

This is an author-deposited version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/>
Eprints ID: 13746

To cite this document: Dubreuil, Sylvain and Salaün, Michel and Rodriguez, Emmanuel and Petitjean, Frank *Superposition modale probabiliste : identification de la loi jointe des valeurs propres et paramètres effectifs par la théorie des copules*. (2015) In: CSMA 2015 - 12ème Colloque National en Calcul des Structures, 18 May 2015 - 22 May 2015 (Giens (Var), France).

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator:
staff-oatao@inp-toulouse.fr

Superposition modale probabiliste : identification de la loi jointe des valeurs propres et paramètres effectifs par la théorie des copules.

S. Dubreuil^{1,2}, M. Salaün², E. Rodriguez¹, F. Petitjean¹

¹ ICAM, Institut Catholique d'Arts et Métiers, Toulouse

² JCA, Institut Clément Ader, Toulouse, sylvain.dubreuil@isae.fr

Résumé — Afin de prendre en compte les incertitudes de conception dans le calcul prédictif des fonctions de réponse en fréquence (FRF), une adaptation de la méthode de superposition modale au cadre probabiliste est proposée. L'identification de la loi de probabilité du vecteur composé des valeurs propres et paramètres effectifs aléatoires est réalisée en 3 étapes : sélection des modes prépondérants, discrimination des lois jointes à identifier, identification de ces lois de probabilité de grandes dimensions par décomposition *Vine* (copules bidimensionnelles).

Mots clés — incertitudes paramétriques, paramètres modaux aléatoires, copule bidimensionnelle

1 Introduction

1.1 Superposition modale

Dans le cadre déterministe, la méthode de superposition modale consiste à projeter l'équation du mouvement dans la base des vecteurs propres de la matrice de rigidité relativement à la matrice de masse tronquée à n_k modes (on note Φ_k le vecteur propre du mode k et λ_k la valeur propre correspondante).

Les FRF s'expriment alors analytiquement en fonction des paramètres modaux (valeurs propres et certaines composantes des vecteurs propres). A titre d'exemple, la flexibilité dynamique (transfert entre effort et degrés de liberté (DDL) internes) est donnée par : $G(\omega) = \sum_{k=1}^{n_k} H_k(\lambda_k, \omega) \Phi_k \Phi_k^t$ avec H_k le facteur d'amplification dynamique du mode k , $H_k(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + j2\xi_k \sqrt{\lambda_k \omega + \lambda_k}}$, ξ_k étant le coefficient d'amortissement du mode k .

Le terme $\Phi_k \Phi_k^t = x_k$ pondère le facteur d'amplification dynamique du mode k et est appelé matrice des paramètres effectifs du mode k . Des définitions équivalentes (voir [3]) sont données pour la transmissibilité dynamique (transfert entre DDL de liaison et DDL internes) et pour la rigidité dynamique (transfert entre DDL de liaison et efforts de liaison).

1.2 Position du problème

Nous souhaitons prendre en compte la variabilité des paramètres d'entrée du modèle éléments finis (paramètres matériaux, géométriques) par une approche probabiliste *i.e* ces paramètres d'entrée sont modélisés par des grandeurs aléatoires de lois connues. La FRF entre 2 DDL a et b est alors un processus aléatoire que l'on souhaite caractériser. Le module de la FRF est la quantité d'intérêt principale de notre étude car il caractérise l'amplitude des vibrations. Nous nous intéressons en particulier aux hauts quantiles (99%) afin d'obtenir la borne supérieure d'un intervalle de confiance sur l'amplitude. Pour ce faire nous proposons d'identifier la loi de probabilité du vecteur $V = (\Lambda_k, X_{k,ab})$, $k = 1, \dots, n_k$ à partir d'un échantillon de taille N_{ech} de réalisation du problème aux valeurs propres $v^r = (\lambda_k^r, x_{k,ab}^r)$, $k = 1, \dots, n_k$, $r = 1, \dots, N_{ech}$. A partir de cette loi identifiée, il est possible de mettre en œuvre une méthode de Monte Carlo pour l'estimation des hauts quantiles de la FRF à moindre coût (expression analytique de la FRF en fonction des variables de V). L'intérêt de cette approche par rapport à la méthode de Monte Carlo directe est présentée dans [5] et [4]. En effet, l'estimateur du quantile à 99% obtenu par cette stratégie est moins dispersé que celui obtenu par Monte Carlo directe.

Ces travaux ont également montré l'importance de l'identification de la loi du vecteur V et en par-

ticulier des structures de dépendance entre variables modales. Nous présentons ici la méthode dédiée à l'identification de cette loi de grande dimension. Afin d'illustrer les difficultés et les étapes du développement proposé, nous étudions l'exemple présenté par la Figure 1.

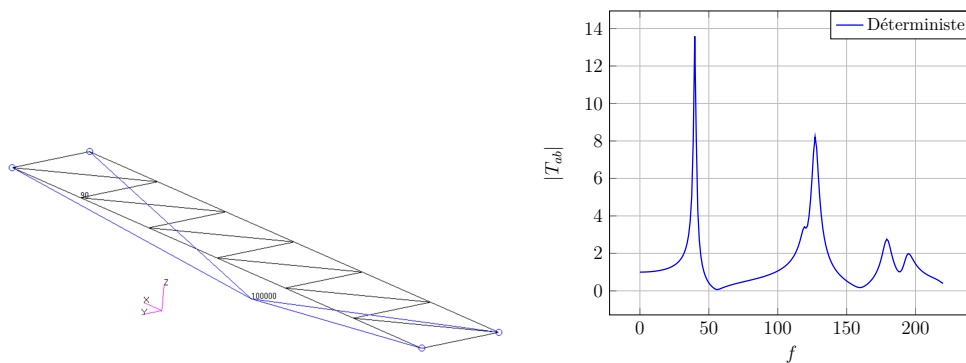


FIGURE 1 – i) Modèle du treillis étudié ii) Transmissibilité entre les noeuds 100000 et 90, direction Y, cas déterministe

Il s'agit d'un treillis formé de 25 tubes en composite carbone/époxy. Le module d'Young, le module d'élasticité transversal ainsi que la masse volumique sont modélisés par des champs aléatoires normaux de fonction d'autocorrélation exponentielle, de coefficients de variation égaux à 10% pour les modules et 5% pour la masse volumique. La discrétisation de ces champs conduit à 4 variables aléatoires par tubes soit 300 variables aléatoires au total. Les 4 coins du treillis sont liés par des éléments rigides au nœud 100000 encastré. La FRF étudiée (Figure 1 ii)) est la transmissibilité entre le nœud 100000 et le nœud 90 dans la direction Y sur la bande $[0, 220]$ Hz.

Le nombre de modes sur cette bande de fréquence est de 35. La mise en œuvre de la méthode d'identification demande donc l'identification d'une loi de probabilité de dimension 70. La prochaine partie propose une étape de prétraitement permettant de diminuer la dimension de la loi à identifier puis décrit l'identification par décomposition en copules bidimensionnelles.

Remarques : 1. Bien que les coefficients d'amortissement modaux soient des paramètres fortement incertains, ils sont considérés déterministes dans la suite. Toutefois, l'extension de la méthode proposée au cas des amortissements modaux aléatoires ne présente pas de difficulté.

2. La méthode d'association des réalisations de chaque valeur propre, paramètre effectif aux variables aléatoires correspondantes n'est pas discutée ici. En effet ce choix n'influence pas la méthode mise en œuvre [5].

2 Démarche proposée

2.1 Prétraitement

Comme le montre l'exemple du treillis, le nombre de modes à considérer sur une bande de fréquence peut être très important. Or, seul un petit nombre d'entre eux ont une influence sur une FRF donnée. Dans le cadre déterministe, la comparaison des paramètres effectifs permet de discriminer ces modes prépondérants. Nous proposons d'utiliser les estimateurs de la moyenne et de l'écart-type des valeurs absolues des paramètres effectifs. Ces estimateurs sont respectivement notés $\mu_{|X|_k}$ et $\sigma_{|X|_k}$ (pour simplifier les écritures nous notons $|X|_{k,ab} = |X|_k$). Le mode aléatoire k est alors retenu si d'une part son influence est importante ($\mu_{|X|_k} > C_1$) et si d'autre part il varie suffisamment pour être considéré comme aléatoire ($\sigma_{|X|_k} > C_2$). Le choix des seuils C_1 et C_2 est discuté dans [5] et ne sera pas développé ici.

Une fois les modes prépondérants retenus (dans l'exemple du treillis, 8 modes suffisent à une bonne représentation de la FRF), une étape de séparation des modes est effectuée. Cette étape permet de prendre en compte les dépendances entre variables modales uniquement si les modes partagent une zone d'influence commune conduisant à un couplage potentiel. Un critère analytique a été proposé dans [4] afin de délimiter ces zones d'influence. En pratique, ceci permet de partitionner le vecteur V en sous-ensembles V_i de dimensions plus faibles. La Figure 2 i) illustre ces 2 étapes de pré-traitement sur l'exemple du

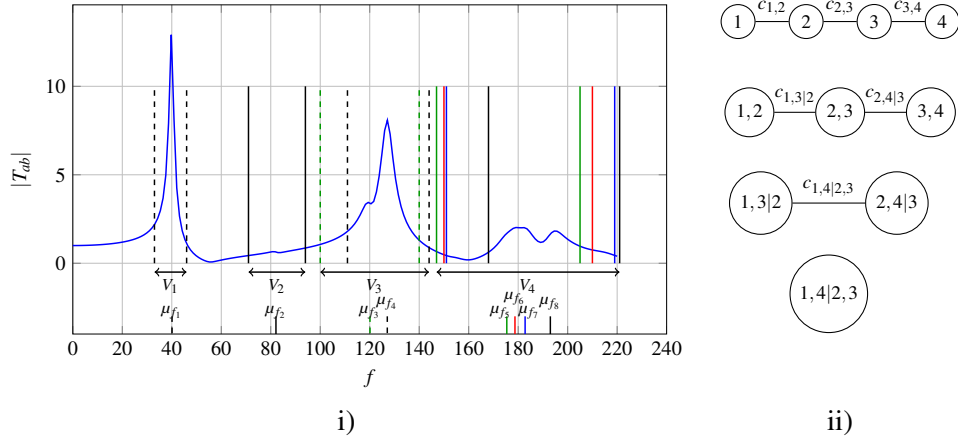


FIGURE 2 – i) Illustration des étapes de prétraitement sur l'exemple du treillis. ii) Exemple de décomposition d'une densité de dimension 4.

treillis avec $N_{ech} = 25$, les traits verticaux représentent la limite des zones d'influence de chaque modes et les μ_{f_i} sont les moyennes empiriques des 8 fréquences propres.

Sur cet exemple le critère de séparation permet donc de passer de l'identification de la loi d'un vecteur V de dimension 16 aux lois de 4 vecteurs V_i de dimensions respectives 2, 2, 4, 8.

2.2 Identification par décomposition en copules bidimensionnelles

Une étude empirique montre que, dans la plupart des cas, la loi de probabilité d'un vecteur V_i exhibe des structures de dépendance très variées entre paramètres modaux. De plus, comme montré dans [4] et [5], ces structures de dépendance jouent un rôle fondamental dans les phénomènes de couplage entre modes. Afin de bien représenter ces structures, nous choisissons d'utiliser la méthode d'identification basée sur les décompositions en *Vine* [2], développée dans [1]. L'idée de base est d'utiliser la décomposition d'une densité de probabilité de dimension n en produit de ses n densités marginales et de $n(n-1)/2$ copules bidimensionnelles. Prenons l'exemple de la densité du vecteur $V_3 = (\Lambda_3, \Lambda_4, X_3, X_4)$. Supposons que cette variable aléatoire soit continue, sa densité de probabilité p_{V_3} peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 p_{V_3}(\lambda_3, \lambda_4, x_3, x_4) = & p_{\Lambda_3}(\lambda_3) p_{\Lambda_4}(\lambda_4) p_{X_3}(x_3) p_{X_4}(x_4) \\
 & c_{\Lambda_3, \Lambda_4}(F_{\Lambda_3}(\lambda_3), F_{\Lambda_4}(\lambda_4)) c_{\Lambda_4, X_3}(F_{\Lambda_4}(\lambda_4), F_{X_3}(x_3)) c_{X_3, X_4}(F_{X_3}(x_3), F_{X_4}(x_4)) \\
 & c_{\Lambda_3, X_3 | \Lambda_4}(F_{\Lambda_3 | \Lambda_4}(\lambda_3 | \lambda_4), F_{X_3 | \Lambda_4}(x_3 | \lambda_4)) c_{\Lambda_4, X_4 | X_3}(F_{\Lambda_4 | X_3}(\lambda_4 | x_3), F_{X_4 | X_3}(x_4 | x_3)) \\
 & c_{\Lambda_3, X_4 | \Lambda_4, X_3}(F_{\Lambda_3 | \Lambda_4, X_3}(\lambda_3 | \lambda_4, x_3), F_{X_4 | \Lambda_4, X_3}(x_4 | \lambda_4, x_3))
 \end{aligned}$$

avec p_i les densités marginales des variables i , F_i leurs fonctions de répartition et $c_{i,j}$ les densités des copules entre les variables i et j . La Figure 2 ii) représente cette décomposition en $n-1$ niveaux.

Cette décomposition appelle plusieurs remarques sur sa mise en œuvre pratique :

- Tout d'abord elle n'est pas unique. En effet, le choix de l'ordre des variables au premier niveau est arbitraire. Ce choix conditionne les copules conditionnelles à identifier.
- Pour rendre possible l'identification des copules conditionnelles, l'hypothèse d'indépendance des copules par rapport aux valeurs des variables de conditionnement est faite. Ceci implique que l'erreur d'identification augmente avec les niveaux de la décomposition. Il est donc important de placer les couples de variables les plus corrélés au premier niveau.
- L'identification des copules conditionnelles demande la création d'un échantillon des fonctions de répartition conditionnelle. L'hypothèse précédente permet de créer ces échantillons en fonction des résultats du niveau précédent (voir [1]). La construction est donc itérative de niveau en niveau.
- La méthode d'identification retenue est semi-paramétrique. Les densités marginales (ainsi que les fonctions de répartition marginales) sont évaluées par lissage par noyau (noyau normal standard). Les copules bidimensionnelles sont identifiées en maximisant la vraisemblance de la décomposition.

Il est donc nécessaire d'interpréter les graphes de dépendance de chaque vecteur V_i afin de définir l'ordre des variables au premier niveau de la décomposition. A titre d'exemple, la matrice de dépendance du vecteur V_3 avec $N_{ech} = 25$ est présenté Figure 3 i), la valeur absolue du τ de Kendall (mesure de dépendance comprise entre -1 et 1) est donnée sur la partie inférieure.

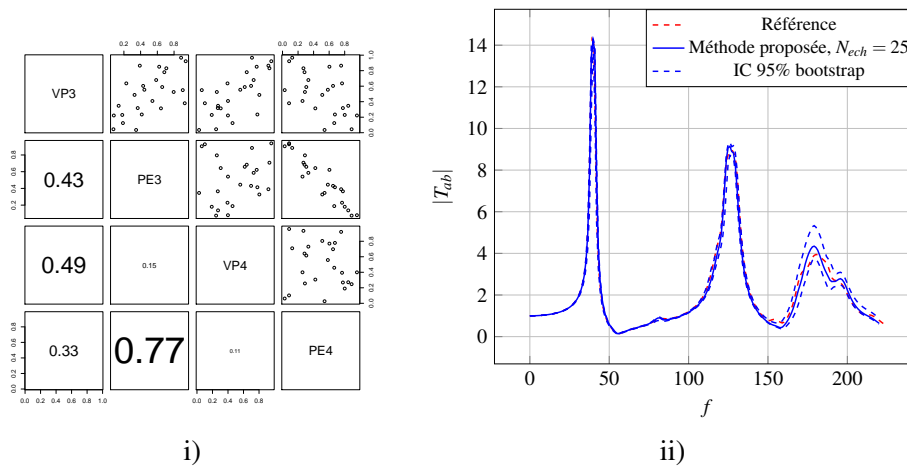


FIGURE 3 – i) Graphe de dépendance du vecteur V_3 . ii) Exemple du treillis, estimation du quantile à 99%.

Nous remarquons que les valeurs propres (VP) sont corrélées de façon positive avec une structure privilégiant une corrélation importante pour les valeurs hautes. A l'inverse les paramètres effectifs (PE) sont négativement corrélés avec une structure en forme d'ellipse. Ceci indique que le couplage de ces 2 modes n'implique pas un fort gain d'amplitude de la FRF (les paramètres effectifs ne pouvant être importants simultanément pour une réalisation donnée). Pour V_3 nous avons donc choisi l'ordre $V_3 = (\Lambda_3, \Lambda_4, X_3, X_4)$ pour le premier niveau de la décomposition.

3 Résultats et conclusions

Une fois les lois de probabilité de chaque sous-ensemble V_i identifiées, la méthode de Monte Carlo est mise en œuvre sur la FRF considérée. La Figure 3 ii) présente les résultats obtenus avec $N_{ech} = 25$ en comparaison avec des résultats obtenus par une méthode de Monte Carlo directe de 100000 simulations. On note une très bonne adéquation jusqu'à 150 Hz puis un écart acceptable entre 150 et 220 Hz. Cet écart provient de la sélection des modes prépondérants (la densité modale devient très importante au delà de 150 Hz et tous les modes ne peuvent pas être considérés). Précisons enfin que la dispersion des estimateurs peut être quantifiée par l'estimation d'un intervalle de confiance par bootstrap [5][4], comme le montre la Figure 3.

En conclusion, la construction de loi de probabilité de grande dimension à l'aide de décomposition en copules bidimensionnelles est parfaitement adaptée à la mise en œuvre d'une synthèse modale probabiliste. Cette approche offre 2 avantages par rapport à la méthode de Monte Carlo directe : tout d'abord l'estimateur du quantile à 99% est moins dispersé voir [4]. Ensuite l'identification de la loi des vecteurs V_i permet d'interpréter l'effet des couplages de modes (corrélation entre paramètres modaux).

Références

- [1] K. Aas, C. Czado, A. Frigesi, H. Bakken. *Pair-copula constructions of multiple dependence*, Insurance : Mathematics and Economics, 44 :182-198, 2009.
- [2] T. Bedford, R.M. Cooke. *Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines.*, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 32 :245-268, 2001
- [3] A. Girard, N. Roy. *Dynamique des structures industrielles*, Hermes, 2003.
- [4] S. Dubreuil, M. Salaün, E. Rodriguez, F. Petitjean. *Construction of frequency response function by a semi analytical approach*, Uncertainty in structural dynamics. ISMA-USD, 4637-4652, 2014
- [5] S. Dubreuil. *Superposition modale probabiliste : application au dimensionnement des structures spatiales.*, thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2014