

Izvorni članak UDK 111.852:51(045)

doi: [10.21464/fi39401](https://doi.org/10.21464/fi39401)

Primljeno 4. 9. 2019.

**Marko Kardum,<sup>1</sup> Sandro Skansi<sup>2</sup>**

Sveučilište u Zagrebu, Fakultet hrvatskih studija, Borongajska cesta 83d, HR–10000 Zagreb

<sup>1</sup>mkardum@hrstud.hr, <sup>2</sup>sskansi@hrstud.hr**Mogućnost primjene tradicionalnih i suvremenih estetičkih teorija na logičko-matematičke dokaze****Sažetak**

*U ovom radu istražujemo mogućnost primjene tradicionalnih i suvremenih estetičkih teorija na logičko-matematičke dokaze, s ciljem boljeg razumijevanja intuitivnog pojma matematičke ljepote. Ovo je neformalan pojam koji zauzima središnje mjesto u radu logičara i matematičara i može se smatrati njihovom glavnom motivacijom. U ovom radu pokušavamo definirati pojmove vezane uz matematičku ljepotu, odnosno ljepotu u matematičkim dokazima, da bismo postavili temelje za preciznu definiciju matematičke ljepote koju bismo dobili preko detaljnog anketiranja logičara i matematičara, a što bismo proveli u odvojenom radu. Ovaj rad donosi važne rezultate za izradu te ankete.*

**Ključne riječi**

logika, matematika, formalni dokazi, matematička ljepota, estetičke teorije

**Uvod**

U ovom ćemo se radu baviti primjenom estetičkih teorija na logičko-matematičke dokaze. Pod ‘logičko-matematičke’ podrazumijevamo formalne dokaze kakvi se javljaju u sklopu logike i matematike. Ovdje razlikujemo ta dva tipa dokaza zato što ne želimo implicitno podržati stajalište koje je često prešutno prisutno u znanstvenoj, ali i široj javnosti, da je sve što koristi formalne dokaze (poput logike, koja nam je ovdje posebno zanimljiva) dio matematike. Ovu tvrdnju svakako možemo prihvatiti u slabijoj varijanti (da je sve što koristi formalne dokaze među ostalim i poddisciplina matematike), ali nikako u jačem smislu (sve što koristi formalne dokaze je isključivo poddisciplina matematike). Kako je granica između jake i slabe tvrdnje jako fina, posebno napominjemo da se naše istraživanje tiče dokaza u logici i matematici, a ne samo matematici. Posljedično, takve dokaze nazivamo *logičko-matematičkim dokazima*.

Kao što je prikazano u (Tao 2007: 1–2) ljepota se može analizirati kroz mnoge komponente i mi ćemo se dijela njih i dotaknuti naknadno, ali za potrebe ovog rada moramo pretpostaviti da možemo govoriti slobodno o ‘lijepom’ i ‘ružnom’ u bilo kojem opsegu želimo, kao da se radi o pojmovima koji mogu dobiti značajnu razinu konsenzusa i koji su do neke mjere objektivni (usp. Rota 1997: 178–182). Pri tome ne želimo prihvatiti neke jake ontološke obveze, već samo mogućnost da se slobodno koristimo ovim pojmovima kao samorazumljivima na nekoj razini, makar i predznanstvenoj. Budući da nas zanima kako se nekim dokazima priznaje ljepota, želimo naći estetske teorije koje

najbolje odgovaraju percepcijama ljepote dokaza i koje će moći kroz nužne i dostatne uvjete uhvatiti intuiciju koja je u pozadini vrijednosnog suda »ovaj dokaz je lijep«, a ovi će nužni i dostatni uvjeti imati sličnosti s razlaganjem u (Tao 2007: 1–2). Neće nas previše zanimati klasična matematička estetika bazirana na geometriji kakva je istražena u (Polster 2004). Također, osim što ispitujuemo primjenjivost estetičkih teorija o lijepom na logičko-matematičke dokaze, kratku raspravu posvećujemo i teorijama pomoću kojih već ulazimo i u područje ontologije umjetnosti, tj. u propitivanje nužnih i dovoljnih svojstava koja bi takvi dokazi mogli imati, a koja bi po najutjecajnijim teorijama umjetnosti takve dokaze mogla svrstati u kategoriju umjetničkih djela. Stoga ćemo u tom smislu propitati i primjenjivost tradicionalnih i suvremenih teorija umjetnosti na matematičko-logičke dokaze.

Ovdje treba napomenuti još nešto prije prelaska na glavnu diskusiju: u našem daljnjem radu namjeravamo napraviti anketu koju bismo htjeli postaviti logičarima i matematičarima, a koja bi sadržavala neke sporne slučajeve koje bismo izolirali kao primjene ovog istraživanja. Kao što (Rota 1997: 171) napominje, diskusije o ljepoti česte su među matematičarima. Ideja se ljepote kao važnog motivacijskog elementa kod dijela matematičara temelji gotovo na platoničkoj pretpostavci da je ljepota povezana s istinom, čak i da je njen »putokaz« (Huntley 1970: 74–76). Ovdje vrijedi napomenuti i jedno zanimljivo mišljenje Paula Erdosa, da postoje dokazi koji su toliko lijepi da pripadaju u »Božju knjigu« (engl. »The Book«). Dokazi koje su Erdos i njegovi suradnici Aigner i Ziegler skupili objavljeni su u (Aigner i Ziegler 1998), no kako je Erdos umro godinu dana ranije, nije bio službeni koautor »Knjige«.

Osnovno pitanje koje je glavna motivacija ovog rada jest izložiti estetičke teorije i ustanoviti koje bi od navedenih teorija i koncepcija bile primjenjive na dokaze.

## Logički dokazi

Logika i matematika su specifične discipline. Možda je najveća specifičnost, kako (Hardy 2004: 60) napominje, da rezultati rada logičara i matematičara (teorem i njegov dokaz), bez obzira na to koliko specifični i apstraktni, imaju jasno definirane standarde kvalitete – jasnije nego bilo koja druga disciplina. Ovdje je cilj istražiti te standarde kroz njihovu središnju kvalitetu, ljepotu teorema i dokaza. Premda se primarno govori o ljepoti teorema (Rota 1997: 171), nas zanima i ljepota dokaza, a pokazat ćemo kako su ta dva pojma intimno povezana. Kako će naše istraživanje pokazati, standardi koje spominje Hardy možda jesu najjasniji među znanstvenim disciplinama, ali nisu ni jednostavni ni lako izrazivi.

Prije nego što krenemo u našu raspravu o primjeni estetičkih teorija na logičko-matematičke dokaze, trebamo definirati nekoliko pojmova. Prvo i osnovno pitanje koje se nameće je odnos dokazivosti i istinitosti – jesu li to sinonimi? Prije gotovo sto godina, Kurt Gödel (Gödel 2001) dokazao je da ovo nisu sinonimi ni za jedan sustav baziran na rekurzivnim aksiomima koji su dovoljno jaki da dokažu svojstva osnovnih aritmetičkih operacija. Gödelov dokaz prvog teorema nepotpunosti (Gödel 2001; Smith 2007: 162–167) dokaz je nepotpunosti: postoje istinite rečenice koje nisu ni dokazive ni opovrgljive. Ali ovo ne znači da postoji problem s dokazivanjem kao metodom dolaska do logičko-matematičke istine. Sve što je dokazivo je istinito, ali postoje istinite stvari koje nisu dokazive. Ovdje ne možemo više o tome, no zainteresiranog čitatelja upućujemo na (Franzén 2005). Naravno, ovdje se odmah nameću

dva metafizička pitanja: (a) je li moguće da postoji dokaz neistinite tvrdnje (neistinitog teorema)? (b) ako prihvatimo da »dokaz« nije pravi dokaz ukoliko teorem nije istinit, možemo li smatrati neispravni dokaz za istinit teorem dokazom? Premda su ovo zanimljiva pitanja, istraživana, među ostalima, u (Barbeau 2013) i (Rota 1997: 171–173), mi ćemo u ovom radu pretpostaviti da su odgovori na oba pitanja negativni i fokusirati se isključivo na 'ispravne' dokaze. Ono što se ovdje još može napomenuti kao zanimljivo pitanje je: premda se mi ne bavimo estetikom 'neispravnih' dokaza, je li moguće da takvi dokazi budu lijepi? Ili preciznije: bi li se kriteriji ljepote neispravnih dokaza podudarali s kriterijima ljepote ispravnih dokaza? I ako da, u kojoj mjeri?

Jedna razlika koja će nam se javljati je razlika između takozvane predmetne razine i metarazine. Premda je unutar nekih grana matematike ovo teško zamijeniti, logika se sama bavi dokazima pa su i predmet proučavanja dokazi i dokazive tvrdnje (teoremi), a i na metarazini dokazuju se (meta)teoremi. S jedne strane, teoremi dedukcije postoje za gotovo sve logičke sustave, no nama će trebati samo teorem dedukcije za klasičnu logiku (Rautenberg 2006: 17). S druge strane, dokazni sustavi u raznim se logikama izrađuju da odgovaraju dokaznim fenomenima na metarazini, tako je ova korespondencija uvijek prisutna. Zbog ovoga, bit ćemo slobodni prebacivati se između ovih dviju razina kako nam bude odgovaralo.

Premda je intuitivan pojam dokaza dobio svoju formalizaciju u logici još od vremena Fregea (Frege 1879; Boolos 1985), formalizirani dokaz i dalje igra ključnu ulogu u logici i matematici. Iako su sličnosti neformalnog dokaza i formalnog dokaza velike, postoje i neke razlike, koje će se pokazati važnima za naše istraživanje. Ovo možda najbolje ilustrira formalno pravilo introdukcije disjunkcije kakvo postoji u gotovo svim sustavima prirodne dedukcije (i često je jako važan dio kada se komplementira s pravilom eliminacije disjunkcije,<sup>1</sup> na primjer u dokazu De Morganovih pravila). Unutar formalnog dokaza De Morganovih pravila, introdukcija disjunkcije pojavljuje se kao tehničko sredstvo da se uvede disjunkt koji nije pretpostavljen i u tom je kontekstu pravilo važno i nezaobilazno.

Na putu do metarazine neformalnih logičko-matematičkih dokaza zanimljivo je razmotriti ekvivalent introdukcije disjunkcije u sustavima sekvenata (Troelstra i Schwichtenberg 2000: 61–75). Kako se desna strana sekventa interpretira disjunktivno, introdukcija je disjunkcije *de facto* pravilo desnog slabljenja (Troelstra i Schwichtenberg 2000: 68–74). Na neformalnoj metarazini dokaza teorema, isto razmišljanje koje postoji u uvođenju disjunkcije može se koristiti, ali se koristi implicitno kao slabljenje. Čak se ni slabljenje ne eksplicira, već se razumije da ako je dokazan kao teorem A, onda se to može odmah 'spojiti' na neki teorem koji kaže »ako A ili B onda C«.

Ovdje je zanimljivo napomenuti sljedeću metodološku finesu. Krantz (1997: 59–90) i Solow (2013: 177–190) prikazuju kako izgleda kada logičar i matematičar dokazuju teorem. To se možda može najbolje ilustrirati na primjeru: dokazivanje teorema »Ako A ili B onda C« gotovo nikada ne počne u tom obliku. Uglavnom se kreće s 'direktnim' dokazivanjem tvrdnje C kao teorema, no zadatak se pokaže preteškim. Zato logičar ili matematičar uvede A kao pretpostavku i dokazuje »Ako A onda C«, nadajući se da će onda u nekom budućem radu dokazati A bez ikakvih pretpostavki i da će onda ta dva rada

1

Eliminacija disjunkcije je pravilo koje dozvoljava da se iz disjunkcije P ili Q zaključuje na

bilo koju formulu R koja je dokaziva iz P i iz Q.

(prvi dokazuje »Ako A onda C« a drugi »A«) biti u stvari 'direktan' dokaz za C bez pretpostavki.

No neki drugi logičar ili matematičar stvori dokaz za isti C (ili možda za neki D koji će biti dokazivo ekvivalentan s C), ali iz pretpostavke B koja nije ekvivalentna s A. Njegov dokaz je onda dokaz za »Ako B onda C«. Unutar korpusa znanosti sada postoji teorem koji glasi »Ako A ili B, onda C«. Neka tada dođe na red neki treći logičar ili matematičar koji pokazuje da je pretpostavka za C dokaziva bez pretpostavki. On će tada ili dokazivati A ili će dokazivati B. On neće dokazivati »A ili B«. Štoviše, dokazivanje te disjunkcije bi se smatralo 'ružnim' korakom koji 'poružnjuje' inicijalni (pretpostavimo) lijepi dokaz za npr. A.

Gore smo naveli da se jedan (meta)teorem oblika »Ako A onda B« može spojiti na drugi (meta)teorem oblika »Ako B onda C« naravno u svrhu dobivanja teorema »Ako A onda C« putem intuitivne tranzitivnosti jezične relacije »ako – onda«. Unutar sustava sekvenata na koji se može gledati kao formalni metaracun nad dedukcijom, to se pravilo tradicionalno naziva pravilom reza (Troelstra i Schwichtenberg 2000: 66–68; Gentzen 1964; Gentzen 1965). Rez je specifičan jer u izvjesnom smislu onemogućava mehaničku potragu za dokazom: ako trebamo pronaći dokaz za »Ako A onda C«, što nam govori da razmotrimo baš B kao međukariku? Premda je Gentzen (Gentzen 1964; Gentzen 1965) dokazao da se rez može uvijek preformulirati uz pomoć drugih pravila, rast dobivenih dokaza bez reza s obzirom na izvorne je ponekad čak i hipereksplozivniji (Troelstra i Schwichtenberg 2000: 215–217). To znači da je rez bio koristan da drži dokaze jednostavnima i kratkima (usp. Boolos 1984), a možda čak i lijepima (usp. Rota 1997: 171).

U svakom slučaju, na metarazini, rez se obilno primjenjuje kao vrlo intuitivan princip. Vjerojatno ne bismo bili predaleko od istine kada bismo hipotetizirali da bi zajednica logičara i matematičara smatrala neformalne dokaze s eksplicitno preformuliranim odnosno eliminiranim zdravorazumskim ekvivalentom reza nepotrebno dugačkima, a posljedično i 'ružnima' (usp. Rota 1997: 178). Ovime se otvara pitanje je li kratkoća poželjno svojstvo u lijepom dokazu. No prije nego prijedemo na tu temu, napomenimo da je eliminacija reza i normalizacija kao ekvivalent u dedukciji (Troelstra i Schwichtenberg 2000: 178–196; Prawitz 2006) važna zbog još jedne pojave, a to je mogućnost uređivanja formalnih izvoda tako da na sredini postoji tzv. midsekvent. Midsekvent u dedukciji je možda intuitivniji. To je ona formula prije koje su (u idealnom slučaju) bila samo pravila eliminacije, a nakon nje samo pravila introdukcije. Na slici 1 je prikazana jedna dedukcija gdje je midsekvent kontradikcija.

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Mx \rightarrow \neg Px)}{Ma \rightarrow \neg Pa} E\forall}{\neg Pa} E\rightarrow \quad \frac{\frac{\frac{\forall x(Sx \rightarrow Mx)}{Sa \rightarrow Ma} E\forall \quad [Sa]^\alpha}{Ma} E\rightarrow}{[Pa]^\beta} E\rightarrow}{\frac{\frac{\perp}{\neg Pa} I \rightarrow, \beta}{Sa \rightarrow \neg Pa} I \rightarrow, \alpha}{\forall x(Sx \rightarrow \neg Px)} I\forall} E\rightarrow$$

Slika 1.

Možemo uočiti da nam je mogućnost uređivanja izvoda rezom ili normalizacijom dala jednu novu 'urednost', za koju možemo konstatirati da će doprinijeti da neki dokaz bude lijep.

No intuitivno djeluje da se preglednost i urednost može estetski supsumirati pod kratkoću: kratki će dokaz automatski biti uredan. Vratimo se stoga pitanju je li kratkoća nužna i dovoljna za lijepi dokaz kao što (Rota 1997: 171) tvrdi.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[\neg(A \vee \neg A)]^\beta}{\perp} \text{I} \rightarrow, \gamma \quad \frac{[A]^\gamma}{A \vee \neg A} \text{IV}}{\frac{[\neg(A \vee \neg A)]^\beta}{\perp} \text{I} \rightarrow, \beta} \text{E} \rightarrow \quad \frac{[\neg(A \vee \neg A)]^\alpha}{\perp} \text{I} \rightarrow, \alpha} \\
 \frac{\frac{[\neg(A \vee \neg A)]^\beta}{\perp} \text{I} \rightarrow, \beta}{A \vee \neg A} \text{I} \rightarrow, \alpha \quad \frac{[\neg(A \vee \neg A)]^\alpha}{\perp} \text{I} \rightarrow, \alpha}{A \vee \neg A} \text{I} \rightarrow, \alpha} \\
 \frac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A, \perp} \text{RW} \quad \frac{A \Rightarrow A, \perp}{\Rightarrow A, A \rightarrow \perp} \text{R} \rightarrow \\
 \frac{\Rightarrow A, A \rightarrow \perp}{\Rightarrow A \vee (A \rightarrow \perp)} \text{RV}
 \end{array}$$

Slika 2.

Uzmimo kao usporedne primjere dokaze zakona isključenja trećeg u prirodnoj dedukciji i u sustavu sekvenata. Osim velike razlike u duljini, može se uočiti da je kratkoća dokaza u sustavu sekvenata varljiva jer *de facto* ovisi o preformulaciji »A ili ne-A« u »Ako A onda A«, što teško možemo smatrati informativnim, a onda se postavlja i pitanje čemu taj dokaz služi, zbog čega je teško ovaj dokaz smatrati lijepim, iz čega slijedi da *kratkoća nije dostatan uvjet za ljepotu dokaza. No ostaje pitanje nužnosti* (Rota 1997: 180–182).

No da odmah napomenemo da ne bi bilo zabune: svi su dokazi tek ‘preformulacije’ u određenom smislu, no naglasak je na tome da su u većini slučajeva (posebno na metarazini) one informativne u smislu da su nove i nisu očite. To često znači da su dugački, ali ne više nego što je nužno – ako postoje dva konkurenta dokaza, *bit će blaga preferencija prema kraćem, ako su jednako pregledni, jasni, informativni, bogati i inovativni*. No vratit ćemo se još na ta svojstva.

Zadržimo se na neformalnoj razini diskusije: postoji li neko bogatstvo strukture ili informativnosti u dokazu u dedukciji? Djeluje da je odgovor negativan jer duljina ovog dokaza više govori o nezgrapnosti sustava dedukcije za potrebe dokazivanja isključenja trećeg nego što govori o strukturi te formule. Također, obilno se uvode pretpostavke istog ili jako sličnog oblika formuli koja se dokazuje, za što postoje tehnički razlozi, ali u svakom slučaju ovaj dokaz teško može poslužiti da se nekoga ‘uvjeri’ da je formula istinita. Zbog toga smo skloni ovakav dokaz preliminarno okarakterizirati kao ‘ružan’.

$$\frac{\frac{[A \wedge (A \rightarrow B)]^\alpha}{A \rightarrow B} \text{E} \wedge \quad \frac{[A \wedge (A \rightarrow B)]^\alpha}{A} \text{E} \rightarrow}{\frac{B}{(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B} \text{I} \rightarrow, \alpha} \text{E} \wedge \quad \frac{\frac{[A \wedge (A \rightarrow \perp)]^\alpha}{A \rightarrow \perp} \text{E} \wedge \quad \frac{[A \wedge (A \rightarrow \perp)]^\alpha}{A} \text{E} \rightarrow}{\frac{\perp}{(A \wedge (A \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp} \text{I} \rightarrow, \alpha} \text{E} \wedge$$

Slika 3.

Primjer je informativnog dokaza koji nije na metarazini usporedni dokaz *modus ponens* (koji je prikazan kao jedna formula) i principa nekontradikcije. Važno je napomenuti da se desni dokaz dobije ako negaciju definiramo kao »Ako A onda kontradikcija« i da sam dokaz ne koristiti nikakva posebna pravila za kontradikciju. Vidi se da je ponašanje negacije u kontekstu kontradikcije sadržano ili u samoj takvoj definiciji negacije ili u drugim pravilima (introdukcija implikacije, eliminacija implikacije i eliminacija konjunkcije). U tom smislu ovaj dokaz pruža jedan specifičan uvid i ima naznake da bi mogao biti ‘lijep’. *Ovdje možemo naznačiti da bi nužan uvjet za ljepotu dokaza mogla biti ta specifičnost (možda i neintuitivnost ali i neizbježnost) uvida, no vratit ćemo se još na to.*

Ovime dolazimo i do jedne vrlo specifične teme, a to je uloga notacije. Vidjeli smo ranije da notacija može igrati veliku ulogu. Formalno, sustavi prirodne dedukcije i sustavi sekvenata su ekvipotentni (Troelstra i Schwichtenberg 2000: 68–74), što znači da dokazuju iste formule pa se na njih može gledati kao na različite vidove notacije za isti pozadinski fenomen, kojeg možemo nazvati *stvarna dedukcija*. Stvarna dedukcija (ili stvarna struktura kao generalizacija pojma) za naše je potrebe neka idealna platonička dedukcija, koju prirodna dedukcija i sekventi opisuju (u slučaju stvarne strukture, onda možda i neke druge formalne teorije, ne samo dedukcija i sekventi). I opisuju je savršeno, ali na različite načine. S obzirom na razliku koju smo prikazali, može se zaključiti da je duljina dokaza ovisna o odabiru načina da se opiše stvarna dedukcija: u jednom slučaju notacija forsira dugački dokaz, a u drugome kratki.

Uloga notacije vidljiva je i u drugom primjeru kojeg smo prikazali. Da nismo definirali negaciju kako jesmo (a u korektnost te definicije možemo se uvjeriti istinitosnim tablicama), izomorfnost dokaza s dokazom *modus ponens* ne bi bila očita. Ustvari, ta je dva dokaza moguće zajedno smatrati dokazom o tome da je princip nekondikcije tek instanca *modus ponens* gdje je B kontradikcija, pod uvjetom da je negacija definirana kako je definirana. A ta je metatvrdnja zanimljiva.

Moguće je gledati na notaciju i teleološki: je li neka notacija takva da pruža dovoljno intuicije da se brže dođe do nekog (novog) teorema ili primjene? Dobar je primjer razlika u Leibnizovoj i Lagrangeovoj notaciji u slučaju lančanog pravila za derivacije. Isti matematički fenomen se u Leibnizovoj notaciji opisuje kao  $dx/dy \ dy/dz = dx/dz$ , a u Lagrangeovoj kao  $f'(g(x))g'(x)$  (Cajori 1993: 582–630; Lagrange 1770). Premda se može reci da je Lagrangeova notacija danas popularnija i intuitivnija, formulacija lančanog pravila je intuitivnija u Leibnizovoj i može se sugerirati da vizualna analogija s razlomcima u Leibnizovoj notaciji nudi ne samo način da se lakše zapamti i primijeni, nego i da se otvori put istraživanjima analognih rezultata oko operacija koji postoje kod jednostavnih razlomaka. Premda se radi o dobro istraženom području, zamislimo da nije tako. Razumijevanje je na razini stvarnih dokaza idealizirano razumijevanje kojem se teži, no realnost matematičkih istraživanja je da se puno više rezultata događa kod dokazivanja ekvivalentnih iskaza neke hipoteze nego u njenom rješavanju. 'Uvid' i stvarnu strukturu neovisnu o notaciji i s njom povezanom intuicijom je ideal, a ne realnost. A često konačno rješenje dođe kao odgovor na neki od drugih njenih ekvivalentnih iskaza (koji su preformulacije izvorne hipoteze s drukčijim objektima), a ne na izvorno postavljenu hipotezu. Velika je nada za velike otvorene hipoteze upravo da neki njihov ekvivalentni iskaz da novo gledište na stvar, koje će onda uroditi lakšim rješavanjem hipoteze. Ovo direktno sugerira limitiranost logičara i matematičara kada je riječ o stvarnim pozadinskim strukturama jer one ostaju nepromijenjene među ekvivalentnim iskazima tvrdnji. A svaka je tvrdnja u konačnoj instanci ekvivalentna s *True* ili *False* i razrada te ekvivalencije jest matematički ili logički dokaz. A do te zadnje ekvivalencije je lakše doći ako se problem puno puta preformulira, do te mjere da postaje intuitivno jasno da je u toj nekoj formulaciji to (na primjer) ekvivalentno s *True*. I taj konačni korak jest dokaz za taj iskaz tvrdnje, ali i za sve ekvivalente iskaze. Osim razmatranja o limitiranosti uvida u stvarne strukture moramo naglasiti i sljedeće: *ako bismo tvrdili da ljepota dokaza ima teleološku komponentu, onda mora biti relativizirana s obzirom na upotrjebljenu notaciju.*



Jedna se jako važna razlika u dokazima očituje u tome je li dokaz konstruktivan ili nije. Preformulacijom Curry-Howardova izomorfizma možemo vidjeti da su konstruktivni dokazi, dokazi koji imaju oblik algoritma (Sørensen i Urzyczyn 1998: 57–68), pravila transformacije kojima se iz pretpostavki dokaže konkluzija. Nekonstruktivni dokazi su dokazi koji pretpostave suprotno i dokazuju kontradikciju. Premda postoje mnogobrojne logike koje odbacuju pravila koja u dokaznim sustavima omogućavaju nekonstruktivne dokaze, većina njih naziva se *intuicionističkim logikama* (Martino 2018; Mints 2013). Nekonstruktivni dokazi uglavnom su kraći, *no preferencija se daje i dalje konstruktivnim dokazima, koji se smatraju jasnijima, a u nekoj mjeri i ljepšima.*

Zanimljiva je tema, vezana uz duljinu dokaza, slučaj takozvanog teorema o četiri boje (Appel, Haken 1977; Appel, Haken i Koch 1977), koji kolokvijalno kaže da je svaki povezani graf obojiv s četiri boje. Slikoviti prikaz tog teorema bio bi uz pomoć političke karte nekih država. U toj varijanti teorem o četiri boje kaže da bez obzira na to kakve pojedine države imale granice, ako se isključe granice u točki, dovoljne su četiri boje da se karta može obojati tako da su dvije susjedne države uvijek različite boje. Ovo je iskaz teorema u dvije dimenzije, no teorem se može poopćiti i na više dimenzija i na neuklidske strukture. No nama to nije bitno. Bitno nam je kako je dokazan ovaj teorem: teorem je dokazan računalom. Posebno je zanimljivo da se radi o prvom značajnom dokazu računalom, ali i o dokazu koji je predug da ga ljudi mogu verificirati (Reinier 1980). Ovdje dolazimo do zanimljive interakcije između duljine dokaza (koja je ‘neprativa’, engl. *intractable*) i njegove konstruktivnosti. Filozofijske sumnje oko dokaza sastoje se ponajviše u nepovjerenju računalu bez ljudske verifikacije: premda je metafizička realnost zadnje instance strojnog jezika (logičko sklopovlje) ista kao i logičke pretpostavke teorije grafova, u slojevima između prvog fizičkog i zadnjeg logičkog se mogla skrivati greška. Jednostavnije rečeno, zašto bismo vjerovali tzv. *compileru*? U raspravi oko valjanosti dokaza teorema o četiri boje uočava se *preferencija kratkoće nad konstruktivnošću* u vidu prihvatljivosti dokaza, a potencijalno i njegove ljepote.

Krećemo sada na zadnju točku koju želimo naglasiti prije ulaska u estetiku, a to je pojam *ekvivalentnog dokaza*. Strogo gledano, trebali bismo razlikovati pojmove ekvivalentnih (ali različitih) formulacija teorema i ekvivalentnih (ali različitih) dokaza. Sasvim sigurno ako imamo različite formulacije teorema nužno imamo i različite dokaze (barem do neke mjere), no moguće je imati i različite dokaze istog teorema. Jedan je poznati primjer takozvana Lindenbaumova lema u logici (Skansi 2019: 62–63). Lindenbaumova lema kaže da se nad svakim konzistentnim skupom formula može izgraditi maksimalno konzistentni skup formula. Lindenbaumova lema ima dva poprilično različita dokaza. Prvi, kojeg možemo nazvati ‘školski’, prezentira algoritam proširenja skupa formula novim formulama. Novih formula može biti konačno mnogo ili eventualno prebrojivo mnogo, pri čemu onda imamo induktivnu konstrukciju koja ide po skupu prirodnih brojeva. Druga varijanta ide preko Kuratowski-Zornove leme (Jech 2006: 48) koja kaže: ako je  $P$  parcijalno uređeni skup takav da svaki njegov linearno uređeni podskup ima gornju među u  $P$ , onda  $P$  ima maksimalan element. Posebno je zanimljivo da je Kuratowski-Zornova lema ekvivalent aksioma izbora, koji je ontološki jako problematičan (nećemo ulaziti dublje u ovo, ali zainteresiranog čitatelja upućujemo na Moore 2013 i Jech 2008). Ovime vidimo da dva dokaza Lindenbaumove leme imaju različite nedostatke: školski dokaz ima ograničenje da jezik mora biti prebrojiv, a dokaz preko Kuratowski-Zornove leme ima nedostatak što koristi

*Aksiom izbora.* Školski dokaz djeluje bolje jer ne znamo ni što bismo s neprebrojivim jezicima. S druge strane, školski dokaz je pomalo zatrpan detaljima na koje je potrebno paziti, a dokaz preko Kuratowski-Zornove leme kraći je (Rautenberg 2006: 77–78), dok se Aksiom izbora obilno koristi u nekim područjima matematike bez puno brige. Čak u svom iskazu, Aksiom izbora ne djeluje problematično, ali problemi nastaju kada se razmotri intuitivnost njegovih ekvivalenata, poput Zermelova principa dobrog uređivanja (Jech 2006: 47–49).

Ovdje je možda zanimljivo napomenuti ideju ekvivalentnih formulacija. Po rezultatima obrnute matematike (Simpson 2010), velika većina matematike i logike, odnosno teorema u njima, međusobno je ekvivalentna. Točnije, program se obrnute matematike sastoji u tome da se iz nekog sustava *S* dokaže neki teorem *T*, a onda se iz tog teorema *T* i baznog sustava *B* se dokaže početni sustav *S*. Kako je bazni sustav *B* sadržan u početnom sustavu *S*, to je ustvari dokaz ekvivalentnosti ‘razlike’ *B* i *S*, s jedne, i *T*, s druge strane. Ali ono što je osobito zanimljivo je da ako dokažemo isti rezultat i za neki drugi teorem *T'*, *de facto* smo dokazali ekvivalentnost *T* i *T'* (preko *S*). Logičari koji rade na temeljima matematike izolirali su pet takvih sustava *S* koji su međusobno različiti, no skoro svi poznati teoremi u matematici i logici ekvivalentni su u tom smislu nekom od tih pet sustava. To znači da postoji pet fundamentalno različitih teorema, a gotovo svi teoremi u matematici i logici preformulacija su jednog od tih pet sustava. Ovo baca jedno specifično svjetlo na ideju različito formuliranih, ali ekvivalentnih tvrdnji.

## Pojam ljepote i estetska prosudba

Ljepota i ružnoća svakako su dio svakodnevnog života pojedinaca i kao takvi se često nalaze u uporabi u svakodnevnom jeziku. Međutim, u filozofskoj je tradiciji (a prvenstveno o tome možemo govoriti u njenoj Zapadnoj tradiciji) pojam ljepote jedan od problematičnih pojmova opterećen različitim ontološkim implikacijama, problemima vezanima uz subjektivnost i objektivnost suda ukusa itd. Stoga će pojam ljepote ovdje biti prikazan u sklopu najvažnijih koncepcija lijepog unutar filozofijske tradicije, a ljepota koja bi se ticala dokaza u logici bit će razmatrana upravo s obzirom na prikazane koncepcije ljepote. Od jedne od najviših vrijednosti u antici, ljepota, a uz to i njeno istraživanje i tumačenje, doživjela je gotovo nestanak u ozbiljnijim filozofskim analizama početkom 20. stoljeća, da bi se početkom 21. stoljeća vratila u navedene analize ponajviše uspostavljanjem gotovo u potpunosti prirodnoznanstvenog diskursa i istraživanja poput neuroestetike pomoću koje se ljepota promatra u sklopu neuroznanosti i istraživanja neuroloških stanja i korelata s obzirom na estetička iskustva (usporedi npr. u Nalbantian 2008: 357–368, Chatterjee 2011: 53–62, Zeki 2001: 51–52).<sup>2</sup> Taj je pristup svakako nešto što bi se u budućim radovima o ljepoti logičkih dokaza moglo i trebalo uključiti, a naročito s obzirom na najavljenost istraživanje koje bi empirijski trebalo utvrditi preferencije logičara i matematičara vezano uz ljepotu samih dokaza. Za sada će, ipak, analiza biti provedena unutar klasičnih teorijskih pristupa lijepome, a koje su već i same po sebi dovoljno zanimljive s obzirom na uspostavu veze među disciplinama poput estetike i logike. Naime, iako vezanje ljepote i estetike uz matematičke i logičke dokaze nije posve novo, ono je još uvijek novo u dovoljnoj mjeri da se provede analiza koja bi pokazala koja se od estetičkih teorija može pokazati kompatibilnom sa samim dokazima i na



temelju čega je unutar tih teorija moguće pronaći uporište za tvrdnje da je neki dokaz lijep. Tom se smislu veze između estetike i logike može suprotstaviti starije shvaćanje prirode njihove povezanosti; formalne logike kao kritičkoga sustava s klasifikatornim i evaluativnim sudovima poput onih u estetici, kao i estetike kao strogo formalno-logičkog sustava (usp. Aschenbrenner 1964: 63–79), ali ono ipak nije ono što analizira ovaj rad. Naime, iako je takvu vezu logike i estetike sasvim moguće ustvrditi, ovdje je prije riječ o tome da se sami estetički klasifikatorni i evaluativni sudovi upotrijebe na matematičkim i logičkim operacijama.

Dakako, da bismo o nečemu uopće mogli govoriti kao lijepom, nezaobilazno je dotaknuti se estetske prosudbe matematičkih i logičkih entiteta. Ono što se u kraćim pregledima o ljepoti u matematičkim dokazima može smatrati lijepim najčešće se sažima kao ljepota u metodi, ljepota u rezultatima i ljepota u samom iskustvu bavljenja matematikom (usp. »Mathematical Beauty«, 2019). Ljepota u metodi uključuje najmanji mogući broj uključivanja dodatnih pretpostavki ili prijašnjih rezultata, dolazak do rezultata na iznenađujući način, dokaz izveden na originalan način i s originalnim i novim uvidima te izgradnja metode koja može poslužiti kao generalni način pristupu u rješavanju sličnih problema. Ljepota u rezultatima uključuje povezivanje do tada nepovezanih područja, pri čemu se ostvaruju dubinske veze koje ne samo da otkrivaju nova područja nego i doprinose njihovom oprimjeravanju i rješavanju. Konačno, ljepota se u matematici može shvatiti i naprosto kao užitek u sudjelovanju u matematičkim i geometrijskim operacijama te u samom izvođenju dokaza. Opravdano je pretpostaviti da bi ovakvo uživanje za onoga tko sudjeluje u navedenim matematičkim izvodima uključivalo upravo prethodno spomenutu ljepotu u metodi i/ili rezultatima. No koje god od spomenutih svojstava matematičkog dokaza uzeli, uz pretpostavku da bi ga jedno ili više od navedenih svojstava uistinu moglo učiniti lijepim, potrebno je razmotriti radi li se o subjektivnoj reakciji i prosudbi da je neki matematički dokaz lijep ili o uistinu objektivnom svojstvu matematičkoga dokaza. Drugim riječima, ukoliko neki dokaz uistinu možemo smatrati lijepim, utoliko valja razmotriti je li riječ o subjektivnoj procjeni ili o objektivnom svojstvu samog dokaza. Budući da je već intuitivno i iskustveno jasno da će različiti ljudi imati različite evaluativne sudove o ljepoti različitih, pa i matematičkih, entiteta, ali i da je barem u nekim slučajevima moguće doći do konsenzusa o onome što se smatra lijepim, obje će se ekstremne pozicije morati odbaciti. Drugim riječima, u slučaju ekstremno subjektivističke pozicije sve što neki subjekt smatra lijepim uistinu bi i bilo lijepo budući se takav sud ne bi mogao pobiti, a u slučaju ekstremno objektivističke pozicije individue se ni na koji način, osim potpuno pogrešne procjene, ne bi mogle ne složiti u prosudbi lijepog (usporedi u Sartwell 2016). Ova antinomija istovremeno subjektivne procjene lijepog i objektivnog stanja ljepote jedno je od općih mjesta u analizi lijepog (usporedi u Sartwell 2016), a možda je najjasnije istaknuta u Kantovu zahtjevu za istovremenim djelovanjem (inter)subjektivne procjene lijepoga i univerzalne valjanosti takve procjene, kao da je riječ o svojstvu koje uistinu pripada samim entitetima koje se evaluira (Zangwill 2019). Ne ulazeći dublje u samo razmatranje Kantova suda ukusa kao općeg mjesta, možemo zaklju-

2

Dakako, valja napomenuti da se istraživanje i interpretiranje pojma ljepote zadržalo i u 20. stoljeću i nije u potpunosti iščezlo. Ljepota je u onodobnoj fenomenološkoj, ali i u ana-

litičkoj tradiciji zadržana i zastupljena, iako ponešto oslabljena, i neovisno o neuroestetici i prirodoznanstvenim istraživanjima.

čiti da je ljepotu matematičkih entiteta potrebno razmatrati kao subjektivnu procjenu vlastite reakcije na ono o čemu se sudi, a koja je utemeljena na univerzalnoj normativnosti zamijećenih svojstava. U konačnici, to isključuje procjenu reakcije s obzirom na neka mentalna ili druga stanja subjekta koja su kontingentna s obzirom na svojstva onoga o čemu se sudi, a koja se mogu vezati uz ljepotu. Time se ostvaruje jedan od zahtjeva istaknutih na samom početku rada, naime, da je moguće govoriti o barem djelomično važećoj univerzalnosti lijepoga, a ne tek o subjektivnim stanjima koja bi onemogućila objektivnu evaluaciju nečega kao lijepog. Kao završni argument u prilog tezi o univerzalnosti (matematički) lijepog može se istaknuti i empirijska potvrda da subjekti, neovisno o matematičkoj potkovanosti, prepoznaju estetske aspekte matematičkih dokaza i vezuju ih uz ono što se tradicionalno može razmatrati i shvatiti kao lijepo, naime umjetnička djela (Johnson i Steinerberger 2019: 70).

### **Filozofijske koncepcije lijepog – klasična, idealistička, hedonistička i ostale koncepcije lijepog**

S obzirom na različite mogućnosti tumačenja ljepote i lijepog te na navedenu problematičnost i opterećenost pojma ljepote tradicijom, različitim interpretacijama i shvaćanjima, ne začuđuje činjenica o postojanju različitih koncepcija ljepote koje je moguće dovesti u vezu s matematičkim i logičkim dokazima. Te su koncepcije često suprotstavljene, iako je u njima moguće pronaći i elemente koji bi odgovarali nekim drugim koncepcijama. Ipak, u njihovom se kratkom pregledu (vidi u Sartwell 2016) naglasak stavlja na dominantno tumačenje kojim ih je donekle, tj. barem za potrebe uopćavanja, moguće razdvojiti. Razlikovat ćemo tri koncepcije ljepote: (1) klasičnu, (2) idealističku i (3) hedonističku koncepciju. Dakako, osim njih moguće je izvesti i ostale pozicije koje, ipak, nisu toliko utjecajne i smatramo da su slabije primjenjive na slučajeve koje u radu razmatramo.

Klasična koncepcija ljepote temelji se na odnosu dijelova i cjeline te na s njima povezanim pojmovima proporcija, odnosa i sklada među dijelovima, simetrije, asimetrije itd. Prva pomisao vezana uz sve navedeno vjerojatno je renesansna umjetnost koja uvodi perspektivu, pravilo zlatnog reza i tome slično. Kako se često ističe u povijesti umjetnosti, renesansna umjetnička djela počivaju upravo na odnosu dijelova koji zasebno mogu figurirati kao lijepa s obzirom na vlastite manje odsječke, tehniku i slično, ali pravo estetsko vrednovanje dobivaju tek u omjerima spram cjeline, odnosima i skladom koje uspostavljaju s cjelinom itd. (Wölfflin 1932: 15). Upravo na tome počiva cjelokupna renesansna umjetnost: skulptura, poezija, glazba i slikarstvo. Dakako, sama ideja o ljepoti kao odnosu i skladu dijelova i cjeline nije originalno renesansna, već je možemo prepoznati kao osnovnu ideju lijepoga kod Aristotela za kojeg je lijepi objekt skladno uređeno odnošenje veličina i dijelova (Aristotel 1920: 7), a sve je to najočitije izvedeno upravo u matematici i matematičkim znanostima koje kao najviše oblike ljepote prikazuju »poredak, razmjer i određenost« (Aristotel 2001: 357). Dakako, ovu je koncepciju, uostalom i u metafizičkom smislu, preuzeo i Toma Akvinski, a slično ju je formulirao i Francis Hutcheson (Sartwell 2016).

Nasuprot klasičnoj koncepciji lijepog koja je ustanovljena Aristotelovim razmatranjima o odnosu i skladu cjeline i dijelova i koja je dominirala renesansnom umjetničkom i filozofskom tradicijom, idealistička koncepcija razvila se, dakako, iz Platonova metafizičkog sustava. Pa iako je idealno uređenje

države na neki način također pretpostavljalo odnos pojedinca i zajednice kao odnos dijela i cjeline te se na taj način isprepliće s klasičnom koncepcijom lijepog, Platonovo razmatranje lijepog ima snažne metafizičke implikacije. Stoga je njegovu koncepciju lijepog ipak uputno odvojiti od prethodne. Iako se za Platona ljepota pokazuje vrijednom baš kao i dobro i istinito, ljepota je za Platona kao nepromjenjiva forma čest primjer jer je, s jedne strane, upravo ljepota rezultat subjektivne evaluacije, a s druge, predstavlja i nedovršeni koncept. Naime, upravo kao subjektivna evaluacija ona iziskuje već spomenutu univerzalnost koju je moguće pronaći u nepromjenjivim formama, a naročito s obzirom na to da je moguće tek pokazati entitete za koje bi se moglo ustvrditi da imaju svojstva lijepog, ali sami ne predstavljaju ljepotu. Također, kao takva, ljepota predstavlja upravo koncept koji valja dovršiti zato što u njoj sudjeluju osjetila koja percipiraju lijepo, ali i koji za sebe traži intelektualni napor prave, umne spoznaje. Stoga je upravo ljepota koncept koji najbolje predstavlja anamnezu i stremljenje uma da se prisjeti vječnih i nepromjenjivih formi koje postoje u svijetu ideja (Pappas 2016). Osim navedenog, opće je mjesto u Platonovu razmatranju ljepote, a nasuprot Aristotelovoj koncepciji odnosa cjeline i dijelova, svojevrsna unifikacija pojedinačnih lijepih predmeta i samog koncepta ljepote kao forme. Ta se unifikacija kod Platona očituje u poznatom perceptivnom i umnom uspinjanju od pojedinačnih lijepih tijela, preko ljepote duše pa sve do univerzalnog koncepta ljepote (Platon 1996: 124–130). Bliskima Platonovoj idealistički tumačenoj koncepciji ljepote mogu se smatrati Plotinov misticizam te Schillerovo unificiranje osjetilnog i umnog ili prirode i duha (usp. Sartwell 2016), a što će svoj vrhunac postići kod Hegela. Naime, upravo se kod Hegela ponovo uspostavlja veza konkretnih pojedinačnosti i metafizičkog univerzalizma i to, kako sam Hegel tvrdi, razvijajući dalje Platonovo apstrahiranje jer ono ne može zadovoljiti zahtjeve današnjeg duha iako »i mi moramo poći od filozofije umjetnosti, s idejom lijepog« (Hegel 1835: 22).

Nasuprot ranije navedenim, hedonistička koncepcija ljepote razvila se dominantno u 18. stoljeću i vezuje se ponajviše uz zastupnike empirizma. Dakako, veza s empirizmom postaje jasna shvatimo li hedonističku koncepciju kao izravan uzrok ugode u našim osjetilima koju stvara percipiranje lijepih objekata. Kao i u razmatranju suda ukusa, moguće je tvrditi da senzacija ugode proizlazi bilo iz samih svojstava objekta koji smatramo lijepim bilo iz naše reakcije neovisno o samim formalnim svojstvima objekta. Utoliko, iako bi za valjanost argumenta trebalo ustvrditi da su same formalne karakteristike presudne u stvaranju senzacija ugode jer u suprotnom ne možemo biti uopće sigurni da je bilo kakav objekt prosudbe uistinu nužan, ranija se razmatranja pokazuju suvišnima za ovu koncepciju, iako u odnosu na nju ne moraju biti kontradiktorna. Naime, uistinu je moguće ustvrditi da su formalne karakteristike objekta zaslužne za osjećaj ugode, ali bez daljnjih empirijskih dokaza nemoguće je ustvrditi i je li to zahvaljujući simetriji ili asimetriji odnosa dijelova spram cjeline u slučaju klasične teorije lijepog te je li cjelovitost umnog i osjetilnog nužna ili kontingentna. Vezivanje ljepote i ugode tako je ostalo uvriježeno sve do suvremenih analiza koje su uglavnom odbacile evaluativne i klasifikatorne iskaze o ljepoti kao iskaze koji se prije tiču opisa mentalnog stanja subjekta negoli opisa nekih objektivnih svojstava nekog objekta. Uz koncepciju ljepote kao ugode, moguće je još povezati i koncepciju ljepote vezanu uz ljubav i čežnju te korisnost ili nekorisnost. Naglašavanje subjektivnih stanja tipično je za koncepcije lijepog koje se vežu uz ljubav, a svoj korijen ova koncepcija vuče još iz antičkih mitova i kasnijih usmenih književnih djela. Dakako, ni na koji način nije nužno ustvrditi da je razlog tim mentalnim

stanjima bilo kakvo objektivno stanje objekta, njegovo formalno ustrojstvo i specifičan način djelovanja na osjetilni aparat onoga koji percipira objekte. Konačno, korisnost kao princip na kojem se gradi koncepcija ljepote, a možda ponajbolje formulirana u Kantovu bezinteresnom sviđanju, odbačena je jer se ne pokazuje plauzibilnim da je objekt ljepši ukoliko nema neku drugu namjenu osim bivanja lijepim ili manje lijepim ukoliko je ima. Iako je jasno da objekt može biti lijep premda ne pripada npr. umjetničkim predmetima u njihovom klasičnom smislu, čini se da se od ponekih objekata može očekivati da budu lijepi upravo s obzirom na njihovu namjenu. Tako bi, primjerice, katedrala mogla biti jednako lijepa kao i obična stambena zgrada. Međutim, čini se da je u tom slučaju načelo bezinteresnosti pomalo, iako ne nužno, narušeno, a samo pragmatično svojstvo objekta, naime da bude lijep i da nas kao takav zainteresira, istaknuto u prvi plan.

### **Logika kao umjetnička forma i skeptizam u definiranju umjetničkog**

Izvođenje matematičkih dokaza često se uspoređuje s glazbom i poezijom, a moguće je i pronaći tvrdnje da je izvođenje dokaza, u slabijoj inačici tvrdnje, kreativna aktivnost ili čak, u njenoj jačoj inačici, umjetnička forma. I dok se ne bismo susreli s previše poteškoća sa slabijom inačicom, jača inačica o dokazima kao umjetničkoj formi ipak nas suočava s određenim problemima. Ono što nas ovdje zanima jest, operiramo li s premisom da dokazivanje uistinu jest umjetnička forma, na koji način ona to jest i koja od teorija umjetnosti uopće može biti primjenjiva na dokaze? Nesumnjivo, interes za lijepo drastično je pao unutar estetičkih analiza od početka 20. stoljeća naovamo, a s pojavom avangardnih umjetničkih pravaca sve manje pažnje biva posvećeno pojmu ljepote u umjetnosti. Utoliko će razmatranja o ljepoti iz prethodnog poglavlja kao i primjenjivosti koncepcija lijepog na dokaze sada biti ostavljena po strani te će se analiza usredotočiti na teorije umjetničkog i njihovu kompatibilnost s dokazima.

U drugoj polovici 20. st., umjetnost je podvrgnuta promjenama koje imaju snažne teorijske implikacije. Ne radi se o tematskoj ili nekoj poetičkoj promjeni, već o bitnoj izmjeni uvjeta i zamislive klase predmeta uz koju bi mogla stajati predikacija bivanja umjetničkim djelom (Kardum 2018: 9). Jednostavnije rečeno, predmeti za koje bi se moglo tvrditi da su umjetnička djela više nemaju nikakvu nužnu vezu s tradicionalno shvaćenim umjetničkim djelima, a svaki objekt, pod uvjetom ispravne kontekstualizacije, može postati umjetničkim predmetom. Utoliko je sasvim lako zamislivo da se matematički dokazi tretiraju i kao umjetnički entiteti, naravno, pod pretpostavkom zadovoljenja kriterija koje pojedine teorije zahtijevaju. Sama ljepota više nije konstitutivni element definiranja umjetničkih djela, već postaje pragmatično i kontingentno svojstvo kojim se, ukoliko je prisutno, može utjecati na potencijalne subjekte suđenja te time utjecati i na njihov stav glede samog sadržaja ili semantičke razine predmeta o kojemu se sudi (Danto 2007: 100–101; Kardum 2018: 19). Dakako, ljepota ne samo da nije konstitutivna nego predstavlja i samo jedan u nizu mogućih i zamislivih retoričkih postupaka. Sve navedeno rezultiralo je time da se teorijsko bavljenje umjetnošću u 20. stoljeću gotovo pa svelo na pitanje definicije umjetničkoga djela, a ono je, pak, u analitičkoj tradiciji dovelo do klasifikatornih iskaza i teorija utemeljenih na nužnim i dovoljnim razlozima (Kardum 2018: 1–2). Same definicije moguće je predstaviti kao tradicionalne, najčešće svedene na jedno nužno svojstvo umjetničkog djela i

suvremene definicije koje su bazirane na nužnim i dovoljnim razlozima u nadi da će ih biti teže urušiti negoli je to bio slučaj s tradicionalnim definicijama te da će uistinu moći obuhvatiti sve zamislive predmete koji se mogu predicirati kao umjetnička djela. Dakako, svaka se od tih teorija suočila s određenim problemima, a određenje umjetničkog nije se pokazalo bitno manje izazovnim od njemu bliskog pojma ljepote. Stoga će u nastavku rada biti prikazane osnovne pozicije pomoću kojih se pokušalo definirati umjetničko djelo, a koje se tiču i dokaza kao potencijalne umjetničke forme.

Kao i ostale umjetničke forme, dokazi su suočeni i sa skepsom o mogućnosti definiranja kao umjetnička djela (usporedi u Adajian 2012). Navedene promjene u umjetničkim praksama i produkcija umjetničkih djela koja su se našla u raskoraku s tradicionalno shvaćenim umjetničkim djelima predstavljale su problem u teorijskome opravdanju i traženju nužnih i dovoljnih razloga za definiranje umjetničkih djela. Tako su tradicionalne definicije bile suočene sa skepsom u definiranju umjetničkih djela. Sama skepsa o mogućnosti da se umjetnost definira oslonila se na nekoliko osnovnih argumenata (ovdje navedene, ali i ostale skeptičke argumente i pozicije glede definiranja umjetnosti usporedi u Kardum 2018: 2; Kardum 2014: 428–431): (1) umjetnost je otvoreni koncept koji nije moguće definirati jer bi se samim definiranjem koncept zatvorio i promijenio (Weitz 1956: 31), a naše intuicije bile su dovoljne do razdoblja avangardne umjetnosti (Kennick 1958: 331–322; Danto, 1997: 86–87), (2) umjetničke su forme i rodovi u najboljem slučaju slični i prije je riječ o obiteljskoj sličnosti kakvu možemo pronaći i u jeziku negoli o konceptu koji je uistinu moguće unificirati (Wittgenstein 1958: 31; Tilghman 1973: 521) te (3) sam je koncept umjetnosti relativno nedavno uveden i ne može vrijediti za ono što smo skloni tumačiti kao umjetnička djela u razdoblju prije njegove uspostave (Kristeller 1951: 498). Sve navedene skeptičke pozicije odnose se, dakako, jednako i na dokaze ukoliko o njima govorimo kao o umjetničkim formama ili o umjetničkim aktivnostima, stoga ih je potrebno analizirati pomoću tradicionalnih i suvremenih definicija koje bi ih mogle potvrditi kao umjetničke forme.

## Tradicionalne i suvremene definicije umjetnosti

Dosadašnji su se pokušaji povezivanja logike i estetike prvenstveno ostvarivali na tri načina: (1) kao suprotstavljanje osjetilne ili estetske spoznaje kao niže u odnosu na umnu spoznaju kojoj bi pripadali i matematički ili logičko-formalni postupci te bi tako, baumgartenovski rečeno, razlikovali višu i nižu teoriju spoznaje, (2) bavljenje matematikom kao fundamentalni princip doživljavanja osjetilne ugone te (3) kao uvođenje logičkih principa i pravila u estetsku evaluaciju, a što podrazumijeva konzistentnost i nekontradiktornost estetskih evaluacijskih sudova. Međutim, tom je odnosu moguće pristupiti i drukčije, tj. moguće je primijeniti neke klasične ili suvremenije estetske teorije na logiku ili matematiku. Neke od tradicionalnih teorija koje valja prikazati ukoliko se želi učiniti navedeno upravo su formalističke, ekspresivističke i reprezentacijske teorije kojima se želi definirati umjetničko djelo (ovdje sažeti prikaz svih navedenih teorija i njihove izvode vidi u Adajian 2016, Kardum 2014, Kardum 2018). Kao što im sami nazivi govore, radi se o teorijama koje počivaju na jednom nužnom svojstvu koje bi se trebalo odnositi i na logičke i matematičke entitete. Ono što se može pokazati problematičnim, prije svega, činjenica je da se to svojstvo često pokazuje nedovoljnim za definiranje i nedvosmisleno određenje upravo umjetničkih djela. Također, kako pokazuju neki analitičari, ta se svojstva ponekad pokazuju čak i kontingentnima.



Navedena su svojstva najčešće reprezentacijska, ekspresivna i formalna pa iz njih slijede reprezentacijske, ekspresivističke i formalističke teorije. Reprezentacijske teorije počivaju na svojstvu umjetničkih djela da reprezentiraju neku stvarnost, tj. da stoje za objekte stvarnoga svijeta, a, strože gledano, mimetičke teorije kao podskup reprezentacijskih poput Platonove sadržavaju konkretno oponašanje (Platon 1997: 366–369; Pappas 2016). Dakako, oponašanje kao takvo nije nužno da bi djelo nešto reprezentiralo jer je reprezentiranje moguće ostvariti i drukčije, npr. simboličkim prikazivanjem koje nekim svojstvom oprimjeruje cijelu reprezentiranu klasu predmeta i koji je nositelj arbitrarno odabranih značenja usvojenih npr. konvencijama (Goodman 1968: 11). Svaka se reprezentacijska teorija može protumačiti kao sklop nužnih i dovoljnih uvjeta koji zatvaraju intencionalno stvoreni entitet koji stoji za nešto drugo i pomoću kojega recipijenti mogu prepoznati reprezentirano, a osnovni je problem reprezentacijskih teorija pokazati da su umjetnička djela uistinu uvijek o nečemu, tj. da uvijek nešto reprezentiraju. Posebna se mogućnost takvog prigovora odnosi na glazbu i ples za koje se često napominje da ne reprezentiraju nešto izvanjsko samima sebi (Carroll i Banes 1982: 38). Drugim riječima, neka umjetnička djela naprosto nisu o nečem drugom (Carroll 2010: 47), iako za zastupnike reprezentacijskog svojstva to najčešće podrazumijeva da su o sebi samima te da se referiraju na vlastito mjesto u povijesnoumjetničkom kontekstu ili na stilske postupke koji ih također klasificiraju upravo kao umjetnička djela. Time umjetnost problematizira samu sebe i postaje vlastitom filozofijom (Danto 1997). Također, brojni reprezentacijski sustavi poput dijagrama, karata ili sustava prometne signalizacije predstavljaju reprezentacije koje bez nekog dodatnog uvjeta ne mogu biti klasificirane kao umjetnička djela.

Ekspresivističke teorije pojavile su se kao opreka reprezentacijskim teorijama, a naglašavale su istraživanje unutrašnjih, mentalnih stanja, naročito s razvojem romantizma. One se usredotočuju na emocije koje se pojavljuju u umjetničkim djelima te podrazumijevaju umjetnikovu intenciju da stvori umjetničko djelo ispunjeno vlastitim emocijama. Također, te bi iste emocije trebalo moći pobuditi i kod recipijenta umjetničkog djela. Stoga se umjetnička proizvodnja može shvatiti i kao oblik komunikacije pomoću koje prenosiemo osjećaje. Ekspresivističke su teorije suočene s mnogim poteškoćama kada se pokušava dokazati da osjećaji i njihovo prenošenje predstavljaju nužne i dovoljne uvjete umjetničkog djela. Naime, lako je dokazati da mnogi naši postupci uključuju iskazivanje emocija, ali to ni na koji način ne podrazumijeva da se radi o umjetničkim djelima.

Formalističke su teorije utemeljene na unutrašnjoj organizaciji ili strukturi umjetničkoga djela, a naročito su potaknute razvojem novih prikazivačkih medija, prvenstveno fotografije. Sposobnost fotografije da precizno prikazuje i reprezentira na sasvim očit način, utjecala je na razvoj apstraktnog prikazivanja. Najpoznatije i najšire prihvaćeno shvaćanje formalizma u umjetničkim djelima pretpostavlja *značajnu formu*, odnosno unutarnju organizaciju linija, boja, prostora, volumena i ostalih formalnih svojstava. Za formalističke teorije problematičan je razvoj avangardnih umjetničkih praksi i umjetničkih djela koja se u svojim zamjedbenim i formalnim karakteristikama ne razlikuju od ostalih neumjetničkih predmeta te se time pokazuje da formalne karakteristike nisu nužne u definiranju umjetnosti. One su, međutim, svakako zanimljive zato što promatraju upravo ono što nas zanima i u izvođenju formalnih dokaza, naime njihovu ljepotu unutar formalne strukture.

Suvremene definicije umjetnosti mogu se podijeliti na institucijske i historijske konvencionalizme te funkcionalizme kod kojih se uglavnom razmatraju

estetske funkcije pa će u ovom pregledu biti preskočene jer ih je moguće vezati uz formalističko tumačenje, s naglaskom na upravo estetsku funkciju zato što se, nije li to slučaj, takve definicije pokazuju izlišnim za umjetnička djela, te hibridne ili disjunktivne definicije. Disjunktivne teorije naprosto prihvaćaju neke od navedenih uvjeta kao dovoljne i ono što kao prigovor vrijedi za neku specifičnu teoriju također vrijedi i za disjunktivne teorije. Nadalje, ne možemo sa sigurnošću zaključiti da disjunktivi unutar njih nisu proizvoljno odabrani niti koji bi bio njihov konačan broj. Funkcionalizmi, ukoliko su estetski, utoliko se mogu smatrati bliskima formalizmu, dok su neestetški utemeljeni funkcionalizmi gotovo beskonačni i gotovo neprimjenjivi na umjetničke aktivnosti ili predmete. Stoga se za njih odmah može istaknuti prigovor da su preuski i da kao takvi isključuju brojne moguće umjetničke predmete neutemeljene na zamjedbenim posebnostima, a koje barem neke ekstenzijske teorije mogu obuhvatiti, ili da su preširoki jer se dotiču funkcija koje nisu presudne za predikaciju *biti umjetničko djelo*.

Dakako, neke od navedenih definicija sadržavat će elemente koji se mogu preklapati u većoj ili manjoj mjeri, ali u svojoj će se srži ipak moći razlikovati. Tako npr. konvencionalističke teorije mogu kao umjetnička djela priznavati i one predmete ili entitete koji mogu imati i druge funkcije, ali za njih to neće predstavljati načelo na temelju kojega bi se izvršila redukcija na samo jednu teoriju. Budući da se pokazalo da s razvojem suvremenih umjetničkih praksi više ne možemo vlastite klasifikatorne sudove vezati uz formalnu strukturu promatranog i prosuđivanog, neki su teoretičari klasifikaciju umjetničkog odlučili provesti izvan samog objekta suđenja. Takva se ekstenzija, prije svega, može pronaći u institucijski određenim teorijama, bilo da se radi o spoju reprezentirane ili semantičke razine djela s njegovim stilskim i kontekstualnim karakteristikama (Danto 1997), bilo da se radi o zajednici upućenih koji samim sudjelovanjem u umjetničkom svijetu imaju pravo na klasifikatorne i evaluativne iskaze (Dickie 2000). Relacijska svojstva spram povijesne situacije i konteksta mijenjaju tradicionalno razmatrana formalna svojstva umjetničkih djela, a u slučaju primjene na formalno-logičke i matematičke entitete čini se da govore više o samom kontekstu negoli o doživljaju izvođenja samih dokaza.

Historijska pripadnost klasi umjetničkih predmeta koja je u temelju historijskih definicija teško da može biti primjenjiva na logiku i matematiku. Naime, smatrali matematičke i logičke dokaze lijepima ili ne, kao i umjetničkim djelima ili ne, ništa nam povijesno gledano o njima ne govori kao o već prihvaćenim umjetničkim djelima koja ostvaruju povijesne veze spram svojih prethodnika unutar povijesnoumjetničkih razmatranja. Također, pripadnost narativima unutar kojih bi takvi dokazi bili tretirani kao umjetničke prakse ponovo ovise o stručnjacima ili zajednici upućenih, čime se vraćamo na ekstenziju razmatranih objekata u njihove kontekste i povijesne situacije. No, za razliku od ostalih (ne)umjetničkih predmeta za koje je pripadnost umjetničkom sporna, unutar samih se dokaza, formalno gledano, ništa značajno nije promijenilo. Dakako, moguće je da se pojavio novi izvod ili novi način dolaska do već poznatih rezultata, ali ništa u samom dokazu nije rezultat neke radikalne promjene koja bi razmatranje strukture dokaza skrenulo u njegovu socijalnu ili historijsku ekstenziju.

### **Primjenjivost koncepcija lijepog i umjetničkog na dokaze**

Ukoliko se ispituje primjenjivost u radu prikazanih koncepcija lijepog i umjetničkog, utoliko možemo zaključiti da se pokazuje prilično oštra podje-

la između tradicionalnijih i suvremenijih pristupa. To, dakako, nije slučajno. Naime, suvremene definicije umjetnosti, bilo da se radi o predmetima ili o praksama, pokazuju snažan ekstenzijski karakter, tj. svoje klasificiranje umjetničkog provode ispitujući i uzimajući u obzir izvanjske, historijske ili socijalne uvjete koji dovode do određenog pomaka unutar klase onoga što se može smatrati umjetničkim. Izuzetkom se može smatrati estetski funkcionalizam koji može biti vezan uz formalizam te neke inačice institucionalizma koje kao nužno svojstvo pretpostavljaju i svojstvo reprezentacije pa se kao takve mogu vezati uz reprezentacijske teorije. Koliko god to bilo važno za samo definiranje umjetnosti, te teorije više govore o aspektima spomenutih ekstenzija negoli o samim objektima i praksama pa se stoga ovdje razmatrani formalni dokazi nalaze u istom položaju kao i ostala (moguća) umjetnička djela. Drugim riječima, ništa u tim teorijama ne objašnjava samu strukturu dokaza kao umjetnički zanimljivu, a u onim slučajevima koje smo spomenuli kao izuzetke fokus razmatranja može se vratiti na nužna svojstva tradicionalnih teorija, tj. formalnu strukturu i svojstvo reprezentiranja. Dakle, institucijske i historijske teorije pozivaju se na društvene i historijske ekstenzije, a one se ne odnose na teoreme, disjunkcijske mogu predstavljati potpuno nejasne slučajeve za koje nismo sigurni koje elemente promatrati, a funkcionalističke su ili irelevantne zbog izuzetno širokog spektra zamislivih funkcija ili se u slučaju estetskog funkcionalizma mogu zamijeniti tradicionalnim teorijama. Upravo je to razlog zašto se tradicionalne teorije mogu smatrati primjenjivima na formalne dokaze.

Među tradicionalnim pristupima i definicijama umjetnosti možemo pronaći više razloga da dokaze smatramo upravo umjetničkom aktivnošću. Osim što je i intuitivno moguće tvrditi da naprosto znamo što je lijepo i što je umjetničko djelo i bez stroge definicije i klasifikatornih iskaza, moguće je tvrditi i neposrednost užitka u ljepoti dokaza. Takav je Erdosev iskaz kojim tvrdi da se naprosto zna da su brojevi lijepi i da je pitati za razlog tome jednako kao i pitati za razlog ljepote Beethovenove *Devete simfonije*. Unutar reprezentacijske teorije možemo tvrditi da dokaz teorema osjetilno pokazuje određeno slaganje matematičkih entiteta. Naravno, takva je tvrdnja izrazito snažna i pretpostavlja snažnu metafizičku implikaciju i obvezu pristajanja na dualističke koncepcije poput Platonove. Ekspresivističke su teorije također primjenjive. Kada Poincaré tvrdi da matematičar svojim radom prenosi iste osjećaje kao umjetnik, tvrdi upravo prisutnost komuniciranja emocija i impresija kako to zagovaraju i ekspresivističke koncepcije. U konačnici, formalističke teorije pokazuju najviše u odnosu spram matematike i logike. Naime, umjetničko je, a odmah i lijepo, ono što ima *značajnu formu*, tj. skladan i kreativan raspored boja, ploha, linija ili matematičkih elemenata u konkretnom slučaju formalnih dokaza. Ono što je kod formalnih dokaza u tom slučaju lijepo može biti kompatibilno s klasičnom koncepcijom lijepoga u kojoj su važni odnos i razmjer dijelova i cjeline, nepostojanje suvišnosti ili nedostataka (utoliko se kratkoća dokaza može smatrati i njegovom ljepotom, pod uvjetom da se kratkoća ne odražava negativno na njegovu valjanost i eksplikatornu snagu), zatim s idealističkom koncepcijom lijepoga u kojoj pojedinačni (naročito nov) rezultat formalnog dokaza pokazuje slaganje osjetilnog i inteligibilnog, ali i s hedonističkom koncepcijom u kojoj bez posebnog interesa naprosto uživamo u formalnim svojstvima dokaza i u njegovom izvođenju. Dodatno, navedeno se slaže i s empirijskim istraživanjima (usp. Johnson i Steinerberger 2019: 67–70) i s već spomenutom ljepotom dokaza u metodi, rezultatu i naprosto u bavljenju formalnim sustavima. Sve to upućuje na mogućnost da se estetska svojstva formalnih dokaza objedine u jednoj koncepciji. Tumačenje koje

bi sve navedeno objedinilo i koje bi predstavljalo iznimno zanimljivo daljnje istraživanje, moglo bi se pronaći kod Immanuela Kanta i ne bi predstavljalo prvi takav pokušaj (vidi u Breitenbach 2015). Naime, Kantovu je koncepciju lijepog i umjetničkog moguće shvatiti upravo kao spoj reprezentacije, ekspresije i formalizma jer predstavlja vrstu reprezentacije koja je u sebi i svojim formalnim karakteristikama svrhovita te predstavlja kultivaciju mentalnih sposobnosti upravo pomoću zamjedbenih moći (Adajian 2016). Tako upravo Kant predstavlja izuzetnu mogućnost za daljnje ispitivanje ljepote formalnih dokaza jer njihova savršena matematička struktura, iako se ne mora smatrati izravno lijepom, predstavlja umnu spoznaju koja je upravo zbog svoje matematičke strukture ne samo platonički iskazana veza osjetilnog i umnog nego je i kreativna umna aktivnost pogodna upravo za estetsku prosudbu (Kant 1976).

## Zaključak

U ovom smo radu istražili mogućnost primjene estetičkih teorija na logičko-matematičke dokaze. Kao što smo pokazali, postoje jasne naznake hijerarhije važnosti pojedinih svojstava koje dokazi imaju ili nemaju, no postoji izražen problem spajanja s estetičkim teorijama. Ovo je uvjetovano dvjema pojavama. Prvo, tradicionalne teorije nedovoljno su precizne i, drugo, suvremene teorije više su fokusirane na to što smatramo umjetničkim djelom. Zbog toga smo odabrali uzeti kao radnu pretpostavku da dokaz jest umjetničko djelo i to ponajviše zato da ne bismo morali stvarati trivijalne preformulacije suvremenih teorija sa sintagmom 'dokaz' umjesto sintagme 'umjetničko djelo'. Ovo istraživanje nije konkluzivno, u smislu da još uvijek nemamo jasno definirane nužne i dovoljne uvjete da bismo mogli smatrati neki dokaz lijepim (ali smo dobili više mogućih odgovora), no ono nam je dalo rezultate temeljem kojih možemo konstruirati anketu koju bismo postavili logičarima i matematičarima. Ta će anketa sadržavati primjere dokaza koje ćemo izolirati temeljem rezultata ovog istraživanja i time ćemo dobiti puno jasniju sliku o tome koji su konkretni dokazi lijepi, a koji ne. S time bismo se vratili na ove rezultate i dodatno izolirali prave, nužne i dostatne uvjete.

## Literatura

Thomas Adajian, »The Definition of Art«, *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2012.). Dostupno na: <https://plato.stanford.edu/archives/sum2016/entries/art-definition/> (pristupljeno 28. 8. 2019.).

Martin Aigner, Günter M. Ziegler, *Proofs from The Book*, Springer, Berlin 1998.

Kenneth I. Appel, Wolfgang Haken, »Every Planar Map is Four Colorable. Part I: Discharging«, *Illinois Journal of Mathematics* 21 (1977) 3, str. 429–490, doi: <https://doi.org/10.1215/ijm/1256049011>.

Kenneth I. Appel, Wolfgang Haken, John A. Koch, »Every Planar Map is Four Colorable. Part II: Reducibility«, *Illinois Journal of Mathematics* 21 (1977) 3, str. 491–567, doi: <https://doi.org/10.1215/ijm/1256049012>.

Aristotel, *Metafizika*, preveo Tomislav Ladan, Signum, Zagreb 2001.

Aristotle, *On the Art of Poetry*, prevela Ingram Bywater, Oxford at the Clarendon Press, Oxford 1920.

Karl Aschenbrenner, »Aesthetics and Logic: An Analogy«, *The Journal of Aesthetics and Art Criticism* 23 (1964) 1, str. 63–79, doi: <https://doi.org/10.2307/428140>.

Edward J. Barbeau, *Mathematical Fallacies, Flaws and Flimflam*, Mathematical Association of America, Washington DC 2014.

George Boolos, »Don't Eliminate Cut«, *Journal of Philosophical Logic* 13 (1984) 4, str. 373–378, doi: <https://doi.org/10.1007/bf00247711>.

George Boolos, »Reading the *Begriffsschrift*«, *Mind* 94 (1985), str. 331–344, doi: <https://doi.org/10.1093/mind/XCIV.375.331>.

Angela Breitenbach, »Beauty in Proofs: Kant on Aesthetics in Mathematics«, *European Journal of Philosophy* 23 (2015) 4, str. 955–977, doi: <https://doi.org/10.1111/ejop.12021>.

Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Dover Publications, New York 1993.

Noël Carroll, Sally Banes, »Working and Dancing: A Response to Monroe Beardsley's 'What Is Going on in a Dance?'«, *Dance Research Journal* 15 (1982) 1, str. 37–41, doi: <https://doi.org/10.2307/1477693>.

Noël Carroll, *Art in Three Dimensions*, Oxford University Press, New York 2010.

Anjan Chatterjee, »Neuroaesthetics: A Coming of Age Story«, *Journal of Cognitive Neuroscience* 23 (2011) 1, str. 53–62, doi: <https://doi.org/10.1162/jocn.2010.21457>.

Arthur Coleman Danto, *Preobražaj svakidašnjeg: filozofija umjetnosti*, prevela Vanda Božičević, KruZak, Zagreb 1997.

Arthur Coleman Danto, *Nasilje nad ljepotom: estetika i pojam umjetnosti*, prevela Mirjana Paić-Jurinić, Muzej suvremene umjetnosti, Zagreb 2007.

George Dickie, »The Institutional Theory of Art«, u: Noël Carroll (ur.), *Theories of Art Today*, The University of Wisconsin Press, Madison 2000., str. 93–108.

Torkel Franzén, *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, A. K. Peters, New York 2005.

Gottlob Frege, »Begriffsschrift: eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens« (1879.), *Gallica*. Dostupno na: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65658c/f1.image> (pristupljeno 28. 8. 2019.).

Gerhard Gentzen, »Investigations into logical deduction«, preveo M. E. Szabo, *American Philosophical Quarterly* 1 (1964) 4, str. 288–306.

Gerhard Gentzen, »Investigations into logical deduction«, preveo M. E. Szabo, *American Philosophical Quarterly* 2 (1965) 3, str. 204–218.

Kurt Gödel, »O formalno neodlučivim stavcima *Principia Mathematica* i srodnih sustava I«, u: Ernest Nagel, James R. Newman (ur.), *Gödelov dokaz*, prevela Maja Hudoletnjak Grgić, KruZak, Zagreb 2001.

Nelson Goodman, *Languages of Art: An Approach to a Theory of Symbols*, The Bobbs Merrill Company, Indianapolis 1968.

Godfrey Harold Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, Cambridge 2004.

Georg Wilhelm Friedrich Hegel, *Aesthetics: Lectures on Fine Art*, preveo Thomas Malcolm Knox, Clarendon Press, Oxford 1835.

Herbert Edwin Huntley, *The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty*, Dover, New York 1970.

Thomas J. Jech, *Set Theory*, Springer, Berlin 2006.

Thomas J. Jech, *The Axiom of Choice*, Dover Publications, New York 2008.

Samuel G. B. Johnson, Stefan Steinerberger, »The Universal Aesthetics of Mathematics«, *The Mathematical Intelligencer* 41 (2019) 1, str. 67–70, doi: <https://doi.org/10.1007/s00283-018-09857-5>.

Immanuel Kant, *Kritika moći suđenja*, preveo Viktor D. Sonnenfeld, Naprijed, Zagreb 1976.

Marko Kardum, »Umjetnost kao samorefleksija: od Hegelova kraja povijesti do Dantoova kraja umjetnosti«, *Filozofska istraživanja* 34 (2014) 3, str. 427–443.



Marko Kardum, *Problem socijalne konstrukcije vizualnog polja u teoriji A. C. Dantoa* (disertacija), Filozofski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Odsjek za filozofiju, Zagreb 2018.

William E. Kennick, »Does Traditional Aesthetics Rest on a Mistake?«, *Mind* 67 (1958), str. 317–334, doi: <https://doi.org/10.1093/mind/lxvii.267.317>.

Steven G. Krantz, *A Primer of Mathematical Writing*, AMS Press, Providencé 1997.

Paul Oskar Kristeller, »The Modern System of the Arts: A Study in the History of Aesthetics Part I«, *Journal of the History of Ideas* 12 (1951) 4, str. 496–527, doi: <https://doi.org/10.2307/2707484>.

Joseph-Louis Lagrange, »Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries«, *Hist. Acad. Royale Sci. Belles-Lettres Berlin* 24 (1770), str. 251–326.

Enrico Martino, *Intuitionistic Proof Versus Classical Truth: The Role of Brouwer's Creative Subject in Intuitionistic Mathematics*, Springer, Cham 2018.

»Mathematical Beauty«, *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical\\_beauty](https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_beauty) (pristupljeno 29. 8. 2019.).

Grigori Mints, *A Short Introduction to Intuitionistic Logic*, Kluwer Academic Publisher, New York 2013.

Gregory H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, & Influence*, Dover, New York 2013.

Suzanne Nalbantian, »Neuroaesthetics: neuroscientific theory and illustration from the arts«, *Interdisciplinary Science Reviews* 33 (2008) 4, str. 357–368, doi: <https://doi.org/10.1179/174327908X392906>.

Nickolas Pappas, »Plato's Aesthetics«, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2016.). Dostupno na: <https://plato.stanford.edu/archives/fall2017/entries/plato-aesthetics> (pristupljeno 28. 8. 2019.).

Platon, *Eros i Filia*, preveo Zdeslav Dukat, Demetra, Zagreb 1996.

Platon, *Država*, preveo Martin Kuzmić, Naklada Jurčić, Zagreb 1997.

Burkard Polster, *Q.E.D.: Beauty in Mathematical Proof*, Walker & Company, New York 2004.

Dag Prawitz, *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*, Dover, New York 2006.

Wolfgang Rautenberg, *A Concise Introduction to Mathematical Logic*, Springer New York 2006.

Gian-Carlo Rota, »The Phenomenology of Mathematical Beauty«, *Synthese* 111 (1997) 2, str. 171–182.

Crispin Sartwell, »Beauty«, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2016.). Dostupno na: <https://plato.stanford.edu/entries/beauty/#LovLon> (pristupljeno 27. 8. 2019.).

Stephen G. Simpson, *Subsystems of Second-Order Arithmetic*, Cambridge University Press, Cambridge 2010.

Sandro Skansi, *Logika i dokazi*, Element, Zagreb 2019.

Peter Smith, *An Introduction to Gödel's Theorems (Cambridge Introductions to Philosophy)*, Cambridge University Press, Cambridge 2007.

Daniel Solow, *How to Read and Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes*, Wiley, New York 2013.

Morten Heine Sørensen, Pawel Urzyczyn, *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*, Elsevier, Amsterdam 1998.

Terence Tao, »What is Good Mathematics?«, *Cornell University* (2007.). Dostupno na: <https://arXiv.org/abs/math/0702396v1>.

B. R. Tilghman, »Wittgenstein, Games, and Art«, *The Journal of Aesthetics and Art Criticism* 31 (1973) 4, str. 517–524, doi: <https://doi.org/10.2307/429325>.

Anne S. Troelstra, Helmut Schwichtenberg, *Basic Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.

Morris Weitz, »The Role of Theory in Aesthetics«, *The Journal of Aesthetics and Art Criticism* 15 (1956) 1, str. 25–37, doi: <https://doi.org/10.2307/427491>.

Ludwig Wittgenstein, *Philosophical Investigations*, preveo G. E. M. Anscombe, Basil Blackwell, Oxford 1958.

Heinrich Wölfflin, *Principles of art history: the problem of the development of style in later art*, prevela Mary Hottinger, Dover, New York 1932.

Nick Zangwill, »Aesthetic Judgment«, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2019.). Dostupno na: <https://plato.stanford.edu/archives/spr2019/entries/aesthetic-judgment> (pri-  
stupljeno 27. 8. 2019.).

Semir Zeki, »Artistic Creativity and the Brain«, *Science* 293 (2001) 5527, str. 51–52, doi: <https://doi.org/10.1126/science.1062331>.

**Marko Kardum, Sandro Skansi**

**The Possibility of Applying Traditional and  
Modern Aesthetical Theories to Logical and Mathematical Proofs**

**Abstract**

*In this paper, we explore the possibility of applying traditional and modern aesthetical theories to logical and mathematical proofs, with the goal of better understanding the intuitive concept of mathematical beauty. This informal concept takes a central role in the work of logicians and mathematicians and can be thought of as their main motivation. In the present paper, we try to define concepts connected to mathematical beauty or beauty in mathematical proofs, so that we may lay the foundations for a more precise definition of mathematical beauty which would be obtained through a detailed survey among logicians and mathematicians, presented in a future paper. The present paper brings crucial results to be used for constructing the survey.*

**Key words**

logic, mathematics, formal proofs, mathematical beauty, aesthetical theories