

Interpretazione innovativa della “corrente di spostamento” di J.C. Maxwell

MARCO LANDINI

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
VIALE RISORGIMENTO 2, 40136 BOLOGNA
e-mail: m.landini@unibo.it

Abstract: con questo lavoro si intende generalizzare l’impiego della funzione derivata del flusso elettrico “ $d\Psi/dt$ ” nel calcolo del campo magnetico. Attribuire a questa grandezza il ruolo di causa prima nella generazione della “tensione magnetica” conduce ad un interessante unificazione dei fenomeni elettrici: corrente di spostamento e corrente di conduzione vengono interpretate come aspetti complementari della stessa fenomenologia, ovvero variazione di flusso elettrico in opportune superfici di calcolo. L’impiego della funzione “ $d\Psi/dt$ ” consente il recupero di una simmetria formale nelle relazioni circuitazione-induzione e.m. del modello Maxwelliano. Infine viene fornita un’espressione generalizzata della “ $d\Psi/dt$ ”.

1. Introduzione

Nelle formulazioni dell’elettromagnetismo riconducibili a Faraday-Coulomb ed Ampere l’interazione a distanza fra sorgenti e punti campo gioca un ruolo fondamentale. La sintesi Maxwelliana rappresenta un approccio moderno perché interpreta i fenomeni e.m. sostituendo al concetto di “effetto a distanza” quello di “campo”. Quest’ultimo diviene il mediatore di interazione tra sorgente e punto di misura. Un altro risultato importante dell’analisi Maxwelliana è l’esplicita interdipendenza fra componente elettrica e componente magnetica del campo. Sotto questa luce risulta interessante esprimere il campo magnetico attraverso una funzione del campo elettrico (flusso elettrico che chiameremo “ Ψ ”) e non per mezzo della corrente di conduzione che identifica una “causa lontana”, non locale. Nel modello di Maxwell, come noto, viene introdotta la corrente di spostamento che il grande fisico attribuì alle proprietà di un mezzo che si credeva permeasse tutto lo spazio, cioè l’etere. Anche se matematicamente l’equazione in cui compare la corrente di spostamento mantiene legittimità, altrettanto non può dirsi per quella interpretazione fisica che oggi è unanimemente riconosciuta come superata. Nella interpretazione tradizionale il campo magnetico, potendo essere generato sia dalla corrente di conduzione che dalla corrente di spostamento, appare un fenomeno “figlio di due madri”. Nello studio che segue l’intento è quello di introdurre un’unica grandezza fisica che descriva, ai fini della generazione del campo “ H ”, sia l’effetto della corrente di spostamento che l’effetto della corrente di conduzione. L’analisi presentata in questo lavoro si propone anche di fornire una risposta definitiva a quegli Autori come [7] che, polemizzando, mettono in dubbio l’esistenza di un campo magnetico generato dalla corrente di spostamento. La presentazione di questo studio seguirà un metodo induttivo.

2. Campo magnetico generato da cariche in moto

Secondo la trattazione classica dell’elettromagnetismo ad una carica in moto resta associata la nascita di un campo magnetico. Il campo magnetico risulta nascere come conseguenza diretta del moto delle cariche ed è calcolabile attraverso l’equazione di Biot-Savart.

Per una singola carica in moto vale la seguente relazione nota in letteratura:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} = \mu \varepsilon \vec{v} \times \vec{E} \quad (2.1)$$

In essa il vettore induzione in un punto dello spazio è espresso come prodotto vettoriale della velocità della carica per il campo elettrico generato dalla medesima carica nel punto spaziale citato. Una rappresentazione di quanto espresso in (2.1) è schematizzata in fig. 1.

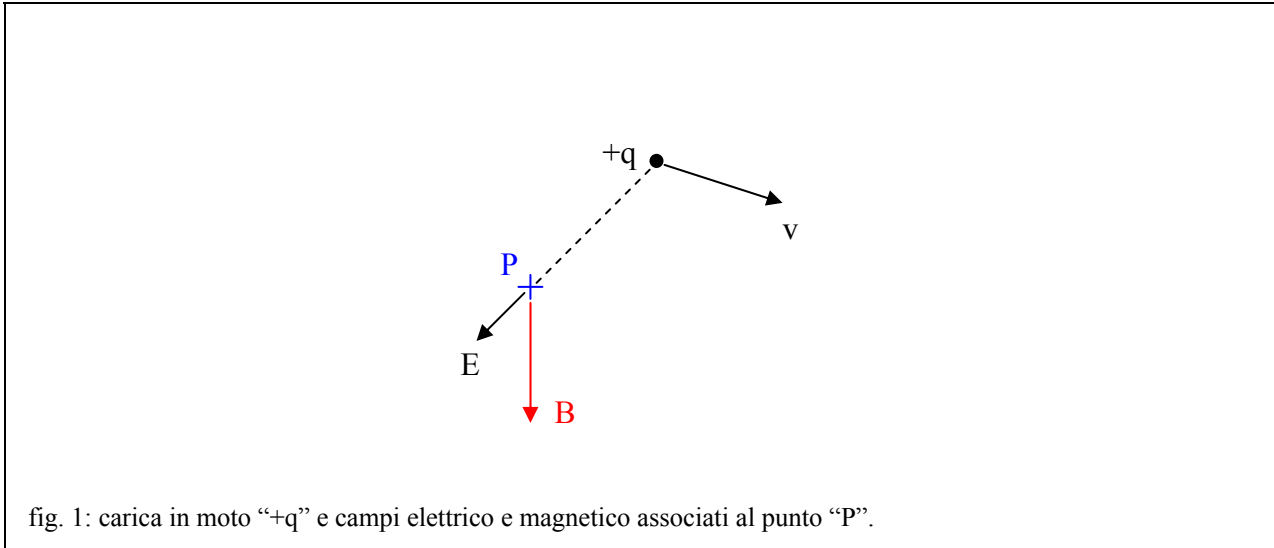


fig. 1: carica in moto “+q” e campi elettrico e magnetico associati al punto “P”.

La nascita del campo magnetico può essere anche interpretata secondo l’approccio relativistico. In tal caso vengono considerati due sistemi di riferimento di cui uno solidale con il punto campo e l’altro solidale con la carica in moto. La nascita del campo magnetico viene interpretata come conseguenza diretta del moto relativo tra i due s.d.r.

Secondo quanto riportato in letteratura il moto della carica appare la “causa prima” nella generazione del campo magnetico.

Nella trattazione classica ricordiamo che valgono le seguenti relazioni locale ed integrale:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = i + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (2.2')$$

Il termine “j” di (2.2) identifica la densità di corrente di conduzione che è espressione diretta del moto di carica. Il secondo termine “dD/dt”, denominato anche contributo della corrente di spostamento, non è diretta espressione del moto di alcuna carica ma “matematicamente assimilabile” ad uno spostamento di carica: tale termine in realtà è solo la quantificazione del tasso di variazione di un campo elettrico nel tempo. L’interpretazione tradizionale della (2.2) porta ad osservare che due fenomeni fisici diversi come carica in moto e campo elettrico variabile nel tempo producono il medesimo effetto: generazione di campo magnetico.

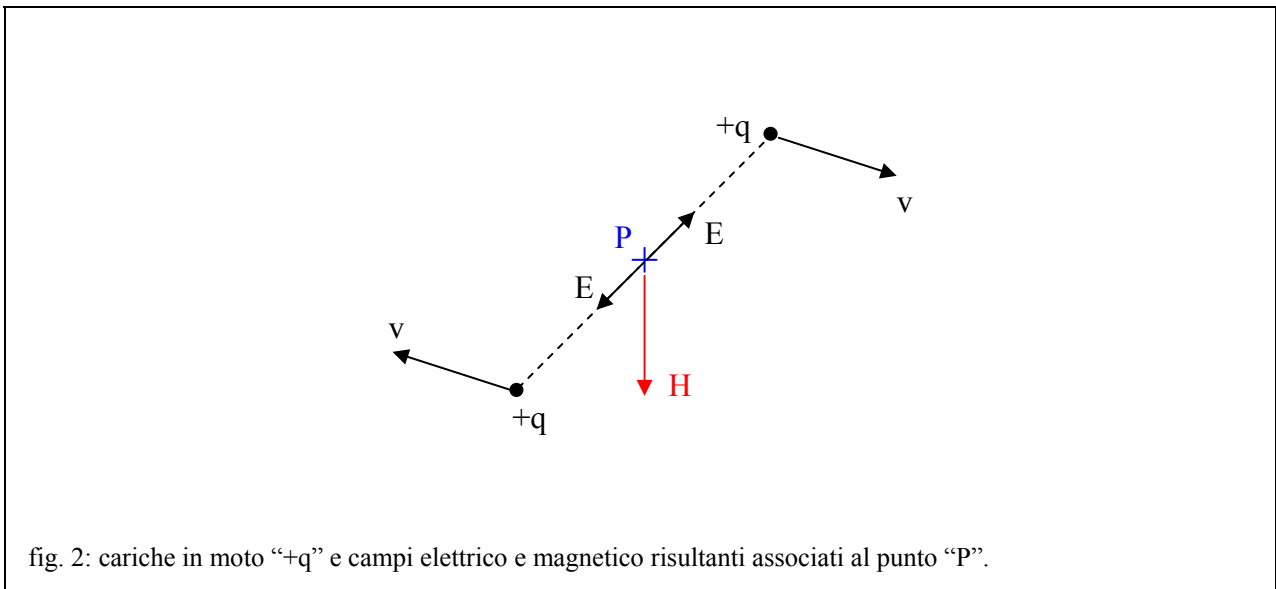
Nascono allora spontanee alcune domande:

1. Cosa hanno in comune intrinsecamente i due fenomeni del moto di carica e della variazione del campo elettrico?

2. Perché “ dD/dt ” genera H anche se non ho moto di cariche?
3. Esiste un’unica grandezza fisica la cui variazione generi campo magnetico e contenga come casi limite i due fenomeni sopra descritti (moto di carica e variazione del campo elettrico) ?

Un primo livello di indagine potrebbe suggerire che semplicemente “ dD/dt ”, o in maniera equivalente “ dE/dt ”, sia la causa prima a cui ricondurre la generazione del campo “ H ”; peraltro una carica in moto produce sicuramente un campo elettrico variabile nel tempo.

Esistono però alcuni contro esempi che dimostrano quanto sia inesatto attribuire semplicemente a “ dE/dt ” la generazione del campo “ H ”. Ad esempio si consideri il moto di due cariche con traiettorie parallele ma con verso opposto (come in fig. 2) ed un punto interno alle traiettorie: il campo E sperimentato nel punto P è identicamente nullo perché le due cariche generano vettori campo elettrico uguali ed opposti; il campo H nel punto considerato è però diverso da zero.

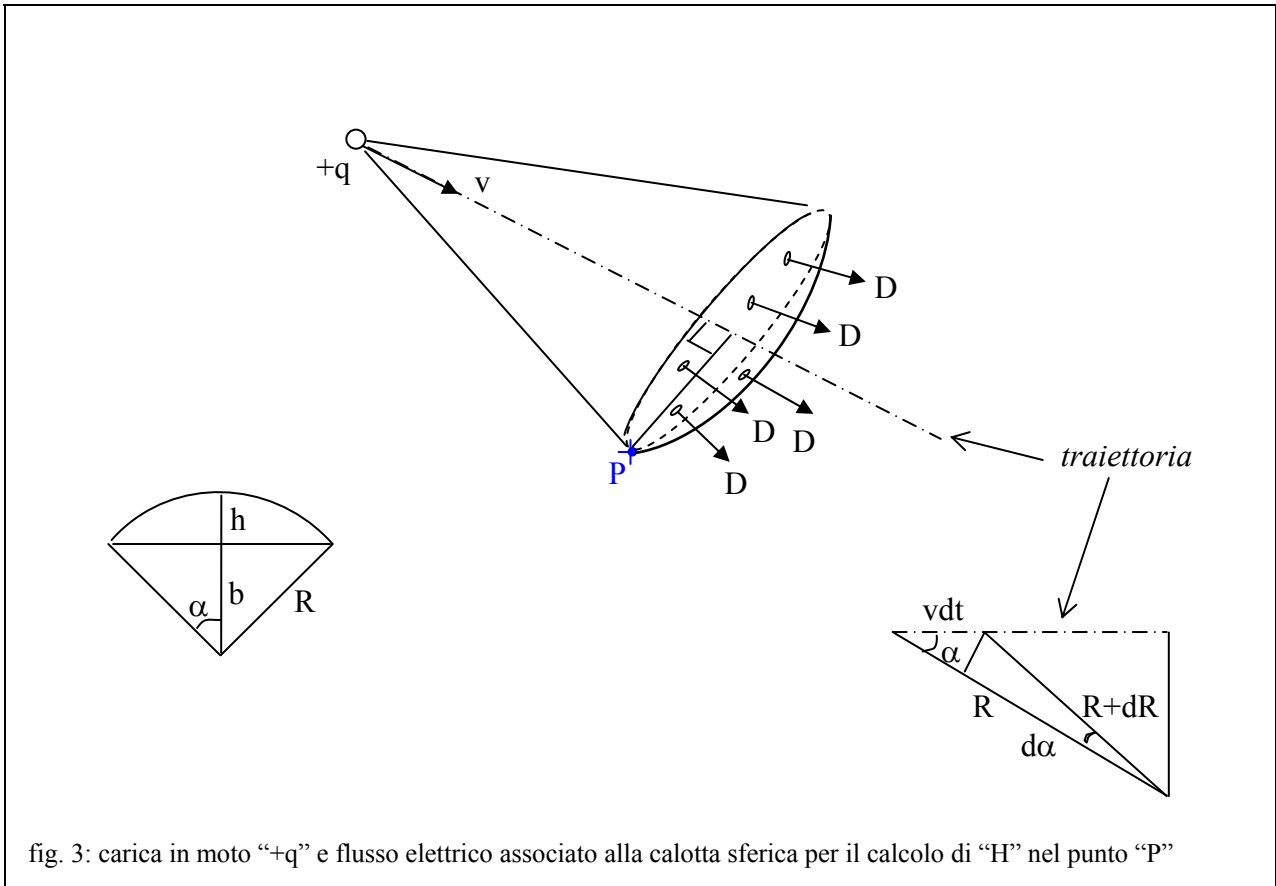


Consideriamo ora una singola carica in moto come quella di fig. 3 e calcoliamo il campo magnetico in un punto seguendo il metodo indicato da Cullwick [3].

Il punto P sperimenta la nascita del campo H . La zona antistante la carica, nella direzione del moto, è rappresentata da un cono il cui cerchio di base è la linea curva chiusa attorno la quale è possibile calcolare la circuitazione del campo H .

Sul cerchio che identifica la base del cono poggia la calotta sferica i cui punti sono interessati da vettori “ D ” che in un certo istante sono costanti in modulo al variare della posizione sulla calotta. Si introduca “ Ψ ” quale generico flusso del vettore “ D ” attraverso una generica superficie:

$$\Psi = \iint \vec{D} \cdot d\vec{s} \quad (2.3)$$



Applicando ora il teorema di Gauss alla superficie della calotta sferica appoggiata sulla base del cono e si ha:

$$q = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{s} \rightarrow \Psi_{CALOTTA} = D S_{CALOTTA} = q \frac{\gamma_{CALOTTA}}{4\pi} \quad (2.3)$$

Ove $\gamma_{CALOTTA}$ rappresenta l'angolo solido sotteso dalla calotta sferica che ha come orlo la base del cono.

$$\gamma_{CALOTTA} = \frac{2\pi R h}{R^2} = \frac{2\pi (R-b)}{R} = \frac{2\pi (R - R \cos \alpha)}{R} = 2\pi (1 - \cos \alpha) \quad (2.4)$$

Da cui:

$$\Psi_{CALOTTA} = D S_{CALOTTA} = q \frac{\gamma_{CALOTTA}}{4\pi} = q \frac{2\pi (1 - \cos \alpha)}{4\pi} = q \frac{(1 - \cos \alpha)}{2} \quad (2.5)$$

essendo:

$$(v dt \sin \alpha) / R = d\alpha$$

$$\frac{d\Psi_{CALOTTA}}{dt} = q \frac{\text{sen}\alpha}{2} \frac{d\alpha}{dt} = q \frac{\text{sen}\alpha}{2} \frac{v \text{sen}\alpha}{R} = q \frac{v \text{sen}^2\alpha}{2R} \quad (2.6)$$

Ora, imponendo:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Psi}{dt} \quad (2.7)$$

si ha che:

$$H \cdot 2\pi R \text{sen}\alpha = q \frac{v \text{sen}^2\alpha}{2R} \rightarrow \vec{H} = \frac{q}{4\pi R^3} (\vec{v} \times \vec{R}) = \vec{v} \times \vec{D} \quad (2.8)$$

E' immediato dimostrare che la relazione (2.8) è equivalente alla legge di Biot-Savart differenziale avendo l'accortezza di sostituire al prodotto "q v" l'elemento di corrente infinitesimo "i dl":

$$\vec{H} = \frac{q}{4\pi R^3} (\vec{v} \times \vec{R}) = \vec{v} \times \vec{D} \rightarrow \vec{H} = \frac{1}{4\pi R^3} (i d\vec{l} \times \vec{R}) \quad (2.9)$$

Come mostra il passaggio (2.8) l'impiego della funzione "Ψ" così come definita dalla (2.3) ha consentito di pervenire al medesimo risultato espresso dalla relazione (2.1).

Dalla precedente dissertazione è possibile trarre le conclusioni che seguono.

Per una singola carica di conduzione la derivata della funzione "Ψ" consente di calcolare il campo magnetico H. La funzione "dΨ/dt" resta definita attorno alle cariche in moto ma anche all'interno delle armature dei condensatori. La nascita di "dΨ/dt" appare quindi un fenomeno comune sia al caso di carica in moto, sia al caso di variazione di campo elettrico non direttamente riconducibile al moto di alcuna carica. In altri termini la variazione del "flusso elettrico" sembra associata al moto delle cariche di conduzione ma anche ad una variazione di campo elettrico. Quanto evidenziato suggerisce che la funzione "dΨ/dt" possa assurgere al ruolo di causa prima nella generazione di campo magnetico sia per la corrente di conduzione che per la corrente di spostamento.

La relazione (2.8) consente di ricavare il campo magnetico nel caso in cui la sorgente sia una carica in moto. *Preme sottolineare che il caso di carica in moto rappresenta una configurazione non stazionaria, infatti il movimento della carica è causa di variazione del vettore "D".* Inoltre, secondo quanto descritto da Cullwick [3], il moto provoca anche una variazione della superficie associata al flusso di "D". Il flusso di "D" quindi varia in quanto, a causa del moto di carica, si hanno variazioni simultanee del vettore e della superficie associati al flusso medesimo.

A questo punto si ritiene importante commentare il passaggio algebrico (2.11) descritto da Hallen in [10] ottenuto a partire dalla (2.10):

$$\text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \nabla) \vec{B} + \vec{A} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{A} \quad (2.10)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{D}) = \text{rot}(-\vec{u} \times \vec{D}) = -(-\vec{u} \nabla) \vec{D} - \vec{u} \text{div} \vec{D} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{v} \text{div} \vec{D} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \quad (2.11)$$

Il passaggio (2.11) suggerisce che la nota equazione di Maxwell (2.2), deducibile per via algebrica da una relazione (Biot-Savart) con evidente significato fisico, non sia una semplice schematizzazione fenomenologica ma scaturisca da ragioni profonde ed abbia un significato intrinseco. Il significato intrinseco al quale si desidera dare enfasi in questo studio è appunto la variazione di flusso elettrico.

E' interessante osservare che, al fine di calcolare il campo generato da una corrente rettilinea, l'integrazione dell'espressione differenziale di Biot-Savart porta all'annullamento del contributo identificato dalla "dD/dt" nella (2.11) e quindi, se le correnti sono caratterizzate da un regime stazionario, si ha una configurazione stazionaria.

3. Campo magnetico dovuto ad una corrente elettrica

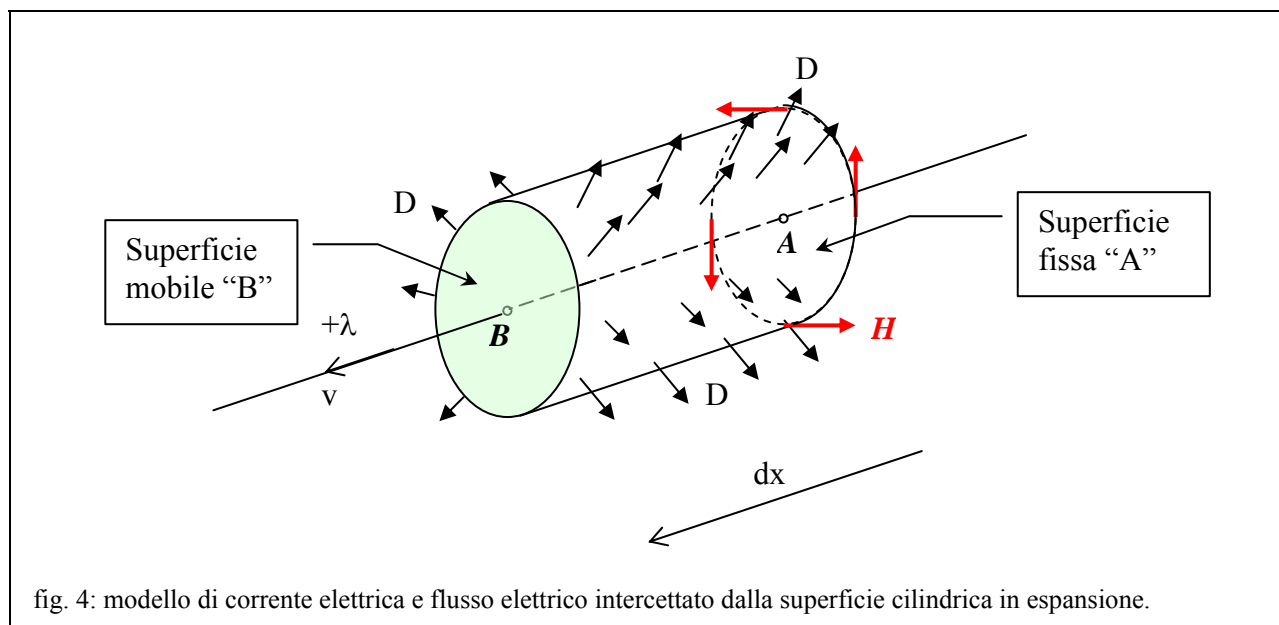
Le osservazioni di cui al paragrafo precedente consentono di estendere il metodo di indagine della variazione di flusso elettrico impiegato per singole cariche ad "aggregati di cariche in moto", ovvero correnti elettriche, semplicemente con un'operazione di integrazione.

La compresenza di più cariche produce un'alterazione del campo elettrico generato nello spazio circostante. La conoscenza della configurazione spaziale del campo elettrico consente di determinarne agevolmente il flusso quando fortunate simmetrie ne semplificano il calcolo.

Vediamo ora, utilizzando la funzione "Ψ", di analizzare il campo magnetico dovuto ad una corrente elettrica rappresentata da una carica linearmente distribuita ed in moto come in fig. 4.

Per una carica linearmente distribuita con densità lineare λ vale per il campo elettrico E la seguente relazione:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon R} \quad (3.1)$$



Supponiamo di voler calcolare il campo "H" giacente nel piano contenente la sezione circolare "A" ritenuta fissa. Si consideri una seconda sezione circolare "B" solidale con le cariche in moto e quindi traslante nel senso della velocità delle cariche. Dopo un istante "dt" la sezione "B" avrà

coperto la distanza “dx”. La superficie cilindrica definita dalle sezioni “A” e “B” andrà progressivamente crescendo assieme al flusso del vettore D da essa intercettato (vedere fig. 4). La sezione variabile pone in essere una variazione infinitesima di flusso elettrico “dΨ” calcolabile sulla superficie laterale cilindrica:

$$d\Psi = D dS = D 2\pi R dx = \varepsilon \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon R} 2\pi R dx = \lambda dx \quad (3.2)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\lambda dx}{dt} = \lambda v = i \quad (3.3)$$

L’impiego della funzione “Ψ” ha consentito di mettere in relazione la corrente “i” di conduzione con “dΨ/dt” che descrive tipicamente un fenomeno di “spostamento elettrico”.

Ora, considerando l’espressione (3.3), viene proposta la seguente relazione:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Psi}{dt} = i \quad (3.4)$$

Nella realtà i conduttori sono globalmente neutri e quindi il campo D esterno assume valore totale nullo. La reale configurazione dei conduttori può essere modellata come due distribuzioni lineari +λ e -λ di cui una fissa e l’altra in moto. Ciò che produce campo magnetico è il moto di una sola distribuzione di carica che genera una variazione di flusso elettrico “di sua esclusiva competenza”, anche se il flusso complessivo è nullo perché le distribuzioni hanno segno opposto.

Con riferimento al circuito di fig. 5 l’espressione (3.4) suggerisce una interpretazione fisica della nascita della tensione magnetica: il campo magnetico risulta generato dalla derivata della funzione “Ψ” sia per le correnti di conduzione, sia per le cosiddette “correnti di spostamento”.

Il ruolo del condensatore appare quello di un componente che “incanala” il flusso elettrico variabile “Ψ” all’interno delle proprie armature. Mentre nei fili conduttori la variazione di flusso è attribuibile al moto delle cariche e quindi alla variazione della superficie cilindrica intercettata dal flusso, nel condensatore la medesima variazione di flusso è riconducibile alla sola variazione del vettore “D”. In tal modo il condensatore riesce a trasformare una variazione di flusso dovuto a variazione di superficie intercettata (fenomeno conduttivo) in una variazione di flusso attribuibile a variazione temporale del vettore “D” (fenomeno capacitivo); questo a parità di variazione di flusso caratterizzante il circuito.

Nel conduttore la variazione di flusso elettrico è celata dalla presenza di cariche fisse con segno opposto a quelle mobili che coesistono nello stesso dominio.

Il condensatore, separando le cariche nelle armature, rende palese tale variazione di flusso.

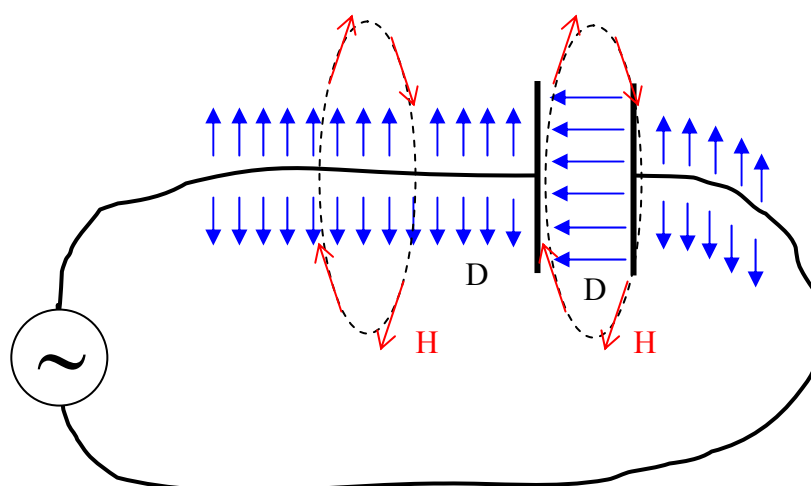


fig. 5: circuito esemplificativo con nascita di campo magnetico per corrente di conduzione e per corrente di spostamento

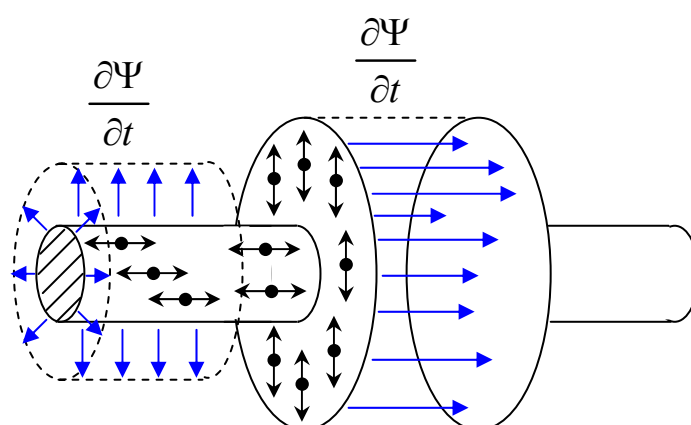


fig. 5bis: schematizzazione del flusso elettrico in prossimità del conduttore e all'interno del dielettrico del condensatore

Questo tipo di descrizione fornisce una interpretazione fisica al fenomeno della “corrente di spostamento di Maxwell”. Con questa interpretazione, piuttosto di assimilare la corrente di spostamento a quella di conduzione, viene ripensato il fenomeno della corrente di conduzione associando anch'essa ad una variazione di flusso elettrico.

Con ciò crediamo di avere dato risposta ai tre quesiti che ci siamo posti all'inizio:

1. Cosa hanno in comune intrinsecamente i due fenomeni del moto di carica e della variazione del campo elettrico?

R. Il fenomeno di moto della carica produce una variazione di flusso elettrico “ Ψ ”; la variazione di campo elettrico all'interno delle armature di un condensatore produce anch'essa una variazione di flusso elettrico.

2. Perché “ dD/dt ” genera “ H ” anche se non ho moto di cariche?

R. E' la variazione di flusso $d\Psi/dt$ che resta associata alla nascita del campo magnetico sia nel caso in cui si abbiano variazioni di "D", sia nel caso in cui si abbiano variazioni di superfici intercettate (cariche in moto).

3. Esiste un'unica grandezza fisica la cui variazione genera campo magnetico e descriva come casi limite i due fenomeni sopra descritti (moto di carica e variazione del campo elettrico) ?

R. Secondo la tesi presentata in questo studio " $d\Psi/dt$ " assurge al ruolo di causa prima nella generazione di campo magnetico. Tale variazione di "flusso elettrico" nasce dal moto di cariche e/o da variazioni di campo non direttamente riconducibili al moto di alcuna carica.

La corrente di spostamento introdotta da Maxwell per fornire un modello fenomenologico coerente si è rivelata una scelta corretta da un punto di vista matematico ma errata nella sua interpretazione fisica: tale corrente di spostamento era associata ad uno stato di oscillazione di un mezzo elastico denominato "etere" la cui esistenza è stata definitivamente esclusa dai fisici Michelson e Moreley e ritenuta non necessaria secondo la teoria relativistica di A. Einstein.

Il fenomeno dell'induzione elettromagnetica ricorre ad una grandezza analoga al flusso elettrico che è il flusso magnetico. Tale simmetria è descritta in seguito al par. 5.

4. Espressione generalizzata della variazione di flusso elettrico

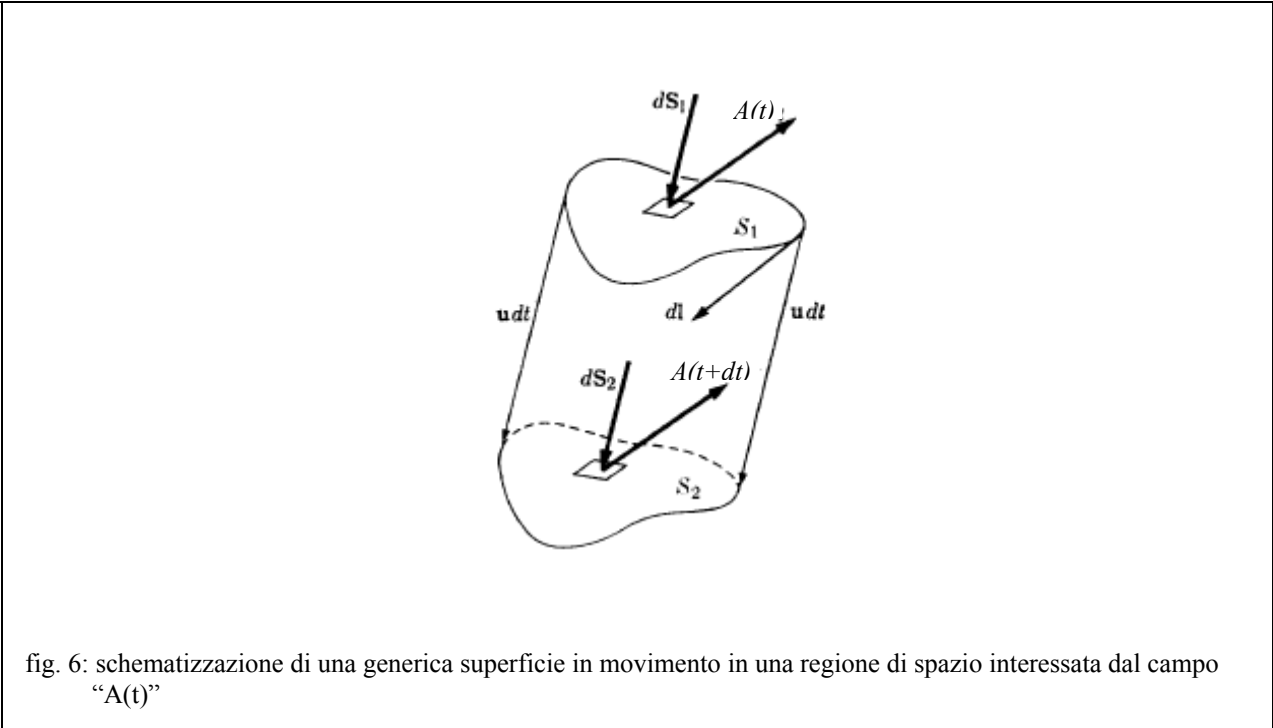
Ora si desidera fornire una trattazione generale per l'espressione della variazione di flusso elettrico " $d\Psi/dt$ ". Tale variazione può essere causata sia da una variazione di vettore "D" che da una variazione dell'area assunta per il calcolo del flusso, oppure da entrambe le cause.

In letteratura ([2] e [9]) è nota l'espressione generale (4.1) per il calcolo della derivata del flusso " Φ " di un generico vettore "A" nel caso di superfici in movimento:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_S \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{div} \vec{A} \right] \cdot d\vec{S} - \oint_l (\vec{u} \times \vec{A}) \cdot d\vec{l} \quad (4.1)$$

riprendendo l'analisi di [9] è possibile interpretare i termini della funzione integranda della (4.1). Il primo termine rappresenta la variazione di flusso attraverso la superficie causata dalla variazione nel tempo del vettore campo "A". Il secondo termine deriva dal passaggio della superficie in movimento attraverso un campo inhomogeneo in cui sono generate delle linee di flusso: in altri termini può essere interpretato come la variazione di flusso dovuta all'acquisizione o all'espulsione di cariche da parte della superficie in movimento. Il terzo termine identifica le perdite di flusso attraverso il contorno della superficie in movimento, ossia la superficie laterale generata dalla traccia del contorno della superficie in moto.

In letteratura l'impiego della (4.1) viene frequentemente assunto per il calcolo della derivata del flusso magnetico; relazione che peraltro si semplifica grazie al fatto che la solenoidalità di "B" porta all'annullamento del secondo addendo della funzione integranda. Chi scrive non ha mai trovato in letteratura l'impiego della (4.1) per il calcolo della derivata del flusso elettrico.



Con riferimento alla fig. 6 la dimostrazione della (4.1) può essere ottenuta, ripercorrendo il metodo di [9], sviluppando le considerazioni che seguono.

▪ **Dimostrazione della relazione (4.1)**

Si consideri la variazione di flusso relativa ad una superficie in moto con velocità "u" a causa del passaggio della superficie dalla posizione "1" alla posizione "2":

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\Delta t} \iint_S \vec{A}(t + \Delta t) \cdot d\vec{S}_2 - \vec{A}(t) \cdot d\vec{S}_1 \tag{4.1-1}$$

Ora si applichi il teorema di Gauss al volume complessivo rappresentato in fig. 6 (si noti che il teorema si riferisce ai medesimi istanti "non differiti", quindi, per le due superfici S1 ed S2):

$$\iiint_V \text{div } \vec{A} \, d\vec{\tau} = \frac{1}{\Delta t} \iint_S [\vec{A}(t) \cdot d\vec{S}_2 - \vec{A}(t) \cdot d\vec{S}_1] - \oint_l \vec{A}_l \cdot (\vec{u} \, dt \times d\vec{l}) \tag{4.1-2}$$

Per Taylor:

$$\vec{A}(t + \Delta t) = \vec{A}(t) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dt + \dots \tag{4.1-3}$$

Ora si sostituisce la (4.1-3) nella (4.1-1) ottenendo:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{\Delta t} \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \frac{1}{\Delta t} \iint_S \left[\vec{A}(t) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dt \right] \cdot d\vec{S}_2 - \vec{A}(t) \cdot d\vec{S}_1 = \\
&= \frac{1}{\Delta t} \iint_S \left[\vec{A}(t) \cdot d\vec{S}_2 - \vec{A}(t) \cdot d\vec{S}_1 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dt \cdot d\vec{S}_2 \right] = \\
&= \frac{1}{\Delta t} \iint_S \left[\vec{A}(t) \cdot d\vec{S}_2 - \vec{A}(t) \cdot d\vec{S}_1 \right] + \frac{1}{\Delta t} \iint_S \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dt \cdot d\vec{S}_2 \quad (4.1-4)
\end{aligned}$$

A questo punto si sostituisce la (4.1-2) nella (4.1-4) e ponendo in essere il passaggio al limite si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{dt} \left[\iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \, d\tau + \oint_l (\vec{A}_l \times \vec{u}) \cdot d\vec{l} \right] + \frac{1}{dt} \iint_S \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dt \cdot d\vec{S}_2 \quad (4.1-5)$$

essendo:

$$d\tau = d\vec{S} \cdot \vec{u} \, dt \quad (4.1-6)$$

la (4.1-5) si trasforma nella seguente relazione equivalente alla (4.1):

$$\frac{d}{dt} \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\operatorname{div} \vec{A} \, \vec{u}) \cdot d\vec{S} + \oint_l (\vec{A}_l \times \vec{u}) \cdot d\vec{l} + \iint_S \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{S} \quad (4.1-6)$$

c.v.d.

▪ ***Fine dimostrazione della relazione (4.1)***

La (4.1-6) può essere esplicitata nel caso venga preso in esame il vettore spostamento elettrico “D”:

$$\frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint_S \operatorname{div} \vec{D} \, \vec{u} \cdot d\vec{S} + \oint_l (\vec{D} \times \vec{u}) \cdot d\vec{l} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \quad (4.1-7)$$

Ora si studierà la (4.1-7) al fine di estrapolare quei termini utili per il calcolo del campo “H”.

Ai fini della valutazione del campo magnetico attorno ai fili conduttori percorsi da corrente “i”, per rientrare nelle hp della (4.1-7), è possibile studiare un modello equivalente in cui il moto relativo cariche-superficie nasca a causa del moto di una superficie “W” e la carica lineare “λ” sia fissa come rappresentato in fig. 7.

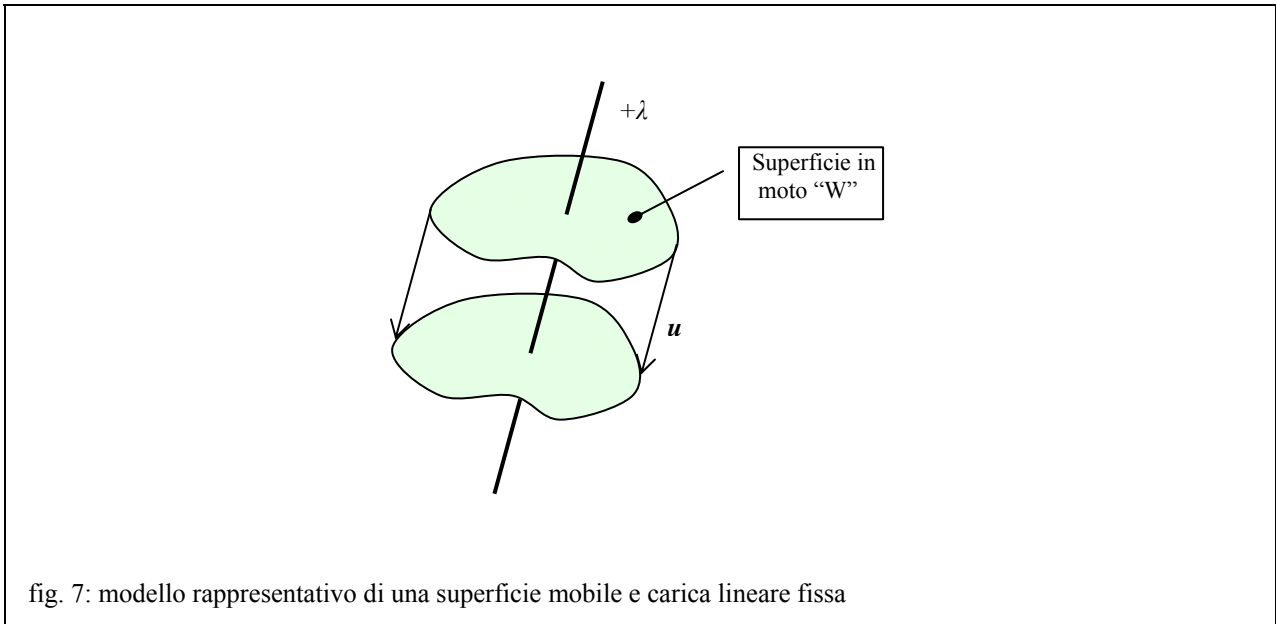


fig. 7: modello rappresentativo di una superficie mobile e carica lineare fissa

Avendosi:

$$\bar{u} \operatorname{div} \bar{D} = \bar{u} \cdot \rho = -\bar{J} \quad (4.2)$$

$$\rightarrow \iint_S \bar{v} \cdot \operatorname{div} \bar{D} \cdot d\bar{S} = \iint_S \bar{v} \cdot \rho \cdot d\bar{S} = \iint_S \bar{j} \cdot d\bar{S} \quad (4.2bis)$$

Le (4.2) e (4.2bis) consentono di affermare che il primo addendo della (4.1-7) rappresenta il contributo alla variazione di flusso attribuibile alla corrente; la (4.1-7) può essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{d}{dt} \iint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \iint_S -\bar{j} \cdot d\bar{S} + \oint_l (\bar{D} \times \bar{u}) \cdot d\bar{l} + \iint_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{S} \quad (4.1-7bis)$$

A questo punto si deve osservare che, in hp quasi stazionarie o stazionarie, cioè trascurando il terzo addendo della (4.1-7bis), la derivata del flusso per il fenomeno conduttivo è esprimibile solo dai primi due addendi. Inoltre in tale caso la variazione di flusso appare identicamente nulla perché la superficie in moto incontra, istante dopo istante, sempre la stessa configurazione di campo. Per il caso di fig. 7 valgono quindi le seguenti relazioni:

$$\frac{d}{dt} \iint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \iint_S -\bar{j} \cdot d\bar{S} + \oint_l (\bar{D} \times \bar{u}) \cdot d\bar{l} = 0 \quad (4.2)$$

$$\rightarrow \iint_S \bar{j} \cdot d\bar{S} = \oint_l (\bar{D} \times \bar{u}) \cdot d\bar{l} \left(= \oint_l (\bar{v} \times \bar{D}) \cdot d\bar{l} \right) \quad (4.2bis)$$

$$\rightarrow i = \oint_l (\bar{v} \times \bar{D}) \cdot d\bar{l} \quad (4.2ter)$$

La relazione (4.2ter) può essere interpretata nel modo seguente: la corrente che scorre nei conduttori è foriera di un contributo alla variazione di flusso elettrico (relativamente alla sup. W di fig. 7). Tale

contributo è uguale alla variazione di flusso che interessa la superficie generata dal contorno della superficie “W” in moto; la derivata di tale contributo è uguale alla corrente stessa.

La relazione (4.2bis) consente di sostituire al flusso di “j” una funzione del vettore “D” e della velocità relativa superficie-cariche “u”.

Il vettore “u” delle precedenti relazioni rappresenta la velocità di traslazione della superficie e risulta quindi opposto al moto apparente assunto dalle cariche e dotate di velocità “v”: avremo quindi $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$.

Inoltre, poiché abbiamo conservazione della carica e solenoidalità del vettore corrente totale, si ha:

$$\text{div}\left(\bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \iint_S \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \iint_S -\bar{\mathbf{j}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} \quad (4.3)$$

Quindi le (4.2), (4.2bis) e (4.3) suggeriscono che, in un circuito come quello di fig. 5, la variazione di flusso che interessa il condensatore si trasforma in una variazione di flusso che interessa la superficie generata dal contorno di superficie in moto.

In base a tutte le considerazioni sviluppate ed analogamente alla trattazione classica, con riferimento al circuito di fig. 8 in cui si ha un condensatore in ipotesi di “quasi stazionarietà”, si introduce la seguente schematizzazione:

1. Analisi relativa alla superficie S_{F1} che taglia il conduttore (regione di spazio limitrofa ai conduttori).

Il campo “H” è generato dalle vicine cariche in moto. Tali cariche “forano” la superficie S_{F1} ed il loro passaggio provoca una variazione di flusso elettrico compensato da una variazione di flusso che interessa la traccia del contorno di S_{F1} come descritto dalla (4.4). A quest’ultima variazione di flusso si presume che resti associata la generazione di campo magnetico.

$$\oint_l (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{D}}) \cdot d\bar{\mathbf{l}} = \iint_S \bar{\mathbf{v}} \text{div} \bar{\mathbf{D}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} \quad (4.4)$$

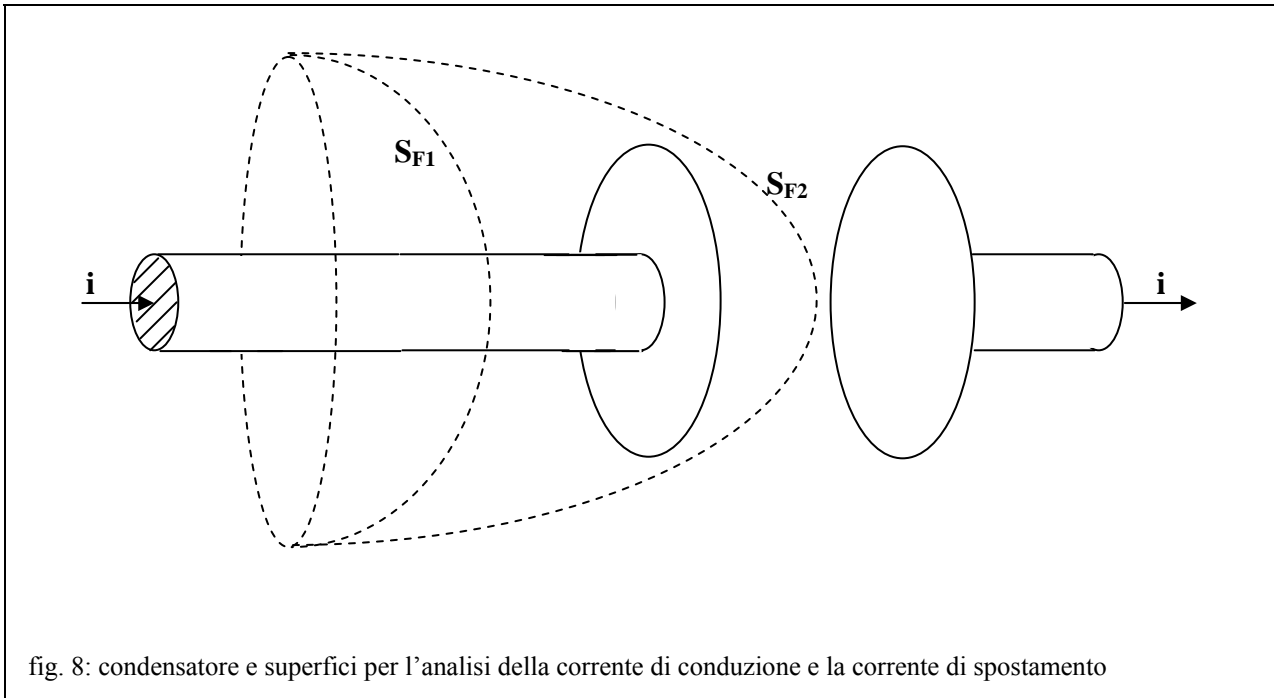
L’equazione (4.5) consente di calcolare il valore di “H”:

$$(4.2bis) \quad \rightarrow \quad \oint_l \bar{\mathbf{H}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = \oint_l (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{D}}) \cdot d\bar{\mathbf{l}} \quad (4.5)$$

2. Analisi relativa alla superficie S_{F2} che taglia il dielettrico del condensatore (regione di spazio interna al condensatore).

Non c’è alcuna carica che varca la superficie S_{F2} . Tale superficie è però interessata da una variazione di flusso elettrico. In questo caso non si applica la relazione di Biot-Savart perché il campo non viene generato da cariche in movimento, bensì dal flusso variabile del vettore “D” come descritto dalla (4.6).

$$\oint \bar{\mathbf{H}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = \iint_S \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} \cdot d\bar{\mathbf{S}} \quad (4.6)$$



Le (4.4-6) possono essere così riassunte:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial \Psi_{TOT}}{\partial t} = \frac{\partial \Psi_{DISP}}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_{COND}}{\partial t} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \Psi_{TOT}}{\partial t} = \frac{\partial \Psi_{DISP}}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_{COND}}{\partial t} = \iint_{S_{disp}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{cond}} \vec{v} \operatorname{div} \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \Psi_{COND}}{\partial t} = \iint_{S_{cond}} \vec{v} \operatorname{div} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_l (\vec{v} \times \vec{D}) \cdot d\vec{l} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \Psi_{DISP}}{\partial t} = \iint_{S_{disp}} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.10)$$

Le espressioni (4.7-10) risultano interessanti per i seguenti motivi:

- in esse compare esplicitamente il legame tra campo magnetico “H” e campo spostamento elettrico “D” ;
- è stata eliminata la dipendenza esplicita del campo “H” dalla corrente;

- appaiono interessanti da un punto di vista relativistico in quanto è esplicita la dipendenza del campo “H” dalla velocità relativa “v” tra i due s.d.r.;

5. Considerazioni sull’analogia formale delle leggi dell’induzione e.m. e della circuitazione magnetica

Si desidera ora riflettere su un aspetto formale delle equazioni di Maxwell. Di seguito vengono riportate alcune note relazioni dell’elettromagnetismo.

Legge dell’induzione e.m. :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (5.1)$$

per circuiti con “geometria non variabile” si ha:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.2)$$

Le (5.1) e (5.2) descrivono in forma integrale e locale il fenomeno dell’induzione elettromagnetica: *ad una variazione di flusso magnetico resta associata una f.e.m. indotta che si oppone alla causa che l’ha generata.*

Legge della circuitazione magnetica:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = i_c + i_s \quad (5.3)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5.4)$$

Le (5.3) e (5.4) descrivono la legge della circuitazione magnetica in forma integrale e locale. Queste ultime non appaiono esattamente simmetriche alle relazioni (5.1) e (5.2). Ricorrendo alla (3.4) è possibile ripristinare la simmetria e si ha:

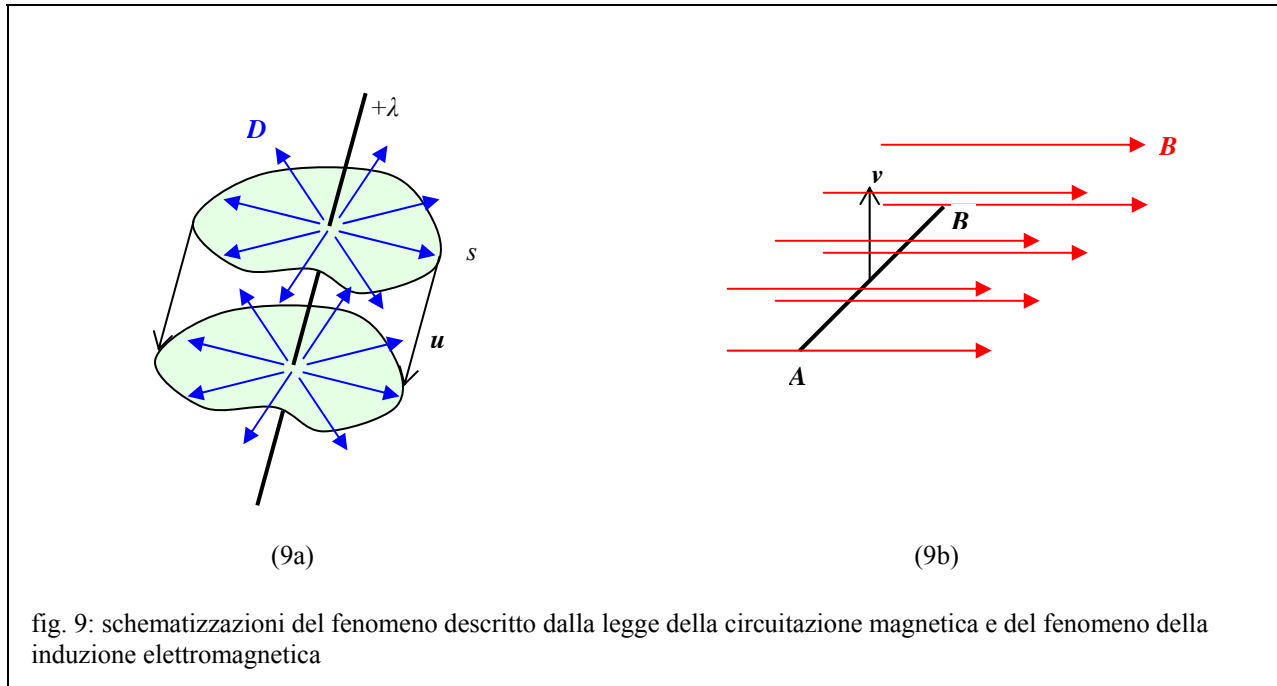
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{D} \cdot d\vec{s} \quad \rightarrow \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (5.3')$$

Se si trascura il contributo di “j” perché si considerano circuiti con “geometria non variabile” (la carica in moto deve essere interpretata come foriera di variazione di flusso elettrico per variazione della superficie cilindrica intercettante il campo D) la (5.4) porta alla (5.4’) che diviene, a parte il segno, analoga alla (5.2):

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5.4')$$

Le relazioni (5.3') e (5.4') appaiono esattamente simmetriche alle (5.1) e (5.2). In particolare la (5.3') chiama in causa una grandezza come il flusso elettrico “ Ψ ”: *ad ogni variazione di flusso elettrico corrisponde una tensione magnetica pari alla derivata del flusso stesso.*

Ora interpretando la legge della circuitazione magnetica come nascita di “ H ” a causa della variazione di flusso elettrico emerge un’interessante analogia fenomenologica che ci accingiamo a mostrare.



Nella figura (9a) è rappresentata una carica lineare fissa ed una superficie dotata di moto con velocità “ u ”. A tale velocità “ u ” corrisponde una velocità opposta “ v ” con la quale un osservatore solidale con la superficie vede apparentemente traslare la carica lineare “ λ ” ($v = -u$).

La superficie in moto ha una linea chiusa “ s ” come contorno anch’essa in moto con velocità “ u ”. Tale contorno, tagliando le linee di campo “ D ”, genera una tensione magnetica “ h ” esprimibile con la seguente relazione che discende direttamente da (4.5):

$$h = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_s (\vec{D} \times \vec{u}) \cdot d\vec{l} = \oint_s (\vec{v} \times \vec{D}) \cdot d\vec{l} \quad (5.5)$$

La (5.5) descrive quindi la nascita di una “*tensione magnetica indotta h*” analogamente a quanto accade per le tensioni elettriche indotte.

In fig. (9b) il conduttore con estremi A e B dotato di velocità “ v ” perpendicolare al vettore “ B ” taglia le linee di campo “ B ” sperimentando una tensione indotta “ e ”; quest’ultima è esprimibile con la seguente relazione nota in letteratura e comunque derivabile dalla (5.1):

$$e = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (5.6)$$

Come si può notare le espressioni (5.5) e (5.6) si presentano formalmente simili ad esclusione del percorso di integrazione che in un caso è rappresentato da una linea chiusa mentre nell’altro è costituito da una linea aperta. Questa differenza è dovuta alla natura solenoidale di “ H ” ed alla natura conservativa di “ E ”.

6. Conclusioni

La necessità di fornire un'interpretazione fisica alla “*corrente di spostamento di Maxwell*” ha portato ad una revisione del concetto di corrente di conduzione quale causa generante il campo magnetico.

Nella formulazione tradizionale dell'elettromagnetismo la corrente di conduzione gioca un ruolo primario nella generazione del campo magnetico e quella di spostamento viene assimilata matematicamente alla prima. L'analisi in questo lavoro ha individuato nella variazione di flusso elettrico una manifestazione comune ai fenomeni conduttivi e capacitivi.

E' stato così attribuito alla variazione di flusso elettrico “ $d\Psi/dt$ ” il ruolo di causa prima nella generazione della “tensione magnetica”. Sulla scorta di questa posizione, ai fini della generazione di “ H ”, la corrente di spostamento e la corrente di conduzione vengono interpretate come aspetti complementari di una stessa fenomenologia.

Interessante risulta anche l'analogia formale delle leggi dell'induzione e.m. e della circuitazione magnetica emersa a seguito di questa nuova interpretazione.

Infine è stata avanzata un'espressione generalizzata che consente di descrivere in modo soddisfacente i legami funzionali con le grandezze di interesse.

6. Bibliografia

- [1] “Elettrotecnica” – volume II “Teoria dei campi. Elementi di calcolo tensoriale” ; Stefano Basile 1967 Ed. Patron
- [2] “Fondamenti di Elettrotecnica – elettromagnetismo” ; Francesco Barozzi, Ferdinando Gasparini 1989 Ed. UTET
- [3] “Electromagnetism and Relativity, with particular reference to moving media and electromagnetic induction” ; E.G. Cullwick ; 1957 Ed. Longmans, Green and Co. ; London – New York – Toronto
- [4] “Classical Electrodynamics – Third Edition” ; John David Jackson; 2001 Ed. John Wiley & Sons, Inc.
- [5] “Fisica II – Elettromagnetismo, Ottica” ; C. Mencuccini, V. Silvestrini; 1999 Ed. Liguori
- [6] “Measuring Maxwell’s Displacement Current Inside a Capacitor”
D.F. Barlett, T.R. Corle, Dipartiment of Phisics; University of Colorado, Boulder, Colorado 80309 – Phisicla Rewiew Letters, Volume 55, Number 1; 1 July 1985
- [7] “Problems on demonstration of the electric field producing the magnetic field”
Zeng Qingping; 117 Air Force Radar Academy, Wuhan 430010 – China 0-7803-4308-5/98
1998 IEEE
- [8] “Elettrotecnica generale” – Volume I, Olivieri – Ravelli, Ed. Cedam, Padova
- [9] “Elettricità e Magnetismo” W. Panofsky, M. Phillips” , Casa Editrice Ambrosiana – Milano 1966
- [10] “Elecromagnetic Theory” Erik Hallen, London – Chapman & Hall, 1962
- [11] “An Elementary View of Maxwell's Displacement Current” John W. Arthur, University of Edinburgh - IEEEAntennasand Propagation MagaZine, Vol. 51, No. 6, December2009
- [12] “A Revisiting of Scientific and Philosophical Perspectives on Maxwell's Displacement Current” Krishnasamy T. Selvan, Department of Electrical and Electronic Engineering The University of Nottingham Malaysia Campus – IEEE Antennasand Propagation Magazine, Vol. 51, No.3, June 2009
- [13] “Maxwell’s displacement current revisited”, J. D. Jackson
University of California, Berkeley - European Journal of Physics 20 (1999) 495–499. Printed in the UK
- [14] “Reply to J D Jackson’s Maxwell’s displacement current revisited” Roche J 2000, Eur. J. Phys. 21 L27-8