Gesucht ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit**  $p(X|Y)$  (conditional probability), dass ein Beben zwischen heute (Zeit  $t$ ) und der Zeit  $t + \Delta t$  unter der Bedingung auftritt, dass es bis heute noch nicht aufgetreten war (vgl. H.14)

$$P(X|Y) = P(X \cap Y)/P(Y) .$$

Setzt man die Exponentialverteilung und die Normalverteilung ein erhält man

$$\begin{aligned} \text{(exponential)} \quad p_x(X|Y) &= \frac{e^{-(t+\Delta t)/\tau} - e^{-t/\tau}}{e^{-t/\tau}} = 1 - e^{-\Delta t/\tau} \\ &= 1 - \left( 1 - \left( \frac{\Delta t}{\tau} \right) + \dots \right) \approx \frac{\Delta t}{\tau} \\ \text{(normal)} \quad p_x(X|Y) &= \frac{0.5 \left( \operatorname{erf}\left(\frac{(t+\Delta t)-\tau}{\sigma_s \sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{t-\tau}{\sigma_s \sqrt{2}}\right) \right)}{\left( 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{t-\tau}{\sigma_s \sqrt{2}}\right) \right)} . \end{aligned} \quad (6.16)$$

Die Poisson-Verteilung hat kein "Gedächtnis" und die Beben treten immer gleich zufällig auf, egal ob das letzte Beben vor kurzer oder vor langer Zeit stattgefunden hat. Die Näherung gilt allerdings nur für  $\Delta t \ll \tau$ , also für Vorhersageintervalle, die viel kleiner sind als die mittlere Wiederkehrzeit.

Abb. 6.25 zeigt Beispiele für die Normal- und Exponentialverteilung und ihre kumulativen Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines Erdbebens in der Zeit  $t$  seit dem letzten

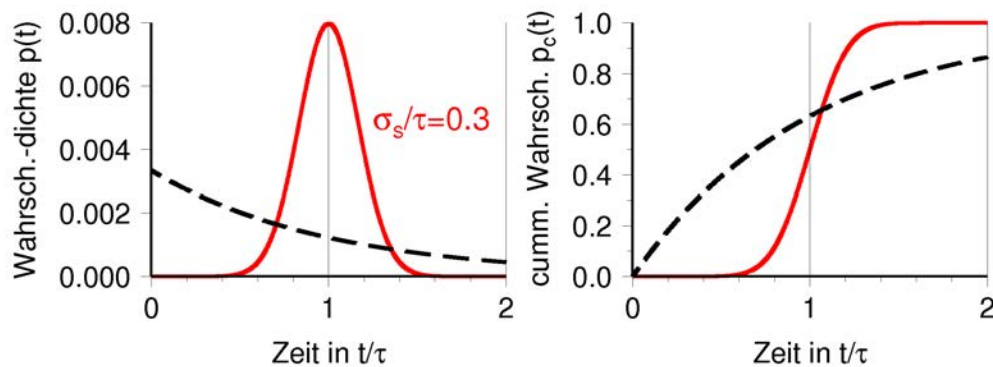


Abbildung 6.25: **Links:** Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(t/\tau)$  für eine Exponentialverteilung (schwarz gestrichelt) und eine Normalverteilung mit einer Standardabweichung  $\sigma_s/\tau = 0.3$  (rot).  $\tau$  ist die mittlere Wiederkehrzeit der Erdbeben. **Rechts:** Zugehörige kumulative Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Erdbebens nach dem letzten Erdbeben.

Beben. Die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des nächsten Starkbeben für ein Vorhersageintervall  $\Delta t/\tau$  ist in (Abb. 6.26) sowohl für die Exponential- wie auch die Normalverteilung mit unterschiedlichen Standardabweichungen berechnet worden. Beide Kurven skalieren mit dem Vorhersageintervall  $\Delta t$ . Je größer das gewünschte Vorhersageintervall, desto größer wird die abgeschätzte Auftretenswahrscheinlichkeit. Für  $\Delta t/\tau = 0.1$  ist  $p_c(X|Y)$  nach dem Poisson Modell gerade 0.1. In dem Zeitraum  $t < 0.7\tau$  überschätzt und für  $t > 0.8\tau$  unterschätzt das Poisson Modell die Wahrscheinlichkeit nach der Normalverteilung, Die Vorhersage der Normalverteilung variiert für  $t > 0.8\tau$  stark, je nachdem ob die Standardabweichung der mittleren Wiederkehrzeit,  $\sigma_s$ , klein oder groß ist. Da  $\sigma_s$  in der Regel nur ungenau bestimmt werden kann ist eine Angabe der Bebenwahrscheinlichkeit für Zeiten im Bereich oder nach der mittleren Wiederkehrzeit der Beben an dem Verwerfungssegment mit großen Unsicherheiten behaftet.

Ein Beispiel ist das Pallet Creek Segment an der San Andreas Verwerfung. Das letzte Starkbeben fand im Jahr 1857 statt, und die mittlere Wiederkehrzeit wurde auf  $\tau \approx 194 a$  und  $\sigma_s \approx 58 a$  ( $\sigma_s/\tau \approx 0.3$ ) geschätzt (vgl. Stein and Wyession, 2002). Aus Abb. 6.26 ergibt sich im Jahr 2012 ( $1856 + 0.8 \cdot 194$ ) eine Bebenwahrscheinlichkeit von etwa 15% innerhalb der nächsten 20 Jahre ( $\Delta/\tau \approx 0.1$ ).

Das Beispiel und Abb. 6.24 zeigen die mögliche Vorgehensweise zur probabilistischen Bebenvorhersage. Allerdings ist es häufig schwierig diese Vorhersagen und die verwendeten Modelle zu testen. Das liegt u.a. daran, dass die Bebenstatistiken zu kurz und ungenügend sind. Die probabilistische Bebenvorhersage ist zusätzlich kritisch zu betrachten, weil wichtige, kontrollierende Randbedingungen für das Auftreten von Beben bis heute nicht verstanden oder gar nicht bekannt sind. Zum Beispiel werden bis heute langsame (aseismische) Vorgänge in tieferen Stockwerken einer Plattengrenze kaum erkannt bzw.

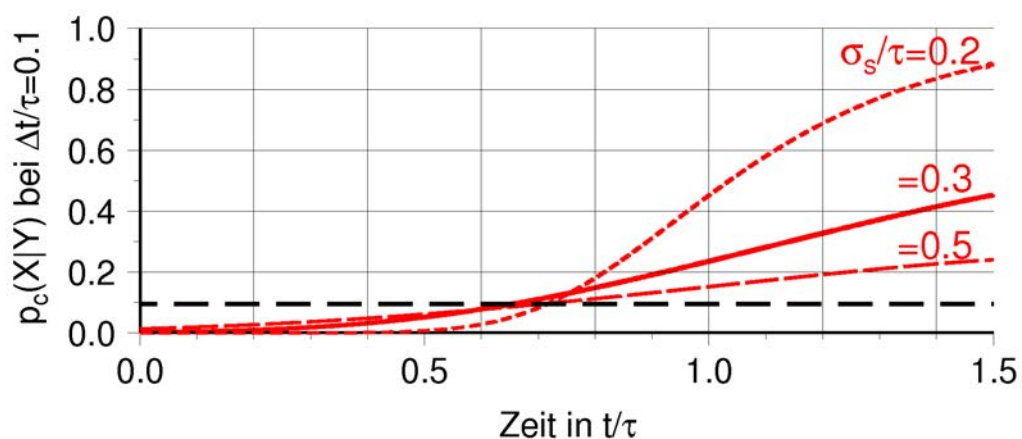


Abbildung 6.26: Bedingte Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des nächsten großen Bebens in einem Zeitintervall  $\Delta t/\tau = 0.1$ , aufgetragen als Funktion der normierten Zeit  $t/\tau$  seit dem letzten Beben. Gestrichelte schwarze Linien repräsentiert ein Poisson Modell ohne Gedächtnis. Die roten Linien geben die Wahrscheinlichkeiten nach der Normalverteilung und unterschiedlichen Standardabweichungen an.

gemessen. Diese tragen aber vermutlich erheblich zum Spannungsaufbau an den verhakten Zonen bei. Ebenso werden Änderungen der Bewegung der tektonischen Platten nicht berücksichtigt (Plattenkinematik).



## Literatur

- Aichroth, B., Prodehl, C., and Thybo, H., 1992. Crustal structure along the Central Segment of the EGT from seismic-refraction studies. *Tectonophysics*, 207:DOI: 10.1016/0040-1951(92)90471-H, 43–64.
- Aki, K. and Richards, P., 2002. *Quantitative Seismology*, 2nd edition. W. H. Freeman and Co., San Francisco, pp. 1–700.
- Berckhemer, H., 1990. *Grundlagen der Geophysik*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, pp. 1–201.
- Birch, F., 1961. Velocity of compressional waves in rocks to 10 kilobars; part 2. *J. Geophys. Res.*, 66:DOI: 10.1029/JZ066i007p02199, 2199–2224.
- Bird, P., 2003. An updated digital model for plate boundaries. *Geochemistry Geophysics Geosystems*, 1027:doi:10.1029/2001GC000252.
- Bormann, P., Wendt, S., and Di Giacomo, D., 2013. Seismic sources and source parameters. In Bormann, P., editor, *New Manual of Seismological Observatory Practice (NMSOP-2)*, pp. DOI102312/GFZ.NMSOP-2 ch3, 1–259. GFZ Potsdam.
- Braunmiller, J., Dahm, T., and Bonjer, K., 1994. Source mechanism of the 1992 Roermond earthquake from surface wave inversion of regional data. *Geophys. J. Int.*, 116:663–672.
- Bronstein, I. and Semendjajew, K., 1985. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, pp. 1–840.
- Busse, F., 1975. A model of the Geodyanmo . *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 42:DOI: 10.1111/j.1365-246X.1975.tb05871.x, 437–459.
- Carlslaw, H. and Jaeger, J., 1959. *Conduction of heat in solids*. Oxford at the Clarendon Press, Oxford, 2nd Edition, pp. 1–505.
- Carrigan, C. and Busse, F., 1983. An experimental and theoretical investigation of the onset of convection in rotating spherical shells. *Journal of Fluid Mechanics*, 126:287–305, 10.1017/S0022112083000166.
- Clauser, C., 2014. *Einführung in die Geophysik*. Springer, pp. doi 10.1007/978-3-642-04495-3.
- Dahm, T., 2000. Numerical simulations of the propagation path and the arrest of fluid-filled fractures in the earth. *Geophys. J. Int.*, 141:DOI: 10.1046/j.1365-246x.2000.00102.x, 623–638.

- Dahm, T., Kühn, D., Ohrnberger, M., Kröger, J., Wiederhold, H., Reuther, C., Dehghani, A., and Scherbaum, F., 2010. Combining geophysical data sets to study the dynamics of shallow evaporites in urban environments: application to Hamburg, Germany. *Geophys. J. Int.*, 181(10.1111/j.365-246X.2010.04521.x):154–172.
- Dietz, R., 1961. Continent and ocean basin evolution by spreading of the seafloor. *Nature*, 190:DOI:10.1038/190854a0, 854–857.
- Dziewonski, A. and Anderson, D., 1981. Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth and Planet. Inter.*, 25:297–356, doi:10.1016/0031–9201(81)90046–7.
- Elsasser, W., 1958. The Earth as a Dynamo. *Scientific American*, 189:44–48, 10.1038/scientificamerican–055844.
- Engdahl, E. and Villasenor, A., 2002. Global Seismicity: 1900–1999. In Lee, W., Kanamori, H., Jennings, P., and Kisslinger, C., editors, *International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology, Part A*, pp. Chapter 41, DOI:10.1016/S0074–6142(02)80244–3, pp. 665–690. Academic Press.
- Fournier, M., Chamot-Rooke, N., Petit, C., Huchon, P., Al-Kathiri, A., Audin, L., Beslier, M.-O., Acremont, E., Fabri, O., Fleury, J.-M., Khanbari, K., Lepvrier, C., Leroy, S., Maillot, B., and Merkouriev, S., 2010. Arabia-Somalia plate kinematics, evolution of the Aden-Owen-Carlsberg triple junction, and opening of the Gulf of Aden. *J. Geophys. Res.*, 115:1–24, 10.1029/2008JB006257.
- Fowler, C., 2005. *The solid earth* (2nd edition). Cambridge University Press, pp. 1–685.
- Geissler, W., Pulm, P., Jokat, W., and Gebhardt, A., 2014. Indications for the occurrence of gas hydrates in the Fram Strait from heat flow and multichannel seismic reflection data. *Journal of Geological Research*, 2014:10.1155/2014/582424.
- Gerthsen, C., Kneser, H., and H., V., 1982. *Physik*. Springer, Berlin.
- Goetze, H.-J. and Lahmeyer, B., 1988. Application of three-dimensional interactive modeling in gravity and magnetics. *Geophysics*, 53:DOI: 10.1190/1.1442546, 1096–1100.
- Grad, M., Guterch, A., Mazur, S., Keller, G., Spicak, A., Hrubcova, P., and Geissler, W., 2008. Lithospheric structure of the Bohemian Massif and adjacent Variscan belt in central Europe based on profile S01 from the SUDETES 2003 experiment. *J. Geophys. Res.*, 113:10.1029/2007JB005497.
- Grünthal, G., Mayer-Rosa, D., and Lenhardt, W. A., 1998. Abschätzung der Erdbebengefährdung für die D-A-CH-Staaten - Deutschland, Österreich, Schweiz. *Bautechnik* 75, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 10:DOI: 10.1002/bate.199805380, 753–767.

- Gubbins, D., 1992. *Sesimology and plate tectonics*. Cambridge University Press, pp. 01–329.
- Guggisberg, B., Kaminski, W., and Prodehl, C., 1991. Crustal structure of the Fennoscandian Shield – a travelttime interpretation of the seismic refraction long-range profile FENNOLORA. In: R. Freeman and St. Mueller (Eds.), *The European Geotraverse*. *Tectonophysics*, 195:DOI:10.1016/0040–1951(91)90208–A, 105–137.
- Gutenberg, B. and Richter, C., 1939. On seismic waves. *G. Beitr.*, 54:94–136.
- Han, S., Shum, C., Bevis, M., Ji, C., and Kuo, C., 2006. Crustal dilatation observed by GRACE after the 2004 Sumatra-Andaman earthquake. *Science*, 313:DOI: 10.1126/science.1128661, 658–662.
- Harjes, H., Henger, M., Stork, B., and Seidl, C., 1980. GRF Array Documentation. Seismologisches Zentralobservatorium Gräfenberg, Internal Report.
- Hasterok, D., 2013. A heat flow based cooling model for tectonic plates. *Earth and Planetary Science Letters*, 361:34–43, dx.doi.org/10.1016/j.epsl.2012.10.036.
- Hinzen, K., 2005. Ground motion parameters of the July 22, 2002,  $M_L$  4.9 Alsdorf (Germany) earthquake. *Bollettino di Geofisica Teoretica ed Applicata*, 4:303–318.
- Hübscher, C., Hensch, M., Dahm, T., Dehghani, A., Dimitriadis, I., Hort, M., and Talmaz, T., 2006. Towards risk assessment of central Aegean volcanoes. *EOS Transaction AGU*, 87(39):DOI: 10.1029/2006EO390002.
- Isacks, Olivier, and Sykes, 1968. Seismology and the new global tectonics. *J. Geophys. Res.*, 18:DOI: 10.1029/JB073i018p05855, 5855–5895.
- Jones, E., 1999. *Marine Geophysics*. John Wiley and Sons, pp. 1–454.
- Jung, K., Schaaf, H., and Kahle, H., 1969. Ergebnisse gravimetrischer Messungen im Ries. *Geologica Bavaria*, 61:337–344.
- Kagan, Y. and Jackson, D., 1991. Seismic gap hypothesis: ten years after. *J. Geophys. Res.*, 96:DOI: 10.1029/91JB02210, 21419–21431.
- Kanamori, H., 1977. The energy release of great earthquakes. *J. Geophys. Res.*, 82:DOI: 10.1029/JB082i020p02981, 2981–2987.
- Knopoff, L., 1967. Density-velocity relations for rocks. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 13:DOI: 10.1111/j.1365–246X.1967.tb02143.x, 1–8.

- Korhonen, J., Fairhead, J., Hamoudi, M., Hemant, K., Lesur, V., Mande, M., Maus, S., Purucker, M., Ravat, D., Sazonova, T., and Theabault, E., 2007. Magnetic anomaly map of the world (and associated DVD), Scale: 1:50,000,000. 1st edition, Commission of the Geological Map of the World, Paris, France, pp. 1–1.
- Kostrov, B., 1974. Seismic moment and energy of earthquakes, and seismic flow of rock. *Izv. Acad. Sci. USSR Phys. Solid Earth*, 1:23–40.
- Krawczyk, C., Polom, U., Trabs, S., and Dahm, T., 2011. Sinkholes in the city of Hamburg - New urban shear-wave reflection seismic system enables high-resolution imaging of subsurface structures. *Journal of Applied Geophysics*, x:dx.doi.org/10.1016/j.jappgeo.2011.02.003.
- Krieger, L. and Heimann, S., 2012. *MoPaD* – Moment tensor plotting and decomposition: A tool for graphical and numerical analysis of seismic moment tensors. *Seism. Res. Lett.*, 83(3):doi:10.1785/gssrl.83.3.589.
- Kuchling, H., 1984. *Taschenbuch der Physik*. Harri Deutsch, Frankfurt a.M., pp. 1–664.
- Landschulze, K., 2009. Auswertung gravimetrischer und magnetischer Daten über das Gebiet des Columbo Unterseevulkans. Diplomarbeit, Institut für Geophysik, Universität Hamburg, pp. 1–91.
- Lay, T. and Wallace, T., 1995. *Modern global seismology*. Academic Press, INC, pp. 1–497.
- Mania, H., 2008. *Gauß (Biographie)*. Rohwolt, Reinbek bei Hamburg, pp. 1–366.
- Masters, G. and Gubbins, D., 2003. On the resolution of density within the Earth. *Phys. Earth and Planet. Inter.*, 140:doi:10.1016/j.pepi.2003.07.008, 159–167.
- Mavko, G., Mukerji, T., and Dvorkin, J., 2003. *The rock physics handbook: tools for analysis in porous media*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, pp. 1–325.
- Milsom, J., 1996. *Field Geophysics*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, pp. 1–185.
- Nishenko, S., 1991. Circum-Pacific seismic potential: 1989–1999. *Pure and Applied Geophysics*, 135:doi:10.1007/BF00880240, 169–259.
- Nishenko, S. and Buland, R., 1987. A generic recurrence interval distribution for earthquake forecasting. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 77:1382–1399.
- Ramillien, G., Frappart, F., Cazenave, A., and Günther, A., 2005. Time variations of land water storage from an inversion of 2 years of GRACE geoids. *Earth and Planetary Science Letters*, 235:DOI:10.1016/j.epsl.2005.04.005, 283–301.

- Richter, C., 1958. *Elementary Seismology*. Freeman and Company, California, USA.
- Ringwood, A., 1975. *Composition and petrology of the Earth's mantle*. Mc Graw-Hill, New York, pp. 1–618.
- Sabadini, R., Riva, R. E., and Dalla Via, G., 2007. Coseismic rotation changes from the 2004 Sumatra earthquake: The effects of Earth's compressibility versus earthquake induced topography. *Geophys. J. Int.*, 171:231–243, 10.1111/j.1365–246X.2007.03495.x.
- Scholz, H. C., 1990. *The mechanics of earthquakes and faulting*. Cambridge University Press, pp. 1–439.
- Seidl, D., 1980. The simulation problem for broadband seismograms. *J. Geophys.*, 48:84–93.
- Sheriff, R. and Geldart, L., 1995. *Exploration seismology*, 2nd edition. Cambridge University Press, pp. 1–575.
- Stacey, F., 1992. *Physics of the Earth*. Brookfield Press, Kenmore, Brisbane, Australia, pp. 1–550.
- Stein, S. and Wysession, M., 2003. *An introduction to seismology, earthquakes and Earth structure*. Blackwell Publishing Ltd, pp. 1–489.
- Telford, W., Geldart, L., and Sheriff, R., 1990. *Applied Geophysics*, 2nd edition. Cambridge University Press.
- Turcotte, D. and Schubert, G., 2002. *Geodynamics*, 2nd edition. Wiley, New York, pp. 1–450.
- Villinger, H., Trehu, A., and Grevemeyer, I., 2010. Seafloor marine heat flux measurements and estimation of heat flux from seismic observations of bottom simulating reflectors. *Society of Exploration Geophysics, Special Volume on Geophysical Characterization of Gas Hydrates*, chapter 18:DOI: 10.1190/1.9781560802197.ch18, 279–300.
- Vine, F., 1966. Spreading of the Ocean Floor: new Evidence. *Science*, 154(3755):DOI: 10.1126/science.154.3755.1405, 1405–1415.
- Vozoff, K. E., 1986. *Magnetotelluric methods*. Geophysical reprint series, SEG, Tulsa, Oklahoma, pp. 1–749.
- Wegner, A., 1929. *Die Entstehung der Ozeane und Kontinente*. *Die Wissenschaft von W. Westphal* (Hrsg), Vieweg und Sohn, Braunschweig, 66:1–221.
- Wessel, P., 2000. *Geological data analysis. Lecture Notes*. Paul Wessel, pp. 1–144.

- Wessel, P. and Smith, W., 1991. Free software helps map and display data. *EOS Trans. AGU*, 72:DOI: 10.1029/90EO00319, 441.
- Widmer, R., Zürn, W., and Masters, G., 1992. Observation of low order toroidal modes from the 1989 Macquarie rise event. *Geophys. J. Int.*, 111:iDOI: 10.1111/j.1365-246X.1992.tb00572.x, 226–236.
- Wilson, M., 1989. *Igneous petrogenesis; a global tectonic approach*. Chapman & Hall, London, UK, pp. 1–457.
- Worzewski, T., Jegen, M., Kopp, H., Brasse, H., and Taylor, W., 2011. Magnetotelluric image of the fluid cycle in the Costa Rican subduction zone. *Nature Geoscience*, 4:108–111, doi 10.1038/ngeo1041.
- Yilmaz, O., 2001. *Seismic data analysis: Vol 1,2, 2nd Edition*. Soc. of Expl. Geophysics., Tulsa, USA, pp. 1–1, DOI: 10.1190/1.9781560801580.
- Ziolski, A., Parjes, G., Hatton, L., and Haugland, T., 1984. The signature of an air gun array: Computation from near-field measurements including interactions. *Geophysics*, 47:DOI: 10.1190/1.1441289, 1413–1421.
- Zürn, W., Ferreira, A., Widmer-Schmidrig, R., Lentas, K., Rivera, L., and Clévédé, 2015. High quality lowest-eigenfrequency normal mode strain observations at the Black Forest Observatory (SW-Germany) and comparison with horizontal broadband-seismometer data and synthetics. *Geophys. J. Int.*, pp. accepted, 9 Sep.
- Zürn, W. and Widmer-Schmidrig, R., 2002. Globale Eigenschwingungen der Erde. *Physik-Journal*, 1:49–55.



## A Nomenklatur, Konstanten

$a$	Schwingungs- oder Signalamplitude Y-Achsenabschnitt der Magnitude-Häufigkeitsbeziehung, dimensionslos
$A$	Flächeninhalt in [ $m^2$ ]
$b$	Gravitationsbeschleunigung in [ $m s^{-2}$ ] b-Wert in Magnitude-Häufigkeitsbeziehung, dimensionslos
$B$	magnetische Flußdichte in [ $T = N A^{-1} m^{-1}$ ] ( $1 \text{ Gauss} = 10^{-4} T$ )
$c$	Phasengeschwindigkeit in [ $m s^{-1}$ ]
$c_L$	Lichtgeschwindigkeit [ $2.99792458 \cdot 10^8 m s^{-1}$ ]
$C_L, C_S$	Gezeitenkonstante für Mond (L) und Sonne (S)
$C_e$	Geometriefaktor der Geoelektrik in [ $m$ ]
$C_r, C_t$	Reflexions- und Transmissionskoeffizient, dimensionslos
$d$	Entfernung, Distanz in [ $m$ ] ( $1 \text{ inch} = 0.0254 m$ , $1 \text{ naut. Meile} = 1852 m$ )
$D$	elektrische Verschiebungsdichte in [ $N V^{-1} m^{-1}$ ]
$E$	elektrische Feldstärke in [ $N C^{-1}$ ]
$f$	Frequenz in [ $Hz = s^{-1}$ ]
$F, F_g, F_b, F_c, F_p$	Kraft in [ $N = kg m s^{-2}$ ] ( $1 \text{ dyne} = 10^{-5} N$ )
$g$	Schwere in [ $Gal = 10^{-2} m s^{-2}$ ]
$g_\gamma$	Normalschwere in [ $Gal = 10^{-2} m s^{-2}$ ]
$G_E$	Gravitationskonstante [ $6.672 \cdot 10^{-11} N m^2 kg^{-2}$ ]
$h$	Dicke, Höhe in [ $m$ ]
$h_d$	Dämpfungskonstante, dimensionslos
$H$	magnetische Erregung in [ $A m^{-1}$ ]
$j$	imaginäre Einheit, $j^2 = -1$
$I$	elektrische Stromstärke in [ $A = c s^{-1}$ ]
$j$	elektrische Stromdichte in [ $A m^{-2}$ ]
$J$	Trägheitsmoment in [ $kg m^2$ ]
$J_C$	polares Trägheitsmoment [ $8.043 \cdot 10^{37} kg m^2$ ]
$J_A$	äquatoriales Trägheitsmoment [ $8.017 \cdot 10^{37} kg m^2$ ]
$k$	räumliche Wellenzahl in [ $rad m^{-1}$ ]
$\tilde{k} = k_r + jk_j$	komplexe Wellenzahl mit Real- und Imaginärteil
$K_f$	Federkonstante in [ $N m^{-1}$ ]
$l$	Länge in [ $m$ ]
$L$	Drehimpuls in [ $N m s$ ]
$m$	Masse in [ $kg$ ]
$m_E$	Erdmasse [ $5.9737 \cdot 10^{24} kg$ ]
$m_\chi$	magnetische Moment in [ $A m^2$ ]
$m_B$	Raumwellenmagnitude, dimensionslos

---

$M$	Moment in $[N m]$
$M_0$	seismische Moment in $[N m]$
$M_L$	Lokalbeben-Magnitude, dimensionslos
$M_S$	Oberflächenwellenmagnitude, dimensionslos
$M_\chi$	Magnetisierung, d.h. magn. Moment pro Einheitsvolumen, in $[A m^{-1}]$
$M_\chi^{\text{rem}}$	remanente Magnetisierung
$n$	Laufindex, ganze Zahl
$N, N_t, N_m, \dots$	Anzahl, Anzahl von Tochter- und Mutterteilchen, etc.
$O$	Ortsvektor, z.B. Koordinatenursprung
$p_\chi$	magnetische Polstärke in $[A m]$
$p$	Wahrscheinlichkeit (probability)
$P$	Druck in $[Pa = N m^{-2}]$ ( $1 \text{ bar} = 10^5 Pa$ )
$q$	elektrische Ladung in $[C = A s]$
$q_E$	Elementarladung $[1.60217733 \cdot 10^{-19} C]$
$Q$	Energie in $[J = N m]$ ( $1 \text{ erg} = 10^7 J$ , $1 \text{ Kalorie} = 4.1868 J$ )
$Q_h$	Wärmeenergie in $[J = N m]$
$r$	radiale Abstand in $[m]$
$r_E$	mittlere Erdradius $[6371 km]$
$R$	Ohmsche Widerstand in $[\Omega = V A^{-1}]$
$R_a$	Rayleighzahl, dimensionslos
$\tilde{R}_m = E_y/B_x$	komplexwertige Meßgröße aus Magnetotellurik
$\mathbf{s} = [s_x, s_y, s_z]^T$	Langsamkeitsvektor in $[s m^{-1}]$
$s_x = \sin \varphi/v$	Strahlparameter, horizontale Langsamkeit in $[s m^{-1}]$
$S$	Entropie in $[N m K^{-1}]$
${}_n S_l$	Sphäroidale Eigenschwingung mit Index $n$ (Anzahl Knotenflächen in Erde) und Ordnung $l$ (Anzahl Nodalinien auf Erdoberfläche) in $[Hz]$
$t$	Zeit in $[s]$ ( $1 \text{ Siderial Jahr} = 3.155815 \cdot 10^7 s$ )
$T$	Periode in $[s]$
$T_h$	Temperatur in $[^\circ C]$ oder $[^\circ K]$
${}_n T_l$	Toroidale Eigenschwingung vom Grad $n$ und Ordnung $l$ in $[Hz]$
$u$	Bodenverschiebung in $[m]$
$U$	elektrische Spannung in $[V]$
$v, v_p, v_s$	Geschwindigkeit, P-Wellen-Geschw., S-Wellen Geschw. in $[ms^{-1}]$
$V$	Volumen in $[m^3]$
$W_g, W_b, W_e, W_\chi$	Potenzial (Schwere, Gravitation, Elektrik, Magnetik)
$x, y, z$	Ortskoordinaten in $[m]$
$X$	Ortsvektor eines Punktes
$\mathcal{E}$	Elastizitätsmodul (Youngs modulus) in $[Pa = N m^{-2}]$

$\mathcal{K}$	Kompressionsmodul (bulk modulus, incompressibility) in $[Pa = N m^{-2}]$
$\mathcal{K}^{-1} = 1/\mathcal{K}$	Kompressibilität (compressibility) in $[Pa^{-1}]$
$\mathcal{L}$	Erster Lamé'scher Parameter in $[Pa]$
$\mathcal{N}$	Schermodul (rigidity) in $[Pa = N m^{-2}]$
$\nu$	Poissonzahl (Querkontraktionszahl)
$\alpha_h = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT_h}$	thermische Ausdehnungskoeffizient in $[K^{-1}]$
$\beta$	Azimuthwinkel ( $0^\circ \leq \beta \leq 360^\circ$ )
$\chi$	magnetische Suszeptibilität, dimensionslos
$\delta$	Einfallswinkel (Dip) ( $0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$ )
$\epsilon_0$	Dielektrizitätskonstante (Feldkonstante) $[8.885 \cdot 10^{-12} A s V^{-1} m^{-1}]$
$\epsilon_r$	relative Dielektrizität, dimensionslos
$\eta$	dynamische Viskosität in $[Pa s]$
$\eta_{gy}$	gyroskopische Verhältnis
$\kappa = \kappa_h / \rho c_p$	Temperaturleitfähigkeit (thermal diffusivity) in $[m^2 s^{-1}]$ . $c_p$ ist die spezifische Wärme bei konstantem Druck
$\kappa_h$	Wärmeleitfähigkeit (thermal conductivity) in $[W K^{-1} m^{-1}]$
$\lambda$	Rake-Winkel ( $-180^\circ \leq \lambda \leq 180^\circ$ )
$\lambda_r$	radioaktive Zerfallskonstante in $[s^{-1}]$
$\Lambda$	Wellenlänge in $[m]$
$\Delta, \delta$	Epizentraldistanz oder "Differenz" einer Größe
$\nabla, \nabla^2$	Nabla-Operator, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^T$ , $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz in $[rad s^{-1}]$
$\varphi$	Winkel, z.B. Phasenwinkel
$\phi$	geographische Länge ( $0^\circ \leq \phi \leq 360^\circ$ )
$\Phi$	Streich-Winkel (Strike) ( $0^\circ \leq \Phi \leq 360^\circ$ )
$\Phi_v$	Seismische Parameter
$\mu_0$	magnetische Permeabilität (Feldkonstante) $[4\pi \cdot 10^{-7} V s A^{-1} m^{-1}]$
$\mu_r$	relative magnetische Permeabilität, dimensionslos
$\rho$	Dichte in $[kg m^{-3}]$
$\rho_e$	elektrische spezifische Widerstand in $[\Omega m]$
$\rho_a$	Scheinbare (apparent) elektrische spezifische Widerstand in $[\Omega m]$
$\sigma_e$	elektrische Leitfähigkeit in $[S = \Omega^{-1} m^{-1}]$
$\sigma$	Spannung in $[Pa = N m^{-2}]$
$\vartheta$	Winkel
$\theta = 90^\circ - \Theta$	geographische Breite ( $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ )
$\Theta$	Poldistanzwinkel ( $0^\circ \leq \Theta \leq 180^\circ$ )
$\zeta$	Zentrifugalbeschleunigung in $[m s^{-2}]$

### Dezimale Vielfache und Teile von Einheiten (Faktor | Abkz. | Vorsilbe)

$10^{18}$	<i>E</i>	Exa	$10^{15}$	<i>P</i>	Peta	$10^{12}$	<i>T</i>	Terra	$10^9$	<i>G</i>	Giga
$10^6$	<i>M</i>	Mega	$10^3$	<i>k</i>	Kilo	$10^2$	<i>h</i>	hekto	$10^1$	<i>da</i>	deka
$10^{-18}$	<i>a</i>	Atto	$10^{-15}$	<i>f</i>	Femto	$10^{-12}$	<i>p</i>	Piko	$10^{-9}$	<i>n</i>	Nano
$10^{-6}$	<i>μ</i>	Mikro	$10^{-3}$	<i>m</i>	Milli	$10^{-2}$	<i>c</i>	Zenti	$10^{-1}$	<i>d</i>	Dezi

### Das griechische Alphabet (Buchstabe | Name)

<i>A, α</i>	Alpha	<i>H, η</i>	Eta	<i>N, ν</i>	Ny	<i>T, τ</i>	Tau
<i>B, β</i>	Beta	<i>Θ, θ, ϑ</i>	Teta	<i>Ξ, ξ</i>	Xi	<i>Υ, υ</i>	Ypsilon
<i>Γ, γ</i>	Gamma	<i>I, ι</i>	Jota	<i>Ο, ο</i>	Omikron	<i>Φ, φ, ϕ</i>	Phi
<i>Δ, δ</i>	Delta	<i>K, κ</i>	Kappa	<i>Π, π</i>	Pi	<i>Χ, χ</i>	Chi
<i>E, ε</i>	Epsilon	<i>Λ, λ</i>	Lambda	<i>Ρ, ρ</i>	Rho	<i>Ψ, ψ</i>	Psi
<i>Z, ζ</i>	Zeta	<i>Μ, μ</i>	My	<i>Σ, σ, ς</i>	Sigma	<i>Ω, ω</i>	Omega

### Natürlich auftretende Elemente (Ordnungszahl | Symbol | Name)

1	<i>H</i>	Wasserstoff (Hydrogen)	24	<i>Cr</i>	Chrom	47	<i>Ag</i>	Silber (Silver)	70	<i>Yb</i>	Ytterbium
2	<i>He</i>	Helium	25	<i>Mn</i>	Mangan	48	<i>Cd</i>	Cadmium	71	<i>Lu</i>	Lutetium
3	<i>Li</i>	Lithium	26	<i>Fe</i>	Eisen (Iron)	49	<i>In</i>	Indium	72	<i>Hf</i>	Hafnium
4	<i>Be</i>	Beryllium	27	<i>Co</i>	Kobalt	50	<i>Sn</i>	Zinn	73	<i>Ta</i>	Tantal
5	<i>B</i>	Bor	28	<i>Ni</i>	Nickel	51	<i>Sb</i>	Antimon	74	<i>W</i>	Wolfram
6	<i>C</i>	Kohlenstoff (Carbon)	29	<i>Cu</i>	Kupfer (Copper)	52	<i>Te</i>	Tellur	75	<i>Re</i>	Rhenium
7	<i>N</i>	Stickstoff (Nitrogen)	30	<i>Zn</i>	Zink	53	<i>I</i>	Iod	76	<i>Os</i>	Osmium
8	<i>O</i>	Sauerstoff (Oxygen)	31	<i>Ga</i>	Gallium	54	<i>Xe</i>	Xenon	77	<i>Ir</i>	Iridium
9	<i>F</i>	Fluor	32	<i>Ge</i>	Germanium	55	<i>Cs</i>	Cäsium	78	<i>Pt</i>	Platin
10	<i>Ne</i>	Neon	33	<i>As</i>	Arsen	56	<i>Ba</i>	Barium	79	<i>Au</i>	Gold
11	<i>Na</i>	Natrium	34	<i>Se</i>	Selen	57	<i>La</i>	Lanthan	80	<i>Hg</i>	Quecksilber (Mercury)
12	<i>Mg</i>	Magnesium	35	<i>Br</i>	Brom	58	<i>Ce</i>	Cer	81	<i>Tl</i>	Thallium
13	<i>Al</i>	Aluminium	36	<i>Kr</i>	Krypton	59	<i>Pr</i>	Praseodym	82	<i>Pb</i>	Blei (Lead)
14	<i>Si</i>	Silicium (Silicon)	37	<i>Rb</i>	Rubidium	60	<i>Nd</i>	Neodym	83	<i>Bi</i>	Bismut
15	<i>P</i>	Phosphor	38	<i>Sr</i>	Strontium	61	<i>Pm</i>	Promethium	84	<i>Po</i>	Polonium
16	<i>S</i>	Schwefel (Sulfur)	39	<i>Y</i>	Yttrium	62	<i>Sm</i>	Samarium	85	<i>At</i>	Astat
17	<i>Cl</i>	Chlor	40	<i>Zr</i>	Zirkonium	63	<i>Eu</i>	Europium	86	<i>Rn</i>	Radon
18	<i>Ar</i>	Argon	41	<i>Nb</i>	Niob	64	<i>Gd</i>	Gadolinium	87	<i>Fr</i>	Francium
19	<i>K</i>	Kalium	42	<i>Mo</i>	Molybdän	65	<i>Tb</i>	Terbium	88	<i>Ra</i>	Radium
20	<i>Ca</i>	Calcium	43	<i>Tc</i>	Technetium	66	<i>Dy</i>	Dysprosium	89	<i>Ac</i>	Actinium
21	<i>Sc</i>	Scandium	44	<i>Ru</i>	Ruthenium	67	<i>Ho</i>	Holmium	90	<i>Th</i>	Thorium
22	<i>Ti</i>	Titan	45	<i>Rh</i>	Rhodium	68	<i>Er</i>	Erbium	91	<i>Pa</i>	Protactinium
23	<i>V</i>	Vanadium	46	<i>Pd</i>	Palladium	69	<i>Tm</i>	Thallium	92	<i>U</i>	Uran

## B Minerale und Gesteine

### Minerale

Tabelle B.1: Beispiele für Anionen-Gruppen von Mineralen (Chem. Formel | Name)

$Al_2O_4$	Aluminat	$N, N_2$	Nitrid	$S, S_2$	Sulfid
$Cl, Cl_2$	Chlorid	$NO_3$	Nitrat	$SiO_4, Si_2O_7$	Silikat
$CO_3$	Karbonat	$O, O_2$	Oxid	$SO_4$	Sulfat
$F, F_2$	Fluorid	$(OH), (OH)_2$	Hydroxid		

Tabelle B.2: Beispiele für Minerale und mineralbildende Elemente

$(Mg, Fe)_2SiO_4$	Olivin	$NaAlSi_3O_8$ und $CaAl_2SiO_4$	Plagioklas
$(Mg, Fe)SiO_3$ $(Ca, Mg, Fe, Al_2)$ $\cdot (Al, Si)_2O_6$	<i>Orthopyroxen</i> <i>Klinopyroxen</i>	$X(Al, Si)_4O_8$ mit $X = Na, K, Ca, Ba$	Feldspat (Gerüst- silikat, häufigste Mineralphase der Kruste)
$Fe_3O_4$	Magnetit	$MgAl_2O_4$	Spinell
$CaSO_4$	Anhydrit	$S$	Schwefel
$CaSO_4 \cdot 2H_2O$	Gips	$C$	Graphit
$NaCl$	Steinsalz (Halit)	$SiO_2$	Quarz
$ZnCO_3$	Zinkspat (Smith- onian)	$K(Mg, Fe)_3AlSi_3$ $\cdot O_{10}(OH, F)_2$	Biotit (Glimmer- Gruppe, blätt- chenförmig)

Gesteine im kristallinen Zustand sind aus Mineralen in charakteristischen Mengenverhältnissen aufgebaut. Minerale besitzen eine regelmäßige Anordnung der Atome und lassen sich durch eine chemische Formel beschreiben. Wenn die Minerale ungehindert wachsen können, dann sind sie von ebenen Flächen, den Kristallflächen, begrenzt. Der positiv geladene Anteil der Minerale, die Kationen, sind chemisch gesehen im allgemeinen ein Metall und werden in der chemischen Formel meist an erster Stelle geschrieben. Beispiel für Kationen-Anteile sind  $Ca, Fe, Mg, etc.$  . Der negativ geladene Teil, die Anionen, können entweder nichtmetallisch sein, wie z.B. Sauerstoff  $O$  oder Schwefel  $S$ , oder eine Kombination von verschiedenen Elementen (Tab.B.1). Beispiele für Minerale und mineralbildende Elemente sind in Tab.B.2. Minerale werden aufgrund der chemischen Zusammensetzung in Klassen unterteilt, wie z.B. Sulfide, Halogenide, Silikate (vgl. Tab.B.3).

Tabelle B.3: Beispiele für Mineralklassen (Auswahl)

Elemente	Graphit, Schwefel, Gold, Silber, Kupfer, ...
Halogenide	Steinsalz (Halit), Fluorit, ...
Oxide und Hydroxide	Magnetit, Quarz, Spinell, ...
Nitrate, Karbonate	Kalzit, Magnesit, Zinkspat, ...
Sulfate	Anhydrit, Gips, ...
Silikate	Feldspat, Glimmer, Hornblende, ...

## Gesteine

Die Gesteine (Aggregate von Mineralen) werden üblicherweise in drei Gruppen eingeteilt, (1) **Eruptiv- oder Magmatische Gesteine** (Erstarrungsgesteine), (2) **Metamorphe Gesteine** (Umwandlungsgesteine) und (3) **Sedimentgesteine** (Ablagerungsgesteine). Aggregate aus 1-3 mit einem nutzbaren Metallgehalt werden als **Erze** bezeichnet.

Tabelle B.4: Beispiele für Eruptivgesteine (Auswahl)

Gestein	enthaltene Minerale
Granit	enthält immer Alkalifeldspat und/oder Quarz
Gabbro	im Wesentlichen aus basischen Plagioklas und Pyroxen. Quarz, Olivin oder Hornblende in geringeren Mengen
Peridotit	Tiefengestein (grünlich) im Wesentlichen aus Olivin (z.B. ausschließlich Olivin bei Dunit), geringere Mengen an Pyroxen und Hornblende
Andesit	Grundmasse aus Plagioklas. Zusätzlich Biotit, Hornblende und/oder Augit (Pyroxengruppe)
Basalt	Grundmasse aus Plagioklas, Pyroxen, Olivin und Magnetit

**Die Eruptivgesteine** entstehen durch Ausfrieren von geschmolzenem Gestein, sogenannter Magma-Schmelze oder Magma. Die Schmelze entsteht häufig im oberen Erdmantel, z.B. durch Druckentlastung oder Temperaturerhöhung, und steigt dann in die Erdkruste oder bis an die Erdoberfläche auf. Schmelzen, die in der Kruste gefrieren, heißen **Intrusiva** oder **Tiefengestein** oder **Plutonite**. Beispiele sind Granit, Diorit, Gabbro oder Peridotit (Tab.B.4). Granit kann entweder aus Rest-Mantelschmelzen entstehen, nachdem sich z.B. leichtere Anteile differenziert haben und weiter aufgestiegen sind, oder aber durch aufgeschmolzenes Krustengestein selbst. Schmelzen an der Oberfläche sind **Effusivgestein** oder **Lava** (weitgehend ohne explosive Tätigkeit ausfließende Schmelze). Ein Beispiel ist Basalt, ein in der Regel dunkles, dichtes



und feinkörniges Gestein ohne erkennbare Kristalle (siehe Tab.B.4). Das bei einer explosiven Vulkaneruption ausgeworfene Material wird **Tephra (Pyroklastika** oder auch **Ignimbrit-Strom**) genannt (Einteilung nach Krongrößen:  $> 64\text{ mm}$  Bomben und Blöcke,  $2 - 64\text{ mm}$  Lapilli,  $< 2\text{ mm}$  Aschen).

Tabelle B.5: Beispiele für Sedimentgesteine (Auswahl)

	mechanische Sedimente	chemische Sedimente	organische Sedimente
grob- & mittel- körnig	Brekzie, Konglomerat, Sandstein, Kies	<i>kalkig</i> : Kalkton, Dolomit, Travertin. <i>kieselig</i> : Feuerstein	<i>kalkig</i> : biogene Kalke. <i>kohlig</i> : Kohlen
feinkörnig	Grauwacke, Schiefertone	Steinsalz, Gips	

**Die Sedimente** sind Sekundärgesteine. Sie entstehen durch die Ablagerung von zerkleinerten Gesteinen und chemische Vorgänge an der Erdoberfläche, die in der Regel an Wasser gebunden sind. Sedimentgesteine durch die Ablagerung und Verfestigung von zerkleinertem Material, im Meer, See, Fluß oder an Land (z.B. Buntsandstein), nennt man **mechanische Sedimente**. Beispiele sind Sandstein und Grauwacke (Tab.B.5). Silt (in deutsch auch Schluff) ist feinkörniges Sediment mit Korngrößen unter etwa  $0.063\text{ mm}$ . Tuffe sind verfestigte vulkanische Asche, oder allgemeiner konsolidierte pyroklastische Ablagerungen. Sedimente, die durch die Verdunstung von Wasser mit vielen gelösten Anteilen entstehen, z.B. in Endseen, sind **chemische Sedimente** oder **Evaporite**. Beispiele sind Steinsalz, Anhydrit/Gips und Kalk(-ton) (Tab.B.5). Sedimente, die durch die Anreicherung von Hartteilen von Tieren und Pflanzen gebildet werden, z.B. von Muscheln oder Korallen, nennt man **organische Sedimente**. Sie bestehen im Wesentlichen aus Kalziumkarbonat. Beispiele sind organische Kalke (Tab.B.5). Zu den organischen Sedimenten zählen auch **Kohlegesteine** (auch Anthrazite genannt).

Tabelle B.6: Beispiele für metamorphe Gesteine (Auswahl)

	Regionalmetamorphose	Kontaktmetamorphose
Sandstein, Quarz	Quarzschiefer bis Quarzit	Quarzit
Grauwacke	Schiefer bis Gneis	Gneis
Kalk (rein)	Marmor	Marmor
Basalt, Diabas	Grünschiefer - Amphibolit - Eklogit	Haufels

**Die metamorphen Gesteine** entstehen aus Sediment- oder Eruptivgesteinen durch Umwandlung unter hohem Druck und/oder hoher Temperatur. Zum Beispiel kann bei

fortschreitender Sedimentation mehr und mehr Material überlagert werden, sodaß der Auflastdruck kontinuierlich steigt. Zusätzlich findet evtl. ein Einsinken der gesamten Kruste in den Mantel statt, was zur weiteren Druck- und Temperaturerhöhung führt. In anderen Fällen ist die Gebirgsbildung infolge der Plattentektonik und Kontinent-Kontinent-Kollision die Ursache für eine Erhöhung von Druck und Temperatur. Andere Beispiele sind die Subduktion von Sedimenten. Metamorphose dieser Art wird **Regionalmetamorphose** genannt (Tab.B.6). Schließlich kann Gesteinsumwandlung auch in der Nachbarschaft zu heißen, magmatischen Intrusionen entstehen, sogenannte **Kontaktmetamorphose** (Tab.B.6). Beispiele für metamorphe Gesteine sind Gneise, Schiefer, Felse und Marmor. Marmor besteht im Wesentlichen aus Kalzit. Bei Gneis überwiegt der Anteil an Feldspat. Quarzit ist ein metamorphes Gestein mit hohem Anteil an Quarz.

## C Geochronologie

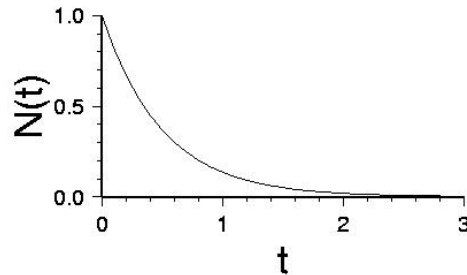


Abbildung C.1: Auftragung der natürlichen Zerfallsfunktion  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ . Zur Zeit  $\tau_{1/2}$  sind genau die Hälfte der ursprünglichen  $N_0$  Atome zerfallen.

Die Radioaktivität wurde 1896 durch H. Becquerel entdeckt. Bereits 1905 hatte E. Rutherford darauf hingewiesen, dass sich mit Hilfe des radioaktiven Zerfalls das Alter der Erde bestimmen lassen sollte. Bis dahin waren die Abschätzungen des Erdalters nämlich sehr ungenau und um Größenordnungen falsch. Heute gibt es eine ganze Reihe von Methoden und Ansätzen zur geologischen Altersbestimmung, was unter dem Begriff **Geochronologie** zusammengefaßt wird; die Radioaktivität spielt dabei eine wichtige Rolle.

Radioaktive Elemente sind nicht stabil, sondern zerfallen spontan in Tochterelemente und schließlich stabile Endprodukte. Typische Beispiele sind Uran ( $U^{238}$  und  $U^{235}$ ) und Thorium ( $Th^{232}$ ), die in Blei zerfallen ( $Pb^{206}$ ,  $Pb^{207}$  und  $Pb^{208}$ ). Die hochgestellte Zahl zu den chemischen Elementen gibt die relative Atommasse an (bezogen auf  $H$ ). Man sieht, dass bei diesen Beispielen die Atommasse abnimmt beim Zerfall, weil Kernteilchen wegdiffundieren. Die Halbwertszeit  $\tau_{1/2}$  von  $U^{238}$  ist  $4.5 Ga$ . Sie gibt an, wie lange es dauert bis die Hälfte aller  $U^{238}$  Atome zerfallen ist. Bei  $U^{235}$  ist  $\tau_{1/2} = 0.71 Ga$ , bei  $Th^{232}$  ist  $\tau_{1/2} = 13.9 Ga$ . Wegen der großen Halbwertszeiten eignen sich Uran und Thorium besonders für die Altersbestimmung der Erde; z.B. sind bei der Entstehung eines Gesteins geringe Mengen an  $U^{238}$  im Gestein eingebaut worden. Handelt es sich um ein geschlossenes System, d.h. wenn im Laufe der Zeit keine neuen Uran Atome dazukommen und außer durch Zerfall keine wegkommen, dann kann man das Alter des Gesteins abschätzen. Man mißt dazu, wie groß die vorhandene Menge an Uran im Verhältnis zu dem Endprodukt Blei ist.

Die chemischen, massenspektrometrischen und radioaktiven Messungen sind relativ aufwändig und werden hier nicht besprochen. Hier werden nur die einfachsten Grundzüge der radioaktiven Altersbestimmung besprochen. Die heute verwendeten Verfahren sind oft komplizierter als hier dargestellt, z.B. weil berücksichtigt werden muss, dass das Gestein nicht wirklich ein geschlossenes System war oder dass bei der Entstehung des Gesteins bereits Tochterelemente vorhanden waren.

## C.1 Grundlagen

Die Zerfallsrate eines radioaktiven Elements,  $dN/dt$ , ist proportional zur Anzahl  $N$  der vorhandenen Atome<sup>76</sup>,

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad .$$

Die Proportionalitätskonstante  $\lambda$  gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Teilchen der Atome (z.B. Kernteilchen) die Kernbindungskräfte überwinden kann und entweichen kann.

Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung ist (Abb. C.1)

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{oder} \quad t = \frac{1}{\lambda} (\ln N_0 - \ln N(t)) \quad , \quad (\text{C.1})$$

wobei  $N_0 = N(t=0)$  die zu Beginn vorhandene Anzahl von Mutterteilchen ist.

Ein anschauliches Maß für den Zerfall gibt die Halbwertszeit  $\tau_{1/2}$ , die berechnet wird aus

$$N = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda \tau_{1/2}} \quad \text{oder} \quad \tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.69315}{\lambda} \quad .$$

Gleichung (C.1) kann bereits zur Altersbestimmung verwendet werden, wenn  $N_0$  bekannt ist. Häufiger ist jedoch  $N_0$  nicht bekannt. Man kann trotzdem ein Alter abschätzen, indem man das Verhältnis der Mutter- zur Tochtersubstanz analysiert. Die Anzahl der Tochteratome  $N_T$  hängt von  $N_0$  und der Anzahl der verbliebenen Mutteratome  $N_M$  ab,

$$N_T = N_0 - N_M = N_0 (1 - e^{-\lambda t}) \quad .$$

Teilt man die Gleichung durch  $N_M$  nach (C.1), dann kann die unbekannte Zahl  $N_0$  eliminiert werden,

$$\frac{N_T}{N_M} = \frac{(1 - e^{-\lambda t})}{e^{-\lambda t}} = (e^{+\lambda t} - 1) \quad \text{oder} \quad t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{N_T}{N_M} + 1\right) \quad . \quad (\text{C.2})$$

Hat man  $N_T/N_M$  gemessen, dann kann die Zeit  $t$  seit Beginn des Zerfalls bestimmt werden, also das Alter des Gesteins.

## C.2 $C^{14}$ -Datierung

Die  $C^{14}$  Methode ist ein Beispiel für die Altersbestimmung mit Gleichung (C.1).  $C^{14}$  ist ein instabiles Kohlenstoff-Isotop mit einer Halbwertszeit von  $\tau_{1/2} = 5730 \text{ a}$  (relativ

---

<sup>76</sup> Differentialgleichungen dieser Art gelten immer dann, wenn die relative Änderung einer Größe, bezogen auf Zeiten oder Längeneinheiten, konstant sind. Beispiele sind der radioaktive Zerfall, der Ladeverlust eines Kondensators, oder die relative Dichteabnahme mit der Höhe in einer isothermen Atmosphäre.

klein). Sieht man von den letzten etwa 100 Jahren ab, dann war der Anteil von  $C^{14}$  in der Erdatmosphäre zwar immer klein, aber relativ stabil; auf ca.  $10^{12}$  Atome kam ein  $C^{14}$ -Atom. Dieses Verhältnis stellt ein Gleichgewicht dar zwischen den in der Atmosphäre durch kosmische Strahlung neu erzeugten und den zerfallenen  $C^{14}$ -Atomen. Dieses stabile Verhältnis hat sich in allerjüngster Zeit stark verändert, durch die massive Nutzung fossiler Brennstoffe durch den Menschen und durch atmosphärische Atombombenexplosionen seit 1950. Für Datierungen vor den mensch-verursachten Veränderungen ist die Altersbestimmung mit einem konstanten  $N_0$  möglich. Das  $C^{14}$ -Isotop wird genauso wie stabiler Kohlenstoff bei der Photosynthese der Pflanzen in pflanzliche Strukturen eingebaut. Solange die Pflanze lebte und Photosynthese durchführte, war der Anteil an  $C^{14}$  also konstant und bekannt. Nach Absterben der Pflanze wurde kein neues  $C^{14}$  eingebaut und die "radioaktive Uhr" begann zu ticken. Die Altersbestimmung wird mit (C.1) durchgeführt, wobei  $N_0$  bekannt ist und  $N$  gemessen wird. Die Altersbestimmung mit der  $C^{14}$ -Methode ist wichtig für archäologische Kartierungen und die Untersuchung geologischer Prozesse im Quartär (vor 1.6 Ma bis heute).

### C.3 Die Uran-Thorium-Blei Methode

Diese Methode wurde schon früh angewendet, z.B. für die ersten Altersbestimmungen der Erde. Hier hatten sich vor allem Meteoriten-Fundstücke als nützlich erwiesen, da hier die Annahme eines geschlossenen Systems besonders gut erfüllt war. Die Vorgehensweise ist folgende: man mißt massenspektrometrisch die Anteile von Uran oder Thorium und die der entsprechenden End-Zerfallsprodukte des Bleis. Dann wird aus (C.2) das Alter der Probe abgeschätzt.

Der Zerfall von Uran zum stabilen Blei geschieht nicht in einer einzigen Reaktion, sondern in einer ganzen Kette von Reaktionen und Zerfallsprodukten. Die Zwischenprodukte können auch gemessen werden. Häufig werden bei der Uran-Blei Methode auch prozentuale Anteile von instabilen Zwischenprodukten miteinander verglichen. Dadurch erreicht man eine noch höhere Genauigkeit; auf die Darstellung wird hier allerdings verzichtet.

Neben den angesprochenen Methoden gibt es noch eine ganze Reihe von Datierungsmethoden mit Hilfe des radioaktiven Zerfalls. Eine genauere Darstellung findet man in Spezialbänden, einiges auch in [Stacey \(1992\)](#).

### C.4 Erdzeitalter

Die Tierwelt der Erdgeschichte von 570 Mio Jahre bis heute wird in die drei Zeitalter eingeteilt, **Paläozoikum (Erdaltertum)** (570- 225 Mio Jahre), **Mesozoikum** (225 - 65 Mio Jahre) und **Kanäozoikum** (65-0 Mio Jahre). Die Zeitalter sind durch un-

terschiedliche klimatische Bedingungen und Land-Wasserverteilung charakterisiert. Die geologischen Perioden der einzelnen Epochen wurden aufgrund vorherrschender Sedimentablagerungen eingeteilt, die eine feinere Einteilung in einzelnen Serien erhalten. Tabelle B.1 gibt eine verkürzte Zusammenfassung der Erdzeitalter wieder.

Tabelle B.1: Verkürzte Einteilung der Erdzeitalter in geologische Perioden und Serien.

Mio Jahre	Tiere	Perioden	Serien
0-65	Kanäozoikum	Quartär  Terziär	Holozän Pleistozän Pliozän Miozän Oligozän Eiozän Paläozän
65-225	Mesozoikum	Kreide  Jura  Trias	obere untere Malm Dogger Lias Keuper Muschelkalk Buntsandstein
225-570	Paläozoikum	Perm  Karbon  Devon  Silur  Ordovizium  Kambrium	Zechstein Rotliegendes oberes unteres oberes mittleres unteres  oberes unteres oberes mittleres unteres



## D Koordinaten und Darstellung von Daten

### D.1 Koordinatensysteme

#### D.1.1 Rechtwinklige, kartesische Koordinaten

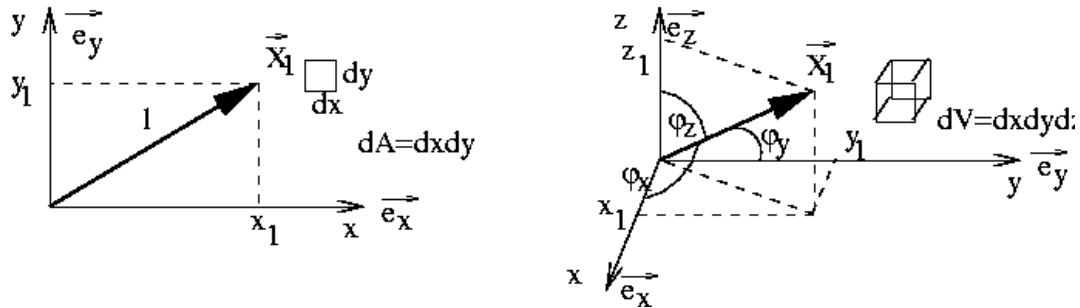


Abbildung D.1: Kartesische Koordinaten (rechtwinklig geradlinig) in 2D (links) und 3D (rechts).  $dA$  und  $dV$  definieren ein inkrementelles Flächen- und Volumenelement.

Ein rechtwinkliges, rechthändisches Koordinatensystem ( $x$ - $y$ - $z$ ), auch **kartesisches Koordinatensystem**, geht auf den französischen Mathematiker und Philosophen Rene Descartes (lat.: cartesian) zurück, der in 1637 zusammen mit Frechet das Konzept entwickelt hatte, die Position eines Punkt im Raum durch die Projektionslängen entlang von sich schneidenden, rechtwinkligen Koordinaten anzugeben. Im 2D Fall wird die  $x$  Koordinate wird als **Abszisse** und die  $y$ -Koordinate als **Ordinate** bezeichnet. Die **Quadranten** des Koordinatensystems geben die vier Regionen zwischen den Koordinatenachsen an.

**Einheitsvektoren**  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  und  $\hat{e}_z$  eines kartesischen Koordinatensystems haben feste (konstante) Richtungen (Abb.D.1). Die Familie der **Koordinatenflächen** sind parallele Ebenen  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  und  $z = \text{const}$ . Sind  $dx$ ,  $dy$  und  $dz$  **inkrementelle Schritte** in Richtung der Koordinaten, dann wird das **inkrementelle Flächenelement** in der  $x$ - $y$  Ebene durch  $dA = dx dy$  berechnet (entsprechend  $dx dy$  oder  $dy dz$  für die anderen Ebenen), und das **inkrementelle Volumenelement** durch  $dV = dx dy dz$  (Abb.D.1).

Ein Punkt  $X_i$  wird durch **die Koordinaten**  $(x_i, y_i, z_i)$  definiert. Die Koordinaten sind Projektionen des Vektors auf die Koordinatenachsen. Ein Vektor, der von  $X_0$  nach  $X_1$  zeigt, hat die Länge  $l = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$ . Die Richtung wird durch drei Winkel zwischen den Koordinatenachsen und dem Vektor, den sogenannten Richtungscosinus, charakterisiert,  $x_1 - x_0 = l \cos(\varphi_x)$ ,  $y_1 - y_0 = l \cos(\varphi_y)$  und  $z_1 - z_0 = l \cos(\varphi_z)$ .

Je nach Aufgabenstellung kann die Rotation des kartesischen Koordinatensystems hilfreich sein. Wird das System z.B. um die  $z$  Achse mit dem Winkel  $\varphi$  gedreht, dann

berechnen sich die Koordinaten des Vektors  $\mathbf{X}_1$  im neuen (gestrichenen) System durch

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} .$$

Entsprechendes gilt für die Rotation um andere Koordinatenachsen. Eine beliebige Rotation kann aus drei Rotationen um Koordinatenachsen zusammengesetzt werden. Die Winkel dieser drei Rotationen heißen Eulerwinkel der Rotation.

### Ebene Polar- und Zylinderkoordinaten

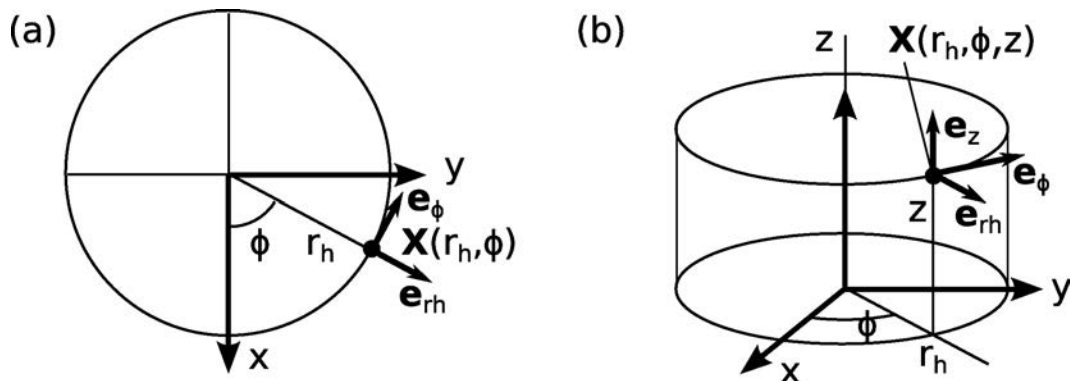


Abbildung D.2: Ebene Polar- (a) und Zylinderkoordinaten (b).

$$\begin{aligned} x &= r_h \cos \phi & r_h &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r_h \sin \phi & \text{und } \phi &= \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) , \\ z &= z & z &= z \end{aligned}$$

wobei  $0 \leq r_h \leq \infty$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ,  $-\infty < z < \infty$  (Abb.D.2).  $r_h$  ist der horizontale Radius. Die Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_\phi$ ,  $\mathbf{e}_{r_h}$  und  $\mathbf{e}_z$  am Punkt  $\mathbf{x}$  stehen immer senkrecht aufeinander und zeigen in wachsende Koordinatenrichtungen. Das Flächenelement  $dA$  am Punkt  $\mathbf{X}$  ist  $r_h dr_h d\phi$ , und für Zylinderkoordinaten zusätzlich für die beiden anderen Koordinatenflächen  $dr_h dz$  und  $r_h d\phi dz$ . Ein Volumenelement in Zylinderkoordinaten ist  $dV = r_h d\phi dr_h dz$ .

#### D.1.2 Sphärische Polar- und Geographische Koordinaten

Das Zentrum des erdbezogenen sphärischen Koordinatensystems liegt im Kugelmittelpunkt, die  $z$ -Achse geht durch den "Nordpol" und die  $x$ -Achse durch den Greenwich

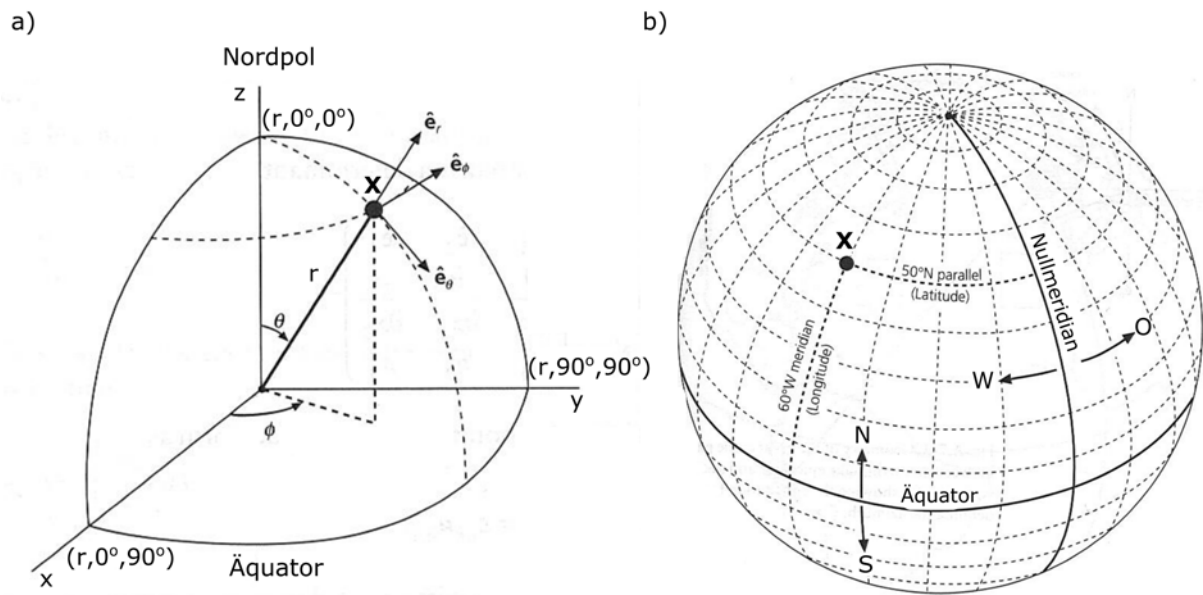


Abbildung D.3: (a) Sphärisches Koordinatensystem. Der Aufpunkt  $\mathbf{X}$  liegt im Abstand  $r$  unter dem Azimuth  $\phi$  und Polwinkel  $\Theta$ . Der Polwinkel  $\Theta$  wird vom Nordpol gemessen und alternativ auch als Kolatitude bezeichnet. (b) Geographisches Koordinatensystem mit definiertem Nullmeridian durch Greenwich, UK, zur Festlegung der geographischen Länge  $\phi$  (Longitude). Die geographische Breite  $\theta$  (Latitude) wird vom Äquator aus gemessen und durch  $\theta = 90^\circ - \Theta$  bestimmt.

Meridian (Abb.D.3). Ein Punkt mit dem Ortsvektor  $\mathbf{X} = (x, y, z)^T$  wird durch drei Koordinaten  $r$ ,  $\phi$  und  $\Theta$  angegeben, wobei gilt

$$\begin{aligned} x &= r \sin \Theta \cos \phi & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \sin \Theta \sin \phi & \phi &= \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \\ z &= r \cos \Theta & \Theta &= \cos^{-1} \left( \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \end{aligned}, \quad (\text{D.1})$$

wobei  $0 \leq r \leq \infty$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ ,  $0 \leq \Theta < \pi$  (Abb.D.3). Flächenelemente für  $r = \text{const}$  ist  $dA = r^2 \sin \Theta d\Theta d\phi$  und das inkrementelle Volumenelement ist  $dV = r^2 \sin \Theta d\Theta d\phi dr$  (Abb.D.3).

Ein sphärisches Koordinatensystem ist zur Beschreibung von Daten und Feldern auf der Erde naheliegend. Dabei gibt  $\phi$  die **geographische Länge (Longitude)**,  $\Theta$  die **Kolatitude** und  $r$  den **Radialabstand** an. Linien  $\phi = \text{const}$  sind immer **Großkreise** und werden **Meridiane** genannt. Entlang eines Großkreises auf der Erdoberfläche entspricht  $1^\circ$  Intervall (z.B. in  $\Theta$ ) einer Entfernung von  $2\pi \cdot 6371 \text{ km} \cdot 1^\circ / 360^\circ = 111.2 \text{ km}$ <sup>77</sup>. Linien  $\Theta = \text{const}$  sind **Parallelen**. Das **geographische Koordinatensystem auf der Erde** ist ein sphärisches System, für das der **Nullmeridian** durch Greenwich in England geht. Außerdem wird im geographischen System nicht mit der Kolatitude, sondern

<sup>77</sup> Ein  $\Theta$ -Intervall von einer Minute ( $111.2 \text{ km} / 60 = 1.852 \text{ km}$ ) entspricht 1 Nautischen Meile (1 nm)

mit der **geographischen Breite**  $\theta$  gerechnet (**Latitude**), wobei  $\theta = 90^\circ - \Theta$  gilt. Die geographische Breite wird zwischen  $-90^\circ$  und  $+90^\circ$ , die geographische Länge zwischen  $0^\circ$  und  $+360^\circ$  angegeben. Der mittlere Erdradius ist  $r = r_E = 6371 \text{ km}$ <sup>78</sup>.

Wird die Latitude anstelle der Kolatitude verwendet, dann gelten mit den Beziehungen  $\cos \Theta = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \theta$  und  $\sin \Theta = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = -\sin \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) = -(-\cos \theta) = +\cos \theta$  für Gleichung (D.2)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \phi & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \cos \theta \sin \phi & \text{und } \phi &= \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \\ z &= r \sin \theta & \theta &= \sin^{-1} \left( \frac{z}{r} \right) \end{aligned}, \quad (\text{D.2})$$

mit  $-\pi/2 \leq \theta < \pi/2$ .

## D.2 Projektionen und Plotten von Daten und Karten

Die Darstellung von Daten in Form von Abbildungen oder "Präsentationsfolien" ist ein wichtiger Aspekt wissenschaftlicher Arbeit. Obgleich es keine festen Regeln für die Erstellung von Abbildungen gibt wird allgemein erwartet, dass die Darstellungen einfach und klar und möglichst die direkte Auswertung der Daten in der Abbildung erlauben sollen. Mögliche Attribute wie unterschiedliche Symbole, Strichtypen oder Farben werden gezielt eingesetzt und unnötige Komplexheit wird vermieden. Beamer-Plots für Vorträge müssen immer sehr einfach und übersichtlich sein und sollten sich auf die Darstellung weniger Zusammenhänge beschränken. Abbildungen in wissenschaftlichen Publikationen oder Berichten können etwas komplexer sein und mehr Informationen enthalten, solange sie übersichtlich und nachvollziehbar bleiben.

### D.2.1 Abhängige und unabhängige Parameter

Die Darstellung einer Messgröße (abhängige Variable) als Funktion der unabhängigen Variablen ist sinnvoll, um einen theoretischen, funktionalen Zusammenhang  $y = f(x)$  zu prüfen. Der theoretische Zusammenhang wird in der Regel als durchgezogene Linie direkt zu den Datenpunkten geplottet, die als Einzelmessungen (Symbole) dargestellt werden. Falls Mehrfachmessungen vorliegen, werden Fehlerbalken zusätzlich eingetragen. Standardplots sind lineare Projektionen von  $y$  und  $x$  auf die Bildebene (lin-lin, Beispiel in Abb.3.8). Um einen nichtlinearen Zusammenhang  $f(x)$  deutlich zu machen und eine einfache Auswertung zu ermöglichen, werden auch logarithmische (log) oder Potenzfunktion Projektionen verwendet (Abb.3.36).

<sup>78</sup> Eine bessere Approximation der Erdfigur wird durch ein Ellipsoid erreicht mit einem äquatorialen Radius  $r_e = 6378 \text{ km}$  und einem polaren Erdradius  $r_p = 6357 \text{ km}$ .

### D.2.2 Häufigkeitsplots

Die Darstellung der Verteilung einzelner Eigenschaften/Parameter kann als Häufigkeitsplot verstanden werden. Der Parameter variiert z.B. kontinuierlich mit Ort oder Zeit. Beispiel ist die Höhenverteilung der Erde in Abb.2.2. Um die Daten vergleichen zu können muss die "Ereignisdichte" in einem vorgegebenen Intervall, hier Höhenintervall, geplottet werden. Man spricht vom 'gridding' der Daten. Das Intervall muss mindestens so groß sein, dass eine signifikante Anzahl von Ereignissen (etwa  $> 10$ ) innerhalb der Intervalle auftritt.

Ein andere Form des Häufigkeitsplots ist die Magnitude-Häufigkeitsverteilung der Erdbeben (Gutenberg-Richter-Verteilung, Abb.6.20). Die Magnituden werden kumulativ geplottet,  $M \geq M_S$ , und häufig in einer log-lin (Ereignisrate über Magnitude) oder log-log Darstellung<sup>79</sup> (Ereignisrate über das seismische Moment) gezeigt.

### D.2.3 Projektion von Geodaten und Karten: Grundlagen

Die Kartendarstellung von Messgrößen (Parametern) als Funktion der geographischen Koordinaten bedarf einiger Erläuterungen. Ein Grundproblem besteht darin die Oberfläche der Erde auf die Bildebene so darzustellen, dass Verzerrungen möglichst gering sind. Das Gitter von gleichabständigen Längen- und Breitengraden auf der Kugel kann nicht auf die Bildebene aufgespannt werden, ohne dass dabei Verzerrungen entstehen. Die Richtungen und Flächen können nicht an jedem Punkt der Bildebene erhalten sein. Deshalb wurden Projektionen mit unterschiedlichen Eigenschaften entwickelt. Projektionen, die z.B. nur Richtungen an jedem beliebigen Punkt erhalten (Winkel und Formen), heißen **konformal** oder **orthorombisch**. Projektionen, die Flächen treu erhalten, heißen **equal area** oder **equivalent**. Zusätzlich existieren noch andere Projektionen.

Eine naheliegende Projektion ist die Erdoberfläche direkt auf die Bildebene zu projizieren. Das führt auf Karten, die kreisförmig sind und den Fokuspunkt innerhalb des projizierten Bereichs haben (Abb.D.4e,f). Das Ergebnis sind Halbkugel-Darstellungen. Azimuthale Projektionen eignen sich aber auch für die Abbildungen von lokalen und von polaren Bereichen.

Andere Projektionen bilden die Messpunkte auf der Erde zuerst auf die Oberfläche eines Zylinders oder Kegels ab. Im zweiten Schritt wird dann die Oberfläche des Zylinders oder Kegels auf die Bildebene aufgerollt. Die Zylinderprojektionen führen auf Karten mit rechteckigen Gittern, wohingegen die Kegelprojektionen auf Karten führen, deren Gitterlinien Kreissegmente sind. Die Erdoberfläche kann dabei die Zylinder- oder Kegel-

---

<sup>79</sup>Log-log Darstellungen von werden nicht unbedingt empfohlen und sollten nur in gut begründeten Fällen verwendet werden.

oberfläche tangieren oder aber durchschneiden. Im ersten Fall erhält man eine unverzerrte (**1 Tangente**, Abb.D.4a,c), im zweiten Fall zwei unverzerrte Gitterlinien (**2 Sekanten**, (Abb.D.4b,d). Die Projektion selbst wird z.B. durch den Blick- oder Projektionspunkt definiert. Im einfachsten Fall liegt dieser im Unendlichen (parallele Strahlen). Bei vielen verwendeten Projektionen liegt der Projektionspunkt jedoch woanders und die Projektionsgesetze sind nichtlinear. Die Kurzbeschreibung hier hat das Ziel einige wichtige Projektionstypen zu erwähnen und Beispiele für sinnvolle Anwendungen zu geben. Auf die entsprechenden Abbildungen im Skript wird verwiesen. Die Beschreibung folgt in weiten Teilen dem GMT Manual ([gmt.soest.hawaii.edu](http://gmt.soest.hawaii.edu) und [Wessel and Smith, 1991](#)).

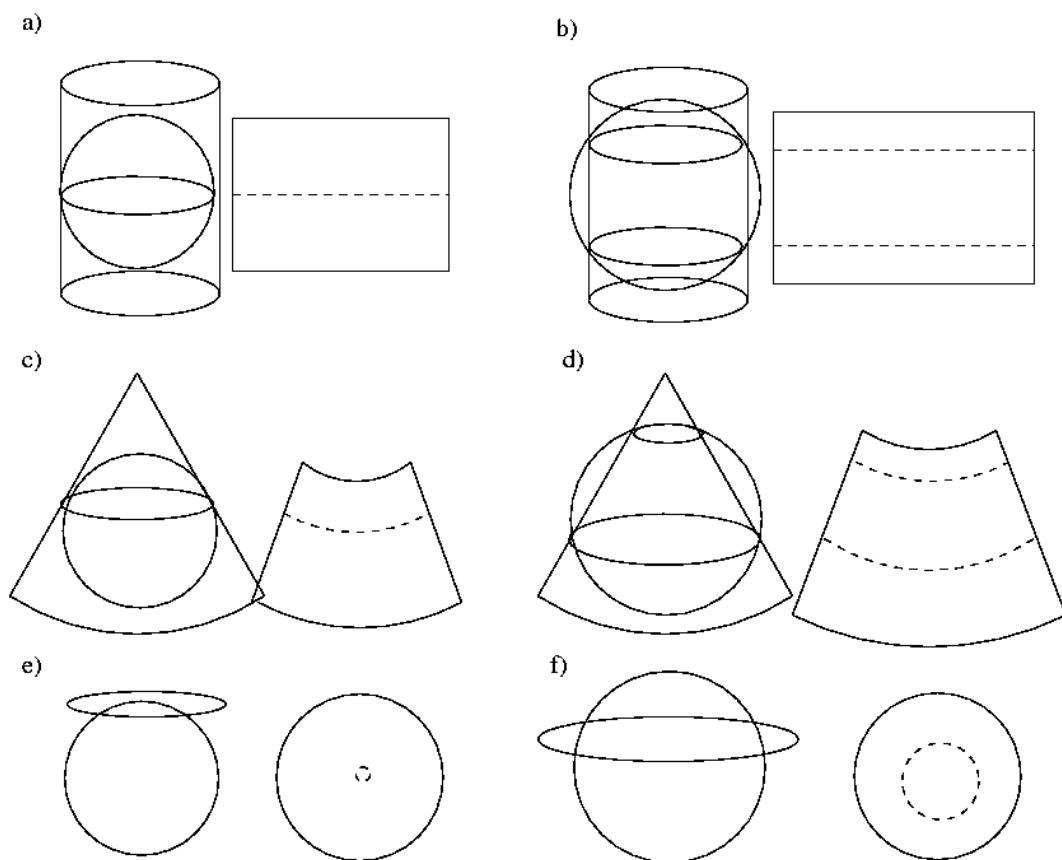


Abbildung D.4: Prinzipskizze zur Projektion der Erdoberfläche auf Zylinder (a,b), Kegel (c,d) oder Kreisflächen (e,f). Die Zylinder- und Kegelflächen werden auf der Papierebene aufgerollt. Je nachdem, ob die Erdoberfläche die Projektionsfläche berührt oder schneidet, erhält man eine oder zwei unverzerrte Projektionslinien (gestrichelt). Weit entfernt dieser Projektionslinien ist die Verzerrung am größten.

#### D.2.4 Azimuthale Projektionen und Erdkugel Darstellungen

Azimuthale (ebene) Projektionen sind z.B. die **Orthographische Projektion**, die **Lambert** (equal area, auch unter Equal Area Stereonet oder **Schmidt Netz** bekannt)



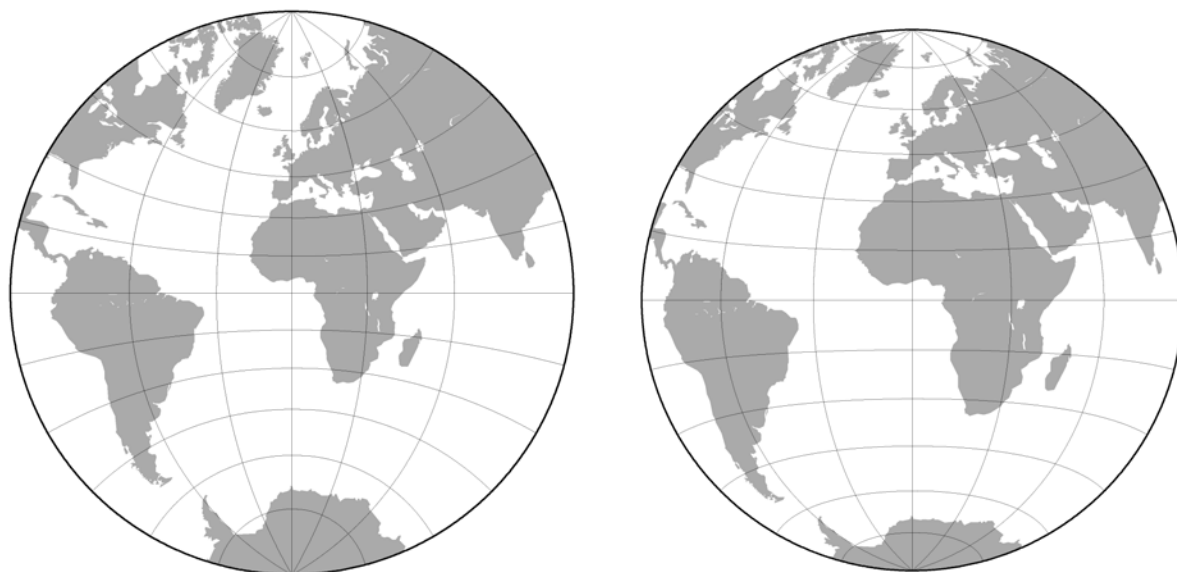


Abbildung D.5: **Links:** Stereographische Winkeltreue Projektion mit dem Projektionszentrum bei  $0^\circ/0^\circ$  (Wulff Netz). **Rechts:** Stereographische Flächentreue Projektion mit dem Projektionszentrum bei  $0^\circ/0^\circ$  (Schmidt Netz). Abbildungen wurden mit *GMT* erstellt.

und die **Stereographische Projektion** (conformal, auch Equal Angle Stereonet oder **Wulff Netz** genannt). Eine weiterer Typ ist die **Azimuthal Equal Distance Projektion**, bei der Entfernungen zum Projektionsmittelpunkt erhalten bleiben.

Die **Orthographische Projektion** war bereits vor 2000 Jahren in Ägypten und Griechenland bekannt. Es ist eine perspektivische Projektion der Erdkugel aus dem Unendlichen (parallele Projektionsstrahlen), wobei immer nur die beleuchtete Halbkugel abgebildet werden kann. Die Projektion ist weder conformal noch equal area. Richtungen und Flächen sind im Zentrum der Abbildung korrekt, Verzerrungen sind am Rand der Kugel besonders groß. Beispiele sind Abb.D.3 und Abb.3.4.

Die **Stereographic Equal Angle Projektion** ist conformal, d.h. Winkel zwischen Geraden bleiben erhalten. Wird das Projektionszentrum an den Pol gelegt, dann sind alle Meridiane Geraden und Parallelen sind konzentrische Kreise. Diese Projektion eignet sich besonders für Karten von Polarregionen wenn winkeltreue wichtig ist. Wird das Projektionszentrum bei  $0^\circ/0^\circ$  gelegt, dann erhält man das Stereographische Wulff Netz, das zur graphischen Konstruktion von Richtungen und Flächen in der Geologie und Seismologie verbreitet ist. Ein Wulff Netz Projektion ist in Abb.D.5 (links) und Abb.6.13 rechts gezeigt.

Die **Lambert Equal Area Projektion** wurde von dem elsässischen Mathematiker Lambert 1772 entwickelt. Sie ist flächentreu, d.h. Flächen bleiben an jedem Punkt der Abbildung erhalten. Hauptanwendungen sind das Mapping von Faults, Fault Planes

etc., da sich direkt relative Häufigkeiten auszählen lassen. Ein Projektionszentrum bei  $0^\circ/0^\circ$  führt auf das sogenannte Schmidt'sche Stereonet Projektion (Abb.D.5 rechts und Abb.6.13 links).

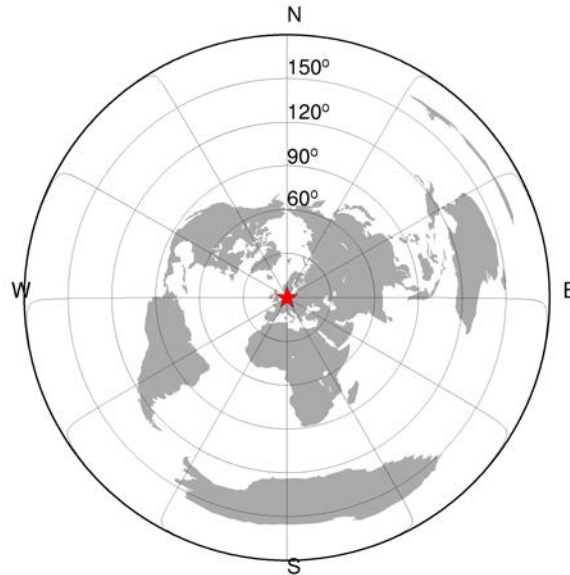


Abbildung D.6: Azimuthal Equal Distance Projektion zeigt konzentrische Entfernungskreise zur seismologischen Station Bad Segeberg in Norddeutschland (BSEG,  $10.3169^\circ/53.9353^\circ$ ) in  $30^\circ$  Entfernungs-Intervallen.

Die Azimuthale Equal Distance Projektion (Abb.D.6) bildet Entfernungen und Richtungen vom Projektionszentrum aus unverzerrt ab. Die Projektion wird z.B. verwendet, um schnell Entfernungen und Backazimuthwinkel von Erdbeben Epizentren relativ zu einer Station zu messen.

### D.2.5 Konische Projektionen und Regionalkarten

Konische Projektionen werden häufig für die Regionalkarten verwendet. Bekannt sind **Equidistant**, **Lambert** (konformal) und **Albers Projektion** (equal area).

Die **Equidistant conic projection** wurde bereits 150 A.D. von dem griechischen Philosophen Claudius Ptolemy beschrieben. Sie stellt einen Kompromiss zwischen conformal und equal area Projektionen und wird verwendet, um Atlaskarten kleiner Länder zu plotten. Ein Beispiel ist Abb.3.26.

Die konische **Albers Projektion** wurde 1805 von Albers entwickelt. Sie ist flächentreu und unverzerrt an den zwei Standard Parallelen und dem zentralen Meridian. Zwischen den Standard Parallelen ist die horizontale Skalierung zu klein, außerhalb zu groß. Die Skalierung entlang der Meridiane ist zwischen den Standard Parallelen zu groß und außer-

halb zu klein. Die Projektion wird für Regionalkarten mit großer Ost-West-Ausdehnung verwendet. Beispiel ist in Abb.3.18 gezeigt.

Die **konische Lambert Projektion** (ebenso seit 1772) ist nicht flächentreu aber konformal. Sie hat wie die Albers Projektion zwei unverzerrte Parallelen und einen unverzerrten Meridian in der Mitte der Abbildungen. Die Projektion wird ebenso für Regionalkarten mit großer Ost-West-Ausdehnung verwendet. Ein Beispiel ist Abb.3.24.

### D.2.6 Weltkarten; zylindrische und andere Projektionen

Die **Merkator Projektion** ist die am weitesten verbreitete zylindrische Projektion (konformale Projektion). Sie wird häufig zur Darstellung von Weltkarten benutzt. Z.B. wird ein Antipodenpunkt des Äquators als Projektionspunkt verwendet, so dass zwei Standardparallele bei  $\pm 45^\circ$  unverzerrt bleiben. In den Polarregionen sind die Verzerrungen aber besonders stark. Ein Beispiel ist in Abb.3.7. Merkator Projektionen werden auch in transverse (Zylinder ist EW orientiert, vgl. Abb.3.17) oder oblique Form verwendet (Zylinder ist schräg orientiert). Andere Zylinderprojektionen (Cassini, Miller, Basic, etc.) sind im GMT Technical Reference Book ([gmt.soest.hawaii.edu](http://gmt.soest.hawaii.edu), [Wessel and Smith, 1991](#)) beschrieben, die sich durch unterschiedliche Standard Parallelen und Meridiane unterscheiden.

Sonstige Projektionen für Weltkarten sind Mischformen der bisherigen Typen. Bekannt sind die **Mollweide** (Equal Area, entwickelt von dem deutschen Mathematiker Mollweide in 1805) und die **Hammer Projektion** (Equal Area, entwickelt von dem deutschen Mathematiker Ernst von Hammer in 1892). Die Projektionen vermindern die starken Verzerrung der zylindrischen Projektionen in den Polarregionen und sind deshalb eher zu empfehlen. Beispiele sind Abb.3.1 und 3.23 (Hammer).

Die **Winkel Tripel Projektion** wurde 1921 von dem deutschen Mathematiker Oswald Winkel entwickelt, um einen optimalen Kompromiss zwischen flächentreue, winkeltreue und äquidistanz zu erreichen. Ein Beispiel ist in Abb.3.12.

Die **transversale Merkator Projektion**, auch **Universal Transverse Merkator (UTM)** bezeichnet, ist eine weltweit gebräuchliche Projektion zur Darstellung von lokalen und regionalen Karten in kartesischen Koordinaten. Im Gegensatz zur Merkator Projektion liegt der Projektionszylinder senkrecht, also transversal, zur Erdachse. Die Erde wird in 60 Streifen um einen zentralen Meridian im Abstand von  $6^\circ$  zueinander eingeteilt. Jeder Streifen wird in NS Richtung in Zonen eingeteilt, die jeweils durch Buchstaben einheitlich definiert werden (Abb. D.7). Rechts- und Hochwert in den jeweiligen Zonen werden in Meter angegeben. Durch angehängte Buchstabenpaare werden für kleinräumige Anwendungen zusätzliche Planquadrate definiert, welche Unterzonen der

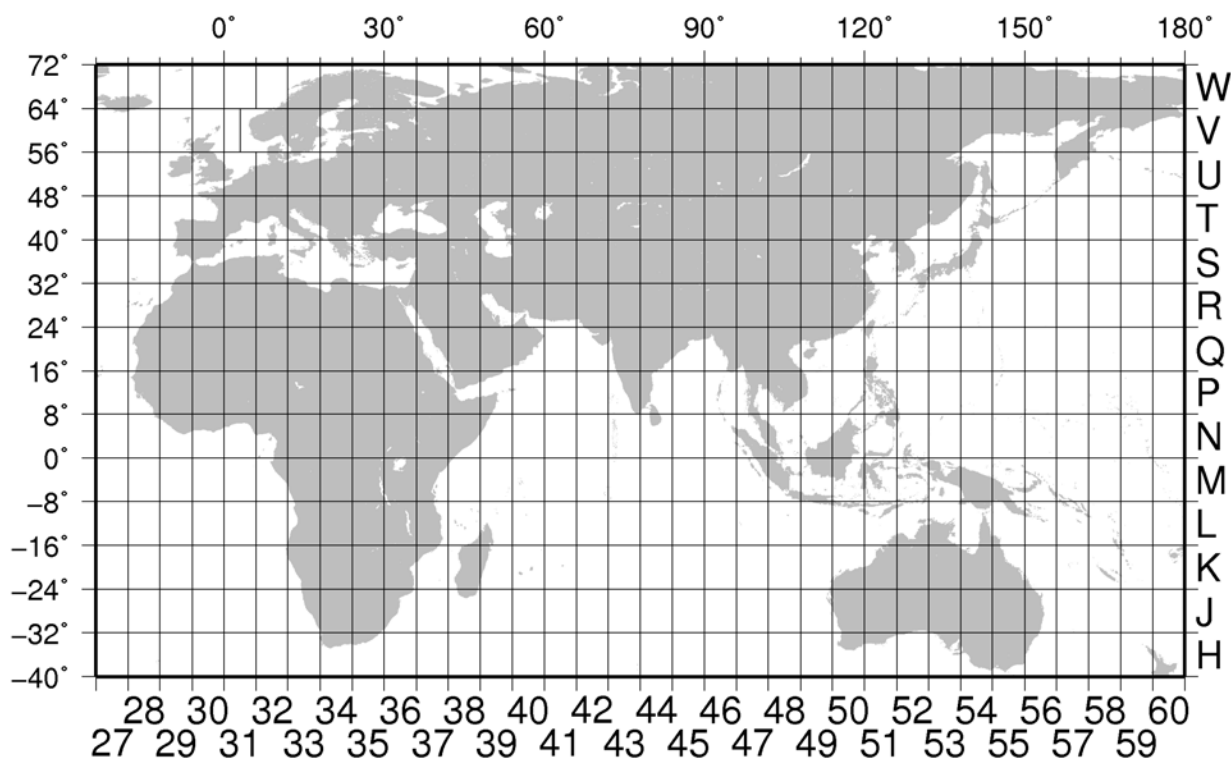


Abbildung D.7: Übersicht der UTM Zonen für Europa, Asien, Afrika und Australien. Z.B. liegt Berlin in der UTM Zone 33U, wobei die Ziffer 33 den Rechtswert des zentralen Meridian (False Easting da um 500 km versetzt, um positive Werte zu garantieren) des flächentreuen Streifens der Zylinderprojektion definiert, und der Buchstabe U den Abstand vom Äquator (Hochwert, bzw. False Northing da um 10.000 km versetzt, um positive Werte zu garantieren).

Größe 100 km x 100 km festlegen.

## E Schwere für ausgedehnte Körper; Beispiele

### E.1 Kugelförmige Erde mit homogener Dichte

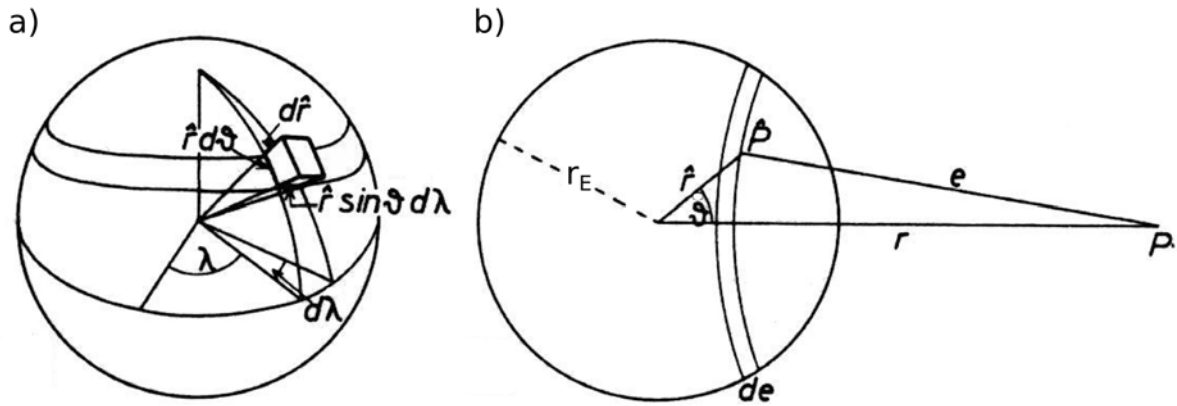


Abbildung E.1: Berechnung des Schwerepotenzials einer homogenen Kugel. a) Koordinaten und Volumenelement. b) Definition von  $e$  und  $de$ .

Die Problemgeometrie ist in Abb. E.1 gezeigt. Die Erde hat den Radius  $R = r_E$ , und der Aufpunkt  $P = X$  ist ausserhalb der Erde ( $r \geq r_E$ ). Das Gravitationspotenzial ist

$$W_b = -G_{EP} \int_V \frac{dV}{e} = -G_{EP} \int_0^{r_E} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\hat{r}^2 \sin \vartheta}{e} d\lambda d\vartheta d\hat{r} \quad . \quad (\text{E.1})$$

Aus  $e^2 = \hat{r}^2 + r^2 - 2\hat{r}r \cos \vartheta$  und  $\frac{de}{d\vartheta} = \frac{\hat{r}r \sin \vartheta}{e}$  oder  $\frac{\hat{r}ede}{r} = \hat{r}^2 \sin \vartheta d\vartheta$  folgt durch Substitution

$$W_b = -\frac{2\pi G_{EP}}{r} \int_0^{r_E} \hat{r} \left( \int_{r-\hat{r}}^{r+\hat{r}} de \right) d\hat{r} = -\frac{4\pi G_{EP}}{r} \int_0^{r_E} \hat{r}^2 d\hat{r} = -\frac{4\pi G_{EP} r_E^3}{3r} = -G_E \frac{m_E}{r} \quad (\text{E.2})$$

Aus der Integrationsgrenze  $\vartheta = 0$  wurde  $e = \sqrt{\hat{r}^2 - 2\hat{r}r + r^2} = \sqrt{(r - \hat{r})^2} = r - \hat{r}$  und aus  $\vartheta = \pi$  wurde  $e = \sqrt{\hat{r}^2 + 2\hat{r}r + r^2} = r + \hat{r}$ . Für die Radialkomponente der Gravitationsbeschleunigung folgt damit

$$b_r = -\frac{\partial W_b}{\partial r} = -G_E \frac{m_E}{r^2} \quad . \quad (\text{E.3})$$

Die Schwerebeschleunigung durch eine homogene, ausgedehnte Erde ist also im Aussenraum gleich der Beschleunigung durch eine Punktmasse  $m_E$ , die im Kugelmittelpunkt konzentriert ist. Im Skript wurde bereits erwähnt, dass sich dieses Ergebnis auf Kugeln mit inhomogener, aber radialsymmetrischer Dichteverteilung erweitern lässt.

Für den Fall eines Aufpunktes im Innern der Erde ( $r < r_E$ ) kann man analog vorgehen. Man integriert in zwei Schritten; der erste für  $\hat{r} \leq r$  von 0 bis  $r$  führt auf ein Ergebnis wie in (E.2), nur dass  $r_E$  durch  $r$  ersetzt wird. Der zweite für  $\hat{r} > r$  von  $r$  bis  $r_E$  muss neu integriert werden, nur dass jetzt die Integrationsgrenzen  $\hat{r} - r > 0$  bis  $\hat{r} + r$  sind. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
 W_b &= -G_E \rho \left[ \frac{4\pi r^2}{3} + \frac{2\pi}{r} \int_r^{r_E} \hat{r} \left( \int_{\hat{r}-r}^{r+\hat{r}} de \right) d\hat{r} \right] \\
 &= -G_E \rho \left[ \frac{4\pi r^2}{3} + \frac{2\pi}{r} \int_r^{r_E} 2\hat{r} r d\hat{r} \right] \\
 &= -G_E \rho \left[ \frac{4\pi r^2}{3} + \frac{2\pi r}{r} (r_E^2 - r^2) \right] = -2\pi G_E \rho \left( r_E^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad . \quad (\text{E.4})
 \end{aligned}$$

Für die Radialkomponente  $b_r$  erhält man dann

$$b_r = -\frac{\partial W_b}{\partial r} = -\frac{4}{3}\pi G_E \rho r \quad . \quad (\text{E.5})$$

Die Gravitationsbeschleunigung im Innern einer homogenen Erde ist im Mittelpunkt Null und steigt linear mit  $r$  an. In Kapitel 2 (Aufbau der Erde) wurde gezeigt, dass der Verlauf der Schwere im Erdkern in guter Näherung diesem linearen Gesetz folgt.

## E.2 Halbunendliche Platte

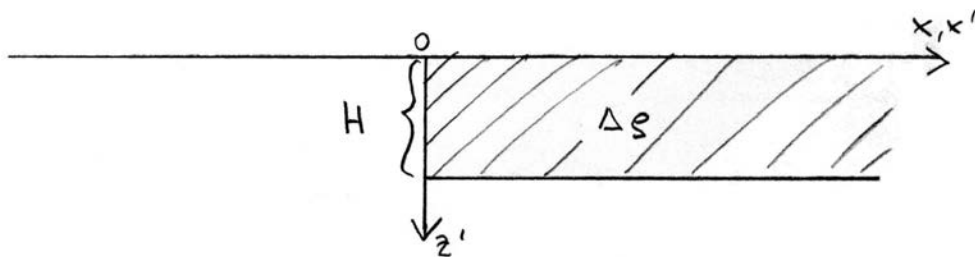


Abbildung E.2: Halbunendliche Platte der Dichte  $\Delta\rho$  und der Dicke  $H = h$ .

Die vertikale Schwerebeschleunigung  $b_z$  am Punkt  $X(x)$  durch eine halbunendliche Platte der Dicke  $h$  und Dichte  $\Delta\rho$  ist (Abb. E.2)

$$b_z = G_E \Delta\rho \int_0^h \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{z' dy' dx' dz'}{[y'^2 + (x - x')^2 + z'^2]^{3/2}} \quad . \quad (\text{E.6})$$

Die gestrichelten Koordinaten definieren die "Quellregion" (halbunendliche Platte), die ungestrichelten die "Empfängerkoordinaten" (hier nur  $x$ , da  $z = y = 0$ ). Die Integration



nach  $y'$  führt auf (z.B. Bronstein)

$$b_z = G_E \Delta \rho \int_0^h \int_0^\infty \frac{z' \frac{y'}{|y'|}}{\{(x-x')^2 + z'^2\} \sqrt{1 + \frac{\dots}{y'^2}}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} dx' dz' = 2G_E \Delta \rho \int_0^h \int_0^\infty \frac{z' dx' dz'}{\{(x-x')^2 + z'^2\}} .$$

Eine Stammfunktion für die Integration nach  $x'$  kann gefunden werden, wenn z.B. die Substitution  $u = x - x'$  mit  $dx' = -du$  verwendet wird. Die Integrationsgrenzen  $x' = 0$  und  $x' = \infty$  müssen entsprechend durch  $u = x$  und  $u = -\infty$  ersetzt werden, so dass

$$\begin{aligned} b_z &= 2G_E \Delta \rho \int_0^h \int_{-\infty}^x \frac{z' du}{u^2 + z'^2} dz' = 2G_E \Delta \rho \int_0^h \frac{z'}{z'} \tan^{-1} \frac{u}{z'} \Bigg|_{-\infty}^x dz' \\ &= 2G_E \Delta \rho \left[ \int_0^h \tan^{-1} \frac{x}{z'} dz' + \int_0^h \frac{\pi}{2} dz' \right] . \end{aligned}$$

Das zweite Integral kann direkt integriert werden, was auf  $\pi G_E \Delta \rho h$  führt. Für die Integration des ersten Integrales kann z.B.  $w = x/z'$  substituiert werden mit  $dz' = \frac{-x}{w^2} dw$ . Damit findet man (z.B. Bronstein)

$$\int_{w_1}^{w_2} \frac{-x \tan^{-1} w}{w^2} dw = \left\{ \frac{x}{w} \tan^{-1} w + \frac{x}{2} \ln \frac{1+w^2}{w^2} \right\} \Bigg|_{w_1}^{w_2} = \left\{ z' \tan^{-1} \frac{x}{z'} + \frac{x}{2} \ln \frac{z'^2 + x^2}{x^2} \right\} \Bigg|_0^h$$

Für  $z' = 0$  sind beide Summanden Null (z.B. l'Hopital). Das Ergebnis ist dann

$$b_z = G_E \Delta \rho \left[ 2h \tan^{-1} \frac{x}{h} + x \ln \frac{h^2 + x^2}{x^2} + \pi h \right] . \quad (\text{E.7})$$

Abb. E.3 zeigt Beispielkurven von (E.7) für  $\Delta \rho h = 50000 \text{ kg/m}^2$ .

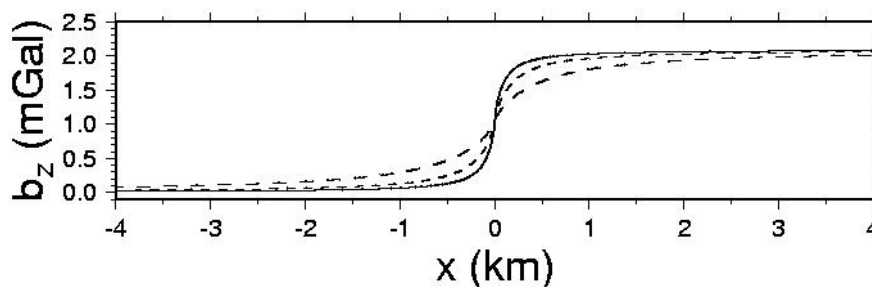


Abbildung E.3: Beispielkurven für  $\Delta \rho h = 50000 \text{ kg/m}^2$ ; (a)  $h = 200 \text{ m}$ ,  $\Delta \rho = 250 \text{ kg/m}^3$  (durchgezogen), (b)  $h = 400 \text{ m}$ ,  $\Delta \rho = 125 \text{ kg/m}^3$  (fein gestrichelt), (c)  $h = 1000 \text{ m}$ ,  $\Delta \rho = 50 \text{ kg/m}^3$  (grob gestrichelt).

## F Elektrische Polarisation

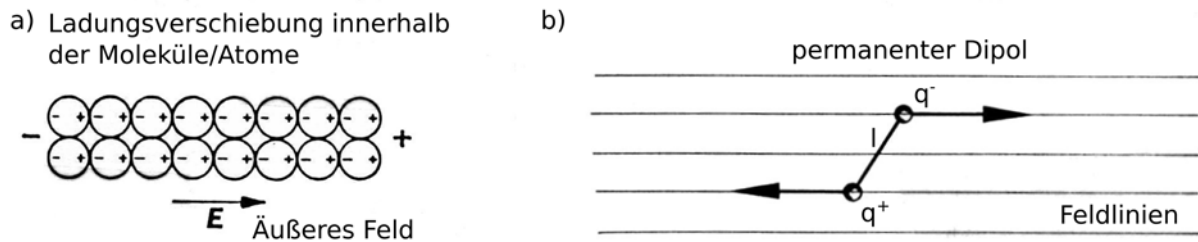


Abbildung F.1: Skizze zur Verschiebungs- (a) und Orientierungspolarisation (b). Das elektrische Dipolmoment ist  $p_e = ql$ .

In der Geoelektrik hat man es mit elektrischen Feldern in Gesteinen oder allgemein in Materie zu tun. Ein äußeres Feld bewirkt im Gestein eine messbare **Ladungsverschiebung** oder **elektrische Polarisation**. Die Polarisation in einer Gesteinsprobe kann in erster Näherung durch einen **elektrischen Dipol** beschrieben werden. Ein Dipolfeld entsteht zum Beispiel, wenn sich der positiv geladene Kern eines Atoms gegenüber der negativ geladenen Elektronenhülle verschiebt. Ein Mineral oder Gestein besteht aus vielen Atomen und Molekülen. Wenn jedes Atom dieselbe Ladungsverschiebung erfährt, dann bleibt in der Summe makroskopisch ein Polarisierungseffekt übrig, der einem einfachen Dipol entspricht. Man spricht von **Verschiebungspolarisation** (Abb. F.1a). Verschiebungspolarisation tritt immer auf, wenn Materie in ein elektrisches Feld eingebracht wird. Die Stärke der Polarisation hängt von der Materie oder dem Gestein ab und ist meistens viel kleiner als das erregende Feld.

Eine andere Form ist die **Orientierungspolarisation**, die entsteht wenn sich ein bereits vorhandener, permanenter Dipol im äußeren Feld ausrichtet (Abb. F.1b). Einige Moleküle (z.B. Wasser) sind permanente Dipole, da aufgrund ihres Molekülaufbaus die positiven und negativen Ladungen etwas gegeneinander verschoben sind. Ohne äußeres elektrisches Feld sind die Dipole ungeordnet, so dass makroskopisch kein Dipolmoment meßbar ist. Durch Einbringen in ein elektrisches Feld richten sich alle Dipolmomente parallel aus, und das Gestein verhält sich makroskopisch als ob ein zusätzlicher Dipol vorhanden wäre. Da Moleküle in der Regel schwerer und träger sind als einzelne Atome, ist die Orientierungspolarisation frequenzabhängig. Für sehr hochfrequente Wechselfelder können die Moleküle den Feldkräften nicht unmittelbar folgen, und die Orientierungspolarisation verschwindet.

Um die elektrische Polarisation makroskopisch zu beschreiben, benutzt man einen ähnlichen Formalismus wie bei den Magnetfeldern.  $p_e$  ist das elektrische Dipolmoment eines Molekül oder Atoms und  $P_e$  das Dipolmoment der Materie pro Volumen (spezifische Dipolmoment,  $P_e = dp_e/dV$ ).  $P_e$  wird auch **dielektrische Polarisation** genannt. Ohne äußeres Feld ist z.B.  $P_e = 0$ . Das meßbare Feld  $E$  ist immer die Überlagerung aus

dem äußeren und dem durch die Polarisation entstandenen Feld. Man führt eine zweite Feldgröße ein, die nur das "erregende elektrische Feld" repräsentiert, die **Verschiebungsdichte**  $\mathbf{D}$ <sup>80</sup>. Man sagt auch, dass  $\mathbf{D}$  nur durch freie Ladungen erzeugt wird, und  $\mathbf{E}$  durch freie und gebundene Ladungen. Im Vakuum gilt  $\mathbf{E} = \epsilon_0^{-1} \mathbf{D}$ . In Materie kommt ein weiterer Faktor  $\epsilon^{-1}$  hinzu. Die Größe  $\epsilon$  ist die dimensionslose (relative) **Dielektrizitätskonstante**. (vgl. Tabelle B.1).

Die dielektrische Polarisation in Gesteinen ist in vielen Fällen proportional zu  $\mathbf{D}$ ,

$$\mathbf{P}_e = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \mathbf{D} \quad . \quad (\text{F.1})$$

Das meßbare elektrische Feld  $\mathbf{E}$  ist die Überlagerung aus dem äußeren und induzierten Feld<sup>81</sup>,

$$\mathbf{E} = \epsilon_0^{-1} (\mathbf{D} - \mathbf{P}_e) = \epsilon_0^{-1} \epsilon^{-1} \mathbf{D}$$

oder gebräuchlicher

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad . \quad (\text{F.2})$$

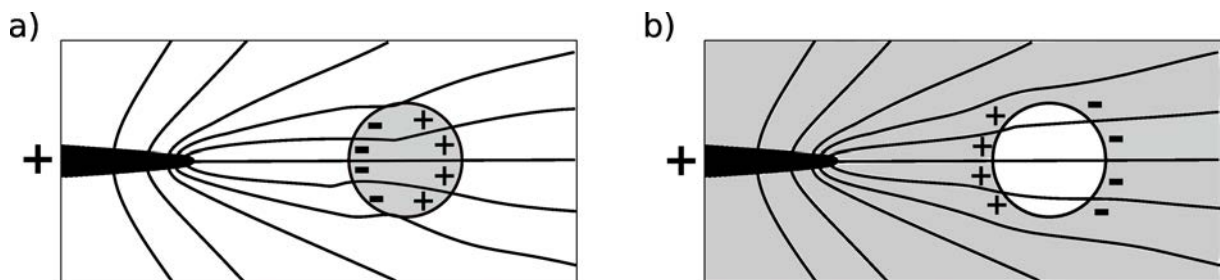


Abbildung F.2: (a) Eine dielektrische Kugel (grau) erfährt im inhomogenen Feld einer Punktladung eine Kraft in Richtung wachsender Feldstärke. Das induzierte Dipolfeld der Kugel ist in Richtung Punktladung negativ polarisiert, und die Feldlinien werden in die Kugel gedrückt. (b) Bei einer Gasblase in einer dielektrischen Flüssigkeit (grau) entsteht der umgekehrte Effekt.

Die (relative) Dielektrizitätskonstante ist größer oder gleich 1. Das erklärt, dass eine dielektrische Kugel im inhomogenen elektrischen Feld eine Kraft in Richtung wachsender Feldstärke erfährt (Abb. F.2).

<sup>80</sup>Vergleiche die magnetische Erregung  $\mathbf{H}$  beim Magnetfeld

<sup>81</sup> Es gibt eine vergleichbare Formel, die das  $B$ - und  $H$ -Feld in magnetisierbarer Materie miteinander verknüpft

Tabelle B.1:  $\epsilon$  für unterschiedliche Gesteine und Mineralien

Mineral	$\epsilon_r$	Mineral	$\epsilon_r$
Water (10° C)	80.36	Ice	3-4.3
Cassiterite	23	Hematite	25
Peridotite	8.6	Norite	61
Fluorite	6.2-6.8	Calcite	7.8-8.5
Quarz porphyry	14-49.3	Diabase	10.5-34.5
Rock salt	5.6	Gypsum	5-11.5
Quartz	4.2-5	Granite (dry)	4.8-18.9
Gneiss	8.5	Gabbro	8.5-40
Basalt	12	Sandstone (dry to moist)	4.7-12
Soil (dry to moist)	3.9-29.4	Clays (dry to moist)	7 - 43

## G Die Erdbebenmagnitude

Die Magnitude ist ein empirisch definiertes Maß für die relative Stärke eines Erdbebens im Vergleich zu einem Referenzbeben. Magnituden werden über empirische Beziehungen mit dem seismische Moment  $M_0$  verknüpft, was eine physikalisch definierte Größe für die Bebenstärke ist. Der Anhang gibt einen kurzen Überblick zu gebräuchlichen Magnitudenskalen. Eine ausführliche und komplette Beschreibung ist z.B. in [Bormann et al. \(2013\)](#).

### Die lokale Magnitude $M_L$ ( $\Delta < 5^\circ \approx 600 \text{ km}$ )

Die lokale Magnitude wurde 1935 von Richter als erste Magnitudenskala eingeführt.

$$M_L = \log \frac{a(\Delta)}{a_0(\Delta)} \quad , \quad (\text{G.1})$$

wobei  $a$  die Maximalamplitude der Horizontalkomponente (in  $10^{-6} \text{ m}$ ) eines Wood Anderson Torsionsseismographen ( $T_0 = 0.8 \text{ s}$ , Vergrößerung = 2800) und  $\Delta$  die Epizentralentfernung ist.  $a_0(\Delta)$  ist eine empirisch bestimmte Eichfunktion zur Korrektur des Effektes von unterschiedlichen Epizentralentfernungen  $\Delta$  auf die Amplituden. Mögliche Tiefenabhängigkeiten und Abstrahleffekte werden in der Eichfunktion nicht berücksichtigt. Die Lokalmagnitude ist nur definiert für Entfernungen unter 600 km Epizentraldistanz und für flache, krustale Beben.

### Die Oberflächenwellenmagnitude $M_S$ ( $15^\circ - 130^\circ$ )

Die von Gutenberg und Richter 1936 eingeführte Oberflächenwellenmagnitude ist definiert als

$$M_S = \log a(\Delta) + 1.656 \log(\Delta) + 1.818 \quad , \quad (\text{G.2})$$

wobei hier  $a$  die maximale Amplitude in der Oberflächenwelle mit Perioden zwischen 17 s und 23 s ist. Oberflächenwellen mit Perioden um 20 s erfahren wegen den physikalisch-geometrischen Eigenschaften der Lithosphäre die kleinste Abschwächung mit der Entfernung. Sie sind deshalb die Signale im Seismogramm mit den größten Amplituden. Von Vanek et. al. wurde 1962 die Beschränkung auf einen Periodenbereich aufgehoben durch

$$M_S = \log \left( \frac{a(\Delta)}{T} \right) + 1.66 \log(\Delta) + 3.3 \quad , \quad (\text{G.3})$$

wobei  $T$  die Periode (in s) zur maximalen Amplitude (in  $10^{-6} \text{ m}$ ) der Rayleigh-Welle auf der Vertikalkomponente ist. Die Oberflächenwellenmagnitude ist nur für Hypozentrumstiefen kleiner als 60 km in  $15^\circ$  bis  $130^\circ$  Entfernung definiert.

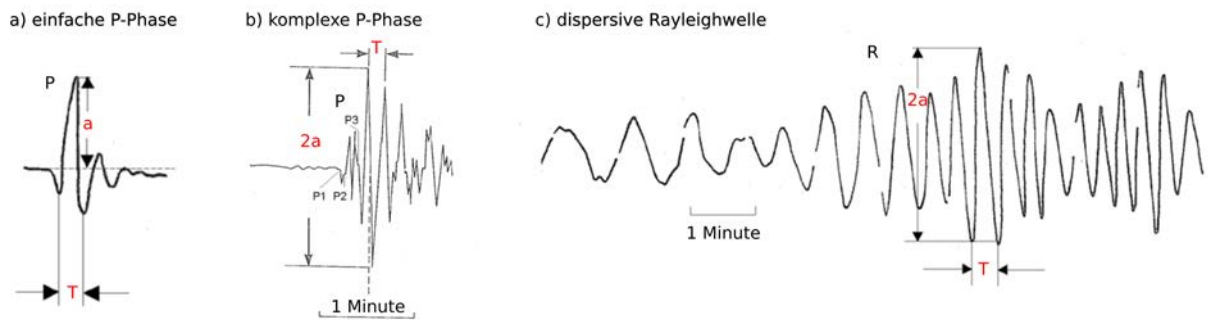


Abbildung G.1: Beispiele für die Ableitung von Maximalamplituden  $a$  und dominanten Perioden  $T$  für einfache (a) und komplexe langperiodische P-Wellen (b) und für disperse, langperiodische Rayleighwellen (c). (modifiziert aus [Bormann et al., 2013](#)).

### Die Raumwellenmagnitude $m_B$ und $m_b$ ( $5^\circ - 15^\circ$ )

Die Raumwellenmagnitude schließt sozusagen den Bereich zwischen  $5^\circ$  ( $600 \text{ km}$ ) und  $15^\circ$  und ist auch für tiefe Beben definiert. Die von Gutenberg und Richter 1956 eingeführte Raumwellenmagnitude  $m_B$  war nur für die damals üblichen Seismometer (Eigenperioden von 3-12 s) definiert:

$$m_B = \log\left(\frac{a(\Delta)}{T}\right) + Q(\Delta, h) \quad , \quad (\text{G.4})$$

wobei  $\frac{a}{T}$  das maximale Verhältnis der Bodenverschiebung (in  $10^{-6}m$ ) und der assoziierten Periode (in Sekunden) ist, die in den ersten 10 Sekunden des P-, PP- oder S-Wellenzuges gemessen wird (vgl. Abb.G.1). Verwendet man kurzperiodische Seismometer (1 s Eigenperiode), dann beschränkt man sich auf die ersten 5 s des P-Wellenzuges und nennt die Magnitude dann  $m_b$ .

### Die Momentmagnitude

Die verschiedenen Magnitudenskalen sollten von der ursprünglichen Intention her dieselben Werte für ein und dasselbe Ereignis liefern. Das ist allerdings von vornherein nicht erfüllbar, da Magnituden die abgestrahlte seismische Energie in verschiedenen Frequenzbändern widerspiegeln. Deshalb hat auch jede Magnitudenskala einen oberen Sättigungswert. Die von Kanamori 1977 eingeführte Momentmagnitude  $M_W$  soll das physikalische seismische Moment  $M_0$  (in  $\text{dyn} \cdot \text{cm} = 10^{-7} \text{ Nm}$ ) mit der Magnitude verbinden.

$$M_W = \frac{2}{3} \log M_0 - 10.7 \quad (\text{G.5})$$

In Abb. G.2 ist die Beziehung zwischen den Magnitudenskalen dargestellt.



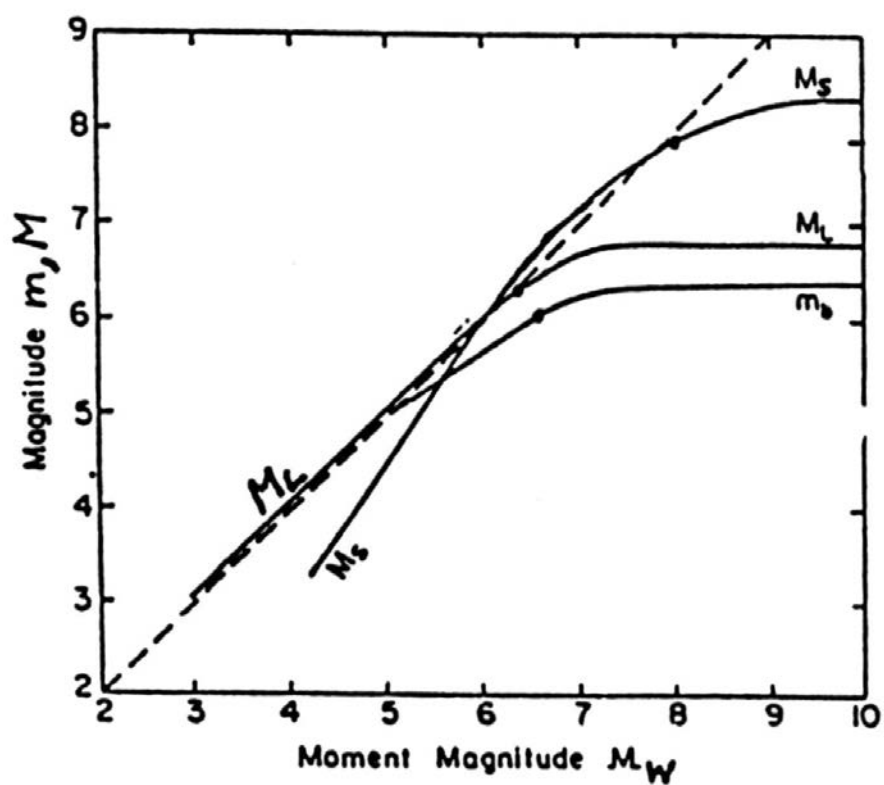


Abbildung G.2: Beziehung zwischen den den Magnitudenskalen  $M_S$ ,  $M_W$ ,  $M_L$  und  $m_b$  (von W. Brüstle, pers. Mitteilung. Vergleiche auch [Bormann et al., 2013](#)).

## H Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Das Material basiert auf Wessel (2000), Kapitel 1 und Kuchling (1984).

### H.1 Grundlagen der Statistik

#### H.1.1 Mittelwert und Varianz der Messungen

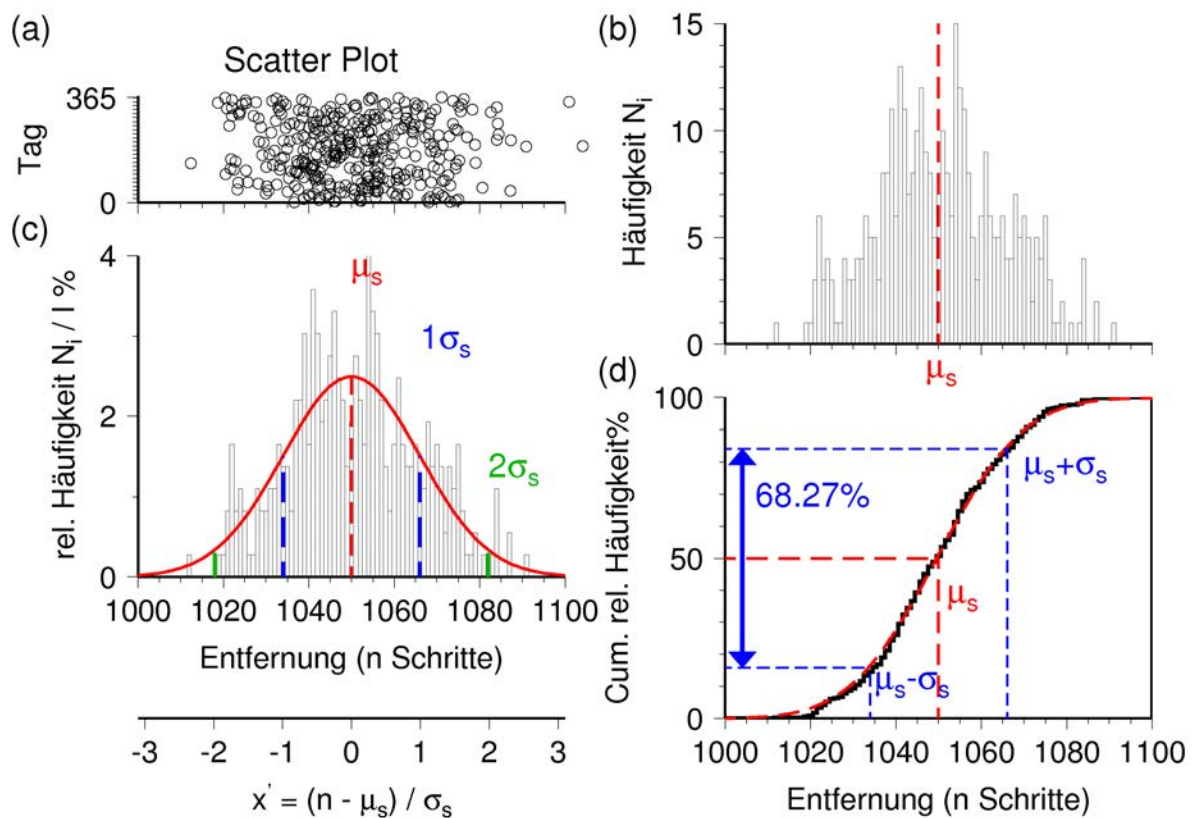


Abbildung H.1: (a) Mögliches Ergebnis der Auszählung von Gauß zur Messung der Schritte zwischen Elternhaus und Carolinum in Braunschweig in 1794. (b) Häufigkeitsplot (Anzahl  $N_i$  der Tage, an denen  $n$  Schritte gezählt wurden). (c) Relative Häufigkeit  $N_i/I$ , mit  $I = 365$  Tage. Zusätzlich eingezeichnet ist die Normalverteilung als Funktion von  $n$  oder als Funktion der dimensionslosen Variable  $x' = (n - \mu_s)/\sigma_s$ . Der Mittelwert ist  $\mu_s = 1050$  und die Standardabweichung ist  $\sigma_s = 16$ . (d) Kumulative relative Häufigkeit. Im Intervall  $[-\infty, \mu_s]$  und  $[\mu_s, \infty]$  liegen jeweils 50% aller Messungen. Im Intervall  $[\mu_s - \sigma_s, \mu_s + \sigma_s]$  liegen 68.27% aller Messungen.

Im Jahre 1794 hat der 17-jährige Schüler Carl Friedrich Gauß die **Normalverteilung** und die **Methode der kleinsten Quadrate (Least Squares)** entdeckt. Als Daten-

grundlage diente ihm vermutlich die Entfernung zwischen seinem Elternhaus und dem Carolinum, eine Hochschule in Braunschweig, die er täglich in Einheiten von zurückgelegten Schritten abzählte ( $n_i$  etwa 1050) (Mania, 2008). Als Gauß seine Messreihe in ein Diagramm auftrug, normiert durch die Gesamtzahl  $I$  aller Messungen, zeichneten diese eine Glockenkurve nach (Gauß'sche Glockenkurve, Abb. H.1), die durch die Normalverteilung beschrieben wird,

$$p(n) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{n - \mu_s}{\sigma_s} \right)^2} \quad \text{oder} \quad p(x') = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x')^2}{2}} \quad \text{mit} \quad x' = \frac{n - \mu_s}{\sigma_s}. \quad (\text{H.1})$$

$\mu_s$  ist die **zentrale Lokation** und  $\sigma_s$  die **Standardabweichung** der Verteilung<sup>82</sup>. Die Normierungs-Konstante in (H.1) sorgt dafür, dass die Fläche unter der Kurve in Abb. H.1 gerade Eins wird.

Die **Varianz**  $\sigma_s^2$  der Population ist die Summe der quadratischen Abweichung von der zentralen Lokation, und für große  $I$  ("unendlich" viele Messungen) gilt

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (n_i - \mu_s)^2 \quad . \quad (\text{H.2})$$

Gauß hat 1794 gefordert, dass die Summe der quadratischen Abweichung minimal werden soll. Das Minimum der Funktion  $\sigma_s^2 = f(\mu_s)$  wird durch Nullsetzen der ersten Ableitung bestimmt,

$$\frac{df(\mu_s)}{d\mu_s} = \frac{-2}{I} \sum_{i=1}^I (n_i - \mu_s) = \frac{2}{I} \left( I\mu_s - \sum_{i=1}^I n_i \right) = 0$$

und damit  $\mu_s = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I n_i \quad .$

Hat man in einem "Mess-Sample" nur eine geringe Zahl von Messungen gemacht, dann wird die zentrale Lokation der Population über den Mittelwert  $\bar{n}$  des Samples approximiert,

$$\mu_s \approx \bar{n} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I n_i \quad \text{und für mit } w_i \text{ gewichtete Daten} \quad \bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^I w_i n_i}{\sum_{i=1}^I w_i} \quad . \quad (\text{H.3})$$

Bei der Ableitung der Varianz aus dem Sample muss mit  $I - 1$  normiert werden, da  $\bar{n}$  nicht unabhängig von den Messungen ist und sich dadurch die Zahl der Freiheitsgrade

<sup>82</sup> Wird die Normalverteilung über die dimensionslose Variable  $x' = (n - \mu_s)/\sigma_s$  aufgetragen (Abb. H.1b), dann ist der Mittelwert 0 und die Standardabweichung gerade 1. Die Darstellung in Standardseinheiten gilt universell für viele unterschiedliche fehlerbehaftete Messungen.

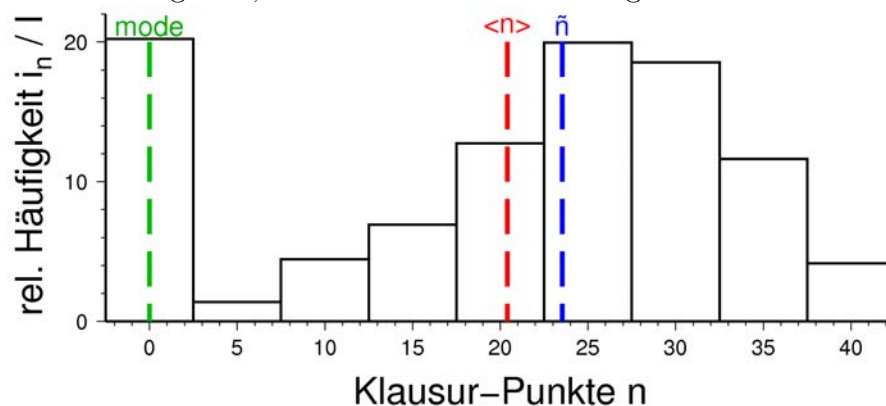
um Eins verringert,

$$\sigma_s^2 \approx s_s^2 = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I (n_i - \bar{n})^2 = \dots = \frac{I \sum_{i=1}^I n_i^2 - \left( \sum_{i=1}^I n_i \right)^2}{I(I-1)} . \quad (\text{H.4})$$

**Box H.1.1: Median und Mode:** Die absolute Abweichung des Messwerts sei  $|n_i - \tilde{n}|$ . Für das Minimum der Summe der absoluten Abweichung gilt ( $L_1$ -Norm)

$$\frac{d}{d\tilde{n}} \left( \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I |n_i - \tilde{n}| \right) = \frac{-1}{n} \left( \sum_{i=1}^I \frac{|n_i - \tilde{n}|}{n_i - \tilde{n}} \right) = 0 .$$

Der Summand kann nur  $\pm 1$  oder 0 werden. Eine Lösung gibt es nur, wenn die Hälfte aller  $n_i$  kleiner als  $\tilde{n}$  (ergibt -1) und die andere Hälfte größer  $\tilde{n}$  ist (ergibt +1). Die zentrale Lokation  $\tilde{n}$  wird als **Median** der Population bezeichnet. Der **Mode** einer Verteilung gibt hingegen den Messwert an, der am häufigsten auftritt. Während Mittelwert und Median immer eindeutig sind, kann der Mode mehrdeutig sein.



Die Abbildung zeigt die Verteilung der Klausurpunkte zwischen 2006 und 2011 (360 Klausuren). Eingezeichnet sind Mittelwert  $\langle n \rangle$ , Median  $\tilde{n}$  und Mode. Da die Gruppe der Null-Punkte-Schreiber groß ist (zweiter Versuch nur nach Durchfallen erlaubt) liegt der Mode bei 0. Der Mittelwert wird durch die unsymmetrische Verteilung zu kleineren Punktzahlen gezogen, während der Median ein bessere Aussage über die zentrale Lokation der Verteilung angibt. Der Median gilt daher als **robuster Schätzwert**.

Die **absoluten Fehler** einer Meßgröße, z.B.  $\delta n$ , werden i.d.R. durch die Angabe des  $1\sigma_s$  oder  $1s_s$  Intervalls um den Messwert angegeben. Im Fall unseres fiktiven Experiments einer Einzelmessung (Entfernungsmessung durch Schritte) entspräche das

$$n = \bar{n} \pm \delta n = 1050 \pm 16 \text{ Schritte} .$$

Alternativ zum mittleren absoluten Fehler  $\delta n$  kann der **relative Fehler**  $\delta n / \bar{n}$  angegeben

werden,

$$n = 1050(1 \pm 0.015) \text{ Schritte.}$$

Wichtiger als der **mittlere Fehler der Einzelmessung** ist der **mittlere Fehler des Mittelwertes** des Samples. Er ist ein Maß für die Unsicherheit des berechneten Mittelwertes  $\bar{n}$  und bestimmt den Vertrauensbereich, innerhalb dessen der wahre Wert  $\mu_s$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 68.27% liegt (oder entsprechend 95.45% oder 99.73% bei Angabe von 2 oder  $3\sigma_s$ ). Für die Varianz des Mittelwertes gilt (z.B. Kuchling, 1984)

$$(\delta\bar{n})^2 = s_{s\bar{n}}^2 = \frac{s_s^2}{I} \quad \text{und} \quad \delta\bar{n} = \frac{s_s}{\sqrt{I}}.$$

Für kleine  $I$  ( $< 30$ ) müssen Korrekturwerte berücksichtigt werden (z.B. Kuchling, 1984). Generell gilt, dass der Fehler des Mittelwertes aus einer endlichen Anzahl von Messungen immer kleiner wird, je mehr Messungen  $I$  zur Verfügung stehen. Die Standardabweichung des Mittelwertes nimmt mit dem Faktor  $1/\sqrt{I}$  gegenüber der Standardabweichung der Einzelmessung ab.

**Box H.1.1: Kovarianz und Korrelation:** Wir gehen davon aus, dass zwei Größen  $x$  und  $y$  gemessen werden, z.B. Druck und Wassertiefe, oder die Magnitude eines Bebens und die Wiederkehrzeit seit dem letzten Beben. Die Varianzen von  $x$  und  $y$  sind

$$s_{sx}^2 = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x}) \quad \text{und} \quad s_{sy}^2 = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y}).$$

Die **Kovarianz** kann analog definiert wie

$$s_{sxy}^2 = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

Wenn  $x$  und  $y$  unterschiedliche Einheiten haben ist die Interpretation von  $s_{sxy}^2$  schwierig. Dann wird die Kovarianz durch die Wurzel der Einzelvarianzen normiert, was auf den **linearen Korrelationskoeffizienten** führt wie

$$r = \frac{s_{sxy}}{s_{sx}s_{sy}}.$$

Der Korrelationskoeffizient liegt immer zwischen  $-1$  und  $+1$ . Für  $|r| = 1$  korrelieren  $x$  und  $y$  stark. Ein Beispiel sind Punktepaare, die eine Gerade definieren. Für  $|r| \approx 0$  sind die zwei Datenreihen (linear) unkorreliert. Ein Beispiel für  $r = 0$  sind Punktepaare, die einen perfekten Kreis definieren.

Unsere gesuchte Größe sei die Distanz  $d$ . Wenn die Distanz durch zwei unabhängige Entfernungsmessungen bestimmt wird, z.B. in Nord- und in Ostrichtung, dann geht es um die Frage, wie sich Fehlergrößen der nördlichen und östlichen Entfernung fortpflanzen. Im allgemeinen Fall soll  $d$  von mehreren Parametern abhängen,  $d = d(x_1, x_2, \dots, x_j)$ . Der Fehler der Distanz errechnet sich dann aus den mittleren Fehlern des Mittelwertes der einzelnen Messgrößen,  $\delta\bar{x}_j$ , über die **Gauß'sche Fehlerfortpflanzung** wie

$$\delta\bar{d} = \left[ \left( \frac{\partial d}{\partial x_1} \delta\bar{x}_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial d}{\partial x_2} \delta\bar{x}_2 \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial d}{\partial x_j} \delta\bar{x}_j \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{H.5})$$

Spezialfälle aus (H.5) sind die Berechnung des Fehlers einer **algebraischen Summe** von Messgrößen (z.B. Kuchling, 1984),

$$d = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_jx_j \quad \text{mit} \quad \delta\bar{d} = [(a_1\delta x_1)^2 + (a_2\delta x_2)^2 + \dots + (a_i\delta x_j)^2]^{1/2}$$

oder eines **Potenzproduktes** der Messgrößen,

$$d = x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + \dots + x_j^{a_j} \quad \text{mit} \quad \frac{\delta\bar{d}}{\bar{d}} = \left[ \left( a_1 \frac{\delta x_1}{\bar{x}_1} \right)^2 + \left( a_2 \frac{\delta x_2}{\bar{x}_2} \right)^2 + \dots + \left( a_i \frac{\delta x_j}{\bar{x}_j} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Die Messgrößen, die mit höherer Potenz eingehen, haben einen besonders großes Gewicht in der Fehlerfortpflanzung.

Ein Beispiel ist die Messung der Schwere  $g$  aus der Periode  $T$  eines Massependels der Länge  $l$ . Für  $g$  und  $\delta g$  gilt

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \quad \text{und} \quad \frac{\delta g}{\bar{g}} = \left[ \left( \frac{\delta l}{\bar{l}} \right)^2 + \left( 2 \frac{\delta T}{\bar{T}} \right)^2 \right]^{1/2}$$

### Größtfehler des Funktionswertes:

In Gleichung (H.5) ist berücksichtigt, dass sich die Fehler der Einzelgrößen zum Teil kompensieren können. Das ist sinnvoll, wenn alle Einzelgrößen voneinander unabhängig sind und genügend Wiederholungsmessungen vorliegen. Liegen allerdings nur wenige Wiederholungsmessungen vor oder muss der mittlere Fehler des Mittelwertes der Einzelmessung gar abgeschätzt werden, dann berechnet man den Größtfehler des Funktionswertes aus (z.B. Kuchling, 1984)

$$\delta\bar{d} = \left| \frac{\partial d}{\partial x_1} \delta\bar{x}_1 \right| + \left| \frac{\partial d}{\partial x_2} \delta\bar{x}_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial d}{\partial x_j} \delta\bar{x}_j \right|. \quad (\text{H.6})$$

Wieder können vereinfachte Formeln entsprechend für die algebraische Summe oder Potenzprodukte von Messgrößen abgeleitet werden.



## H.2 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ein sogenannter "Frequentist" definiert Wahrscheinlichkeit über die relative Häufigkeit.  $N$  sei die Gesamtzahl aller möglichen Ausgänge (**possibilities**) eines Experiments. Im Fall von Abb. H.1 die mögliche Anzahl der gemessenen Schritte, also z.B.  $n$  zwischen [1000, 1100]. Im Fall der Box H.1.1 die Klausurpunkte zwischen 0 und 40. Als **Ereignis**  $X$  wird eine Untermenge der Möglichkeiten im Intervall  $[x'_a, x'_b]$  definiert. Z.B. sei  $n$  zwischen [1034, 1066], oder eine zufällig gegriffene Klausur aus dem Stapel aller Klausuren hat eine Punktzahl im Intervall [30, 40]. Ist  $N_X$  die Summe (das Integral) der Häufigkeiten im Intervall  $[x'_a, x'_b]$  und  $N$  die Gesamtzahl der Messungen (decken das Intervall der möglichen Ausgänge ab, z.B. alle Klausuren, oder die 365 Messergebnisse aus Abb. H.1), dann ist die Wahrscheinlichkeit für Ereignis  $X$ <sup>83</sup>

$$p_c(X) = \frac{N_X}{N} \quad . \quad (\text{H.7})$$

Die Wahrscheinlichkeit in (H.7) ist als relative Häufigkeit definiert. Ist  $x'_a = -\infty$  und  $x'_b = \infty$  ( $x'$  soll hier die um  $\mu_s$  symmetrisch zentrierte, dimensionslose Variable sein), d.h.  $X$  überspannt den gesamten Bereich aller Möglichkeiten, dann ist  $N_X = N$  und damit  $p(-\infty < x' < \infty) = 1$ . Definiert  $\tilde{X}$  ein komplementäres Ereignis zu  $X$  (**NOT**  $X$ ), dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis  $X$  eintritt oder auch nicht eintritt

$$p_c(X) + p_c(\tilde{X}) = 1 \quad . \quad (\text{H.8})$$

Wahrscheinlichkeiten liegen generell immer zwischen  $0 \leq p_c \leq 1$ .

Ein sogenannter "Probabilist", oder auch *Bayesist* oder "Subjectivist", sieht Wahrscheinlichkeit als "degree of belief" an. Eine Wahrscheinlichkeit kann auch ohne genügend viele Beobachtungen spezifiziert (subjektiv oder auf Basis anderer Informationen) und in einer Vorhersage verwendet werden. Während ein *Frequentist* sauber zwischen Statistik, Wahrscheinlichkeit und der Entscheidungstheorie trennt, versucht ein *Bayesist* diese zu vereinigen. Das Klausurbeispiel in Box H.1.1 kann als Beispiel dienen. Der Häufigkeitsbasierte Ansatz erlaubt keine Abschätzung für den einzelnen Studierenden die Wahrscheinlichkeit für die erwartete eigene Note anzugeben. Dazu müsste er, was nicht möglich ist, die Klausur mehrfach mitgeschrieben haben und dann, unter der Annahme, dass die eigene Lernkurve flach und die Klausur unverändert ist, die relative Häufigkeit für ein gegebenes Notenintervall ausrechnen. Ein *Bayesist* würde a priori eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die eigene Leistung im Vergleich zur Gesamtgruppe abschätzen, z.B. auf Basis aller bisher geschriebenen Zensuren in anderen Fächern, und diese dann mit der Statistik der hiesigen Klausur verknüpfen, um seine Wahrscheinlichkeit für ein "gutes Event" zu bestimmen.

<sup>83</sup> Falls alle möglichen Ausgänge gleich wahrscheinlich sind, wie z.B. beim Würfel, dann vereinfacht sich die Definition auf den Anteil des Ereignisses an den Möglichkeiten

## H.3 Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktionen

### Normalverteilung:

Die relative Häufigkeit in Abb. H.1 kann als eine diskrete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion interpretiert werden. Die Glockenkurve der Gleichung (H.1) ist entsprechend eine kontinuierliche **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion**  $p(x')$  oder  $p(t')$ <sup>84</sup>. Die Fläche unter einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion muss immer 1 sein,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t') dt' = 1.$$

Die kumulative Wahrscheinlichkeit  $p_c$  einen Messwert in einem gegebenen Intervall zu erhalten wird nach (H.7) über die Integration der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion berechnet. Die **kumulative Wahrscheinlichkeit** eine Messung kleiner als  $t'_b$  zu erhalten ist

$$p_c(t' \leq t'_b) = \int_{-\infty}^{t'_b} p(t') dt' = \dots = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{t'_b}{\sqrt{2}} \right) \right), \text{ mit } \operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-(x')^2} dx'.$$

Die Funktion  $\operatorname{erf}(u)$  heißt **Fehlerfunktion (Error function)**. In Abb. H.1d ist  $p_c(x')$  nach obiger Gleichung geplottet. Die Wahrscheinlichkeit den Messwert  $t'$  im Intervall zwischen  $t'_a$  und  $t'_b$  zu finden ist damit

$$\begin{aligned} p_c(t'_a \leq t' \leq t'_b) &= \int_{t'_a}^{t'_b} p(t') dt' = \int_{-\infty}^{t'_b} p(t') dt' - \int_{-\infty}^{t'_a} p(t') dt' \\ &= p_c(t' \leq t'_b) - p_c(t' \leq t'_a) = \frac{1}{2} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{t'_b}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{t'_a}{\sqrt{2}} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

Aus (H.9) ergibt sich für die Normalverteilung und das Intervall  $\mu_s \pm 3\sigma_s$  ein  $p_c = 0.9973$ , d.h. 99.73% aller Messwerte werden in diesem Intervall erwartet. Entsprechend erwartet man im Intervall  $\mu_s \pm 2\sigma$  95.45% und im Intervall  $\mu_s \pm 1\sigma$  noch 68.27% aller Messungen (vgl. Abb. H.1b).

Die Normalverteilung wird für viele Fragestellungen herangezogen. Beispiele sind das Auftreten eines Starkbebens nach dem letzten Beben an dieser Verwerfung, die Verteilung von Korngrößen eines Minerals, oder die Verteilung der elastischen Module für unterschiedliche Proben desselben Gesteins.

### Binominalverteilung:

Die Binominalverteilung ist eine diskrete Verteilungsfunktion für die Vorhersage der

<sup>84</sup>  $t'$  definiert eine dimensionslose Zeit,  $x'$  einen dimensionslosen Ort

Wahrscheinlichkeit, dass  $n$  Ereignisse eintreten bei  $N$  Versuchen, wenn jedes Ereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit hat (z.B. Wessel, 2000). Die Normalverteilung ist für große  $N$  eine gute Näherung der Binomialverteilung.

### **Lognormalverteilung:**

Viele Datensätze zeigen eine unsymmetrische Verteilung mit einem stark verzerrten, langen "tail" (vgl. Box H.1.1). Das tritt vor allem auf wenn die Fehler von Produkten und nicht von Summen abhängen. Der Logarithmus der Daten ist dann häufig normalverteilt. Dann arbeitet man gerne mit dem Logarithmus der Parameter und einer Normalverteilung, wobei Ergebnisse wie Standardabweichung oder Mittelwert nach der Rechnung wieder rücktransformiert werden.

### **Poisson- und Exponentialverteilung:**

Die Poissonverteilung approximiert die Binomialverteilung für große  $N$  und eine kleine Wahrscheinlichkeit des Einzelereignisses, d.h. für sogenannte seltene Ereignisse. Beispiele sind Starkbeben, Vulkanausbrüche, Überschwemmungen, magnetische Polwechsel, oder auch der radioaktive Zerfall.

$$p_c(n \pm 0.5) = \frac{\mu_s^n e^{-\mu_s}}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{H.10})$$

wobei  $\mu_s$  der Erwartungswert im Zeitintervall  $[0, t]$  (und hier auch gleichzeitig Varianz), und  $n$  die Anzahl der "events" ist (ein Ereignis sind hier  $n$  events, z.B.  $n$  Zerfälle eines radioaktiven Stoffs). Gleichung (H.10) ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl  $n$  der events. Die Wahrscheinlichkeit für  $n$  events (für Intervall  $n-0.5, n+0.5$ ) kann direkt berechnet werden. Wird (H.10) von  $n = 0$  bis  $n = \infty$  aufsummiert, ist die kumulative Wahrscheinlichkeit 1. Für große  $\mu_s$  (häufige Ereignisse) approximiert (H.10) die Normalverteilung.

Häufig interessiert die Frage für eine vorgegebene Anzahl von Ereignissen, z.B.  $n = 0$  (kein Ereignis) oder  $n = 1$  (ein Ereignis), die Zeit  $t$  als Variable einzuführen. Man setzt  $\mu_s = \lambda t = t/\tau$  an, wobei  $\lambda$  die "Zerfallsrate" und  $\tau$  die mittlere Wiederkehrzeit des Ereignisses ist. Gleichung (H.10) kann dann als kumulative Wahrscheinlichkeit für festgehaltenes  $n$  und die Zeit  $t$  (absolut) als Parameter der kontinuierlichen Verteilung angesehen werden.  $t = 0$  ist z.B. die Zeit nach dem letzten Ereignis. Für  $n = 0$  ergibt sich z.B. das Zerfallsgesetz für radioaktive Stoffe (siehe Gleichung C.1). Für  $n = 1$  ergibt

sich für  $0 \leq t \ll \tau$  (seltene Ereignisse) die Exponentialverteilung,

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \frac{(p_c(t + \Delta t, n = 1) - p_c(t, n = 1))}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\Delta t} e^{-\lambda t} ((t + \Delta t)e^{-\lambda \Delta t} - t) \\
 &= \frac{\lambda}{\Delta t} e^{-\lambda t} ((t + \Delta t)[1 + \lambda \Delta t + \dots] - t) \\
 &\approx \frac{\lambda \Delta t}{\Delta t} e^{-\lambda t} \\
 \text{und damit } p(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} . \quad (\text{H.11})
 \end{aligned}$$

$\Delta t$  ist hier ein kleines Vorwärt-Zeitintervall der aktuellen Zeit ( $\Delta t < t$ ), und die Näherung gilt für  $\lambda t \ll 1$ . Die Exponentialverteilung ist eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für das Auftreten eines Ereignisses. Für die kumulative Verteilung in einem Zeitintervall  $[0, t_b]$  oder  $[t_a, t_b]$  gilt

$$p_c(t \leq t_b) = \int_0^{t_b} p(t) dt = 1 - e^{-\frac{t_b}{\tau}} \quad \text{und} \quad p_c(t_a \leq t \leq t_b) = e^{-\frac{t_a}{\tau}} - e^{-\frac{t_b}{\tau}} . \quad (\text{H.12})$$

Die kumulative Exponentialverteilung gibt für einen Poisson Prozess an, wie lange es dauert bis das erste Ereignis eintritt (Teilchen zerfällt). Ebenso gehorcht die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen eines Poisson Prozesses einer Exponentialverteilung. Poisson- sowie die Exponentialverteilung haben kein Gedächtnis, d.h. die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses im Zeitintervall  $\Delta t$  ändert sich nicht, egal ob das letzte Ereignis vor kurzem oder langem auftrat.

Andere gebräuchliche Verteilung sind die **Weibull Verteilung** oder die **Student t-Verteilung** (z.B. [Wessel, 2000](#)).

## H.4 Verknüpfung von Ereignissen

Sollen unterschiedliche Ereignisse miteinander verknüpft werden, dann werden Additionsregeln und für zeitlich aufeinanderfolgende Ereignisse Regeln für die konditionale Wahrscheinlichkeit erforderlich. Wir diskutieren die Regeln anhand Abb. H.2 für den Zerfall eines radioaktiven Elements (event "Zerfall pro Zeitintervall") und das Auftreten eines Erdbebens (event "Beben pro Zeitintervall"). Die Zeit des letzten events sei  $t = 0$  und die mittlere Wiederkehrzeit  $\tau = 1/\lambda$ . Die Gesamtzahl der möglichen Versuche (Zeiteinheiten) sei  $N$ . Sie definiert in unserem Beispiel das gesamte Zeitintervall  $[0, t_2]$  (z.B. in Jahren). Ereignis  $X$  definiert das Auftreten eines events (Zerfall oder Beben) im Zeitintervall  $[t_1, t_2]$ . Ereignis  $Y$  definiert das Nichtauftreten eines events (kein Zerfall oder kein Beben) im Intervall  $[0, t_1]$  ( $t_1 \leq t_2$ ). Abb. H.2 gibt schematisch die Wahrscheinlichkeiten

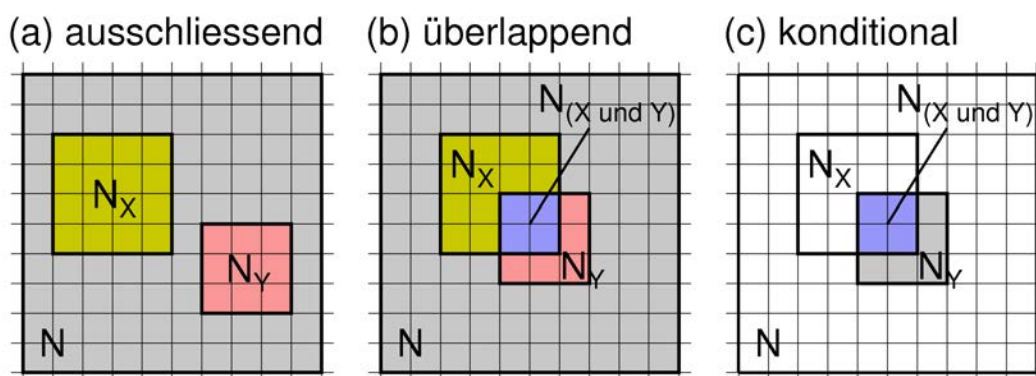


Abbildung H.2: Schematisches "Venn Diagramm" zur Verknüpfung der relativen Häufigkeiten der Ereignisse  $X$  und  $Y$ . Diskrete Versuche werden durch Quadrate visualisiert (hier wurde  $N = 100$  mal "gewürfelt").  $N_X = 16$  erfolgreiche Ausgänge für Ereignis  $X$  sind gelb und  $N_Y = 9$  erfolgreiche Ausgänge für  $Y$  sind rot markiert. (a) Ereignisse  $X$  und  $Y$  schließen sich gegenseitig aus. (b) Ereignis  $X$  und  $Y$  können gemeinsam auftreten. Die Anzahl der erfolgreichen Fälle  $X \cap Y$  ist  $N_{X \cap Y} = 4$ . (c) Skizze zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit  $p_c(X|Y)$  für zeitlich aufeinanderfolgende Versuche.

(relativen Häufigkeiten) für Ereignis  $X$  und  $Y$  und das gemeinsame Auftreten von  $X \cap Y$  ( $X$  **und**  $Y$ ).

$$p_c(X) = \frac{N_X}{N} = \frac{16}{100} = 0.16$$

$$p_c(Y) = \frac{N_Y}{N} = \frac{9}{100} = 0.09$$

Die Notation für Intersection (Schnittmenge) ist  $\cap$  (**und** bzw. **AND**). Die Notation für Union ist  $\cup$  (**oder** bzw. **OR**).

Abb. H.2a betrachtet den Fall, dass  $X$  und  $Y$  nicht gemeinsam auftreten können, d.h. dass sich  $X$  und  $Y$  gegenseitig ausschließen sollen (für Erdbeben- oder Zerfallsbeispiel nicht der Fall). Dann ist  $N_{X \cap Y} = 0$  und deshalb auch  $p_c(X \cap Y) = 0$ . Abb. H.2b gibt ein Beispiel in dem sich  $X$  und  $Y$  gegenseitig einschließen, mit

$$p_c(X \cap Y) = \frac{N_{X \cap Y}}{N} = \frac{4}{100} = 0.04$$

$X \cap Y$  definiert in dem Beispiel die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines events nur im Zeitintervall  $[t_1, t_2]$ .

### Oder-Verknüpfung:

Für die Oder-Verknüpfung muss nach Abb. H.2 allgemein gelten

$$p_c(X \cup Y) = \frac{N_X + N_Y - N_{X \cap Y}}{N} = p_c(X) + p_c(Y) - p_c(X \cap Y) \quad . \quad (\text{H.13})$$

In Abb. H.2a ist  $p_c(X \cup Y) = 0$  und in H.2b ist  $p_c(X \cup Y) = 0.21$ .

### **Konditionale Verknüpfung:**

Eine konditionale oder bedingte Wahrscheinlichkeit wird für zeitlich aufeinanderfolgende Ereignisse sinnvoll. Für die Vorhersage zu einem aktuellen Zeitpunkt ist die Frage wichtig, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein "event" (Zerfall oder Beben) im Intervall  $[t_1, t_2]$  eintritt, wenn bis zum jetzigen Zeitpunkt (Intervall  $[0, t_1]$ ) noch kein event eingetreten war. Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit für  $X$  wenn  $Y$  bereits eingetreten ist ( $X$  unter der Bedingung  $Y$ , vgl. Abb. H.2c), wie

$$p_c(X|Y) = \frac{N_{X \cap Y}}{N_Y} = \frac{N_{X \cap Y}/N}{N_Y/N} = \frac{p_c(X \cap Y)}{p_c(Y)} \quad . \quad (\text{H.14})$$

In dem angegebenen Beispiel wäre das  $p_c(X|Y) = 4/9 = 0.04/0.09 \approx 0.44$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass ein event in der verbleibenden Restzeit endlich auftritt ist relativ groß im Vergleich zu der Wahrscheinlichkeit des events über den gesamten Zeitraum (0.16).

### **Joint Probability oder Bayes Basic Theorem:**

Gleichung (H.14) kann nach der **Joint Probability**  $p_c(X \cap Y)$  aufgelöst werden wie

$$p_c(X \cap Y) = p_c(Y \cap X) = p_c(Y|X) \cdot p_c(X) = p_c(X|Y) \cdot p_c(Y) \quad . \quad (\text{H.15})$$

Ist  $p_c(Y)$  und die bedingte Wahrscheinlichkeit  $p_c(X|Y)$  bekannt, dann kann die Joint Probability  $p_c(X \cap Y) = p_c(Y \cap X)$  mit (H.15) berechnet werden (**Bayes basic theorem**) (Alternativ:  $p_c(X)$  und  $p_c(Y \cap X)$  ist bekannt).

Für **unabhängige Ereignisse**  $X$  und  $Y$  gilt

$$p_c(X|Y) = p_c(X) \quad \text{und damit} \quad p_c(X \cap Y) = p_c(X) \cdot p_c(Y) \quad . \quad (\text{H.16})$$

Die Joint Probability berechnet sich für unabhängige Ereignisse aus dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten für  $X$  und  $Y$ . Das Ergebnis ist aus Würfelspielen bekannt, wo z.B. die Wahrscheinlichkeit zweimal hintereinander eine 6 zu würfeln mit  $p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$  berechnet werden kann. In unserem Beispiel kann der radioaktive Zerfall in jedem Fall als unabhängiges Ereignis angesehen werden. Das Auftreten und Nichtauftreten von Erdbeben wird hingegen nicht immer als unabhängiger Prozess betrachtet und muss dementsprechend mit (H.15) berechnet werden. Eine Anwendung ist in Kapitel "Erdbeben".

### **Allgemeines Bayes Theorem:**

Gleichungen (H.15) kann nach der konditionalen Wahrscheinlichkeit aufgelöst werden wie z.B.

$$p_c(Y|X) = \frac{p_c(Y) \cdot p_c(X|Y)}{p_c(X)} \quad .$$



Die Gleichung hat Bedeutung, wenn sich z.B.  $p_c(X|Y)$  nicht aber  $p_c(Y|X)$  einfach abschätzen läßt.  $p_c(Y)$  wird dann **prior distribution** oder **unconditional probability** genannt,  $p_c(X|Y)$  ist die **likelihood distribution** (bedingte Wahrscheinlichkeit für  $X$  unter  $Y$ ) und  $p_c(Y|X)$  die **posterior distribution**, weil sie aus den Werten der a priori Wahrscheinlichkeit berechnet wird.  $p_c(X)$  ist ebenso eine prior distribution und dient hier der Normalisierung.

Das **allgemeine Bayes Theorem** verallgemeinert den Zusammenhang für den Fall, dass mehrere Ereignisse  $Y_i$ , die sich alle gegenseitig ausschließen sollen, konditionell mit Ereignis  $X$  verknüpft sind, wobei folgt

$$p_c(Y_i|X) = \frac{p_c(Y_i) \cdot p_c(X|Y_i)}{\sum_{i=1}^I p_c(X|Y_i) \cdot p_c(Y_i)} .$$

Dabei wurde die Identität  $p_c(X) = \sum_{i=1}^I p_c(X|Y_i) \cdot p_c(Y_i)$  ausgenutzt (Definition der totalen Wahrscheinlichkeit, siehe z.B. [Bronstein and Semendjajew, 1985](#)).