Matematika žongliranja 2. dio: žonglerski teoremi

Ivana Prašnjak[1], *Neven Grbac*[2]

1. Uvod

Ovaj članak nastavak je od [9] u kojem smo strogo matematički definirali jednostavno žongliranje (i vidjeli da se osnovni žonglerski uzorci uklapaju u tu definiciju), te uveli tri matematička opisa takvog žongliranja: žonglersku funkciju, žonglerski dijagram i žonglerski niz. Prostor nam, nažalost, ne dopušta da ovdje podsjetimo čitatelja na te osnovne pojmove, iako ćemo ih slobodno koristiti. Stoga ga upućujemo da za sve pojmove i oznake, koji ovdje nisu definirani, pogleda članak [9].

U ovom nastavku bavimo se nekim jednostavnijim "žonglerskim" teoremima, odnosno teoremima koji, koristeći opis žongliranja iz [9], daju neke informacije o žonglerskim uzorcima. Za ovu priliku odabrali smo tri problema: određivanje broja loptica potrebnih za žongliranje nekog žonglerskog niza, nalaženje jednostavnog kriterija za utvrđivanje je li neki konačan niz nenegativnih brojeva žonglerski ili nije, te prebrojavanje različitih žonglerskih uzoraka sa zadanim brojem loptica i zadanim minimalnim periodom.

Kao i u prethodnom članku, osnovna literatura je drugo poglavlje knjige [6], a kao dodatnu literaturu navodimo [1], [2], [3], [7] te mrežne stranice [4], [5]. Članak je nastao kao modifikacija završnog rada [8].

2. Žonglirljivost

Sada dolazimo do prvih teorema matematike žongliranja. Vezani su uz broj loptica koje se koriste za uzorak zadan žonglerskim nizom te "žonglirljivost" konačnog niza, kako smo preveli englesku riječ *jugglable*. Pitanja na koja želimo odgovoriti su, na primjer, koliko loptica se žonglira u uzorku čiji žonglerski niz je 15 ili je li konačan niz 321 žonglerski (žonglirljiv).

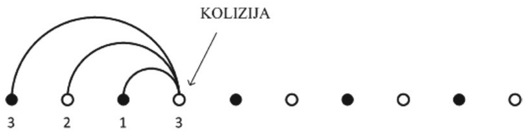
2.1. Iz žonglerskog dijagrama

Crtanjem žonglerskog dijagrama vrlo lako možemo odgovoriti na oba gore postavljena pitanja. Za broj loptica dovoljno je promotriti bilo koji trenutak između dva otkucaja. Tada su sve loptice u zraku pa je njihov broj jednak broju lukova iznad tog trenutka. Zapravo, na dijagramu povučemo vertikalni pravac između dva kružića (otkucaja) i prebrojimo koliko lukova smo tim pravcem presjekli. Na primjer, za niz 15 u gornjem

[1] Autorica je s odjela za matematiku Sveučilišta u Rijeci, e-pošta: iprasnjak2@gmail.com
[2] Autor je s odjela za matematiku Sveučilišta u Rijeci, e-pošta: neven.grbac@math.uniri.hr

dijelu slike 3 u [9] povučen je takav pravac i vidimo da se koriste tri loptice. Za nizove 3 i opet 15 takav pravac je povučen i na slikama 3 i 4 iz [9].

Žonglirljivost konačnog niza također možemo pročitati iz dijagrama. Aksiomi J1 i J2 ispunjeni su samim time što smo crtali dijagram konačnog niza. Za aksiom J3 provjeravamo koliko lukova ulazi i izlazi iz svakog kružića. Aksiom J3 je ispunjen ako i samo ako svaki kružić ili ima točno jedan lijevi i jedan desni kraj luka ili nema niti jedan kraj luka. Na slici 1 prikazan je primjer niza 321 koji nije žonglerski. Započinjemo crtanje prvog luka koji se proteže tri otkucaja i drugog luka koji se proteže dva otkucaja. U ovom trenutku primjećujemo da dvije odgovarajuće loptice moraju biti uhvaćene istovremeno, što je kršenje aksioma J3.



Slika 1. Niz 321 nije žonglerski niz.

2.2. Teorem prosjeka

Kako nije uvijek praktično crtati dijagram (broj loptica ili njihove visine mogu biti jako velike, a i sam niz može biti dug), bilo bi dobro imati kriterij za žonglirljivost konačnog niza te određivanje broja loptica u uzorku koji je zadan žonglerskim nizom $s = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$. Broj loptica daje nam teorem prosjeka iz [2].

Teorem 1. (teorem prosjeka) *Broj loptica potrebnih za žongliranje konačnog niza* $s = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$ *jednak je prosjeku niza*

$$\overline{s} = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}.$$

Umjesto dokaza. Sljedeće razmišljanje pokazuje zašto tvrdnja intuitivno vrijedi, iako ne daje pravi dokaz. Promatramo li žonglerski niz s perioda n, tada svakih n otkucaja bacanju na otkucaj i odgovara jedna loptica u narednih s_i intervala. Dakle, u prosjeku bacanju na otkucaj i odgovara $\frac{s_i}{n}$ loptica. Time dobivamo da je broj loptica potrebnih za žongliranje danog žonglerskog niza jednak $\frac{s_0}{n} + \ldots + \frac{s_{n-1}}{n} = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n} = \overline{s}$.

□

Budući da je broj loptica koje žongliramo uvijek prirodan broj, teorem prosjeka pokazuje da žonglerski niz mora imati cjelobrojan prosjek. To nam daje brži način provjere koji niz *nije* žonglerski, a tu provjeru zovemo *test prosjeka*.

Korolar 2. (test prosjeka) *Ako prosjek konačnog niza nenegativnih cijelih brojeva nije cijeli broj, onda taj niz nije žonglerski niz.*

Obrat prethodne tvrdnje nije istinit. Primjer niza koji ima cjelobrojni prosjek, a nije žonglerski niz, jest niz 321 čiju smo žonglirljivost provjerili na slici 1 pomoću dijagrama.

2.3. Permutacijski test

Test prosjeka ne daje potpun odgovor na pitanje je li dani konačan niz žonglerski ili nije. On samo kaže da niz čiji prosjek nije cijeli broj ne može biti žonglerski. Međutim, ako neki niz ima cjelobrojan prosjek, ovaj test ne daje nikakav odgovor.

Permutacijski test daje potpuni kriterij za žonglirljivost konačnog niza. Dokaz ovog teorema je nešto duži pa ga stoga preskačemo, a zainteresiranog čitatelja upućujemo na drugo poglavlje knjige [6] ili [2].

Teorem 3. (permutacijski test) *Neka je* $s = (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1})$ *konačan niz nenegativnih cijelih brojeva. Konstruiramo novi niz* $s' = (s'_0, s'_1, \ldots, s'_{n-1})$, *gdje je*

$$s'_i = (i + s_i) \bmod n \quad za\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Tada je niz s *žonglerski ako i samo ako je* s' *permutacija skupa* $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Primjer 1. Odredimo jesu li nizovi $s = 6424$ i $s = 513$ žonglerski. Za prvi niz imamo $n = 4$ i

$$s' = (0 + 6, 1 + 4, 2 + 2, 3 + 4) \bmod 4 = (6, 5, 4, 7) \bmod 4 = (2, 1, 0, 3).$$

Budući da je s' permutacija skupa $\{0, 1, 2, 3\}$, zaključujemo, prema permutacijskom testu, da je prvi niz žonglerski. Za drugi imamo $n = 3$ i

$$s' = (0 + 5, 1 + 1, 2 + 3) \bmod 3 = (5, 2, 5) \bmod 3 = (2, 2, 2).$$

Sada s' nije permutacija skupa $\{0, 1, 2\}$ pa drugi niz nije žonglerski. Uočimo da je prosjek drugog niza jednak 3, što je cijeli broj, pa nam test prosjeka o njemu ne bi dao nikakvu informaciju.

3. Žonglerske karte

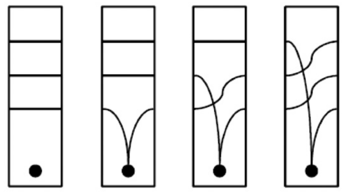
Pitanja vezana uz konstrukciju ili prebrojavanje svih žonglerskih uzoraka sa zadanim svojstvima dovode do vrlo zanimljivih kombinatornih problema. Naravno, žonglerskih uzoraka ima beskonačno, jer je već svaki jednočlani niz b, za $b \in \mathbf{N}$, žonglerski, tako da samo kaskada i fontana s proizvoljnim brojem loptica ima beskonačno (u teoriji, jer u praksi rijetki su žongleri koji znaju žonglirati s $b > 5$ loptica).

Stoga treba postaviti neko ograničenje kako bi se broj uzoraka reducirao na konačan broj. Ovdje se bavimo određivanjem broja žonglerskih uzoraka s točno b loptica minimalnog perioda n. Ovaj primjer je posebno zanimljiv jer se u prebrojavanju koriste takozvane žonglerske karte te Möbiusova formula inverzije iz teorije brojeva (iako postoje i drugačiji dokazi, kao na primjer u [2]). Iskažimo najprije krajnji rezultat.

Teorem 4. *Neka je* $N(n, b)$ *broj žonglerskih uzoraka s točno* $b \geq 1$ *loptica minimalnog perioda* n *(što znači da uzorak nije dobiven od uzorka kraćeg perioda koji* *se nekoliko puta ponovio). Tada vrijedi formula*

$$N(n,b) = \frac{1}{n} \sum_{1 \le d | n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\left((b+1)^d - b^d\right),$$

gdje μ *označava Möbiusovu funkciju.*[3]



C_0 C_1 C_2 C_3

Slika 2. Četiri žonglerske karte C_0, C_1, C_2, C_3 *za slučaj* $b = 3$.

Prije dokaza objasnimo što su žonglerske karte i kako se koriste u prebrojavanju žonglerskih uzoraka (nizova). Prvi put se javljaju u članku [3]. Započinjemo s primjerom u kojem se promatraju žonglerski uzorci s najviše tri loptice. Za njih trebamo špil karata koji se sastoji od beskonačno mnogo primjeraka svake od četiri karte C_0, C_1, C_2, C_3 sa slike 2.

Promiješamo špil i slučajno izaberemo n karata. Stavimo ih ispred sebe i ponovimo isti redoslijed karata beskonačno puta lijevo i desno. U primjeru prikazanom na donjem dijelu slike 3 izabrali smo dvije potamnjene karte C_1 i C_3. Time dobivamo žonglerski dijagram žonglerskog niza perioda n s najviše tri loptice. Uočimo da svakom žonglerskom nizu odgovara točno jedan određeni skup od n karata špila. Iz tako konstruiranog žonglerskog dijagrama jasno je o kojem se nizu radi. Na slici 3 radi se o nizu 15, odnosno pljusku s tri loptice.

Napomenimo da, ako ne koristimo niti jednu kopiju posljednje karte C_3 sa slike 2, završit ćemo s barem jednom kontinuiranom horizontalnom linijom na vrhu, jer sve karte osim C_3 imaju na vrhu barem jednu ravnu liniju. To znači da žonglerski niz ne koristi više od dvije loptice. U stvari, najveći indeks među kartama koje tvore niz jednak je broju korištenih loptica.

Upravo opisanim postupkom svakom odabiru niza od n karata iz špila pridružili smo žonglerski niz perioda n (ne mora biti minimalni period) koji koristi najviše tri loptice (tj. prosjek mu je najviše tri zbog teorema prosjeka).

Obratno, sada treba proizvoljnom žonglerskom nizu s najviše tri loptice perioda n (ne minimalnog) pridružiti niz žonglerskih karata. Započinjemo crtanjem uobičajenog žonglerskog dijagrama niza kao u gornjem dijelu slike 3 za niz 15. Svakom broju u žonglerskom nizu odgovara jedna karta.

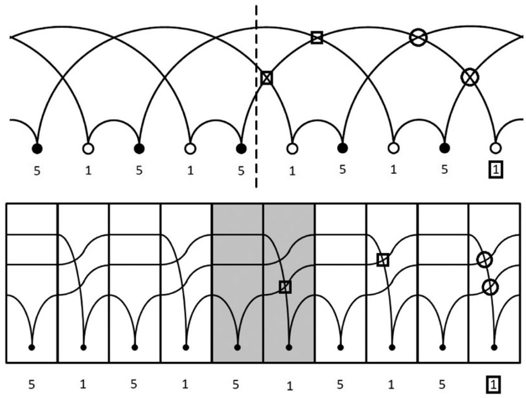
Ako je broj 0, tada odabiremo kartu C_0 i stavljamo je iznad broja 0. Odaberimo broj $x \neq 0$ iz žonglerskog niza (na slici 3 odabrali smo broj 1 i to naglasili kvadratićem

[3] Möbiusova funkcija μ definirana je za $m \in \mathbf{N}$ formulom

$$\mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{ako } m = 1 \text{ ili ako je } m \text{ kvadratno slobodan i ima paran broj prostih faktora,} \\ -1, & \text{ako je } m \text{ kvadratno slobodan i ima neparan broj prostih faktora,} \\ 0, & \text{ako } m \text{ nije kvadratno slobodan.} \end{cases}$$

Podsjetimo da je m kvadratno slobodan ako se u njegovom rastavu na proste faktore svaki prosti broj javlja najviše jednom. Möbiusova funkcija je važna multiplikativna aritmetička funkcija koja ima mnoga interesantna svojstva, ali to je već tema za neki drugi članak.

oko njega). Od kružića koji predstavlja odgovarajući otkucaj na žonglerskom dijagramu slijedimo pripadni luk unatrag (ulijevo) i promatramo sjecišta s drugim lukovima. Kada presijecamo neki luk možemo ga presijecati iznutra prema van ili obrnuto. U prvom slučaju prijelaz označimo kružićem, a u drugom slučaju kvadratićem. Ako dobijemo k kružića, odaberemo kartu C_{k+1} te je stavimo iznad broja x.



Slika 3. Veza žonglerskog dijagrama (gore) i žonglerskih karata (dolje) za žonglerski niz 15.

U našem primjeru, iznad broja 1 treba staviti kartu C_3, jer kao što vidimo na slici 3 dobili smo dva kružića. Ponovimo postupak za sve brojeve u nizu. U našem primjeru iznad broja 5 treba staviti kartu C_1 jer na odgovarajućem luku nema kružića. Na taj način dobili smo žonglerske karte pridružene nizu.

Očito su ove dvije konstrukcije (pridruživanja nizova kartama i obratno) jedna drugoj inverzne pa pokazuju da je broj žonglerskih nizova perioda n s najviše tri loptice jednak broju nizova od n žonglerskih karata iz našeg špila. Takvih nizova ima 4^n po teoremu o uzastopnom prebrojavanju jer na svako od n mjesta možemo staviti bilo koju od 4 različite karte. Uočimo da smo na ovaj način prebrojili sve moguće nizove perioda n s najviše tri loptice uključujući i one čiji minimalni period nije n nego neki njegov djelitelj te cikličke permutacije niza brojimo kao različite nizove iako oni daju isti žonglerski uzorak (to smo objasnili u poglavlju 3.3 iz [9]).

Kako ovaj postupak poopćiti na proizvoljan broj loptica b? Treba nam špil od beskonačno mnogo primjeraka svake od $b+1$ karata $C_0, C_1, \ldots, C_b$ koje crtamo po uzoru na već opisani primjer $b=3$. Karta C_0 se sastoji od b horizontalnih linija. Na karti C_k, za $k \geq 1$, počevši od lijeve strane, k-ta linija brojana odozdo spušta se u kružić (koji predstavlja otkucaj) i zatim nastavlja kao najniža linija na desno. Linije iznad upravo opisane k-te linije su horizontalne, a one ispod penju se za jedan nivo.

Konstrukcije opisane na primjeru $b=3$ mogu se na isti način primijeniti i za proizvoljan broj loptica. Označimo s $S_{\leq}(n,b)$ broj žonglerskih nizova s najviše b loptica perioda n s time da se cikličke permutacije broje kao različiti nizovi, a minimalni period može biti i djelitelj od n (ne mora biti baš n). Dakle, $S_{\leq}(n,b)$ broji upravo nizove koji se dobiju preko žonglerskih karata. Stoga,

$$S_{\leq}(n,b) = (b+1)^n,$$

i to za svaki $b \geq 0$ jer s nula loptica isto imamo jedan uzorak – onaj u kojem ne radimo baš ništa.

Naglasimo važnost žonglerskih karata pri ovom prebrojavanju. Bez njih bilo bi puno teže prebrojati žonglerske nizove (iako ne i nemoguće, vidi [2]). One daju zgodan alat za sustavan popis svih žonglerskih nizova. Nije rijetko u svijetu da žongleri uvijek sa sobom nose jedan špil žonglerskih karata (ne beskonačan, ali dovoljno velik).

Dokaz teorema 4. Najprije odredimo koliko ima žonglerskih nizova u smislu prebrojavanja sa žonglerskim kartama perioda n s baš *točno* $b \geq 1$ loptica. Označimo taj broj s $S(n,b)$. Da bi izračunali $S(n,b)$, jasno je da treba od broja nizova s najviše b loptica oduzeti one s najviše $b-1$ loptica. Dakle,

$$\begin{aligned} S(n,b) &= S_{\leq}(n,b) - S_{\leq}(n,b-1) \\ &= (b+1)^n - b^n, \end{aligned}$$

za svaki $b \geq 1$.

Izračunajmo sada $S(n,b)$ na drugi način tako što ćemo za svaki pozitivni djelitelj d od n posebno pobrojiti koliki je doprinos broju $S(n,b)$ nizova s točno b loptica minimalne duljine d. Taj doprinos je jednak

$$d \cdot N(d,b),$$

jer se svaki od uzoraka koje broji $N(d,b)$ javlja d puta. Naime, u $S(n,b)$ cikličke permutacije istog uzorka brojimo kao različite, a njih ima točno d. Zaključujemo da je

$$S(n,b) = \sum_{1 \leq d | n} d \cdot N(d,b)$$

za svaki $b \geq 1$.

Teorem slijedi iz Möbiusove formule inverzije[4] koju primjenjujemo na funkcije $f(m) = S(m,b)$ i $g(m) = m \cdot N(m,b)$. $\square$

Literatura

[1] P. Beek, A. Lewbel, *The Science of Juggling*, Sci. Amer. **273** (1995), no. 5, 92à-97.

[2] J. Buhler, D. Eisenbud, R. Graham, C. Wright, *Juggling drops and descents*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), no. 6, 507–519.

[3] R. Ehrenborg, M.A. Readdy, *Juggling and applications to q-analogues*, Discrete Math. **157** (1996), no. 1–3, 107–125.

[4] *International Jugglers' Association*, URL: www.juggle.org (pristupljeno 4.11.2012.).

[5] *Juggling Information Service*, URL: www.juggling.org (pristupljeno 4.11.2012.).

[6] B. Polster, *The Mathematics of Juggling*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[7] B. Polster, *La matematica della giocoleria*,[5] La Matematica vol. III: Suoni, forme, parole, C. Bartocci, P. Odifreddi, ur., Einaudi, Torino, 2011.

[8] I. Prašnjak, *Matematika žongliranja*,[6] završni rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci, 2011.

[9] I. Prašnjak, N. Grbac, *Matematika žongliranja 1. dio: matematički opis žongliranja*, Matematičko-fizički list, 3/ 251, 2012.–2013., 179–185.

[4] Ako su f i g funkcije definirane na $\mathbf{N}$ takve da vrijedi $f(n) = \sum_{1 \leq d | n} g(d)$ za svaki $n \in \mathbf{N}$, tada Möbiusova formula inverzije glasi $g(n) = \sum_{1 \leq d | n} \mu(n/d) f(d)$.

[5] Engleski prijevod ovog članka dostupan je na www.qedcat.com/articles/juggling_survey.pdf (pristupljeno 10.11.2012.).

[6] Rad je dostupan na zahtjev e-mailom jednom od autora ovog članka.