Sudoku – napredne metode rješavanja (1)

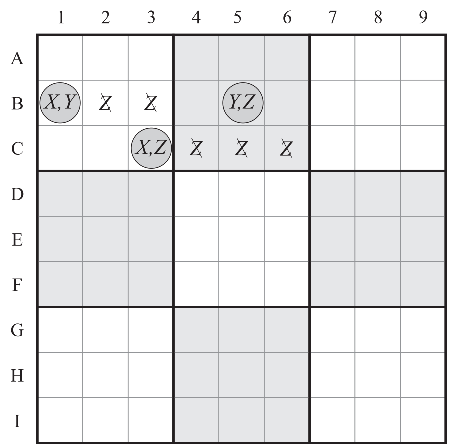
Žarko Čulić[1]

Nakon što smo prošli osnovne i standardne metode rješavanja sudokua, prelazimo na napredne metode. Postoji desetak različitih grupa (tehnika) naprednih metoda, od kojih se većina dijeli u više metoda koje se potom dijele u srodne varijante rješavanja. Na primjer grupa metoda koja je bazirana na dogovorenom pravilu da sudoku smije imati samo jedno točno rješenje i nazvana je *jednoznačnost (Uniqueness)*, ima 6 različitih metoda, od kojih *jednoznačni pravokutnici*, kao najčešća metoda, imaju 6 varijanti (tipova), a *uzorci jednoznačnosti* (*Deadly Paterns*) imaju tisuće različitih varijanti od kojih u praksi uglavnom koristimo njih 14 vezanih za 4 do 8 polja sudokua. U ovom kratkom osvrtu ukratko ćemo analizirati samo najčešće korištene metode. U prvom nastavku bit će govora o grupi metoda koju nazivamo *krila* (*Wings*), a čine je *XY-krilo*, *XYZ-krilo* i *W-krilo*.

XY-krilo (*XY-Wing*) je najjednostavnija i vrlo često korištena metoda. Traže se polja sa samo dva kandidata oblika (X, Y), (X, Z) i (Y, Z). Jedno, središnje (polazno) polje s kandidatima (X, Y) povezano je s dva preostala polja, odnosno vidi polja s kandidatima (X, Z) i (Y, Z). U tom slučaju, kandidat Z se može eliminirati iz svih polja koja vide oba polja *XY-krila* s kandidatom Z (slika 1). U tekstu su brojevi X, Y, Z i n proizvoljni brojevi između 1 i 9.

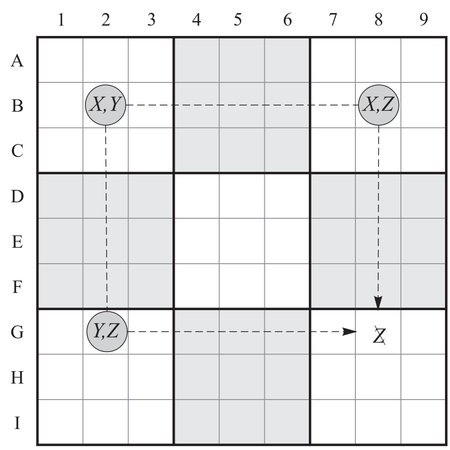
Analiza je vrlo jednostavna i pokazuje da kandidat Z mora biti rješenje u jednom od vanjskih polja *XY-krila*. Npr. ako je u polju (X, Z) rješenje X, tada je u središnjem polju (X, Y) rješenje Y, a u trećem polju (Y, Z) rješenje je Z. Vrijedi i obratno, ako je u polju (Y, Z) točan broj Y, tada je u središnjem polju (X, Y) točan broj X, a u polju (X, Z) rješenje je broj Z. Dakle, u svakom slučaju kandidat Z je rješenje u jednom od vanjskih polja (X, Z) i (Y, Z), ne znamo točno u kojem, ali ga možemo eliminirati iz svih preostalih polja koja vide ta dva polja.

[1] Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a; e-pošta: `zculic@math.hr`



Slika 1.

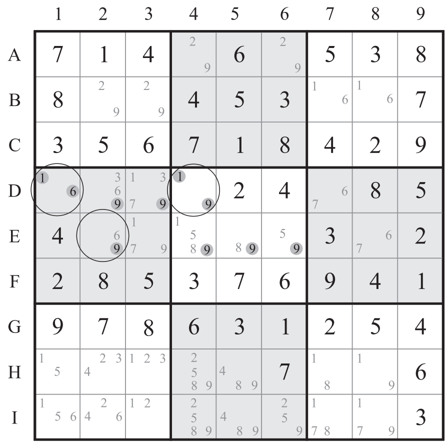
Postoje dvije konfiguracije ove jednostavne metode: (1) da su dva polja *XY-krila* u istom kvadratu i tada se može eliminirati broj Z iz do 5 polja (slika 1) i (2) da se sva tri polja *XY-krila* nalaze u različitim kvadratima i tada se Z može eliminirati iz samo jednog polja (slika 2).



Slika 2.

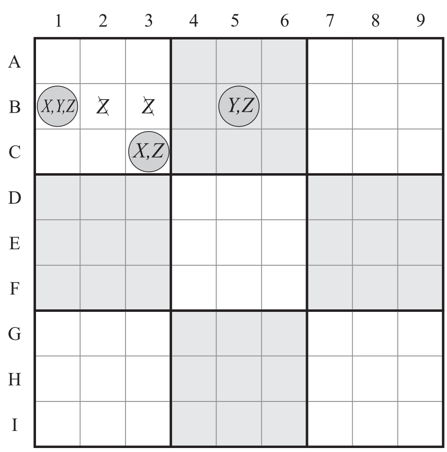
Traženje *XY-krila* najčešće započinjemo iz gornjeg lijevog kuta i tražimo u prvom kvadratu parove oblika (X, Y) i (X, Z). Ako ih nađemo tada u redcima i stupcima s tim poljima tražimo polje s kandidatima (Y, Z), odnosno (Z, Y) i ovisno o tome koje je središnje polje, možemo eliminirati broj Z ili broj Y. Ako ne nađemo ništa u prvom kvadratu ili ništa ne možemo eliminirati, treba prijeći na drugi kvadrat i tako redom do kraja mreže. Ako ništa ne pronađemo na ovaj način (prva konfiguracija), treba pretražiti retke u kojima su polja s parovima kandidata oblika (X, Y) i (X, Z) i ovisno o tome koje je središnje polje, tražimo u tim stupcima polje s (Y, Z), odnosno (Z, Y) (druga konfiguracija). Ovaj postupak se može raditi i u jednom prolazu kroz mrežu.

Pogledajmo *XY-krilo* na konkretnom primjeru:



XYZ-krilo (*XYZ-Wing*) je metoda slična *XY-krilu*, ali sada središnje polje uz kandidate X i Y sadrži i kandidata Z. Tražimo polje s trojkom (X, Y, Z) koje u istom kvadratu ima polje koje sadrži jedan par kandidata od X, Y, Z, npr. (X, Z) i povezano je s poljem izvan kvadrata koje sadrži jedan od druga dva para kandidata, npr. (Y, Z). Tada možemo eliminirati sve kandidate Z iz polja koja vide sva tri polja *XYZ-krila* (slika 3). Očito je da će se svi eliminirani kandidati Z nalaziti unutar kvadrata sa središnjom trojkom (X, Y, Z).

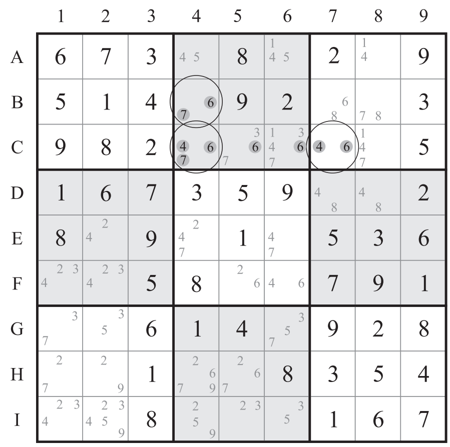
Analiza je opet jednostavna: pretpostavimo da je rješenje polja s parom (X, Z) broj Z, tada bi odmah mogli eliminirati sve kandidate Z iz tog kvadrata. Ako je rješenje broj X u polju (X, Z), tada iz trojke (X, Y, Z) možemo eliminirati broj X i ostaje (Y, Z) koji s trećim poljem (Y, Z) čini *par*, odnosno *zaključani set* (vidi standardne metode u prethodnom broju MFL-a) i opet možemo eliminirati Z iz svih povezanih polja unutar toga kvadrata. Analogno se dobije ako krenemo analizu od polja (Y, Z). U oba slučaja, Z je rješenje u jednom od ta tri polja koja čine *XYZ-krilo* i stoga možemo eliminirati Z iz svih polja koja vide sva ta tri polja.



Slika 3.

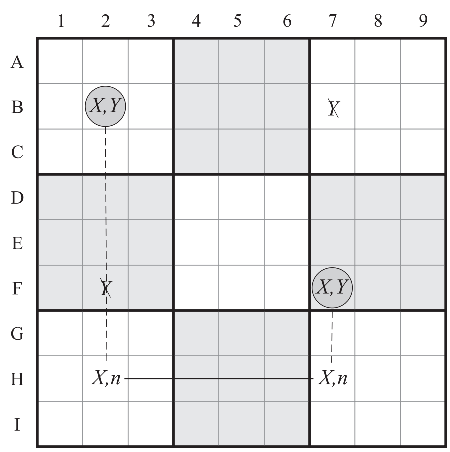
Traženje *XYZ-krila* također započinjemo iz gornjeg lijevog kuta i tražimo u prvom kvadratu polje s trojkom kandidata (središnje polje) oblika (X, Y, Z) i polje s parom kandidata od trojke X, Y, Z, npr. (X, Z). Ako ih nađemo, tada u retku i u stupcu sa središnjim poljem tražimo polje s parom kandidata (X, Y) ili s parom kandidata (Y, Z). U prvom slučaju možemo eliminirati broj X, a u drugom broj Z iz svih polja tog kvadrata izvan polja koja čine *XYZ-krilo*. Nakon prvog kvadrata, treba prijeći na drugi kvadrat i tako redom do kraja mreže.

Evo primjera *XYZ-krila*:



Analogno metodi *XYZ-krilo*, postoje metode s 4 kandidata (*XYZW-krilo*), s 5 kandidata (*XYZWV-krilo*), sa 6 kandidata (*XYZWVU*), itd., ali su one u praksi rijetko zastupljene.

W-krilo (*W-Wing*) je jednostavna i često veoma učinkovita metoda. Tražimo dva nepovezana polja s istim parovima kandidata (polazna polja) koja imaju *jaku povezanost* (*strong link*) na jednom od kandidata, tj. da su to jedini takvi kandidati u tom povezanom području (retku, stupcu ili kvadratu). Tada možemo eliminirati drugog kandidata iz svih polja koja vide oba polazna polja (slika 4).

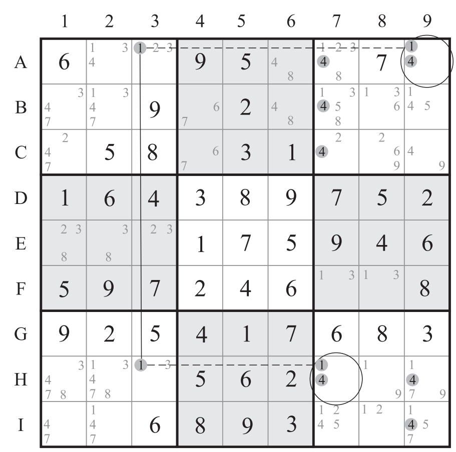


Slika 4.

Analiza metode je sljedeća: ako je u bilo kojem od dva polja s jakom vezom točan kandidat X (a po definiciji *jake povezanosti* barem jedan mora biti točan), tada je u povezanom polaznom paru (X, Y) točan broj Y. Dakle, u svakom slučaju je u jednom od polaznih polja točan broj Y. Ne znamo točno u kojem je polju rješenje broj Y, ali ga možemo eliminirati iz svih polja koja vide oba polazna.

Traženje *W-krila* svodi se na traženje dva (polazna) polja s istim parom kandidata koja se međusobno ne vide (ako se vide, tada imamo *zaključani set*). Sada odaberemo jedno od tih polja i pretražimo taj redak prvo po jednom, pa po drugom kandidatu, tražeći da se u stupcu nalazi taj kandidat samo dvaput i to tako da je jedan povezan s prvim, a drugi s drugim polaznim poljem. Ako nismo ništa pronašli, tada trebamo napraviti to isto s tim da zamijenimo retke i stupce. Sada pretražujemo stupac prvo po jednom, pa po drugom kandidatu, tražeći da se u retku nalazi taj kandidat samo dvaput i to tako da je jedan povezan s prvim, a drugi s drugim polaznim poljem.

Pogledajmo *W-krilo* na konkretnom primjeru:



Zadaci za vježbu s rješenjima (riješite primjenom *XY-krila*, *XYZ-krila* i *W-krila*):

Zadatak 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	3			6				
B			6				4		
C				7	2				
D	6		8		7		5	9	
E	4			2	5	9			8
F		7	9		8		1		2
G					9	7			
H			2				6		
I					3			4	9

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	3	7	8	6	4	9	2	5
B	2	5	6	9	1	3	4	8	7
C	9	8	4	7	2	5	3	1	6
D	6	2	8	3	7	1	5	9	4
E	4	1	3	2	5	9	7	6	8
F	5	7	9	4	8	6	1	3	2
G	8	4	1	6	9	7	2	5	3
H	3	9	2	5	4	8	6	7	1
I	7	6	5	1	3	2	8	4	9

Zadatak 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9				1		6		
B			3	2					
C				6			2	9	4
D		4							8
E	2		7				5		3
F	1							7	
G	8	7	6			5			
H						6	3		
I			1		8				5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	2	4	5	1	8	6	3	7
B	7	6	3	2	4	9	8	5	1
C	5	1	8	6	3	7	2	9	4
D	6	4	9	7	5	3	1	2	8
E	2	8	7	9	6	1	5	4	3
F	1	3	5	8	2	4	9	7	6
G	8	7	6	3	9	5	4	1	2
H	4	5	2	1	7	6	3	8	9
I	3	9	1	4	8	2	7	6	5