Izvještaj s 52. međunarodne matematičke olimpijade 2011. g.

52. međunarodna matematička olimpijada (MMO) održala se u glavnom gradu Nizozemske, Amsterdamu, od 12. do 24. srpnja 2011. godine. Vođe ekipa pristigli su 12. srpnja kako bi na tajnoj lokaciji u okolici Eindhovena izabrali zadatke za olimpijadu. Učenici zajedno sa svojim voditeljima pristizali su 16. srpnja.

Na olimpijadi je sudjelovalo 564 natjecatelja iz 101 države, a među njima bilo je 57 djevojaka. Još su tri države sudjelovale kao promatrači te će zasigurno dogodine poslati svoje natjecatelje. Osim natjecatelja bilo je prisutno stotinjak članova međunarodnog žirija, stotinjak njihovih pomoćnika te pedesetak promatrača. Svakoj ekipi dodijeljen je jedan vodič. Naš je bio, kao i prije dvije godine u Bremenu, *Fabian Parsch*. Osim vodiča, u organizaciji MMO-a je sudjelovalo još oko 200 ljudi.

Hrvatsku su predstavljali *Matija Bucić* (XV. gimnazija, Zagreb), *Domagoj Ćevid* (V. gimnazija, Zagreb), *Ivica Kičić* (V. gimnazija, Zagreb), *Matko Ljulj* (XV. gimnazija, Zagreb), *Matija Milišić* (XV. gimnazija, Zagreb) i *Ognjen Stipetić* (V. gimnazija, Zagreb). Vođa naše ekipe je bila *Mea Bombardelli*, a njezin pomoćnik *Tonći Kokan*. Nažalost, u ekipi je samo šest mjesta, pa s nama nisu bili *Borna Vukorepa* (XV. gimnazija, Zagreb) i *Grgur Valentić* (V. gimnazija, Zagreb), rezerve naše ekipe.

Ekipno je prvo mjesto na Olimpijadi zauzela Kina sa 189 bodova, druga je bila ekipa Sjedinjenih Američkih Država, popularno nazivana "Kina 2" sa 184 boda, dok je treće mjesto zauzela ekipa Singapura sa 179 bodova. Hrvatska ekipa osvojila je 36. mjesto s ukupno 110 bodova. Pojedinačno je svaki od naših članova osvojio medalju i to: *Domagoj Ćevid* srebrnu, a svi ostali brončane medalje. Ovo je prvi put u povijesti hrvatskih sudjelovanja na MMO-u da su svi članovi ekipe osvojili medalje.

Naši predstavnici su se relativno uzorno vladali, odnosno nisu previše često posjećivali neke dijelove Amsterdama. Na ceremoniji otvaranja, koja se po prvi put direktno prenosila putem interneta, voditelj ceremonije upitao je Matiju Milišića što bi volio posjetiti u Amsterdamu na što je on odgovorio: "coffee shop". Iako organizatori nisu organizirali izlet po coffee shopovima, organizirali su ukupno četiri izleta od kojih je svaka ekipa birala po dva. Mi smo izabrali jedrenje i bicikliranje. Na prvom izletu smo jedrenjakom iz 1894. godine jedrili po Gowseeju do malog mjesta Volendam i nazad. Nekim timovima je bilo ponuđeno kupanje, no nama nije. Izlet na biciklima bio je očekivan s obzirom da su Nizozemci ludi za njima. Vozili smo se oko Amsterdama i zaustavljali da pogledamo vjetrenjaču za drobljenje krede, te park prirode sličan našem Kopačkom ritu. Na ovim izletima nažalost nisu nas pratili naši voditelji jer su bili jako zaposleni koordinacijom. Pridružili su nam se tek na posljednjem izletu, tj. na razgledavanju samog Amsterdama. Izlet se sastojao od vožnje brodom kanalima Amsterdama, a imali smo i dosta slobodnog vremena. Bio je organiziran i izlet u Arenu u Amsterdamu gdje je bio organiziran nogometni turnir. Hrvatsko-gvatemalska momčad jedina ni u kojem trenutku nije gubila, ponajviše zahvaljujući, Tonću Kokanu, izvanserijskom golmanu. Nažalost, to nam nije bilo dovoljno za prolaz u polufinale. Treba spomenuti i pomoć predstavnika ostalih balkanskih država koji su nam pomogli svojim navijanjem.

Ova Olimpijada je uvela mnogo novih stvari poput mogućnosti praćenja ceremonija otvaranja i zatvaranja putem direktnog online prijenosa i Facebook profila Olimpijade. Mi smo doista uživali u Olimpijadi i sa sobom smo ponijeli mnogo lijepih uspomena i poznanstava. Još da nije bilo *vegetarian lunch policya* u hotelu (a ni večera nije bila puno bogatija mesnim proizvodima) doista bi sve bilo savršeno. U svakom slučaju golem korak naprijed u odnosu na Kazahstan prošle godine.

Matija Bucić

Zadaci

Prvi dan, Amsterdam, Nizozemska, ponedjeljak, 18. srpnja 2011.

1. Za skup $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ koji se sastoji od četiri međusobno različita prirodna broja, neka s_A označava sumu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Neka n_A označava broj parova (i, j), $1 \leq i < j \leq 4$, za koje broj $a_i + a_j$ dijeli sumu s_A.

Odredi sve takve skupove A, koji se sastoje od četiri međusobno različita prirodna broja, za koje n_A postiže maksimalnu vrijednost.

2. Neka je S konačan skup točaka u ravini koji sadrži barem dvije točke i neka nikoje tri točke skupa S nisu kolinearne. Nazovimo *vjetrenjačom* postupak određen pravcem l na kojem se nalazi točno jedna točka skupa P skupa S na sljedeći način:

> Pravac l rotira u smjeru kazaljke na satu oko točke P (*središta rotacije*) do prvog trenutka kada na pravcu bude još jedna točka skupa l. Ta točka, nazovimo je Q, postaje novo središte rotacije i pravac dalje rotira u smjeru kazaljke na satu oko točke Q, do sljedećeg trenutka kada na pravcu bude još neka točka skupa S. Postupak se ponavlja beskonačno mnogo puta.

Dokaži da je moguće odabrati središte rotacije $P \in S$ i pravac l koji prolazi kroz P, koji određuju vjetrenjaču u kojoj svaka točka skupa S beskonačno mnogo puta postaje središte rotacije.

3. Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija takva da je za sve $x, y \in \mathbf{R}$ zadovoljena nejednakost

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x)).$$

Dokaži da je $f(x) = 0$ za sve $x \leq 0$.

Drugi dan, Amsterdam, Nizozemska, utorak, 19. srpnja 2011.

4. Neka je n prirodan broj. Imamo običnu ravnotežnu vagu i n utega čije su težine 2^0, 2^1, ..., 2^{n-1}. Na vagu trebamo postaviti sve utege, jednog po jednog, tako da desna strana vage ni u kojem trenutku ne bude teža od lijeve strane. U svakom koraku biramo jedan od utega koji još nisu na vagi i stavljamo ga ili na lijevu, ili na desnu stranu vage, poštujući navedeni uvjet. To ponavljamo dok sve utege ne postavimo na vagu. Odredi na koliko načina to možemo napraviti.

5. Neka je $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ funkcija iz skupa cijelih borjeva u skup prirodnih brojeva, takva da je za sve cijele brojeve m, n razlika $f(m) - f(n)$ djeljiva brojem $f(m - n)$. Dokaži da je broj $f(n)$ djeljiv brojem $f(m)$, za sve $m, n \in \mathbf{Z}$ za koje je $f(m) \leq f(n)$.

6. Neka je ABC šiljastokutan trokut i Γ njegova opisana kružnica. Neka je l bilo koja tangenta na kružnicu Γ, i neka su l_a, l_b i l_c pravci simetrični pravcu l s obzirom na pravce BC, CA i AB redom. Dokaži da kružnica opisana trokutu kojeg određuju pravci l_a, l_b i l_c dodiruje kružnicu Γ.

Vrijeme za rad svakog dana: 4 sata i 30 minuta

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova

	nagrade				broj
	I	II	III	poh.	bod.
Kina	6				189
SAD	6				184
Singapur	4	1	1		179
Rusija	2	4			161
Tajland	3	2	1		160
Turska	3	2	1		159
Sjeverna Koreja	3	3			157
Tajvan	2	4			154
Rumunjska	1	5			154
Iran	2	4			151
Njemačka	1	3	2		150
Japan	2	2	2		147
Južna Koreja	2	3		1	144
Hong Kong	2	1	3		138
Poljska	2	2	1	1	136
Ukrajina	1	2	3		136
Kanada	1	2	3		132
Velika Britanija	2	1	2	1	132
Italija	1	3	1	1	129
Brazil		3	3		121
Bugarska		2	3	1	121
Meksiko		2	4		120
Indija	1	1	2	2	119
Izrael	1		4	1	119
Srbija	1	2	1	1	116
Australija		3	3		116
Mađarska		2	3	1	116
Nizozemska		2	3	1	115
Indonezija		2	4		114
Novi Zeland		2	2	2	114
Bjelorusija		2	3	1	113
Peru	1		2	3	113
Vijetnam			6		113
Slovačka		2	3	1	111
Francuska		1	4	1	111
Austrija		2	2	2	110
Hrvatska		1	5		110
Kazahstan		1	3	2	105
Češka		1	3	2	101
Grčka	1		3	1	99
Malezija	1	1	1	2	93
Južnoafrička Republika		1	2	2	93
Švicarska		2	1	1	88
Belgija			4	1	88
Litva			4	2	87
Portugal	1		2	1	86
Moldavija		1		4	86
Španjolska			3	1	83
Argentina	1			4	77
Danska		1	1	2	76
Estonija			2	3	76

	nagrade				broj
	I	II	III	poh.	bod.
Kolumbija			1	4	73
Makao			2	3	71
Filipini (5)			3		69
Mongolija			2	3	69
Švedska		1		3	76
Latvija		1	1	1	68
Finska		1		3	68
Tadžikistan		1		2	68
Gruzija			2	2	68
Norveška		1		3	67
Maroko		1	1	2	64
Turkmenistan			3	1	64
Bosna i Hercegovina			1	4	64
Slovenija			1	3	64
Uzbekistan (5)			1	2	62
Azerbajdžan		1	1	1	61
Armenija (5)		1		3	61
Kostarika (4)		1		3	57
Saudijska Arabija			2		53
Cipar			1	1	51
Bangladeš			1	1	50
Šri Lanka			1	2	49
Luksemburg			1	2	48
Čile			1	1	48
Island				3	48
Tunis			1	1	46
Nigerija			1		40
Makedonija			1		38
Paragvaj (5)				1	38
Pakistan (4)			1	1	35
Obala Bjelokosti				2	34
Ekvador			1		32
Portoriko (4)				2	32
Urugvaj (4)				2	29
Trinidad i Tobago				1	29
Irska					26
Albanija				1	24
Kosovo				1	22
Venezuela (2)				2	21
Honduras (3)				1	21
Bolivija (4)				1	17
Kirgistan (5)				1	14
Sirija				1	14
Crna Gora (4)				1	13
Salvador (2)					11
Gvatemala (4)					8
Panama (1)					6
Lihtenštajn (1)					4
Kuvajt (5)					1
Ujedinjeni Arapski Emirati (5)					1