Dva dokaza jedne trigonometrijske jednakosti

Bojan Kovačić[1]

Jedna od najpoznatijih matematičkih konstanti svakako je omjer zlatnoga reza ili zlatni broj. Ta je konstanta

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \tag{1}$$

(Više o omjeru zlatnoga reza može se naći u [1].) Lako se pokaže da ta konstanta ima sljedeća svojstva:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^2 &= \varphi + 1, \\ \frac{2}{\varphi} &= \sqrt{5} - 1, \\ \frac{2}{\varphi^2} &= 3 - \sqrt{5}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Sada ćemo na dva različita načina dokazati jednakost

$$\cos\left(\frac{\pi}{\varphi+1}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\varphi}\right) = 0. \tag{3}$$

Prvi je dokaz zapravo izvod jednakosti (3), dok je drugi "standardni" algebarsko-trigonometrijski dokaz.

Dokaz I

Najprije ćemo riješiti sljedeći

Zadatak. Odredimo pravokutan trokut kojemu je jedna kateta duljine 1, a mjere kutova su ujedno tri uzastopna člana danoga geometrijskog niza.

Rješenje. Neka su α i β mjere šiljastih kutova traženog trokuta. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $0 < \alpha \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}$. Vrijednosti α, β i $\frac{\pi}{2}$ u danom poretku tvore tri uzastopna člana istoga geometrijskog niza ako i samo ako vrijedi

$$\beta^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \alpha. \tag{4}$$

(Više o nužnom i dovoljnom uvjetu da tri realna broja tvore uzastopne članove geometrijskog niza vidi u [3], 1. dio.)

S druge strane, zbroj mjera α i β treba biti jednak $\frac{\pi}{2}$, pa mora vrijediti jednakost

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

[1] Autor je viši predavač na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu, e-pošta: bojan.kovacic@tvz.hr

Jednadžbe (4) i (5) tvore sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice. Njegovim rješavanjem dobijemo

$$(\alpha, \beta) = \left[\frac{\pi}{4}\left(3-\sqrt{5}\right), \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)\right]. \tag{6}$$

Dokažimo sada jednakost (3).

Uz standardne oznake u pravokutnom trokutu (a je duljina katete nasuprot kuta čija je mjera α itd.), bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a = 1$. Tada iz

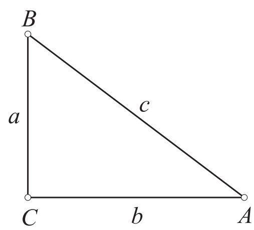
$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)\right] \\ \frac{a}{c} &= \sin\alpha = \sin\left[\frac{\pi}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)\right] \end{aligned} \tag{7}$$

slijedi

$$(b, c) = \left(\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)\right], \frac{1}{\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)\right]}\right). \tag{8}$$

Koristeći drugu i treću jednakost iz (2), (8) možemo zapisati u obliku

$$(b, c) = \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right), \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2\varphi^2}\right)}\right] \tag{9}$$



Dakle, traženi trokut je pravokutan kojemu su duljine stranica 1, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right)$ i $\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2\varphi^2}\right)}$ (vidi sliku 1).

Primjenom Pitagorinog poučka na duljine stranica dobivenog trokuta dobivamo:

$$1^2 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2\varphi^2}\right)}. \tag{10}$$

Koristeći identitete

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x, \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}, \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) \end{aligned} \tag{11}$$

(vidi [2], 1. dio), jednakost (10) možemo dalje transformirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right)} &= \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2\varphi^2}\right)}, \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right) &= \sin^2\left(\frac{\pi}{2\varphi^2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&1-\sin^2\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2\varphi^2}\right),\\
&\sin^2\left(\frac{\pi}{2\varphi^2}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2\varphi}\right)=1,\\
&\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2\varphi^2}\right)\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2\varphi}\right)\right]=1,\\
&\cos\left(\frac{\pi}{\varphi^2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{\varphi}\right)=0.
\end{aligned}$$

Koristeći prvu jednakost iz (2), posljednju možemo zapisati u obliku:

$$\cos\left(\frac{\pi}{\varphi+1}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{\varphi}\right)=0,$$

a to je upravo (3). $\square$

Dokaz II

Dokažimo najprije jednakost

$$\frac{1}{\varphi+1}+\frac{1}{\varphi}=1. \tag{12}$$

Imamo redom:

$$\frac{1}{\varphi+1}+\frac{1}{\varphi}=\frac{\varphi+(\varphi+1)}{(\varphi+1)\varphi}\overset{\text{prema (2)}}{=}\frac{\varphi+\varphi^2}{\varphi^2+\varphi}=1.$$

Koristeći formulu

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{13}$$

dobivamo:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{\varphi+1}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{\varphi}\right)&\overset{\text{prema (13)}}{=}2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{\varphi+1}+\frac{\pi}{\varphi}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{\varphi+1}-\frac{\pi}{\varphi}}{2}\right)\\
&=\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\varphi+1}+\frac{1}{\varphi}\right)\right]\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\varphi+1}-\frac{1}{\varphi}\right)\right]\\
&\overset{\text{prema (12)}}{=}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)}_{=0}\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\varphi+1}-\frac{1}{\varphi}\right)\right]=0,
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. $\square$

Zaključno napomenimo da se primjenom Eulerove formule

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x, \tag{14}$$

odnosno jednakosti

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \tag{15}$$

jednakost (3) može zapisati u obliku

$$e^{i\cdot\frac{\pi}{\varphi+1}}+e^{-i\cdot\frac{\pi}{\varphi+1}}+e^{i\cdot\frac{\pi}{\varphi}}+e^{-i\cdot\frac{\pi}{\varphi}}=0. \tag{16}$$

Time se u jednoj jednakosti implicitno povezuju četiri različite matematičke konstante: e, i, π i φ. (O Eulerovoj formuli i nekim njezinim posljedicama vidi npr. [4].)

Literatura

[1] A. DUJELLA, *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, 2000.

[2] B. DAKIĆ, N. ELEZOVIĆ, *Matematika* 3 (1. i 2. dio), udžbenik za 3. razred gimnazije, Element, Zagreb, 2009.

[3] B. DAKIĆ, N. ELEZOVIĆ, *Matematika* 4 (1. i 2. dio), udžbenik za 4. razred gimnazije, Element, Zagreb, 2009.

[4] S. KUREPA, *Matematička analiza* 1 (*Diferenciranje i integriranje*), Školska knjiga, Zagreb, 1997.