Matematika žongliranja 1. dio: matematički opis žongliranja

Ivana Prašnjak[1], *Neven Grbac*[2]

1. Uvod

Kakve veze ima matematika sa žongliranjem? Odakle uopće matematika u žongliranju i čemu služi? Cilj ovog članka i njegovog nastavka [12] je odgovoriti na ta pitanja. Vidjet ćemo da sustavno proučavanje žonglerskih trikova prirodno vodi do vrlo interesantne matematike iz područja kombinatorike, algebre, teorije grafova. I obratno, matematički pristup omogućuje žonglerima nov sustavan način razmišljanja o žongliranju, izradu računalnih animacija žongliranja te lakše objašnjavanje i uspoređivanje trikova, što dovodi do otkrića novih interesantnih trikova.

Što je žongliranje? Žongleri će obično opisati ono što rade navođenjem različitih rekvizita (kao što su lopte, prstenovi, čunjevi, kutije cigareta[3],...) te velikog broja žonglerskih trikova. Ne postoji široko prihvaćen skup pravila među žonglerima koji definira što je dopušteno, a što se ne smatra žongliranjem. Međutim, neki osnovni žonglerski trikovi zauzet će središnje mjesto na svakoj žonglerskoj listi. Kao literaturu vezanu općenito za žongliranje navodimo knjigu [5].

Žongliranje je staro gotovo koliko i matematika. Jedan od najstarijih povijesnih tragova žongliranja potječe iz Egipta, sa zidne slike u grobnici iz razdoblja Srednjeg kraljevstva od oko 1994.–1781. p.n.e. U ta pradavna vremena žongliralo se i u drugim dijelovima svijeta, tako postoje dokazi iz Kine, Irske, Indije,...

Zapravo, riječ žongliranje potječe od latinske riječi *joculare*, što znači šaljiv. Iako je *joculatores*[4] uživao visoko poštovanje kao umjetnik u Rimskom carstvu, njihove nasljednike u srednjem vijeku često su prezirali i progonili baš kao i mnoge druge putujuće zabavljače.

Slika 1. Zidna slika u grobnici iz razdoblja Srednjeg kraljevstva u Egiptu (izvor [6]).

Nakon osnutka prvog modernog cirkusa 1768. žongleri postaju redovita točka tih putujućih atrakcija. S dolaskom vodvilja[5] 1880-ih godina žongleri se počinju pojavljivati

[1] Autorica je s Odjela za matematiku Sveučilišta u Rijeci; e-pošta: iprasnjak2@gmail.com

[2] Autor je s Odjela za matematiku Sveučilišta u Rijeci; e-pošta: neven.grbac@math.uniri.hr

[3] To nisu prave kutije cigareta, nego žonglerski rekvizit koji se na engleskom zove *cigar boxes*. Obično se trikovi izvode održavanjem u zraku tri ili više takvih kutija oblika kvadra i veličine malo deblje knjige.

[4] Naziv za žonglere koji potječe iz latinskog. Kasnije ih se u Francuskoj naziva *jongleurs* te naposljetku *jugglers* u Engleskoj.

[5] Vodvilj (franc. *vaudeville*) je prvobitno bio francuska narodna pjesma satiričnog sadržaja. Vodvilj je s vremenom zanemario glazbu popularnih arija i postao vrlo vesela komedija zasnovana na komici situacije s namjerom da zabavi gledatelje.

u kazalištima. Pojavom radija, filmova i televizije, vodvilj je gubio sve više i više publike, a do sredine 1950-ih je gotovo potpuno iščeznuo. Mnogi su se žongleri našli bez posla, a ulični žongler postao je uobičajen prizor.

Uskoro nakon toga, žongliranje postaje sve popularnije kao hobi među mladim ljudima, posebice među studentima. Počinju se formirati mnogi žonglerski klubovi na fakultetima i sveučilištima te neke nacionalne i internacionalne udruge. Zanimljivo je da danas u svijetu veliku većinu mladih žonglera amatera čine ljudi čija profesija je vezana za matematiku, fiziku i informatiku. Na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi uvijek se nađe barem nekoliko učenika žonglera. Ron Graham, poznati američki matematičar, bio je predsjednik i *International Jugglers' Association* i *American Mathematical Society*. Prvi matematičar žongler je bio Abu Sahl al-Kuhi iz 10. stoljeća koji je navodno žonglirao s bocama na tržnici u Bagdadu prije nego li je postao matematičar.

Stoga ne iznenađuje da su 1980-ih godina neki od studenata koji su se bavili žongliranjem kao hobijem primijenili neke matematičke metode koje su proučavali u to vrijeme za opisivanje, analizu i modeliranje trikova koje su žonglirali u slobodno vrijeme. To je dovelo do izuma matematičkog jezika žongliranja te definiranja osnovnih pojmova.

U ovom članku bavimo se matematičkim opisom jednostavnog žongliranja (engl. *simple juggling*). To je najjednostavniji model žongliranja koji precizno definiramo u idućem poglavlju. Osnovna literatura koju smo koristili je knjiga [9], čije je drugo poglavlje posvećeno jednostavnom žongliranju. U ostatku knjige javljaju se još složeniji modeli i generalizacije, ali o njima ovdje neće biti riječi. Kao dodatnu literaturu navodimo [1], [2], [4], [10], a preporučujemo i mrežne stranice [7], [8]. Širi sustavan prikaz uličnog kazališta u Hrvatskoj, koji uključuje i žongliranje, dan je u radu [3]. Ovaj članak je nastao kao modifikacija završnog rada [11].

2. Jednostavno žongliranje

Jednostavno žongliranje (engl. *simple juggling*) izvodi jedan žongler koji žonglira ponavljajući (periodični) uzorak[6] s određenim brojem objekata (zvat ćemo ih loptice) koje hvata i baca u konstantnom ritmu. Pri tome se u svakom trenutku hvata i odmah baca najviše jedan objekt (loptica).

2.1. Definicija jednostavnog žongliranja

Preciznije, matematički rečeno, aksiomi jednostavnog žongliranja su sljedeći:

J1. Vrijeme između dva moguća bacanja je konstantno, ali pri tome dozvoljavamo da se neko od njih ne realizira (ne baci se niti jedna loptica).

J2. Uzorak je periodičan, tako da možemo pretpostaviti da naš žongler žonglira zauvijek, tj. ponavlja isti uzorak iznova i iznova.

J3. Za žongliranje se koriste točno dvije ruke. Njima se u svakom trenutku hvata i odmah baca najviše jedna loptica. Baca se ista ona loptica koja je upravo uhvaćena.

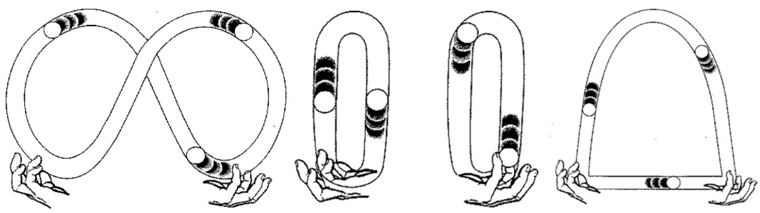
[6] Uzorkom smatramo svaki trik koji izvodi žongler. Određen je položajem svih objekata koje koristi u svakom trenutku.

Na osnovu ovih aksioma uvodimo sada osnovnu terminologiju vezanu uz jednostavno žongliranje. Vremenski period između dva moguća bacanja, koji je konstantan zbog aksioma J1, zovemo *otkucaj*. Broj otkucaja između dva bacanja iste loptice zovemo *visina bacanja*. Bacanje koje traje h otkucaja zovemo *h bacanje* ili *bacanje visine h*. Aksiom J1 kaže i da postoje moguća bacanja koja se ne realiziraju. Takvo bacanje zovemo *nul bacanje* ili *bacanje visine nula*. Dakle, svakom mogućem bacanju, bilo ono realizirano ili ne, pridružena je njegova visina, a to je prirodan broj ili nula.

2.2. Osnovni žonglerski uzorci

Postoje tri uzorka koja žongleri smatraju osnovnim. To su kaskada, fontana i pljusak. Oni zadovoljavaju aksiome jednostavnog žongliranja.

Kaskada (engl. *cascade*) je uzorak u kojem loptice bacamo naizmjence iz jedne u drugu ruku u obliku znaka beskonačnosti. Može se izvoditi jedino s neparnim brojem loptica. Kaskada s tri loptice prikazana je na slici 2 a). Ako imamo crvenu (C), zelenu (Z) i plavu (P) lopticu, onda je CZPCZPCZP... primjer redoslijeda bacanja kod kaskade. Pritom naizmjence bacamo lijevom i desnom rukom.



a) *b)* *c)*

Slika 2. Putanja loptica u osnovnim uzorcima (izvor [2]): a) kaskada, b) fontana, c) pljusak.

Fontana (engl. *fountain*) je žonglerski uzorak u kojem žongler polovinu ukupnog broja loptica žonglira u jednoj ruci, a drugu polovinu u drugoj ruci. Ovaj uzorak može se izvesti jedino s parnim brojem loptica. Fontana s četiri loptice prikazana je na slici 2 b). Ako imamo crvenu (C), zelenu (Z), plavu (P) i sivu (S) lopticu, primjer redoslijeda bacanja kod fontane je CZPSCZPS... pri čemu loptice C i P bacamo jednom rukom, a loptice Z i S drugom.

Pljusak (engl. *shower*) je žonglerski uzorak u kojem su loptice bačene cirkularno. Može se izvoditi s bilo kojim brojem loptica. Pljusak s tri loptice prikazan je na slici 2 c). Kada žongliramo ovaj uzorak, loptica je iz lijeve ruke bačena ravno u desnu, a onda odmah iz desne bačena u zrak. Dakle svaka loptica je bačena dva puta zaredom. Ako imamo crvenu (C), zelenu (Z) i plavu (P) lopticu, primjer redoslijeda bacanja je CCZZPPCCZZPP...

3. Matematički opis žongliranja

Sada ćemo uvesti tri matematička opisa žongliranja. To su žonglerska funkcija, žonglerski dijagram i žonglerski niz. Sva tri opisa su ekvivalentna i vrlo lako se dobiju jedan iz drugog, ali svaki je pogodan za neki tip razmatranja matematičkih svojstava žongliranja.

3.1. Žonglerska funkcija

Budući da prema aksiomu J2 žongliranje traje oduvijek i nikada ne završava, bacanja (otkucaje) možemo numerirati cijelim brojevima. Dakle, svako bacanje označeno je nekim cijelim brojem $i \in \mathbf{Z}$ i zovemo ga i-to bacanje.

U prethodnom poglavlju uočili smo kako je pri jednostavnom žongliranju svakom mogućem bacanju pridružena njegova visina h, što je prirodan broj, ako je bacanje realizirano, odnosno nula, ako bacanje nije realizirano. Dakle, $h \in \mathbf{N}_0$.

Tada imamo preslikavanje

$$j : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}_0,$$

koje i-tom bacanju pridružuje njegovu visinu $h = j(i)$. Drugim riječima za $i \in \mathbf{Z}$ vrijednost funkcije $j(i)$ je visina bacanja loptice na i-to bacanje, ako je loptica bačena, odnosno 0, ako na i-to bacanje nije bačena.

Funkcija j dobivena na ovaj način iz uzorka jednostavnog žongliranja primjer je žonglerske funkcije. Međutim, žonglerska funkcija se definira malo općenitije.

Definicija 1. Funkcija $j : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}_0$ je žonglerska funkcija ako je ispunjen aksiom J3, pri čemu $j(i)$ shvaćamo kao visinu bacanja na otkucaj i.

Uočimo da se u ovoj definiciji uvjet periodičnosti iz aksioma J2 izostavlja. Aksiom J1 se ne spominje, ali je ispunjen samim time što je domena funkcije skup cijelih brojeva. Navedimo sad nekoliko osnovnih primjera.

Primjer 1. Kao što je opisano u prethodnom poglavlju, kaskada se može izvoditi s neparnim brojem $2b - 1$ loptica, gdje je $b \in \mathbf{N}$. Između dva bacanja iste loptice treba po jednom baciti sve ostale loptice. Dakle, visina bacanja svake loptice je upravo jednaka $2b - 1$. Žonglerska funkcija kaskade je stoga konstantna funkcija

$$j(i) = 2b - 1,$$

za svaki $i \in \mathbf{Z}$.

Primjer 2. Fontana se može izvoditi s parnim brojem $2b$ loptica, gdje je $b \in \mathbf{N}$. Kao i kod kaskade, između dva bacanja iste loptice treba po jednom baciti sve ostale pa je visina svakog bacanja $2b$. Stoga je žonglerska funkcija fontane također konstantna funkcija

$$j(i) = 2b,$$

za svaki $i \in \mathbf{Z}$.

Primjer 3. Kod pljuska s b loptica, gdje je $b \in \mathbf{N}$, svaka loptica se baci dva puta za redom, a onda ponovo dolazi na red tek kada se sve ostale loptice bace dva puta za redom. Dakle, visina prvog od dva uzastopna bacanja iste loptice je 1, a drugog $2b - 1$. Stoga je žonglerska funkcija pljuska

$$j(i) = \begin{cases} 1, & \text{za parne } i, \\ 2b - 1, & \text{za neparne } i. \end{cases}$$

Uloga parnih i neparnih brojeva ovdje je potpuno proizvoljna i može se zamijeniti. Naime, pitanje je samo koji potez se odvija na parna bacanja – je li to prebacivanje loptice iz ruke u ruku ili bacanje loptice u zrak.

Primjer 4. Ovo je primjer funkcije koja nije žonglerska. Neka je zadana funkcija

$$j(i)=\begin{cases} 1, & \text{za parne } i, \\ 2, & \text{za neparne } i. \end{cases}$$

Za ovu funkciju aksiom J3 nije ispunjen jer se primjerice na treći otkucaj hvataju istovremeno dvije loptice – ona bačena u prvom bacanju na visinu 2 i ona bačena u drugom bacanju na visinu 1.

Ovaj zadnji primjer pokazuje da bi bilo zgodno imati neki kriterij pomoću kojega se može provjeriti je li neka funkcija žonglerska ili nije. To nam daje sljedeći teorem.

Teorem 1. *Za funkciju $j:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}_0$, neka je $j_+:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ funkcija definirana kao*

$$j_+(i)=i+j(i),$$

za svaki $i\in\mathbf{Z}$. Tada je j žonglerska funkcija ako i samo ako je j_+ bijekcija na skupu cijelih brojeva.

Dokaz. Koje je značenje funkcije j_+? Budući da je $j(i)$ visina loptice bačene na otkucaj i, vidimo da je $j_+(i)=i+j(i)$ otkucaj na koji je ta loptica opet uhvaćena (pa prema aksiomu J3 i idući put bačena). Ako pak na otkucaj i loptica uopće nije bačena, onda je $j_+(i)=i$.

Pokažimo da je za žonglersku funkciju j, funkcija j_+ bijekcija. Surjektivnost se lako vidi jer ako je $n\in\mathbf{Z}$ proizvoljan, onda je na otkucaj n ili bačena neka loptica, ili nije. U prvom slučaju n se dobije kao $n=j_+(i)$ gdje je i prethodni otkucaj u kojem je bačena ta ista loptica. U drugom slučaju $n=j_+(n)$.

Za injektivnost, pretpostavimo da vrijedi $j_+(i_1)=j_+(i_2)$ za neka dva otkucaja i_1 i i_2. Cilj je dobiti da je tada $i_1=i_2$. To je očito ako na oba otkucaja nije bačena loptica, jer je tada

$$i_1=j_+(i_1)=j_+(i_2)=i_2.$$

Ako je pak na oba otkucaja bačena po jedna loptica, onda uvjet $j_+(i_1)=j_+(i_2)$ znači da su obje te loptice uhvaćene na isti otkucaj. Ali to nije u skladu s aksiomom J3, osim ako $i_1=i_2$ što znači da se radi o jednoj te istoj loptici.

Treća mogućnost, odnosno da je na jedan od otkucaja loptica bačena, a na drugi nije, zapravo se ne može dogoditi. Zaista, kad bi na jedan od otkucaja, recimo i_1, loptica bila bačena, a na drugi, tj. i_2, ne bi, onda bi iz uvjeta $j_+(i_1)=j_+(i_2)=i_2$ slijedilo da je na otkucaj i_2 uhvaćena loptica koja je bačena na otkucaj i_1. To bi značilo da je loptica uhvaćena na otkucaj i_2 na koji nije bačena niti jedna loptica. Ali to je u kontradikciji s aksiomom J3 koji kaže da je svaka uhvaćena loptica odmah i bačena.

Time smo dokazali da je za žonglersku funkciju j funkcija j_+ bijekcija. Obratno, ako je j_+ bijekcija, jasno je da je aksiom J3 ispunjen te je stoga j žonglerska funkcija. $\square$

Što je j_+ u prethodnim primjerima? Za kaskadu s $2b-1$ loptica

$$j_+(i)=i+(2b-1),$$

a za fontanu s $2b$ loptica

$$j_+(i)=i+2b.$$

To su linearne funkcije pa stoga bijekcije. Za pljusak s b loptica

$$j_+(i)=\begin{cases} i+1, & \text{za parne } i, \\ i+(2b-1), & \text{za neparne } i. \end{cases}$$

Ova funkcija je također bijekcija. Dokaz prepuštamo čitatelju. U primjeru 4 funkcija j_+ je

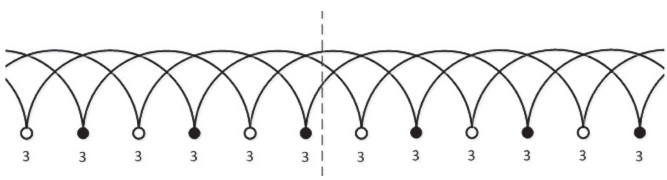
$$j_+(i) = \begin{cases} i+1, & \text{za parne } i, \\ i+2, & \text{za neparne } i, \end{cases}$$

što nije bijekcija jer, na primjer, $j_+(1) = j_+(2) = 3$.

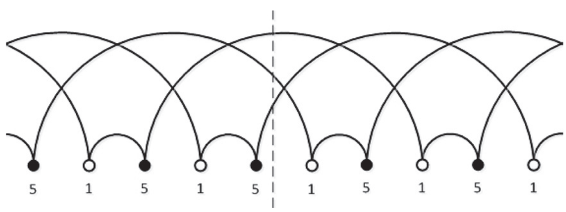
3.2. Žonglerski dijagram

U žonglerskom dijagramu nacrtani su vertikalni pomaci loptica obzirom na otkucaje (vidi slike 3 i 4). U horizontalnoj liniji poredani su na jednakim razmacima kružići koji predstavljaju otkucaje. Parni otkucaji označeni su punim kružićima, a neparni praznim. Luk koji spaja otkucaje prikazuje vertikalno kretanje loptice od bacanja na lijevom kraju luka do hvatanja na desnom. Što je veća visina bacanja, veći i širi je luk koji odgovara bacanju.

Lako je za zadanu žonglersku funkciju $j : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}_0$ nacrtati žonglerski dijagram. Naprosto lukom povezujemo otkucaje i i $i+j(i)$ za svaki $i \in \mathbf{Z}$. Obratno, ako je zadan dijagram, $j(i)$ određujemo kao visinu bacanja predstavljenu lukom čiji je lijevi kraj u i-tom otkucaju.



Slika 3. Žonglerski dijagram za kaskadu s tri loptice.



Slika 4. Žonglerski dijagram za pljusak s tri loptice.

3.3. Žonglerski niz

Podsjetimo da žonglerska funkcija $j : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}_0$ po definiciji ispunjava aksiom J3 (te aksiom J1 jer je domena $\mathbf{Z}$). Postavlja se pitanje kada je ispunjen i aksiom J2, odnosno kada je uzorak periodičan. Očito, to je ako i samo ako se visine bacanja ponavljaju periodički. Drugim riječima, ako i samo ako je j periodična funkcija.

Neka je n najmanji period funkcije j. Tada vrijedi

$$j(i+n) = j(i),$$

za svaki $i \in \mathbf{Z}$. Stoga je dovoljno znati vrijednosti funkcije j za $i = 0, 1, \ldots, n-1$ jer se nakon toga ponavljaju. Neka su te vrijednosti redom

$$s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}.$$

Ovakav konačan niz zovemo žonglerski niz. Dakle, vrijedi $j(i) = s_{i \bmod n}$ za svaki $i \in \mathbf{Z}$.

Definicija 2. Konačan niz $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})$ nenegativnih cijelih brojeva $s_i \in \mathbf{N}_0$ zovemo žonglerski niz, ako je dobiven od uzorka jednostavnog žongliranja na gore opisan način, odnosno ako je $j : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}_0$ definirana formulom $j(i) = s_{i \bmod n}$ žonglerska funkcija.

Uočimo da više nizova odgovara istom uzorku. Naime, ako visine bacanja počnemo bilježiti pri k-tom otkucaju umjesto nultom, dobit ćemo niz

$$s_k, s_{k+1}, \ldots, s_{n-1}, s_0, s_1, \ldots, s_{k-1},$$

koji predstavlja isti uzorak kao i žonglerski niz s iz definicije. Dakle, isti uzorak predstavljaju žonglerski nizovi dobiveni jedan iz drugog cikličkom permutacijom. Na primjer, niz 1, 4, 4, niz 4, 1, 4 te niz 4, 4, 1 predstavljaju isti uzorak.

Odredimo sada žonglerske nizove osnovnih uzoraka. Kaskada i fontana imaju konstantne žonglerske funkcije pa je njihov period jednak jedan. Njihov žonglerski niz je jednočlan i jednak broju loptica koje se koriste. Za kaskadu to je $2b - 1$ jer broj mora biti neparan, a za fontanu $2b$ jer mora biti paran. Žonglerska funkcija pljuska je konstantna na neparnim i na parnim brojevima. Stoga je njen period jednak dva i žonglerski niz 1, $2b - 1$.

Žongleri u praksi rijetko bacaju loptice više od visine 9. Stoga u zapisu žonglerskog niza ne pišu zareze. Tako da, primjerice, pljusak s tri loptice zapisuju kao 15. U žargonu žongleri nazivaju žonglerske nizove engleskim izrazom *site swap*.

Literatura

[1] P. Beek, A. Lewbel, *The Science of Juggling*, Sci. Amer. **273** (1995), no. 5, 92à-97.

[2] J. Buhler, D. Eisenbud, R. Graham, C. Wright, *Juggling drops and descents*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), no. 6, 507–519.

[3] I. Ćosić-Dragan, *Ulično kazalište kraja dvadesetog stoljeća*, diplomski rad, Odsjek za komparativnu književnost, Filozofski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2003./2004.

[4] R. Ehrenborg, M. A. Readdy, *Juggling and applications to q-analogues*, Discrete Math. **157** (1996), no. 1–3, 107–125.

[5] D. Finnigan, *The Complete Juggler*, Jugglebug, Atlanta, 1992.

[6] B. Gillen, *Remember the force Hasan!*, Juggler's World, **38** (1986), no. 2, 9–10.

[7] *International Jugglers' Association*, URL: `www.juggle.org` (pristupljeno 4.11.2012.).

[8] *Juggling Information Service*, URL: `www.juggling.org` (pristupljeno 4.11.2012.).

[9] B. Polster, *The Mathematics of Juggling*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[10] B. Polster, *La matematica della giocoleria*,[7] La Matematica vol. III: Suoni, forme, parole, C. Bartocci, P. Odifreddi, ur., Einaudi, Torino, 2011.

[11] I. Prašnjak, *Matematika žongliranja*,[8] završni rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci, 2011.

[12] I. Prašnjak, N. Grbac, *Matematika žongliranja 2. dio: žonglerski teoremi*, Matematičko-fizički list, u tisku.

[7] Engleski prijevod ovog članka dostupan je na `www.qedcat.com/articles/juggling_survey.pdf` (pristupljeno 10.11.2012.).

[8] Rad je dostupan na zahtjev e-mailom jednom od autora ovog članka.