



Malo relativistike

Petar Žugec¹, Bruno Klajn²

Uvod

Zasigurno ste mnogo puta čuli za teoriju relativnosti – specijalnu ili opću – i, vezano uz to, da se ponekad objekti kreću relativističkim brzinama ili da je u fizici potrebno provesti relativistički račun. U ovom članku pokušat ćemo vam približiti na primjeru najosnovnijih relativističkih računa kako se relativistički tretman razlikuje od tzv. klasičnog. Na kraju ćemo prikazati i jedan sasvim paradoksalan ishod – da relativistički račun, čija su osnovna polazišta poprilično udaljena od intuicije građene na svakodnevnom iskustvu, ponekad može polučiti intuitivniji rezultat od klasičnoga. S obzirom da je u srednjim školama vrlo malen dio satnice posvećen konkretnim relativističkim računima, čitatelj koji nije već upoznat s osnovnim relativističkim izrazima morat će nam vjerovati na riječ kad se pozovemo na neke od relativističkih formula, jezgru kojih čine tzv. Lorentzove transformacije. Na sreću, zainteresirani čitatelj uvijek može pronaći pregršt informacija na internetu o fizikalnoj/povijesnoj motivaciji za uvođenje Lorentzovih transformacija (odnosno za zamjenu Galilejevih transformacija Lorentzovima) te o njihovom izvodu, značenju i primjeni. Ključne riječi pretrage pri tome su, naravno, *Lorentzove transformacije*. Detaljna priča o njihovom porijeklu, nažalost, nadilazi opseg ovog članka.

Pojasnimo prvo odnos između relativističke i klasične fizike. Svi fizikalni procesi u svemiru – koji su se ikada dogodili i koji će se ikada dogoditi, koji se događaju svugdje i na svim skalama, od pojedinog elektrona iz molekule kisika u zraku koji udišemo do supermasivnih crnih rupa u središtima galaksija – u svojoj su srži relativistički. Ono što nazivamo klasičnom fizikom – kojom se vodimo u svakodnevnom životu i u čijim konceptima obično razmišljamo – tek je aproksimacija relativističkih računa. Stoga pojmove *relativistički* i *klasično* obično koristimo u užem značenju. Kad kažemo da je neki proces relativistički, podrazumijevamo da dovoljno odstupa od klasičnog opisa da rezultati koje klasični račun daje nisu više primjereni. Kada, pak, kažemo da je proces klasičan (a nijedan nije u srži, s obzirom da se relativistički principi ne uključuju ili isključuju po potrebi, već su uvijek “aktivni”), smatramo da je opis procesa principima klasične fizike sasvim dobra aproksimacija relativističkih računa. Sasvim prirodno, postavlja se pitanje zašto onda stalno i sve ne računamo relativistički? Odgovor je vrlo jednostavan: jer relativistički računi vrlo brzo postaju bitno složenijima od klasičnih, a uz neznatnu i neisplativu dobit pokušamo li ih primijeniti onda kad za njima nema praktične potrebe.

Koliko je zapravo klasična aproksimacija dobra i kako znati kad je treba napustiti u korist relativističkog tretmana? Činjenica da za napuštanjem klasičnih računa nije

¹ Autor je nuklearac-eksperimentalac na Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.

² Autor je čestičar-teoretičar na Zavodu za teorijsku fiziku Instituta Ruder Bošković u Zagrebu.

bilo potrebe sve do početka 20. stoljeća (kad su udareni temelji Einsteinove teorije relativnosti) dovoljno govori o njihovoj izvrsnosti. Pri tome, naravno, treba uzeti u obzir da je “prava” fizika rođena krajem 17. stoljeća Newtonovim eksplozivnim otkrićem diferencijalnog računa, zakona mehanike i općeg zakona gravitacije. Moderni svijet u kojem danas živimo odjek je ove singularne detonacije koja je pokrenula lančanu reakciju znanstvenih otkrića. Dakle, tijekom više od 200 godina intenzivnog razvoja fizike, potreba za uvođenjem principa Einsteinove relativnosti nije se razotkrila niti najboljim fizičarima tog vremena. Razmislimo li do kakvih spoznaja o svijetu mi sami možemo doći na temelju vlastitih opažanja iz svakodnevnog života, nedvojbeno ćemo zaključiti da bi malo tko od nas uopće čuo za principe Einsteinove relativnosti da nismo privilegirani mogućnošću formalnog obrazovanja. *Otkriće* zakona jedne dublje realnosti koja vješto izmiče svakodnevnom iskustvu, čini se, rezervirana je samo za najveće i najupornije genije ljudske povijesti. Na drugo pitanje – kada relativistički tretman uopće postaje potrebnim – postoji grubi odgovor (svojevrsni *rule of thumb*): kad kinetička energija objekta postane usporediva s njegovom energijom mirovanja, pri čemu je ona $E = mc^2$ određena njegovom masom m i brzinom svjetlosti c u vakuumu. O ovoj slavnoj vezi mase i energije bit će više riječi kasnije.

Pokažimo na konkretnom primjeru koliko je klasična aproksimacija zapravo dobra. Zamislimo promatrača koji stoji uz cestu i vidi dva vozila u suprotnim trakama koji se gibaju jedno prema drugom. Promatrač mjeri da se jedno vozilo kreće brzinom v_1 , a drugo brzinom v_2 . Koliku će brzinu približavanja (odnosno, relativnu brzinu v_r) mjeriti vozači iz svojih vozila? Klasičan odgovor, sasvim intuitivan i opravdan svakodnevnim iskustvom, jest

$$v_r = v_1 + v_2. \quad (1)$$

Ovaj izraz predstavlja tzv. Galilejevu transformaciju brzina. No “malo bolji” odgovor je onaj koji nam nudi specijalna teorija relativnosti:

$$v_r = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (2)$$

i on je posljedica Lorentzovih transformacija prostora i vremena između različitih sustava (u ovom slučaju sustava vozača i sustava promatrača uz cestu), nije nimalo očit i ne da se objasniti domišljatom “igrom riječima”. No u potpunosti je opravdan i potvrđen opažanjima procesa koji nisu spremno dostupni svakodnevnom iskustvu – na primjer, procesa na (sub)atomske i kozmičke skali – te mjerenjima čija preciznost daleko nadilazi preciznost mjernih uređaja kojima se svakodnevno koristimo. Provjerimo koliko je zapravo odstupanje izraza (1) spram izraza (2). Uzmimo $v_1 = v_2 = 300$ km/h, što je otprilike maksimalna brzina uobičajenih kopnenih vozila. Sasvim jednostavno, izraz (1) daje odgovor: $v_r = 600$ km/h, dok izraz (2) – uz brzinu svjetlosti u vakuumu jednaku $c = 3 \cdot 10^8$ m/s = $1.08 \cdot 10^9$ km/h – kaže: $v_r = 599.9999999995$ km/h, odnosno relativistička popravka nalazi se tek na 14. znamenki! Ne samo da je ovolika razina preciznosti za potrebe kopnenog prijevoza nepotrebna, štoviše beskorisna, već je praktički nemjerljiva! Uzrok ovakve beznačajne razlike je, naravno, zanemarivost brzina o kojima govorimo spram brzine svjetlosti c , koja se u izrazu (2) pojavljuje kao jedina konstanta i kao takva jasno ukazuje da relativistički tretman postaje bitan tek kad su brzine gibanja usporedive s brzinom svjetlosti. Primijenimo li isti račun na dva aviona od kojih se svaki giba nadzvučnom brzinom od 11 800 km/h (Mach 9.68; trenutni službeni rekord iz Guinnessove knjige rekorda) – što je još uvijek samo udio od 10^{-5} brzine svjetlosti – dobit ćemo klasični rezultat od $v_r = 23\,600$ km/h, a relativistički od $v_r = 23\,599.999997$ km/h, koji unosi popravku na 11. znamenki. Dakle, ovo je mjera najvećeg utjecaja koji relativistika može imati u “svakodnevnim” ljudskim aktivnostima.

Bez problema zaključujemo da je u takvim okolnostima klasični opis svijeta i više nego primjeren. No usporedimo predviđanja izraza (1) i (2) u slučaju objekata koji se gibaju praktički brzinom svjetlosti: $v_1 = v_2 \approx c$. Ovaj scenarij sasvim je uobičajen u svijetu elementarnih čestica te je svakodnevnica na Velikom hadronskom sudarivaču (LHC – *Large Hadron Collider*) u CERN-u. Dok je klasično predviđanje iz (1) jednako $v_r = 2c$, relativističko iz (2) je $v_r = c$. Ovaj rezultat jedan je od temeljnih zaključaka specijalne teorije relativnosti: relativna brzina nikojih dvaju elemenata stvarnosti ne može premašiti brzinu svjetlosti u vakuumu³.

Vratimo se na trenutak izrazu (2). Primijetimo da čim je jedna od brzina iz jednadžbe (2) jednaka brzini svjetlosti c , relativna brzina dvaju fizikalnih objekata odmah postaje jednakom brzini svjetlosti, bez obzira na brzinu v drugog objekta:

$$v_r = \frac{v + c}{1 + \frac{vc}{c^2}} = c. \quad (3)$$

Ovo je nepogrešiv potpis i izravna posljedica jednog od dvaju postulata Einsteinove specijalne relativnosti: **brzina svjetlosti u vakuumu jednaka je u svim referentnim sustavima!** Drugim riječima, fizikalni objekt (poput fotona – bezmasenog kvanta svjetlosti) koji se giba brzinom svjetlosti c u jednom sustavu, giba se istom brzinom u svim sustavima! Drugi postulat nalaže da **svi fizikalni zakoni imaju jednak oblik u svim sustavima koji se jedan spram drugoga gibaju jednolikom brzinom**. I dok je drugi postulat vrlo intuitivan, gotovo banalan, prvi je izvor sve “čudnovatosti” Einsteinove relativnosti. Tvrdnja da će nam se svjetlost u vakuumu uvijek udaljavati ili približavati jednakom brzinom, koliko god i u kojem god smjeru se mi ubrzali, u potpunosti je eksperimentalno utemeljena. No pri tome valja razumjeti da taj postulat nije proizvoljno donesen pa tek onda potvrđivan mjerenjima, već su ispočetka postojala ranija mjerenja zbog kojih je postalo nužno uvesti ga! Dakle, iako su i ranije postojale matematičke osnove Einsteinove relativnosti, ona nije razvijena i prihvaćena kao fizikalna teorija stvarnog svijeta tek na temelju neke proizvoljne slutnje ili “općih principa”, već na temelju stvarnih, unaprijed provedenih eksperimenata (čitatelja pri tome upućujemo na *Michelson-Morleyjev eksperiment*).

Dakle, eksperimentalna opažanja su ta koja su dovela do razvoja Einsteinove relativnosti kao ozbiljnog opisa stvarnosti. No kao svaka dobra fizikalna teorija, jednom razvijena do odgovarajućeg stupnja, ona daje i određena vlastita predviđanja. Jedno od njih – kao matematički nužna posljedica dvaju navedenih postulata – tvrdnja je da je brzina svjetlosti c u vakuumu najviša moguća brzina relativnog gibanja bilo kojih dvaju fizikalnih objekata. Ovo predviđanje – koje smo već dali naslutiti na ranijem primjeru dvaju protona – izravno otvara mogućnost eksperimentalne provjere koji od dvaju opisa stvarnosti – klasičnog i relativističkog – je ispravan, ili barem ispravniji. Naime, klasični opis ni na koji način ne ograničava brzinu gibanja fizikalnih objekata – dokle god objektu mase m povećavamo kinetičku energiju E_k , brzina v će mu rasti u skladu s relacijom:

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} \implies \lim_{E_k \rightarrow \infty} v = \infty. \quad (4)$$

Međutim, Einsteinova teorija relativnosti nalaže (što, ponovno, nije nimalo očito):

$$v = \frac{c\sqrt{E_k(E_k + 2mc^2)}}{E_k + mc^2} \implies \lim_{E_k \rightarrow \infty} v = c \quad (5)$$

³ Ovo vrijedi sve dok se uz gibanje fizikalnih objekata kroz prostor u priču ne umiješa i širenje samog prostora (koje je u domeni opće teorije relativnosti) koje dodatno doprinosi njihovom udaljavanju.

te tvrdi da je izraz (4) tek niskoenergijska aproksimacija izraza (5). Za potrebe eksperimenta uzmimo “najrelativističkiji” ljudskom rukom stvoren objekt na Zemlji – protonski snop s CERN-a. Svaki od protona mase⁴ $(1 \text{ GeV})/c^2$ u tom snopu ubrzan je do energije od 4 TeV. Uvrštavanje ovih vrijednosti u izraz (4) predviđa brzinu protona od $v = \sqrt{8000}c \approx 90c$, dok izraz (5) rezultira vrijednošću neznatno manjom od brzine svjetlosti, točnije: $v = 0.99999997c$. Razlika između brzine svjetlosti i 90 puta veće brzine na CERN-u se vrlo lako mjeri, i sva, ikad provedena mjerenja nedvojbeno potvrđuju da brzina svjetlosti nikad nije premašena, a kamoli tek prekoračena 90 puta!

Ekvivalencija mase i energije

Jedan od prvih rezultata specijalne teorije relativnosti slavna je Einsteinova relacija $E = mc^2$. No koje je njeno značenje? Čitatelj je zasigurno upoznat s klasičnim izrazom za kinetičku energiju tijela: $E = mv^2/2$. Ovaj izraz kaže da tijelo mase m koje se giba brzinom v ima toliku kinetičku energiju. No izraz $E = mc^2$ znači da je masa m **jednaka** tolikoj energiji! Tu energiju radi jasnoće i razlikovanja od drugih oblika energije nazivamo *energijom mirovanja*. No kako znamo da je ovakva interpretacija ispravna? Može li se masa m doista pretvoriti u druge oblike energije pa da bismo sa sigurnošću mogli tvrditi da masa ima svojstva energije, naizgled potpuno nekompatibilne fizikalne veličine? Odgovor je nedvosmislen: da, može! Na (sub)atomske razine prijelaz mase u druge oblike energije (npr. elektromagnetsko zračenje) sasvim je uobičajena pojava. Na primjer, izmjena mase i energije redovit je proces tijekom neelastičnih nuklearnih reakcija. Izvor energije proizvedene – točnije rečeno, oslobođene – u nuklearnim reaktorima upravo je pretvorba dijela mase teških atomskih jezgara u druge oblike energije tijekom procesa nuklearne fisije (cijepanja jezgara). Izvor energije u zvijezdama poput Sunca suprotan je proces – nuklearna fuzija (stapanje jezgara) – tijekom kojeg se manje od 1 % mase pretvara u druge oblike energije, a to je najučinkovitiji čovjeku poznat mehanizam proizvodnje energije⁵! No svaku sumnju u ekvivalenciju mase i energije uklanja proces *anihilacije materije*, koji je **potpuna** pretvorba mase u energiju. Za anihilaciju materije potreban je susret materije s antimaterijom – npr. elektrona s njegovom antičesticom: pozitronom – pri čemu se masa, odnosno “materijal” od kojih su čestice građene potpuno pretvara u elektromagnetsko zračenje, koje je čista energija. Sve ovo eksperimentalno su potvrđeni procesi, koji su mnogo uobičajeniji nego što se isprva može učiniti. Na stranu činjenica da smo tim procesima svakodnevno okruženi, s obzirom da nas prirodna radioaktivnost i kozmičko zračenje neprestano snabdjevaju visokoenergijskim česticama koje izazivaju tvorbu antimaterije te njenu anihilaciju u druge oblike materije, među kojima je i elektromagnetsko zračenje. U

⁴ Elektronvolt (eV) je uobičajena jedinica energije u fizici na molekularnoj i submolekularnoj (dakle, atomskoj i subatomskoj) skali. Jednak je energiji koju elementarni naboj ($e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) dobije ubrzanjem kroz razliku potencijala od 1 V, dakle: $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Predmeci *mega* (M), *giga* (G) i *tera* (T) imaju svoje uobičajeno značenje, dakle: $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$, $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$ te $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$. Izražavanje mase preko energije mirovanja uobičajeno je na tim skalama zbog ekvivalencije mase i energije ($E = mc^2$), o kojoj će uskoro biti riječi.

⁵ Oslobođanje energije pri pukom vezivanju ili razvezivanju jezgara moguće je zato jer je masa atomskih jezgara različita od zbroja masa pojedinih nukleona (protona i neutrona). Ovaj efekt povijesno je poznat kao *defekt mase*, no danas ga jednostavno pripisujemo *energiji vezanja* jezgre, koja je posljedica interakcija među nukleonima. Na taj način “nemaseni” oblici energije – koji, na primjer, mogu biti posljedica elektromagnetskih i/ili nuklearnih interakcija – mijenjaju masu jezgre, upravo zbog ekvivalencije mase i energije, koja omogućuje njihovu slobodnu izmjenu.

Ljudskim djelatnostima proizvodnja antimaterije i njena anihilacija osnovni su mehanizmi u funkcioniranju PET-pregleda (*pozitronska emisijska tomografija*) u bolnicama, s kojima malo tko da nije upoznat, a mnogi i iz prve ruke.

U nuklearnoj fizici pretvorba mase u energiju posebno je bitna tijekom (neelastičnih) nuklearnih reakcija. U takvim reakcijama mijenja se čestična struktura ili stupanj pobuđenja sudionika reakcije. Pri tome možemo reći da je zajednički nazivnik svih takvih reakcija promjena mase sudionika, s obzirom da – prema svemu do sada navedenom – i unutarnja pobuđenja čestica ili sustava čestica smatramo promjenom njihove mase. Tako, na primjer, pobuđena stanja jezgre ^{12}C sva predstavljaju jezgre iste vrste – one od 6 protona i 6 neutrona – no različitih masa. Pri tome je pobuđena jezgra masivnija od nepobuđene (odnosno one u osnovnom stanju) ili manje pobuđene. Samo jedan od nbrojenih primjera neelastičnih nuklearnih reakcija sudar je neutrona s jezgrom ^6Li , pri čemu se ona odlama na triton (jezgru ^3H , što je vodik s jednim protonom i dva neutrona) i α -česticu (jezgru ^4He , odnosno helij s dva protona i dva neutrona): $n + ^6\text{Li} \rightarrow t + \alpha$. No pri tome je ukupna masa prije reakcije (dakle, zbroj mase neutrona i ^6Li) za $(4.79 \text{ MeV})/c^2$ veća od zajedničke mase tritona i α -čestice nakon reakcije. Ova vrijednost energije – oslobođena pretvorbom mase – naziva se Q -vrijednošću reakcije. U ovom slučaju ona je jednaka $Q = 4.79 \text{ MeV}$ i nakon reakcije dostupna je u obliku povećane kinetičke energije izlaznih produkata. Kao što smo dali naslutiti, Q -vrijednost definiramo razlikom ukupne mase svih čestica prije i poslije reakcije, što se u ovom konkretnom slučaju svodi na

$$Q = [(m_n + m_{^6\text{Li}}) - (m_t + m_\alpha)]c^2. \quad (6)$$

Ovisno o reakciji, Q -vrijednost može biti i negativna, što znači da treba uložiti energiju na pokretanje reakcije kako bismo povećali ukupnu masu izlaznih produkata. Ovo znači da reakcije s negativnom Q -vrijednošću ne mogu biti spontane (ne mogu se dogoditi same od sebe), zbog zakona očuvanja energije. No time ne tvrdimo da su sve reakcije s pozitivnom Q -vrijednošću spontane, što je jasno već iz prethodnog primjera, s obzirom da je potrebno izvana dovesti neutron kako bismo reakciju pokrenuli. Međutim, sve reakcije koje jesu spontane (poput raspada nestabilnih jezgara) imaju pozitivnu Q -vrijednost.

U svrhu boljeg razumijevanja Q -vrijednosti – čiji će nam koncept kasnije biti potreban – navodimo kratku povijesnu crticu o njenom uvođenju u raširenu terminologiju nuklearne fizike i fizike elementarnih čestica. Pojam Q -vrijednosti po prvi put nalazimo već u klasičnoj mehanici, a u nuklearnu i čestičnu fiziku ušao je kroz kemiju (koja je u uskoj vezi s atomskom i molekularnom fizikom) i termodinamiku. U mehanici, tako, kod neelastičnih sudara kinetička energija u pravilu nije očuvana. Na primjer, sudarimo li dva tijela jednakih masa i brzina te pri tome dođe do njihova stapanja (zamislimo, na primjer, sudar dvaju komada vlažne gline), zbog očuvanja ukupne količine gibanja novonastalo tijelo ostat će mirovati. Prema tome, kinetička energija makroskopskoga gibanja (koje je predmet zanimanja klasične mehanike) u potpunosti je iščeznula. No kako bi zakon očuvanja ukupne energije ostao zadovoljen, ta razlika kinetičke energije morala je prijeći u druge oblike energije, koje obično “pometemo” pozivom na oslobađanje topline u sudaru. No pri tome više ili manje prešutno, ali vrlo jasno podrazumijevamo da se ta toplina “troši” na unutarnje deformacije tijela (dakle, na promjenu potencijalne energije), na povećanje kinetičke energije čestica na mikroskopskoj razini, tj. zagrijavanje (koje je upravo predmet zanimanja termodinamike) ili čak na pokretanje kemijskih reakcija (koje, pak, u svojoj srži podrazumijevaju izmjenu mase i energije na molekularnoj razini, kroz promjenu energije vezanja atoma i molekula u kemijskim reakcijama). Činjenica da toplinu uobičajeno obilježavamo oznakom Q jasno ukazuje na vrata kroz koja se Q -vrijednost uvukla u nuklearnu i čestičnu fiziku, s obzirom da se u jednadžbama pretvorbe

mase i energije pojavljuje na isti način kao i toplina u jednadžbama termodinamike. Iz svega navedenog možemo zaključiti da se Q -vrijednost – koja je unutar klasične mehanike fenomenološka veličina – na razini osnovnih konstituenata materije otkriva kao jednostavna izmjena mase i (kinetičke) energije, omogućena upravo njihovom fundamentalnom jednakošću $E = mc^2$, odnosno $Q = \Delta mc^2$.

Sustav centra mase

Sustav centra mase lako je razumljiv pojam te opisuje gibanje fizikalnog sustava kao cjeline. Na primjer, balon ispunjen plinom sastoji se od mnoštva čestica – molekula zraka kojima je ispunjen, od kojih svaka poprilično slobodno leti u svom smjeru te molekula gume u samoj opni balona, čije gibanje je ograničenije, s obzirom da su zatočene u čvrstom tijelu, no i dalje titraju oko svojih ravnotežnih položaja, više-manje nezavisno jedna od druge. Udarimo li balon, zakotrljamo ga ili pustimo u slobodni pad, čitav sustav skladno će se pokrenuti kao cjelina. Sustav koji najbolje opisuje ovakav oblik združenog gibanja upravo je sustav centra mase, koji je vrlo jasno matematički definiran. Sustav centra mase onaj je sustav u kojem je ukupna količina gibanja (koja je vektorska veličina!) svih fizikalnih objekata jednaka nuli:

$$\sum_i \vec{p}_i = \vec{0}. \quad (7)$$

Prema tome, u samom sustavu centra mase nema skladnog gibanja svih čestica u nekom određenom smjeru te sustav kao cjelina stoji na mjestu (ovo ne znači da se sustav ne može širiti, kao pri ekspanziji plina ili eksploziji, nego da “prosječni položaj” miruje). Koncept centra mase iznimno je bitan, kako u teorijskoj, tako i u eksperimentalnoj fizici. Na primjer, najveći akcelerator čestica na svijetu – Veliki hadronski sudarivač na CERN-u – sudara protonski snop o protonski snop, a ne protonski snop o mirujuću metu, upravo zbog toga što se događa u sustavu centra mase dvaju protona (koji se pri sudaru snopa o snop podudara s laboratorijskim sustavom).

Kako odrediti iznos i smjer brzine gibanja centra mase? Prvo ćemo prikazati klasičan rezultat. Zamislimo da se kao promatrači nalazimo u sustavu u kojem se drugi sustav (npr. naš balon) giba kao cjelina. Svoj sustav uobičajeno nazivamo “laboratorijskim sustavom”, dok je sustav centra mase samog balona upravo onaj koji nas zanima. U našem (laboratorijskom) sustavu svaka čestica iz balona ima količinu gibanja jednaku: $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, pri čemu je m_i masa, a \vec{v}_i brzina pojedine, i -te čestice. Ako je u laboratorijskom sustavu brzina centra mase balona jednaka \vec{v}_{cm} , tada je količina gibanja pojedinih čestica u sustavu balona jednaka:

$$\vec{p}_i^{(\text{cm})} = m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{\text{cm}}) \quad (8)$$

jer su se pri prijelazu između dvaju sustava relativne brzine \vec{v}_{cm} , brzine svih čestica promijenile na način: $\vec{v}_i \rightarrow \vec{v}_i - \vec{v}_{\text{cm}}$. Prijelaz između sustava različitih brzina naziva se *potisak* (eng. *boost*), a prethodni način promjene brzina čini srž Galilejevih transformacija koje su temelj klasične fizike. Sada na sve transformirane količine gibanja iz sustava centra mase primjenjujemo zahtjev iz (7):

$$\sum_i \vec{p}_i^{(\text{cm})} = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{\text{cm}}) = \sum_i m_i \vec{v}_i - \vec{v}_{\text{cm}} \sum_i m_i = \vec{0} \quad (9)$$

odakle izravno slijedi:

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}. \quad (10)$$

Ovo je vrlo poznat i intuitivan rezultat, s obzirom da brojnik predstavlja ukupnu količinu gibanja ($\vec{p}_{\text{uk}} = \sum_i m_i \vec{v}_i$) svih čestica promatranih iz laboratorijskog sustava, a nazivnik njihovu ukupnu masu ($m_{\text{uk}} = \sum_i m_i$). Prema tome, brzinu centra mase dobili smo kao da smo pomatrali čitav sustav (balon) kao jedinstveni objekt:

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{\vec{p}_{\text{uk}}}{m_{\text{uk}}} \quad (11)$$

No promotrimo što se događa u relativističkom slučaju, odnosno primjenom relativističkih računa. Ovaj put količina gibanja mijenja se između sustava u skladu s Lorentzovim transformacijama i želimo li izbjeći poziv na njihov najopćenitiji oblik, vrlo je bitno definirati jedan od koordinatnih smjerova (npr. smjer x -osi) u smjeru u kojem provodimo potisak, što u našem slučaju odgovara smjeru gibanja, odnosno smjeru ukupne količine gibanja centra mase balona. Uz takav izbor koordinatnih osi Lorentzove transformacije pojedinih komponenta količine gibanja poprimaju oblik:

$$(p_x)_i^{(\text{cm})} = \frac{(p_x)_i - \frac{v_{\text{cm}}}{c^2} E_i}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{cm}}^2}{c^2}}} \quad (12)$$

$$(p_y)_i^{(\text{cm})} = (p_y)_i$$

$$(p_z)_i^{(\text{cm})} = (p_z)_i$$

pri čemu je E_i ukupna energija pojedine čestice u laboratorijskom sustavu. Toj energiji doprinose energija mirovanja (odnosno, masa) i kinetička energija čestice, te takva ukupna energija zadovoljava vrlo bitnu relativističku relaciju

$$E_i^2 = m_i^2 c^4 + p_i^2 c^2. \quad (13)$$

Postavljanjem x -osi koordinatnog sustava u smjeru gibanja balona, posigli smo da ukupna količina gibanja u smjeru okomitom na globalno gibanje iščezava: $\sum_i (p_{y,z})_i = 0$. S obzirom da Lorentzove transformacije iz (12) ostavljaju komponente okomite na smjer potiska nepromijenjenima, isto smo zadovoljili i u sustavu centra mase:

$$\sum_i (p_{y,z})_i^{(\text{cm})} = \sum_i (p_{y,z})_i = 0. \quad (14)$$

Drugim riječima, uz ovakav izbor koordinatnih osi okomite komponente postaju nebitnima za dalji račun. Stoga x -komponenta preostaje kao jedina relevantna. Postavljanjem na transformirane komponente iz (12) zahtjev iz (7), kojim je definiran sustav centra mase:

$$\sum_i (p_x)_i^{(\text{cm})} = \sum_i \frac{(p_x)_i - \frac{v_{\text{cm}}}{c^2} E_i}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{cm}}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{cm}}^2}{c^2}}} \left(\sum_i (p_x)_i - \frac{v_{\text{cm}}}{c^2} \sum_i E_i \right) = 0 \quad (15)$$

izravno slijedi

$$v_{\text{cm}} = \frac{\sum_i (p_x)_i}{\sum_i E_i} \cdot c^2. \quad (16)$$

U brojniku prepoznajemo ukupnu količinu gibanja svih čestica u x -smjeru. No kako po konstrukciji znamo da se smjer brzine centra mase poklapa sa smjerom ukupne količine gibanja, možemo provesti vektorsko poopćenje: $\vec{v}_{\text{cm}} \propto \vec{p}_{\text{uk}}$. Nazivnik, pak, predstavlja ukupnu energiju E_{uk} svih čestica, stoga konačni relativistički rezultat možemo zapisati

u obliku:

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{\vec{p}_{\text{uk}}}{E_{\text{uk}}} \cdot c^2. \quad (17)$$

Prisjetimo se da je klasični račun primjenjiv kad je kinetička energija mnogo manja od energije mirovanja ($E_k \ll mc^2$), odnosno upravo kad energija mirovanja dominira ukupnom energijom: $E_{\text{uk}} \approx m_{\text{uk}}c^2$. Odavde postaje savršeno jasno da se klasični izraz (11) razotkriva tek kao niskoenergijska aproksimacija relativističkog izraza (17).

Konačno, do istog rezultata kao u (17) bili bismo došli da smo čitav sustav (balon) promatrali kao jedinstveni objekt mase m_{uk} , količine gibanja \vec{p}_{uk} i energije E_{uk} . Naime, na razini jednog tijela/objekta/čestice mase m i brzine \vec{v} , za količinu gibanja \vec{p} i ukupnu energiju E vrijede relativističke relacije:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Stoga – uz pripis brzine centra mase \vec{v}_{cm} sustavu kao cjelini – izravnim dijeljenjem prethodnih izraza dolazimo do već poznate relacije: $\vec{p}_{\text{uk}}/E_{\text{uk}} = \vec{v}_{\text{cm}}/c^2$.

Završni paradoks

U eksperimentalnoj nuklearnoj fizici vrlo često je dovoljno primjeniti klasične izraze u analizi eksperimentalnih podataka iz mjerenja nuklearnih reakcija. Razlog je, naravno, što se mnoge reakcije mjere na energijama daleko ispod energije mirovanja jezgara. Tako je, na primjer, relevantno energijsko područje mnogih reakcija reda veličine desetak MeV-a, dok je energija mirovanja već najlakše atomske jezgre (vodikove, koja se sastoji tek od jednog protona) jednaka 1 GeV. Neke reakcije, poput onih izazvanih električki neutralnim česticama (npr. uhvat ili elastično raspršenje neutrona), mogu se mjeriti sve do najnižih energija na kojima se takve čestice mogu proizvesti, a koje često zadiru i duboko ispod 1 eV. Dakle, govorimo o desetak redova veličine u razlici između energije projektila i energije mirovanja jezgre-mete. Stoga opis kinematike nuklearnih reakcija klasičnim izrazima u praksi nije nimalo neuobičajena pojava.

Promotrimo sada što se događa s gibanjem centra mase u slučaju nuklearnih reakcija obilježenih Q -vrijednošću različitom od nule. Neka je zajednička masa svih reaktanata (čestica koje ulaze u reakciju) jednaka m_{prije} , a masa svih produkata (čestica koje izlaze iz reakcije) jednaka m_{poslije} . Prema definiciji Q -vrijednosti – energijskog ekvivalenta razlike masa dostupnih prije i poslije reakcije – sasvim jednostavno vrijedi

$$m_{\text{poslije}} = m_{\text{prije}} - \frac{Q}{c^2}. \quad (19)$$

Prema klasičnom opisu iz (11), brzina centra mase projektila i mete prije reakcije jednaka je

$$v_{\text{prije}} = \frac{p_{\text{uk}}}{m_{\text{prije}}} \quad (20)$$

dok je nakon reakcije brzina centra mase svih produkata:

$$v_{\text{poslije}} = \frac{p_{\text{uk}}}{m_{\text{poslije}}} = \frac{p_{\text{uk}}}{m_{\text{prije}} - \frac{Q}{c^2}}. \quad (21)$$

S obzirom da je ukupna količina gibanja p_{uk} jednaka prije i poslije reakcije – zbog zakona očuvanja količine gibanja – za $Q \neq 0$ prethodna dva izraza sugeriraju da mora doći do promjene brzine gibanja centra mase sustava: $v_{\text{poslije}} \neq v_{\text{prije}}$. No ovo je vrlo čudan ishod, koji podrazumijeva da sustav mora doživjeti trzaj iz *svoje unutrašnjosti*, koji bi mu promijenio brzinu bez djelovanja vanjskih sila. Čitatelj s dobro razvijenom fizikalnom intuicijom, odnosno “osjećajem” za kinematiku, nipošto se ne bi trebao olako pomiriti s neprirodnošću ovog rezultata, usprkos tome što “jednadžba tako kaže”. Naime, promotrimo što se događa pozovemo li se na relativistički izraz iz (17):

$$v_{\text{prije}} = v_{\text{poslije}} = \frac{p_{\text{uk}}}{E_{\text{uk}}} \cdot c^2. \quad (22)$$

Ispostavlja se da brzina centra mase ostaje nepromijenjenom jer je, pored ukupne količine gibanja p_{uk} , tijekom reakcije očuvana i ukupna energija E_{uk} , što je jednostavna posljedica najpoznatijeg zakona očuvanja – zakona očuvanja energije!

Ono što je paradoksalno u prethodnom rezultatu je da relativistički račun – koji kreće od nimalo očitih Lorentzovih transformacija te u svojoj pozadini podrazumijeva opis stvarnosti daleko udaljen od svakodnevnog iskustva – u konačnici rezultira intuitivnijim zaključkom od onoga klasičnoga računa: brzina centra mase **izoliranog** sustava jest očuvana, što je izravna posljedica zakona očuvanja energije i količine gibanja. Činjenica da je klasični rezultat različit od relativističkog nije neočekivana, niti je imalo zabrinjavajuća, s obzirom da su polazišta klasičnog pristupa različita od relativističkih. Osim toga, u području primjenjivosti klasičnog računa razlika između svih triju izraza (20), (21) i (22) numerički je beznačajna, a u eksperimentu je nerazlučiva – sasvim zasjenjena rezolucijom mjernih uređaja, sekundarnim eksperimentalnim efektima te statističkim i sistematskim neodređenostima mjerenja. No ovaj konkretan klasični rezultat jest alarmantan utoliko što uvodi sasvim novi koncept – da je brzinu centra mase fizikalnog sustava moguće promijeniti bez vanjskih utjecaja, samo djelovanjem iz nutrine sustava. Kao što vidimo, unutar jednadžbe (11) tome je uzrok što je brzina centra mase – pored količine gibanja koja jest očuvana veličina – određena masom sustava, koja nije očuvana: $v_{\text{cm}} = p_{\text{uk}}/m_{\text{uk}}$. No relativistički rezultat iz (17) otkriva da u klasičnoj aproksimaciji masa zauzima mjesto ukupne energije: $v_{\text{cm}} \propto p_{\text{uk}}/E_{\text{uk}}$, koja jest očuvana veličina. Ovaj “bijeg” klasičnog rezultata u konceptualno zabranjeno područje možemo pripisati principijelnoj nepomirljivosti klasičnog pristupa i “mikroskopskog” tumačenja Q -vrijednosti. Naime, kao što smo već ranije naveli, Q -vrijednost je u klasičnoj fizici fenomenološka veličina koja predstavlja prijelaz energije iz makroskopskih stupnjeva slobode u mikroskopske (deformaciju, toplinu, kemijske reakcije). No na razini osnovnih konstituenata materije Q -vrijednost svodi se na slobodnu izmjenu mase i energije, koja je omogućena tek uvođenjem njihove ekvivalencije, odnosno relacije $E = mc^2$ koja je **čisti relativistički rezultat**. Artificijelnim, gotovo nasilnim izjednačenjem Q -vrijednosti s pretvorbom mase unutar klasičnog (odnosno, sad već poluklasičnog) računa narušili smo konzistenciju principa klasične fizike, što je dovelo do konceptualne “nečistoće”, kao posljedice miješanja dvaju principijelno različitih opisa stvarnosti – klasičnog i relativističkog.

Konceptualnu neispravnost rezultata (21) – kao posljedicu nepomirljivosti klasičnog i relativističkog tumačenja Q -vrijednosti – možemo jasno prikazati već unutar same

klasične fizike, bez potrebe za “osjećajem” da nešto nije u redu s njim i bez potrebe za poznavanjem ispravnog relativističkog rezultata (22). Naime, matematički “kolac u srce” je činjenica da modifikacija brzine centra mase iz (21) nije aditivna, već multiplikativna:

$$v_{\text{poslije}} = \frac{m_{\text{prije}}}{m_{\text{poslije}}} v_{\text{prije}} \quad (23)$$

čime je izravno narušen Galilejev princip relativnosti, koji je kamen temeljac klasične fizike. Da bismo to pokazali, promotrimo jedan te isti skup tijela/ objekata/ čestica iz dvaju različitih sustava – odnosno iz sustava dvaju različitih promatrača – od kojih se jedan giba spram drugoga relativnom brzinom $\Delta\vec{v}$. Prema Galilejevom zbrajanju brzina, na koje smo se već pozvali u (8), za ukupnu količinu gibanja svih tijela – čija je zajednička masa prije sudara jednaka m_{prije} – između sustava dvaju promatrača vrijedi

$$\vec{p}_{\text{uk}}^{(1)} - \vec{p}_{\text{uk}}^{(2)} = m_{\text{prije}} \Delta\vec{v} \quad (24)$$

gdje je $\vec{p}_{\text{uk}}^{(1)}$ količina gibanja mjerena iz jednog sustava, a $\vec{p}_{\text{uk}}^{(2)}$ iz drugog. Kako nakon sudara dolazi do promjene ukupne mase, trebalo bi također vrijediti

$$\vec{p}_{\text{uk}}^{(1)} - \vec{p}_{\text{uk}}^{(2)} = m_{\text{poslije}} \Delta\vec{v}. \quad (25)$$

No lijeva strana jednakosti jednaka je i prije i poslije sudara zbog zakona očuvanja količine gibanja, dok sudar koji se dogodio ni na koji način ne utječe na brzinu $\Delta\vec{v}$ relativnog gibanja dvaju promatrača! Stoga jednakosti (24) i (25) ne mogu obje vrijediti ako je $m_{\text{prije}} \neq m_{\text{poslije}}$. Da bi relacije (24) i (25) istodobno bile zadovoljene, ili bismo se morali odreći očuvanja količine gibanja (što je najneprihvatljivije rješenje od svih!) ili ne bi smjelo doći do promjene masa (što je upravo u skladu s principima klasične fizike, no na promjeni masa smo u ovom slučaju inzistirali) ili bi moralo doći do promjene brzine $\Delta\vec{v}$ (što je, u osnovi, narušenje Galilejeve relativnosti). Ako ovo nije dovoljno, možemo pokazati – ponovno ostajući zatvoreni unutar klasične fizike – da bi promjena ukupne mase u klasičnoj fizici značila i narušenje zakona očuvanja energije. Ukupna energija E_{lab} u laboratorijskom sustavu dana je zbrojem kinetičke energije svih čestica:

$$E_{\text{lab}} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} \quad (26)$$

pri čemu su m_i i \vec{v}_i masa i brzina i -te čestice, respektivno, te smo radi jednostavnosti pretpostavili da čestice ne međudjeluju, kako bismo zaobišli potrebu za uključenjem ikakve potencijalne energije. Za izračun ukupne energije E_{cm} dostupne u sustavu centra mase, sve što trebamo je transformirati sve brzine na način $\vec{v}_i \rightarrow \vec{v}_i - \vec{v}_{\text{cm}}$ i raspisati:

$$E_{\text{cm}} = \sum_i \frac{m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{\text{cm}})^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} - 2 \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_{\text{cm}}}{2} + \sum_i \frac{m_i \vec{v}_{\text{cm}}^2}{2}. \quad (27)$$

Prvi član s krajnje desne strane prepoznamo kao ukupnu energiju E_{lab} u laboratorijskom sustavu. U drugom članu, pak, prepoznamo pojavu ukupne količine gibanja $\vec{p}_{\text{uk}} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ iz laboratorijskog sustava:

$$2 \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_{\text{cm}}}{2} = \vec{v}_{\text{cm}} \cdot \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{v}_{\text{cm}} \cdot \vec{p}_{\text{uk}} = \frac{\vec{p}_{\text{uk}}^2}{m_{\text{uk}}}. \quad (28)$$

Ovdje smo se dodatno pozvali na vezu $\vec{v}_{\text{cm}} = \vec{p}_{\text{uk}}/m_{\text{uk}}$ iz (11). Konačno, u trećem članu prepoznamo pojavu ukupne mase $m_{\text{uk}} = \sum_i m_i$ svih čestica:

$$\sum_i \frac{m_i \vec{v}_{\text{cm}}^2}{2} = \frac{\vec{v}_{\text{cm}}^2}{2} \sum_i m_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{p}_{\text{uk}}}{m_{\text{uk}}} \right)^2 m_{\text{uk}} = \frac{\vec{p}_{\text{uk}}^2}{2m_{\text{uk}}}. \quad (29)$$

Povratkom svih identificiranih članova u (27) dobivamo

$$E_{\text{cm}} = E_{\text{lab}} - \frac{\vec{p}_{\text{uk}}^2}{2m_{\text{uk}}}. \quad (30)$$

Za ukupnu količinu gibanja \vec{p}_{uk} (u laboratorijskom sustavu) već znamo da je očuvana. Također, i ukupna energija E_{lab} iz laboratorijskog sustava mora biti očuvana (nakon sudara jedino može biti preraspodijeljena između različitih oblika energije, odnosno stupnjeva slobode). No ako se ukupna masa m_{uk} tijekom reakcije mijenja iz m_{prije} u m_{poslije} , tada iz (30) slijedi da se i ukupna energija E_{cm} u sustavu centra mase mora promijeniti. A prema zakonu očuvanja, ukupna energija mora ostati očuvanom u svim sustavima! Kao što smo vidjeli, ispravan relativistički račun ne pati ni od kojeg od ovih problema, već su zakoni očuvanja i energije i količine gibanja izravno “ukodirani” unutar izraza (17).

Za kraj, napomena vezana uz ukupnu energiju sustava za koju tvrdimo da se pojavljuje kao očuvana veličina u jednadžbi (17). Kao što smo više puta spomenuli, E_{uk} relativistička je veličina kojoj doprinose energija mirovanja i kinetička energija svih čestica u reakciji te koja zadovoljava fundamentalnu relativističku relaciju (13). No što ako dio Q -vrijednosti, odnosno energije oslobođene reakcijom “pobjegne” u unutarnja pobuđenja produkata reakcije? Znači li to da je unutar (13) manje energije raspoloživo za preraspodjelu između mase i količine gibanja? Drugim riječima, jesu li unutarnja pobuđenja treći fizikalni mehanizam “skladištenja” energije koji nije uključen relacijom (13), tako da energija koja se naposljetku pojavljuje u (17) ipak nije nužno očuvana veličina? Pažljivi čitatelj prisjetit će se da smo već ranije odgovorili na ovo pitanje, kad smo objasnili da se energija unutarnjih pobuđenja manifestira kroz povećanje mase složenog fizikalnog objekta, tako da svi doprinosi energiji ostaju zatočeni izrazom (13), a E_{uk} iz (17) doista postaje i ostaje ukupnom energijom koja je podložna zakonu očuvanja.