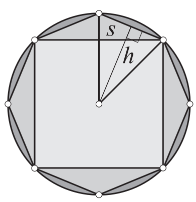
Površina ispod grafa funkcije $f(x) = x^k$

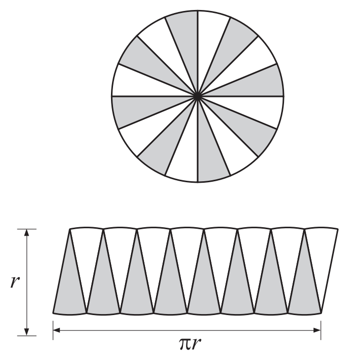
Andrej Novak[1]

Uvod

Problem točnog izračunavanja površine dugo je okupirao velike matematičke umove. U početku se radilo o računanju površine jednostavnih likova kao što su pravokutnik ili pravokutni trokut. Pojavljivali su se i likovi načinjeni od više pravokutnika i trokuta. Većina takvih problema mogla se riješiti tako da se "komplicirani" lik podijeli na puno manjih koji su trokuti ili pravokutnici čija se površina lako računa, a onda je površina početnog lika suma površina jednostavnih likova.

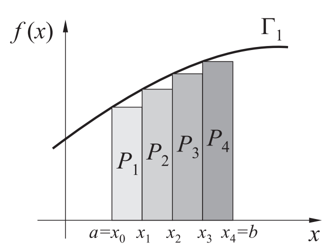


Kako je vrijeme prolazilo i problemi su postajali složeniji. Postavilo se pitanje kako izračunati površinu kruga. Kao odgovor na to pitanje, Arhimed je ponudio tzv. metodu iscrpljivanja (slika lijevo). Radi se, naime, o sustavnom upisivanju n-terokuta u krug. Kada bi n bio dovoljno velik površina takvog lika bila bi jako blizu površine kruga.



Još jedna zgodna ideja za približno računanje površine kruga prikazana je na slici desno. Kada bi se broj isječaka, odrezanih na ovakav način povećavao, površina tako dobivenog "paralelograma" bi težila (konvergirala) prema površini kruga.

Kako se matematički aparat razvijao te su u igru došle funkcije i sustavi opisani njima, sljedeće pitanje je bilo kako izračunati površinu ispod grafa funkcije f.



Danas se o računanju površine, barem u klasičnom smislu, zna gotovo sve. Osnove infinitezimalnog računa počinju se učiti već u četvrtom razredu srednje škole (po gimnazijskom programu), a primjena i usavršavanje tehnika se nastavlja na gotovo svim tehničkim i prirodoslovnim fakultetima. Cilj ovog članka je opisati neke zanimljive ideje koje su preteča današnjim tehnikama.

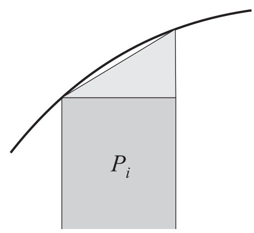
U sljedećim redovima promatramo problem izračunavanja površine ispod grafa funkcije. Očito je da približni iznos površine možemo dobiti tako da dio ili cijelu domenu $[a, b]$ podijelimo na n dijelova te ispod

[1] Poslijediplomski student na Matematičkom odsjeku, PMF-a u Zagrebu, e-pošta andrej.novak@yahoo.com

grafa funkcije upišemo pravokuntnike. Slučaj $n = 4$ je prikazan na slici desno. Površina prvog pravokutnika je $P_{P_1} = f(x_0)(x_1 - x_0)$, odnosno ispod i-tog $P_{P_i} = f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$. Aproksimaciju površine dobivamo sumiranjem provršina svih n pravokutnika,

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Za bolju aproksimaciju, pravokutnicima se može dodati i površina trokuta čija hipotenuza aproksimira dijelove luka krivulje na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$. Aproksimacija površine na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$ u tom slučaju iznosi



$$\begin{aligned} P_{P_i} &= f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})(f(x_i) + f(x_{i-1})). \end{aligned}$$

Točnom iznosu površine možemo se približiti i tako da profinimo podjelu segmenta tj. povećamo broj n, te umjesto n dijelova promatramo $2n$, n^2,..., dijelova. Tako izračunata aproksimacija površine će biti bliže točnoj površini ispod grafa funkcije f na $[a, b]$. Nezgoda je u tome što ako se zbilja želimo približiti točnoj površini, broj će n morati biti jako velik, a ovaj postupak nije praktičan za primjenu *papir i olovka*.

No, i dalje je izračunata površina samo aproksimacija, a zanimaju nas metode čije primjene daju točan iznos površine.

Geometrijski red

S obzirom na to da redovi nisu tema ovog rada, u ovom dijelu iznosimo samo osnovno o geometrijskim redovima, kao kratki podsjetnik zato što će neke tehnike počivati upravo na njima. Geometrijski red je, neprecizno govoreći, beskonačna suma brojeva čiji su članovi u konstantnom omjeru. Taj omjer ćemo za potrebe ovog članka označavati slovom q.

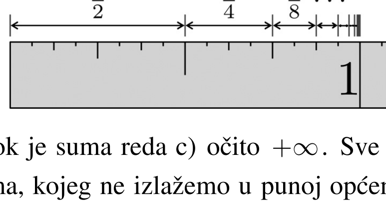
Primjer.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$ b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + ... + \frac{1}{3^n} + ...$

c) $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + ... + 2^n + ...$

Sva tri reda su geometrijska, zato što je svaki član, reda a) jednak polovini svog prethodnika tj. $q = \frac{1}{2}$, reda b) jednak trećini svog prethodnika tj. $q = \frac{1}{3}$, dok je svaki član reda c) dva puta veći od svog predhodnika tj. $q = 2$.

Suma reda a) je 1, što je vidljivo iz sljedeće slike.



Suma reda b) je $\frac{1}{2}$, dok je suma reda c) očito $+\infty$. Sve ove rezultate daje direktna primjena sljedećeg teorema, kojeg ne izlažemo u punoj općenitosti.

Teorem. Za $q \in \mathbf{R}$, $|q| < 1$ geometrijski red $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \sum q^n$ ima sumu $\frac{1}{1-q}$. Za $|q| \geqslant 1$ suma nije konačan broj.

Dokaz. Dokazat ćemo samo prvu tvrdnju teorema.

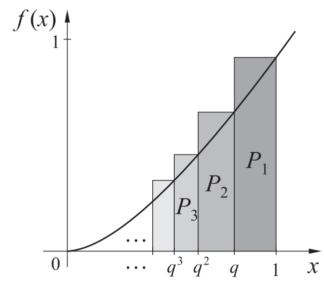
Neka je $|q| < 1$, ako označimo sumu reda sa S onda vrijedi

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 \ldots + q^n + \ldots = 1 + q(1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots),$$
$$S = 1 + qS,$$

iz čega slijedi tvrdnja $S = \frac{1}{1-q}$.

Fermatovo računanje površine

Želimo izračunati površinu ispod funkcije $f(x) = x^k$, $k > -1$ na segmentu $[0, 1]$. Fermat je također koristio ideju upisivanja pravokutnika ispod grafa funkcije, no uz jednu bitnu razliku od dosadašnjih ideja. Za $0 < q < 1$, domenu $[0, 1]$ je podijelio baš u točkama koje su potencije broja q, dobio je dakle, geometrijski red s omjerom q. Kao što se to vidi na slici desno, površina pravokutnika P_1 je $(1-q) \cdot f(1)$ odnosno pravokutnika P_2 je $(q - q^2) \cdot f(q)$ i tako dalje. Ukupna površina je zbroj površina svih pravokutnika,



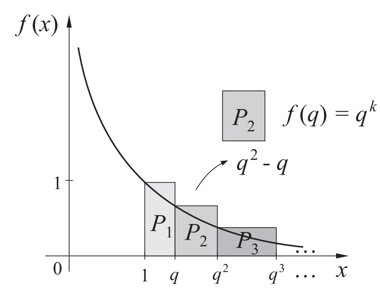
$$\begin{aligned} P &= (1-q)f(1) + (q-q^2)f(q) + (q^2-q^3)f(q^2) + (q^3-q^4)f(q^3) + \ldots \\ &= (1-q) + q(1-q)q^k + q^2(1-q)q^{2k} + q^3(1-q)q^{3k} + \ldots \\ &= (1-q)[1 + q^{k+1} + q^{2k+2} + q^{3k+3} + \ldots] \\ &= (1-q)[1 + (q^{k+1})^1 + (q^{k+1})^2 + (q^{k+1})^3 + \ldots] \\ &= (1-q)\frac{1}{1-q^{k+1}}. \end{aligned}$$

Zadnji red slijedi iz predzadnjeg direktnom primjenom teorema za q^{k+1}.

Prirodno je odabrati q što bliže jedan, tako da pravokutnik P_1 bude jako tanak i dobro aproksimira površinu ispod tog dijela grafa funkcije. Stoga je opravdano promatrati

$$\lim_{q \to 1} \frac{1-q}{1-q^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Koristeći prethodnu ideju možemo izračunati površinu ispod funkcije $f(x) = x^k$, no za $k < -1$ na $[1, +\infty\rangle$. Razlika je i u tome što je sada $q > 1$. Lakim računom provodimo zbrajanje površina.



$$
\begin{aligned}
P &= (q-1)f(1) + (q^2-q)f(q) + (q^3-q^2)f(q^2) + (q^4-q^3)f(q^3) + \ldots \\
&= (q-1) + q(q-1)q^k + q^2(q-1)q^{2k} + q^3(q-1)f(q^3) + \ldots \\
&= (q-1)[1 + q^{k+1} + q^{2k+2} + q^{3k+3} + \ldots] \\
&= (q-1)[1 + (q^{k+1})^1 + (q^{k+1})^2 + (q^{k+1})^3 + \ldots] = \frac{q-1}{1-q^{k+1}}.
\end{aligned}
$$

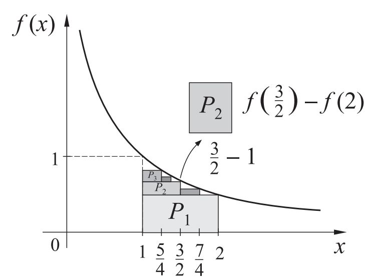
Zadnja jednakost slijedi primjenom teorema na $q^{k+1} < 1$ zato što je $k < -1$.

Kao i prije, prirodno je odabrati q blizu jedan tako da već P_1 dobro aproksimira površinu ispod krivulje na tom dijelu, pa je opravdano promatrati sljedeću graničnu vrijednost

$$\lim_{q\to 1} \frac{q-1}{1-q^{k+1}} = -\lim_{q\to 1} \frac{1-q}{1-q^{k+1}} = -\frac{1}{k+1}.$$

Problem hiperbole

Do sada smo promatrali funkciju $f(x) = x^k$ za $k \neq -1$, za kraj promotrimo slučaj, $k = -1$. Za danu funkciju f i k zanima nas površina ispod grafa funkcije na segmentu $[1, 2]$. I u ovom slučaju koristimo ideju upisivanja pravokutnika, no ovaj puta pravokutnike slažemo jedan na drugi. Konstrukcija je zorno prikazana na slici desno.



Računamo površine P_1, P_2 i P_3 i uočavamo pravilnost;

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 1 \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \\
P_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
P_3 &= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{4}{5} - \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{8}\right)\right] = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Manjim aritmetičkim manipulacijama i zbrajanjem svih površina dolazimo do sljedeće sume

$$P = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln 2.$$

Taj rezultat je dobio i Newton (1667.).

Polovicom 19. stoljeća Reimann je objavio rad u kojem je strogo matematički definirao integral nad intervalom. Reimannov integral je tehnika koju možemo koristiti za računanje površina iz dosta *široke klase skupova*, a time se još jednom potvrdilo da prethodni računi daju točnu površinu. Polovicom 20. stoljeća je razvijena teorija mjere i Lebesgueov integral kojim se mogu računati *površine* iz još *šire klase skupova*. Teorija se i dalje razvija, ali na puno apstraktnijem nivou.