Facoltà di Ingegneria – Università degli Studi di Bologna

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Marco Gentilini

Valutazione delle condizioni economiche ottimali di funzionamento di aeromotori per generazione di energia elettrica.

Quaderni del Dipartimento

MARCO GENTILINI

VALUTAZIONE DELLE CONDIZIONI ECONOMICHE OTTIMALI DI FUNZIONAMENTO DI AEROMOTORI PER GENERAZIONE DI ENERGIA ELETTRICA.

1 – INTRODUZIONE.

Una razionale società industriale adotta necessariamente una filosofia produttiva sempre più conservativa valutando ogni possibilità di risparmio energetico e di utilizzo dell'energia persa per inefficienza dei sistemi di produzione, trasporto e impiego dell'energia stessa.
Tuttavia l'energia ottenuta dal risparmio e dall'ottimizzazione dei sistemi produttivi, non è recuperabile e utilizzabile in maniera gratuita.
Generalmente, infatti, l'ottimizzazione energetica o l'utilizzo dell'energia dispersa richiede l'installazione di apparecchiature specifiche e il **VAN** dell'investimento necessario risulta, quindi:

$$\mathbf{VAN} = \frac{\mathbf{PuTc_e}}{\mathbf{t_e}} - \left(\mathbf{f_r} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{t_{em}}}\right)\mathbf{qP},$$

ove con **P** si indichi la potenza resa disponibile dagli interventi di ottimizzazione energetica o la potenza recuperata e con **q** il costo specifico dei sistemi volti alla suddetta ottimizzazione energetica o all'utilizzo dell'energia altrimenti dispersa.
A meno delle valutazioni sul costo energetico dell'operazione, il costo specifico di detta energia risulta, quindi: $\mathbf{c_e} = \left(\mathbf{f_r} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{t_{em}}}\right)\frac{\mathbf{qt_e}}{\mathbf{uT}}$.
Il costo specifico **q**, (e quindi il costo specifico dell'energia $\mathbf{c_e}$), non risulta, inoltre, costante, ma si dimostra monotono crescente all'aumentare dell'entità del recupero, (o risparmio), energetico stesso.
Infatti, mentre l'energia recuperabile, (o risparmiabile), è necessariamente limitata superiormente, i costi di investimento crescono in maniera più che proporzionale all'energia recuperata, (o risparmiata), venendo gradualmente ad esaurirsi le possibilità più convenienti. Ne risulta che la convenienza diminuisce, (o il costo specifico dell'energia cresce), progressivamente al crescere dell'entità del recupero, (o risparmio), mentre, fissato il valore di mercato dell'energia e nota la funzione **q = q(P)**, è possibile determinare la potenza recuperata, (o risparmiata), di maggior utile come radice dell'equazione: **dVAN(P)/dP = 0**, o in generale, dall'analisi numerica della funzione **VAN = VAN(P)**.

Attualmente l'analisi economica media del costo dell'energia recuperabile, (o risparmiabile), porge valori paragonabili al costo medio di produzione dell'energia primaria, per cui il risparmio, (o il recupero), si traduce spesso più in termini di vantaggi valutari e occupazionali, (oltre che ecologico–strategici), per il paese interessato, che non economici.

2 – COSTO DELL'ENERGIA EOLICA.

Il costo dell'energia eolica risulta oltremodo variabile essendo ampiamente variabili i parametri che lo compongono.
Il costi di installazione risultano dipendenti dagli oneri per opere di preparazione del sito, trasporto, opere civili e allacciamenti elettrici, variabili a seconda delle caratteristiche del luogo e della taglia dell'impianto.
Il costo delle macchine è comunque pari al **60 ÷70%** del costo totale di investimento, che risulta ormai paragonabile a quello delle centrali di potenza convenzionali.
Per valori tipici delle condizioni anemologiche e per aerogeneratori di media taglia costruiti in serie, fissati i valori indicativi delle velocità nominali di progetto, risulta nota la potenza captata per unità di superficie del rotore per cui è possibile riferire indifferentemente il costo specifico di impianto alla potenza installata, ovvero alla superficie spazzata dal rotore. Indicativamente per rotori orientati, (cos $\mathbf{q = 1}$), $\mathbf{c_{pn} = 0,45}$, $\mathbf{v_n = 12\ m/s}$, si ottiene una potenza a unità di superficie spazzata dal rotore dell'ordine di: $\mathbf{Pn/(\pi D^2/4) = 500\ W/m^2}$, da cui per costi a unità di potenza: $\mathbf{q = 1,5 \div 2\ 10^3}$ **£/W**, un costo specifico a unità di superficie: $\mathbf{q^* \sim 750.000 \div 1.000.000}$ **£/m**$\mathbf{^2}$.
I costi di gestione e manutenzione sono quantificabili in circa il **1 ÷ 3%** annuo del costo impianto. Poichè però, il fattore di carico è dell'ordine del **10 ÷ 40%**, la generazione di energia eolica risulta economicamente competitiva rispetto ai sistemi convenzionali, solo in condizioni geografiche e anemologiche particolarmente favorevoli, a meno che l'impiego di energia eolica non sia relativo a utenze isolate per cui il suo costo debba essere paragonato, o al prezzo di acquisto dell'energia elettrica maggiorato dal costo di allacciamento alla rete nazionale, o al costo di autoproduzione con gruppi elettrogeni.

Costo impianto proporzionale alla potenza installata.

Supposto il costo impianto, (I_o), proporzionale alla potenza installata: $I_o = qP$, il **VAN** dell'investimento, vale:

$$VAN = \frac{P_n u T c_k}{t_{ek}} - \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q P_n, \text{ da cui: } c_k = \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) \frac{q t_{ek}}{uT}.$$

Per impianti elettroeolici a numero di giri **costante**, (essendo in questo caso da ricercarsi il massimo valore della velocità v_f compatibile con le sollecitazioni di progetto dell'impianto), la potenza nominale P_n e quindi il costo I_o, nonchè la potenza istantanea **P** e il fattore di carico **u**, risultano funzioni del numero di giri **n**.
La velocità nominale di progetto v_n e il numero di giri **n**, infatti, sono legati come rapporto nel parametro: $l_p = \pi\, nD/v$, con relazione che in condizioni di massima captazione, ($l_{pmax} = \pi\, nD/v_n$), risulta: $v_n = (\pi D/l_{pmax})\, n$, da cui:

$$P_n(n) = \frac{1}{2} d_s c_{pn} \frac{\pi D^2}{4} v_n^3 = \frac{1}{2} d_s c_{pn} \frac{\pi D^2}{4} \left(\frac{\pi D}{l_{p\,max}}\right)^3 n^3;$$

$$I_o(n) = q\left(\frac{1}{2} d_s c_{pn} \frac{\pi D^2}{4} v_n^3\right) = q\left(\frac{1}{2} d_s c_{pn} \frac{\pi D^2}{4} \left(\frac{\pi D}{l_{p\,max}}\right)^3 n^3\right);$$

$$P_n(n) u(n) T = E(n) = \frac{1}{2} d_s \frac{\pi D^2}{4} \int_{v_i}^{v_f} c_p(n, v) v^3 H(v) dv.$$

Pertanto essendo il valore del fattore di carico dipendente dalle condizioni di esercizio, [$u = u(n)$], il costo specifico dell'energia prodotta risulta: $c_k(n) = \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) \frac{q t_{ek}}{u(n) T} = \left[\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) \frac{q t_{ek}}{T}\right] \frac{1}{u(n)}$, con quindi valore minimo corrispondente al valore massimo del fattore di carico..

Il valore del parametro di progetto, (**n**), di ottimizzazione economica è ottenibile come radice dell'equazione: $dVAN(n)/dn = 0$, (estremante di massimo assoluto della funzione), nella quale si assuma per c_k il costo di mercato, o di autoproduzione dell'energia elettrica.
Circa l'esistenza e il significato fisico degli estremanti dell'equazione di ottimizzazione economica, in ogni caso in cui in funzione di una qualunque variabile, (in questo caso il numero di giri), si abbiano beni limitati a valori massimi asintotici , (l'energia captata tende comunque a un valore asintotico finito, ovvero l'energia massima estraibile dalla

vena), e oneri crescenti senza limitazioni, (il costo impianto cresce indefinitamente al crescere del numero di giri, ovvero della potenza installata), il **VAN** da un valore finito nell'origine, (negativo essendo generalmente diversi da zero i costi estrapolati a produttività nulla degli impianti), tende a meno infinito al tendere all'infinito della variabile.
Pertanto se la funzione ammette estremanti, deve necessariamente esistere almeno un massimo di cui va verificato il segno positivo affinchè la soluzione sia di massimo utile e non di minima perdita.
Tenendo conto della dipendenza delle grandezze dal numero di giri, (**n**), il **VAN** dell'investimento vale:

$$VAN(n) = E(n)\frac{c_k}{t_{ek}} - \left(1 + \frac{a}{t_{ek}}\right)I_o(n),$$

ovvero:

$$VAN(n) = \frac{c_k}{t_{ek}}\frac{1}{2}d_s\frac{\pi D^2}{4}\int_{v_i}^{v_f} c_p(n,v)v^3H(v)dv -$$

$$-\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)q\left(\frac{1}{2}d_s\frac{\pi D^2}{4}c_{pn}v_n^3\right) =$$

$$= \frac{c_k}{t_{ek}}\frac{1}{2}d_s\frac{\pi D^2}{4}\int_{v_i}^{v_f} c_p(n,v)v^3H(v)dv -$$

$$-\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)q\frac{1}{2}d_s\frac{\pi D^2}{4}c_{pn}\left(\frac{\pi D}{l_{p\,max}}\right)^3 n^3,$$

da cui l'equazione di ottimizzazione economica:

$$\frac{\dfrac{dI_o(n)}{dn}}{\dfrac{dE(n)}{dn}} = \frac{c_k}{t_{ek}\left(1 + \dfrac{a}{t_{em}}\right)},$$

risulta:

$$\frac{3qc_{pn}\left(\dfrac{\pi D}{l_{p\,max}}\right)^3 n^2}{\displaystyle\int_{v_i}^{v_f}\frac{dc_p(n,v)}{dn}v^3H(v)dv} = \frac{c_k}{t_{ek}\left(1 + \dfrac{a}{t_{em}}\right)},$$

ovvero:

$$\int_{v_i}^{v_f}\frac{dc_p(n,v)}{dn}v^3H(v)dv = \frac{3qt_{ek}c_{pn}}{c_k}\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)\left(\frac{\pi D}{l_{p\,max}}\right)^3 n^2.$$

Il primo termine dell'espressione del **VAN** è proporzionale all'energia captata per cui rispetto alle condizioni di massima captazione di energia, la presenza di un secondo termine negativo e crescente all'aumentare del numero di giri, sposta le condizioni di ottimizzazione economica a numeri di giri, (e quindi a velocità nominali di progetto, ovvero di potenza installata), inferiori.

Il modello tuttavia, non è del tutto corretto in quanto la potenza massima relativa al costo di investimento, non è limitata al valore:

$\mathbf{P(v_n) = \frac{1}{2} d_s \frac{\pi D^2}{4} c_{pn} v_n^3}$, ma al valore massimo radice dell'equazione

$$\mathbf{\frac{1}{2} d_s \frac{\pi D^2}{4} \frac{d}{dv}\left[c_p(n,v)v^3\right] = 0}, \text{ per: } \mathbf{n = n_{ec}}.$$

Per un calcolo rigoroso occorre quindi limitare la potenza istantanea al valore nominale: $\mathbf{P_n = \frac{1}{2} d_s \frac{\pi D^2}{4} c_{pn} v_n^3}$.

In tal caso il **VAN** risulta:

$$\mathbf{VAN(n) = \frac{1}{2} d_s \frac{\pi D^2}{4} \frac{c_k}{t_{ek}}\left[\int_{v_i}^{v_n} c_p(n,v)H(v)v^3 dv + c_{pn}v_n^3 \int_{v_n}^{v_f} H(v)dv\right] \pm}$$

$$\mathbf{-\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q \left(\frac{1}{2} d_s \frac{\pi D^2}{4} c_{pn} v_n^3\right)},$$

da cui la condizione di massimo utile, o di ottimizzazione economica, come radice dell'equazione: **dVAN(n)/dn = 0**.

Anche in questo caso comunque, essendo ancora il primo termine dell'espressione del **VAN**, (proporzionale all'energia captata), diminuito di un secondo termine negativo e crescente all'aumentare del numero di giri, le condizioni di ottimizzazione economica rispetto alle condizioni di massima captazione di energia risultano a numeri di giri, (e quindi a velocità nominali di progetto, ovvero di potenza installata), inferiori.

Il costo specifico minimo dell'energia prodotta si ottiene per il valore del numero di giri, (**n**), radice dell'equazione:

$$\mathbf{\frac{dc_k(n)}{dn} = -\left[\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)\frac{qt_{ek}}{T}\right]\frac{1}{u^2(n)}\frac{du(n)}{dn} = 0}.$$

Tuttavia il fattore di carico, pari a:

$$\mathbf{u(n) = \frac{\frac{1}{2} d_s \frac{\pi D^2}{4} \int_{v_i}^{v_f} c_p(n,v)v^3 H(v)dv}{\frac{1}{2} d_s \frac{\pi D^2}{4} c_{pn} v_n^3 T} = \frac{\int_{v_i}^{v_f} c_p(n,v)v^3 H(v)dv}{c_{pn} v_n^3 T} =}$$

$$= \frac{\int_{v_i}^{v_f} c_p(n, v) v^3 H(v) dv}{c_{pn}\left(\frac{\pi D}{l_{p\,max}}\right)^3 n^3 T}$$, a meno di improbabili rapide variazioni dell'integrale in funzione di $\mathbf{n}$, assume andamento monotono decrescente con il numero di giri, a indicare che il suo massimo, (ovvero il costo specifico minimo del'energia prodotta), è relativo alle minime velocità nominali di progetto, ($v_n = v_i$).
Infatti ponendo: $v_n = v_i$, il rotore funziona a potenza pari, (o maggiore), a quella nominale, per tutto il periodo di esercizio a meno degli intervalli in cui si ha: $v < v_i$, $v > v_f$.
Parimenti in caso di potenza limitata al valore nominale, risultando il fattore di carico:

$$u(n) = \frac{\int_{v_i}^{v_n} c_p(n, v) H(v) v^3 dv + c_{pn} v_n^3 \int_{v_n}^{v_f} H(v) v^3 dv}{c_{pn} v_n^3 T},$$

ovvero a una media pesata sul tempo, [$H(v)dv$], di un primo contributo comunque inferiore a un secondo, [$c_p(n, v)v^3 \leq c_{pn}v_n{}^3$], per: $v_i < v < v_n$, il massimo si ottiene annullando il primo, ponendo, cioè: $v_n = v_i$.
Infatti per: $v_n < v < v_f$, la potenza istantanea è pari a quella nominale, per cui riducendo v_n, la potenza media si avvicina a quella nominale con aumento del fattore di carico e al limite di $v_n = v_i$, si ha funzionamento a potenza nominale per tutto il periodo di esercizio della macchina, con: $u_{max} = \frac{1}{T}\int_{v_i}^{v_f} H(v) v^3 dv$, che risulta unitario a meno dei periodi di non funzionamento, ($v < v_i$, $v > v_f$).

In ogni caso, tuttavia, le condizioni di minimo costo specifico dell'energia elettrica prodotta, non corrispondono alle condizioni di massimo utile. Infatti mentre al variare del numero di giri l'energia captata tende comunque a un valore asintotico finito, (l'energia massima estraibile dalla vena), il costo di impianto cresce indefinitamente al crescere del numero di giri, (ovvero della potenza installata), e qualora in un bilancio economico al variare di una qualche grandezza, l'utile tenda alla saturazione mentre il corrispondente onere cresca indefinitamente, le condizioni di costo specifico minimo dell'utile prodotto non corrispondono a quelle di massimo utile globale che dipendono anche dalla potenzialità produttiva e che si ottengono massimizzando il **VAN** dell'investimento ove si assuma per il bene o servizio prodotto il suo valore di mercato, o di altro tipo di autoproduzione.

E' immediato verificare che la condizione di ottimizzazione economica, [**dVAN(n)/dn = 0**], coincide con quella relativa al minimo costo specifico dell'energia prodotta, per costo dell'energia elettrica pari a quello proprio dell'impianto.

Infatti tenuto conto della relazione analitica generale: $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, pari a: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$, la condizione di massimo valore del fattore di carico, risulta: $\frac{\int_{v_i}^{v_f} c_p(n,v)v^3H(v)dv}{c_{pn}\left(\frac{\pi D}{l_{p\,max}}\right)^3 n^3 T} = \frac{\int_{v_i}^{v_f} \frac{dc_p(n,v)}{dn} v^3H(v)dv}{3c_{pn}\left(\frac{\pi D}{l_{p\,max}}\right)^3 n^2 T}$, ovvero:

$$\int_{v_i}^{v_f} c_p(n,v)v^3H(v)dv = \frac{n}{3}\int_{v_i}^{v_f} \frac{dc_p(n,v)}{dn} v^3H(v)dv,$$

che coincide con quella di massimo utile, per: $c_k = \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)\frac{qt_{ek}}{uT}$.

A numero di giri, (o pale a incidenza), **variabile**, risulta:

$$VAN = \frac{1}{2}d_s c_{pn}\frac{\pi D^2}{4}\frac{c_k}{t_{ek}}\int_{v_i}^{v_f} v^3H(v)dv -$$
$$-\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)q\left(\frac{1}{2}d_s c_{pn}\frac{\pi D^2}{4}v_f^3\right),$$

da cui l'equazione di ottimizzazione economica, [**dVAN(v_f)/dv_f = 0**]:

$$\frac{3qv_f^2}{v_f^3H(v_f)} = \frac{c_k}{t_{ek}\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)},$$ ovvero: $$v_{f\,max} = \frac{3\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)qt_{ek}}{c_kH(v_{f\,max})}.$$

E' quindi possibile, (qualora l'equazione ammetta soluzioni fisicamente significative), l'esistenza di un limite per la velocità ottimale di fuori servizio e quindi per l'energia economica captabile:

$$E(v_{f\,max}) = \frac{1}{2} d_s c_{pn} \frac{\pi D^2}{4} \int_{v_i}^{v_{f\,max}} v^3 H(v)dv,$$

rispetto al massimo valore tecnicamente ammesso circa la captazione di energia: $E_{max} = \frac{1}{2} d_s c_{pn} \frac{\pi D^2}{4} \int_{v_i}^{oo} v^3 H(v)dv$.

Infatti il primo termine dell'espressione del **VAN**, proporzionale all'energia captata, appare diminuito da un secondo termine negativo e crescente all'aumentare della velocità di fuori servizio.

Il costo specifico dell'energia prodotta mantiene la medesima espressione e le stesse condizioni di minimizzazione per fattore di carico massimo.

Anche in questo caso è immediato verificare che la condizione di ottimizzazione economica, [$dVAN(v_f)/dv_f = 0$], coincide con quella relativa al minimo costo specifico dell'energia prodotta, per costo dell'energia elettrica pari a quello proprio dell'impianto.

Il fattore di carico vale, infatti:

$$u(v_f) = \frac{\frac{1}{2} c_{pn} d_s \frac{\pi D^2}{4} \int_{v_i}^{v_f} v^3 H(v)dv}{\frac{1}{2} c_{pn} d_s \frac{\pi D^2}{4} v_f^3 T} = \frac{\int_{v_i}^{v_f} v^3 H(v)dv}{v_f^3 T},$$

da cui la condizione di ottimizzazione: $du(v_f)/dv_f = 0$, risulta:

$$\frac{\frac{1}{2} c_{pn} d_s S \int_{v_i}^{v_f} v^3 H(v)dv}{\frac{1}{2} c_{pn} d_s S\, v_f^3 T} = \frac{v_f^3 H(v_f)}{3 v_f^2 T} = \frac{v_f H(v_f)}{3T},$$ da cui:

$$u_{max} = u(v_{fmax}) = \frac{\frac{1}{2} c_{pn} d_s S \int_{v_i}^{v_{f\,max}} v^3 H(v)dv}{\frac{1}{2} c_{pn} d_s S\, v_{f\,max}^3 T} = \frac{v_{f\,max} H(v_{f\,max})}{3T}$$

che combinata con la: $v_{f\,max} = \frac{3\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q t_{ek}}{c_k H(v_{f\,max})}$, fornisce appunto la relazione: $c_k = \frac{\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q t_{ek}}{u_{max} T}$.

In realtà a meno del caso particolare in cui risulti: $v_{fmax} = v_f$, con v_f velocità del vento massima tecnicamente ammissibile per le strutture, fissata la potenza economica: $\frac{1}{2} d_s c_{pn} \frac{\pi D^2}{4} v^3_{f\,max}$, nel periodo in cui si ha: $\mathbf{v_{fmax} < v < v_f}$, pari a: $\int_{v_{f\,max}}^{v_f} H(v)dv$, può essere captata a parità di costi di investimento, l'ulteriore quota energetica:

$$\frac{1}{2} d_s c_{pn} \frac{\pi D^2}{4} v^3_{f\,max} \int_{v_{f\,max}}^{v_f} H(v)dv.$$

L'espressione del **VAN** per il calcolo delle condizioni di massima economia del sistema, risulta quindi:

$$VAN(v_{f\,max}) = \frac{1}{2} d_s c_{pn} \frac{\pi D^2}{4} \frac{c_k}{t_{ek}} \left[\int_{v_i}^{v_{f\,max}} v^3 H(v)dv + \right.$$
$$\left. + v^3_{f\,max} \int_{v_{f\,max}}^{v_f} H(v)dv \right] - \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q \left(\frac{1}{2} d_s c_{pn} \frac{\pi D^2}{4} v^3_{f\,max} \right),$$

che differisce dall'espressione valida per le macchine a velocità angolare costante solo per il fattore di potenza pari al valore massimo e ove la mutata espressione del **VAN** rende $\mathbf{v_{fmax}}$ una nuova variabile indipendente di ottimizzazione, non derivata da precedenti relazioni.

Costo impianto proporzionale alla superficie del rotore.

Qualora si assuma il costo impianto proporzionale alla superficie del rotore: $\mathbf{I_o = q * \pi D^2/4}$, in caso di aeromotori a numero di giri, (**n**), **costante**, il **VAN** dell'investimento, risulta:

$$VAN(n) = \frac{1}{2} d_s \frac{\pi D^2}{4} \frac{c_k}{t_{ek}} \int_{v_i}^{v_f} c_p(n,v) v^3 H(v)dv - \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q * \frac{\pi D^2}{4},$$

pertanto essendo il termine di captazione di energia diminuito di un termine indipendente dal numero di giri, le condizioni di ottimizzazione energetica riferite a tale paramentro coincidono con quelle di massima economia in quanto sia l'energia resa che il costo impianto risultano proporzionali alla superficie spazzata dal rotore.
In tale ipotesi, inoltre, non si ha alcun motivo per limitare la potenza a valori nominali.
Il costo specifico dell'energia risulta:

$$c_k = \frac{\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q * t_{ek}}{\frac{1}{2} d_s \int_{v_i}^{v_f} c_p(n,v) v^3 H(v)dv} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q * t_{ek}}{\frac{E(n)}{\frac{\pi D^2}{4}}} = \frac{\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) I_o t_{ek}}{E(n)} \approx \frac{I_o t_{ek} + a I_o}{E(n)},$$

ovvero pari alla rata di ammortamento, (effettiva), dell'impianto: $I_o t_{ek}$, più la quota per oneri di gestione e manutenzione, $(\frac{a}{t_{em}} I_o t_{ek} \approx a I_o)$, divisa per l'energia totale resa, [**E(n)**].

Le condizioni di ottimizzazione, (massimo valore del **VAN** e minimo costo specifico dell'energia prodotta), risultano le medesime e coincidenti con quelle di massima captazione di energia, essendo il costo impianto indipendente dalla variabile di ottimizzazione, (**n**).

Per aeromotori a numero di giri, (o pale a incidenza), **variabile** risulta:

$$VAN(v_f) = \frac{1}{2} d_s c_{pn} \frac{\pi D^2}{4} \frac{c_k}{t_{ek}} \int_{v_i}^{v_f} v^3 H(v) dv - \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q * \frac{\pi D^2}{4},$$

con: $$c_k = \frac{\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q * t_{ek}}{\frac{1}{2} c_{pn} d_s \int_{v_i}^{v_f} v^3 H(v) dv} = \frac{\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q * t_{ek}}{\frac{E(v_f)}{\frac{\pi D^2}{4}}} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) I_o t_{ek}}{E(v_f)} \approx \frac{I_o t_{ek} + a I_o}{E(v_f)},$$

e pertanto anche in questo caso le condizioni di ottimizzazione economica, (mssimo valore del **VAN** e minimo costo specifico dell'energia prodotta), coincidono con quelle di massima captazione di energia, ovvero per massima velocità di fuori servizio compatibile con le sollecitazioni di progetto dell'impianto.

In realtà il costo reale dell'impianto risulta dipendente sia dalle dimensioni delle apparecchiature di generazione energetica, (potenza installata), che dalle dimensioni dei palettamenti, (superficie spazzata dal rotore). Infatti la potenza per unità di superficie del rotore, pari a:

$$\frac{P_n}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{1}{2} c_{pn} d_s \, v_n^3,$$

ovvero decrescente con la velocità $\mathbf{v_n}$, mostra che al diminuire della velocità nominale di progetto, se aumenta il fattore di carico, diminuisce il valore della potenza per unità di superficie del rotore, per cui a grandi palettamenti sono associate piccole potenze e il costo specifico di impianto, certamente non semplicemente proporzionale alla superficie del rotore, non può nemmeno ritenersi costante al variare della velocità nominale di progetto essendo:

$$q = q * \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\frac{1}{2} c_{pn} d_s \frac{\pi D^2}{4} v_n^3} = \frac{q *}{\frac{1}{2} c_{pn} d_s v_n^3}.$$

Pertanto fra le due soluzioni estreme, ovvero parametri ottimizzati coincidenti con quelli relativi alla massima generazione energetica per unità di superficie, (costo proporzionale alla superficie del rotore), e ridotti valori della velocità nominale di progetto per rotori a velocità angolare **costante** e ridotte velocità di fuori servizio per rotori a velocità angolare, (o pale a incidenza), **variabile**, (costo proporzionale alla potenza installata), risulta una generale convenienza economica a minori valori della velocità nominale di progetto o di fuori servizio, (e quindi minori potenze installate per unità di superficie del rotore), rispetto alle esigenze di captazione di energia, seppure meno marcata rispetto al caso di costo impianto proporzionale alla potenza installata.

Pertanto la resa energetica di un aeromotore, oltre che in termini di fattore di carico, è comunemente espressa anche in termini di produttività, ovvero di energia annua per unità di superficie spazzata dal rotore. Tenuto conto di un ordine di grandezza per la potenza per unità di superficie di rotore pari a: **500 W/m^2**, l'energia annua resa in **kWh/anno/m^2**, vale: **500 10^{-3}** x **8760** x **u** e quindi indicativamente variabile in siti anemologicamente significativi e macchine ottimizzate economicamente, da **500 ÷ 1.000 kWh/anno/m^2**, (**u = 0,1** ÷ **0,2**), fino a valori energeticamente massimi di **1.500 kWh/anno/m^2**, (**u = 0,35**), per potenze limitate ai valori nominali e **2.000 kWh/anno/m^2**, (**u = 0,45**), per potenze non limitate ai valori nominali.

3 – MODELLI DI VALUTAZIONE ANALITICA.

L'analisi sperimentale delle macchine eoliche mostra che la funzione $\mathbf{c_p} = \mathbf{c_p(l_p)}$, è esprimibile con una relazione del tipo:

$\mathbf{f(x) = Ax^a e^{-Bx^b}}$, ovvero: $\mathbf{c_p(l_p) = A_1 l_p^{a_1} e^{-B_1 l_p^{b_1}}}$.

Essendo: $\mathbf{l_p = \pi\, nD/v}$, si ottiene quindi:

$$\mathbf{c_p(n,v) = A_1(\pi D)^{a_1}\left(\frac{n}{v}\right)^{a_1} e^{-B_1(\pi D)^{b_1}\left(\frac{n}{v}\right)^{b_1}}}.$$

Posto: $\mathbf{dc_p(l_p)/dl_p = 0}$, risulta: $\mathbf{l_{p\,max} = \left(\frac{a_1}{B_1 b_1}\right)^{\frac{1}{b_1}} = \frac{\pi nD}{v_n}}$,

da cui: $\mathbf{v_n(n) = \dfrac{\pi D}{\left(\frac{a_1}{B_1 b_1}\right)^{\frac{1}{b_1}}} n}$; $\mathbf{c_{pn} = A_1\left(\frac{a_1}{B_1 b_1}\right)^{\frac{a_1}{b_1}} e^{-\frac{a_1}{b_1}}}$.

Le curve sperimentali di distribuzione probabilistica in frequenza della velocità del vento mostrano andamenti a campana asimmetrica verso i bassi valori della velocità e risultano quindi rappresentabili con modelli statistici come quello di Weibull, $\mathbf{W = W(v)}$:

$$\mathbf{W(v) = \frac{k}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k}}, \quad \left[\int_o^{oo} \mathbf{W(v)dv = 1}\right],$$

con i parametri di Weibull:

k, (adimensionale), fattore di forma;

c, (**m/s**), fattore di scala,

da cui la curva probabilità di durata:

$$\mathbf{W_d(v) = \int_o^v W(v)dv = \frac{k}{c^k}\int_o^v v^{k-1} e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k} dv},$$

mentre il valore medio della velocità risulta:

$$\mathbf{v_m = \int_o^{oo} vW(v)dv = \frac{k}{c^k}\int_o^{oo} v^k e^{-\left(\frac{v}{c}\right)^k} dv}.$$

Per **k = 2**, si ottiene la curva di frequenza di Rayleigh:

$$R(v) = \frac{1}{2\pi}\frac{v}{v_m^2}e^{-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{v}{v_m}\right)^2}, \quad \left[\int_o^{oo} R(v)dv = 1\right],$$

funzione della sola velocità media del vento.
La funzione **H(v)**, essendo il tempo a periodo di riferimento in cui la velocità del vento risulta compresa nell'intervallo unitario intorno al valore della variabile, è pari alle curve di probabilità per il tempo di riferimento: **1/T H(v) = W(v)**, **R(v)**.
In generale, quindi, le funzioni: **H = H(v)**, **W = W(v)**, **R = R(v)**, sono esprimibili con relazioni del tipo: $A_2 v^{a_2} e^{-B_2 v^{b_2}}$.

Per rotori a numero di giri **costante** la funzione energia annua è pertanto esprimibile analiticamente come:

$$E(n) = \frac{1}{2} d_s S A_1 A_2 (\pi D)^{a_1} n^{a_1} \int_{v_i}^{v_f} v^{(3-a_1+a_2)} e^{\left[B_2 v^{b_2} + B_1 (\pi D)^{b_1}\left(\frac{n}{v}\right)^{b_1}\right]} dv$$

Per rotori a numero di giri, (o pale a incidenza), **variabile**, si ha:

$$E(v_f) = \frac{1}{2} d_s S A_1 A_2 \left(\frac{a_1}{B_1 b_1}\right)^{\frac{a_1}{b_1}} e^{-\frac{a_1}{b_1}} \int_{v_i}^{v_f} v^{(3+a_2)} e^{-B_2 v^{b_2}} dv,$$

mentre la condizione di ottimizzazione economica:

$$v_{f\,max} = \frac{3\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q t_{ek}}{c_k H(v_{f\,max})},$$

risulta: $$\left(v_{f\,max}\right)^{(1+a_2)} = 3\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)\frac{q t_{ek}}{c_k A_2} e^{B_2 v_{f\,max}^{b_2}}.$$

4 – ESEMPI DI APPLICAZIONE NUMERICA.

Con riferimento a macchine di media taglia, (**D = 60 m**), e regioni a medio–alta ventosità, si può assumere:

$A_1 = 8\ 10^{-3}$ $\qquad a_1 = 4{,}2 \qquad B_1 = 0{,}6 \qquad b_1 = 1$

$A_2 = 1{,}17\ 10^6$ **s/(anno m/s)** $a_2 = 1{,}5$ $B_2 = 0{,}3$ $b_2 = 1$, da cui:

$$c_{pn} = 0{,}425;\ l_{pmax} = 7;$$

$$c_p(n, v) = 2{,}88\ 10^7 (n/v)^{4,2}\ e^{-113(n/v)};$$

$$H(v) = 1{,}17\ 10^6\ v^{1,5}\ e^{-\ 0,3\ v}.$$

MACCHINE A VELOCITA' ANGOLARE COSTANTE.

Ottimizzazione energetica.

Per macchine a velocità angolare **costante** e potenza **non limitata** al valore nominale, posto: $v_i = 5$ **m/s**, $v_f = 20$ **m/s**, la funzione energia annua vale:

$$E(n) = \frac{1}{2} d_s \frac{\pi D^2}{4} \int_{v_i}^{v_f} c_p(n, v) v^3 H(v) dv =$$

$$= 5{,}95 10^{16} n^{4,2} \int_5^{20} v^{0,3} e^{-\left(113\frac{n}{v}+0,3v\right)} dv.$$

L'energia massima captabile risulta: $E_{max} = 1{,}83\ 10^{13}$ **J/anno**, per: $n = 0{,}5013\ s^{-1}$, ($v_n = 13{,}5$ **m/s**), da cui una potenza nominale: $P_n = 1{,}85$ **MW**, con potenza massima, ($v = v_f$), pari a: $P_{max} = 4{,}52$ **MW** e quindi fattore di carico: $u = 0{,}128$.

Con potenza **limitata** al valore nominale, si ha invece:

$$E(n) = \frac{1}{2} d_s \frac{\pi D^2}{4} \left[\int_{v_i}^{v_n} c_p(n, v) v^3 H(v) dv + c_{pn} v_n^3 \int_{v_n}^{v_f} H(v) dv \right],$$

con: $v_n = \dfrac{\pi D n}{l_{p\,max}} = 26{,}928\ n$, da cui:

$$E(n) = 5{,}95\ 10^{16} n^{4,2} \int_5^{26,93n} v^{0,3} e^{-\left(113\frac{n}{v}+0,3v\right)} dv +$$

$$+1{,}72\ 10^{13} n^3 \int_{26,93n}^{20} v^{1,5} e^{-0,3v} dv.$$

Per il numero di giri, (**n**), essendo comunque: $v_i < v_n < v_f$, risulta:

$$0{,}186 < n < 0{,}743.$$

La funzione presenta un massimo pari a: $E_{max} = 1{,}57\ 10^{13}$ **J/anno**, per: $n = 0{,}6313\ s^{-1}$ e velocità nominale di progetto: $v_n = 17$ **m/s**, con potenza nominale di progetto: $\mathbf{P_n = 3{,}69\ MW}$, da cui un fattore di carico: $\mathbf{u = 0{,}135}$.

Ottimizzazione economica per costo impianto proporzionale alla potenza installata.

Posto: $\mathbf{a = 0{,}02\ anni^{-1}}$; $\mathbf{t_{ek} = t_{em} = 0{,}08024\ anni^{-1}}$;$\mathbf{q = 2\ 10^3\ £/W}$; $\mathbf{c_k = 100\ £/kWh = 2{,}\underline{7}\ 10^{-5}\ £/J}$, in caso di potenza **non limitata** al valore nominale, si ha:

$$\mathbf{VAN(n) = \frac{c_k}{t_{ek}} \frac{1}{2} d_s \frac{\pi D^2}{4} \int_{v_i}^{v_f} c_p(n, v) v^3 H(v) dv - \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q P_{max}},$$

con: $\mathbf{P_{max}}$ valore massimo dell'espressione: $\mathbf{\frac{1}{2} d_s \frac{\pi D^2}{4} c_p(n, v) v^3}$, per ogni valore del numero di giri $\mathbf{n}$.
Si ottiene quindi:

$$\mathbf{VAN(n) = 2{,}07\ 10^{13} n^{4,2} \int_5^{20} v^{0,3} e^{-\left(113\frac{n}{v}+0{,}3v\right)} dv -}$$
$$\mathbf{-1{,}27\ 10^{14} n^{4,2} \left(\frac{e^{-\frac{113n}{v}}}{v^{1,2}}\right)_{max}}.$$

La funzione presenta un massimo: $\mathbf{VAN_{max} = 1{,}17\ 10^9\ £}$, per valori prossimi ai minimi della velocità nominale di progetto: $\mathbf{v_n = 6\ m/s}$, con quindi una potenza nominale: $\mathbf{P_n = 162\ kW}$ e una generazione energetica: $\mathbf{E = 8{,}57\ 10^{12}\ J/anno}$, pari al **46,8%** del massimo ottenibile.
La potenza massima risulta: $\mathbf{P_{max} = 725\ kW}$ e il fattore di carico risulta dunque: $\mathbf{u = 0{,}375}$, da cui il costo specifico dell'energia elettrica: $\mathbf{c_k = 60{,}96\ £/kWh}$.

In caso di potenza **limitata** al valore nominale il **VAN** dell'investimento:

$$\mathbf{VAN(n) = E(n) \frac{c_k}{t_{ek}} - \left(1 + \frac{a}{t_{ek}}\right) I(n) =}$$

$$= E(n)\frac{c_k}{t_{ek}} - \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q \frac{1}{2} d_s \frac{\pi D^2}{4} c_{pn} \left(\frac{\pi D}{l_{p\,max}}\right)^3 n^3,$$

risulta: $$VAN(n) = 2,06\ 10^{13} n^{4,2} \int_5^{26,93n} v^{0,3} e^{-\left(113\frac{n}{v}+0,3v\right)} dv +$$

$$+5,95\ 10^9 n^3 \int_{26,93n}^{20} v^{1,5} e^{-0,3v} dv - 3,66\ 10^{10} n^3.$$

La funzione presenta un massimo pari a: $\mathbf{VAN_{max} = 1,55\ 10^9}$ **£**, per valori della velocità nominale di progetto: $\mathbf{v_n = 10}$ **m/s**, con una potenza nominale: $\mathbf{P_n = 750}$ **kW** e una generazione energetica:

$\mathbf{E = 9,88\ 10^{12}}$ **J/anno**, pari al **63%** del massimo ottenibile.
Il fattore di carico risulta dunque: $\mathbf{u = 0,418}$, da cui il costo specifico dell'energia elettrica: $\mathbf{c_k = 54,6}$ **£/kWh**.
In condizioni di ottimizzazione energetica con potenza non limitata al valore nominale si ottiene un fattore di carico pari a: $\mathbf{u = 0,128}$, da cui il costo specifico dell'energia elettrica prodotta: $\mathbf{c_k = 178}$ **£/kWh** e in caso di potenza limitata al valore nominale: $\mathbf{u = 0,135}$, da cui il costo specifico dell'energia elettrica prodotta: $\mathbf{c_k = 169}$ **£/kWh**.

Ottimizzazione economica per costo impianto proporzionale alla superficie del rotore.

In tal caso l'ottimizzazione economica coincide con quella energetica, per cui posto: $\mathbf{q^* = 850.000}$ **£/m²**, (con potenza non limitata la valore nominale), essendo l'energia annua massima ottenibile pari a:
$\mathbf{E_{max} = 1,83\ 10^{13}}$ **J/anno**, si ottiene: $\mathbf{VAN = 3,95\ 10^9}$ **£**, e un costo specifico dell'energia prodotta pari a: $\mathbf{c_k = 37,8}$ **£/kWh**, (in caso di potenza limitata al valore nominale, si avrebbe: $\mathbf{E_{max} = 1,57\ 10^{13}}$ **J/anno**, da cui: $\mathbf{VAN = 2,45\ 10^9}$ **£** e $\mathbf{c_k = 55,11}$ **£/kWh**).

MACCHINE A VELOCITA' ANGOLARE, (O PALE A INCIDENZA), VARIABILE.

Ottimizzazione energetica.

In caso di macchine a velocità angolare, (o pale a incidenza), **variabile**, la massima energia estraibile:

$$E_{max} = \frac{1}{2} d_s c_{pn} \frac{\pi D^2}{4} \int_{v_i}^{oo} v^3 H(v) dv = 8,79\,10^8 \int_5^{oo} v^{4,5} e^{-0,3v} dv,$$

risulta: $\mathbf{E_{max} = 3,42\ 10^{13}}$ **J/anno**, per velocità di fuori servizio illimitata ed $\mathbf{E_{max} = 2,17\ 10^{13}}$ **J/anno**, per: $\mathbf{v_f = 20}$ **m/s**, con potenza installata pari a: $\mathbf{P_n = 6}$ **MW**.

In condizioni di ottimizzazione energetica, risultando il fattore di carico pari a: **u = 0,115**, per costo impianto proporzionale alla potenza installata, si ottiene un costo specifico dell'energia prodotta pari a: $\mathbf{c_k}$ **= 199 £/kWh**, superiore a quello ipotizzato di mercato, (**100£/kWh**), e corrispondentemente un **VAN** negativo, (**– 4,47 10^9 £**).

In caso di costo impianto proporzionale alla superficie spazzata dal rotore: essendo: $I_o = q * \frac{\pi D^2}{4} = 2,4\ 10^9$ £, risulta: **VAN = 4,53 10^9 £**, e corrispondentemente un costo specifico dell'energia prodotta: $\mathbf{c_k}$ **= 39,87 £/kWh**, inferiore al valore di mercato.

Ottimizzazione economica.

Per l'ottimizzazione economica, l'espressione del **VAN** in caso di costo impianto proporzionale alla potenza installata e con potenza massima **non limitata** al valore economico porge una relazione di ottimizzazione: $v_{f\,max} = \frac{3\left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q t_{ek}}{c_k H(v_{f\,max})}$, che non ammette soluzioni, mostrando un **VAN** comunque negativo.

Impiegando la relazione generale con potenza massima **limitata** al valore economico, si ha invece:

$$VAN(v_{f\,max}) = 3,05\,10^5 \left[\int_5^{v_{f\,max}} v^{4,5} e^{-0,3v} dv + v_{f\,max}^3 \int_{v_{f\,max}}^{20} v^{1,5} e^{-0,3v} dv \right] - 1,88\,10^6 v_{f\,max}^3.$$

La funzione presenta un massimo: $\mathbf{VAN_{max} = 1,8\ 10^9}$ **£**, per: $\mathbf{v_{fmax} = 11}$ **m/s**, con una potenza installata: $\mathbf{P_n = 1}$ **MW**.

L'energia captata risulta: $\mathbf{E = 1,24\ 10^{13}}$ **J**, pari al **57,1%** di quella massima.

Il fattore di carico risulta: **u = 0,393**, da cui il costo specifico dell'energia elettrica prodotta: $\mathbf{c_k}$ **= 58,1 £/kWh**.

5 – CONCLUSIONI.

Dall'analisi numerica delle funzioni, risulta che i rotori a velocità angolare **costante** energeticamente ottimizzata, rendono quote fino all'**85%** dell'energia captata dai sistemi a velocità, (o pale a incidenza), **variabile**, ma con fattori di carico lievemente superiori, ovvero, (anche se a potenza massima non limitata al valore nominale), maggiore energia a parità di potenza installata e quindi maggiore indice di profitto.

Le stesse valutazioni numeriche mostrano il previsto andamento monotono decrescente senza estremanti all'aumentare di **n**, (ovvero di $\mathbf{v_n}$), della funzione **u(n)**, con quindi fattore di carico massimo per i minimi valori della velocità nominale di progetto, ($\mathbf{v_n} = \mathbf{v_i}$).

La funzione **VAN(n)**, invece, presenta generalmente un estremante di massimo per i previsti valori inferiori rispetto a quelli relativi alla massima captazione di energia, ovvero minori valori della velocità nominale di progetto di massima economia rispetto alla generazione di energia.

A differenza delle condizioni di massima captazione di energia, risulta inoltre sempre economicamente vantaggioso limitare la potenza al valore nominale in caso di costo impianto proporzionale alla potenza installata e al contrario evidentemente in caso di costo impianto proporzionale alla superficie del rotore.

Circa l'utile economico il **VAN** relativo ai sistemi a velocità, (o pale a incidenza), variabile, risulta non molto superiore a quello relativo alle macchine a velocità costante, per cui tenuto conto dell'inevitabile aumento di costi per i sistemi di adeguamento della velocità angolare o di orientamento delle pale, le due soluzioni appaiono economicamente sostanzialmente concorrenziali, con preferenza per i primi data la maggiore captazione di energia.

****