

Quaderni del **DIEM - GMA**

Atti di Giornate di studio - 1

A cura di

U. Meneghetti , A. Maggiore , V. Parenti Castelli

Coordinatore di redazione

Riccardo Franci

DIEM

Dipartimento di Ingegneria delle
costruzioni meccaniche, nucleari, aeronautiche e di Metallurgia
www.diem.unibo.it

GMA

Gruppo di Meccanica Applicata
[http://wpage.unina .it/dellaval/GMA/GMA_home.htm](http://wpage.unina.it/dellaval/GMA/GMA_home.htm)

Giornata di studio in onore di Ettore Funaioli

18 luglio 2007

A cura di

Umberto Meneghetti, Alberto Maggiore e Vincenzo Parenti Castelli

**ASTE RISCO
EDIZIONI**



Proprietà letteraria riservata.
© Copyright 2008 degli autori
Tutti i diritti riservati

Giornata di studio in onore di Ettore Funaioli - 18 luglio 2007 / a cura di
Umberto Meneghetti, Alberto Maggiore e Vincenzo Parenti Castelli -
Bologna : Asterisco, 2008 - p. 233; 17 cm.

ISBN 978-88-902128-9-5

Versione elettronica disponibile alla pagina
<http://amsacta.cib.unibo.it/archive/00002460/>

Stampa a richiesta eseguita da:
Asterisco Snc Tipografia Digitale
Via Belle Arti, 31 a/b – 40126 Bologna
Tel 051 236866 – Fax 051 261105
mail: grafica@asteriscosnc.it
www.asteriscosnc.it

Indice

Prefazione

<i>A.O. Andrisano</i>	1
Gli insegnamenti di Ettore Funaioli nella mia attività presso l'ateneo di Modena e Reggio Emilia	
<i>G. Catania, S. Sorrentino</i>	25
Application of fractional calculus to the analysis and identification of viscoelastic systems	
<i>M. Cocconcelli, R. Rubini</i>	53
Analisi di sensibilità di una macchina equilibratrice al variare di parametri cinematici e dinamici	
<i>E. Dragoni, D. Castagnetti, S. Spaggiari</i>	69
Calcolo efficiente del comportamento strutturale di costruzioni incollate complesse	
<i>R. Franci, V. Parenti Castelli, N. Sancisi</i>	89
A new sequential approach to the modelling of human diarthrodial joints	
<i>A. Freddi</i>	109
Recent development of hybrid methods for fatigue analysis of mechanical structures	
<i>C. Innocenti</i>	129
Counting the essential kinematic parameters of a spatial manipulator	
<i>G. Medri</i>	141
Progettazione di prodotto: nuove (?) problematiche	
<i>E. Mucchi, G. Dalpiaz</i>	155
Problemi metodologici nella modellazione multibody con corpi flessibili	
<i>P.G. Molari</i>	171
I Carrozzi di Francesco di Giorgio ed il loro sistema di guida	

<i>E. Prati, M. Silvestri, A. Tasora</i>	185
Un percorso di ricerca e didattica nella meccanica applicata alle macchine	
<i>A. Rivola</i>	203
Higher order spectral analysis: a tool for fault monitoring and diagnostics	
<i>A. Strozzi</i>	217
Problemi di contatto tra organi di macchina	
Indice degli Autori	233

COMMEMORAZIONE DEL PROF. ETTORE FUNAIOLI

Intervento del Prof. Umberto Meneghetti
alla presenza dei familiari del Prof. Ettore Funaioli

Cara Signora Bianca, cari Maria Paola e Giancarlo, cari nipoti del Prof. Funaioli, cari Colleghi, Signore e Signori, nel nome e nella memoria di Ettore Funaioli, permettetemi di chiamarvi tutti: carissimi amici.

L'odierna giornata intitolata al Prof. Ettore Funaioli, infatti, non vuole solo onorare la memoria di un illustre Maestro, ma anche ricordare un caro Amico.

Questo, infatti, è il primo sentimento che suscita in me – in noi – il suo ricordo: la sua disponibilità, la sua sincera adesione ai problemi del prossimo, la comprensione e la partecipazione verso chi gli si rivolgeva non solo per motivi di lavoro, ma anche per problemi personali, la sua gioia sincera per i successi di chi gli era vicino; in altre parole: il suo atteggiamento positivamente amichevole verso il prossimo. Ma, per evitare equivoci: ci ricordiamo bene che la sua disponibilità e la sua comprensione erano accompagnate dall'insofferenza per i comportamenti non del tutto corretti, sicché avere la sua amicizia era davvero una conquista e un onore.

Permettetemi di inserire un breve ricordo personale, del giorno – era un giorno di febbraio dell'anno 1962 – del giorno, dicevo, in cui, non ancora laureato, mi presentai nel suo studio manifestando l'intenzione – e la speranza – di lavorare con lui. Alla sua presenza, alla presenza del "Professore", ero naturalmente molto intimidito, ma lui seppe subito mettermi a mio agio, mi illustrò quali sarebbero stati i miei compiti e la mia attività se fossi entrato nell'Istituto e mi presentò gli altri membri dell'allora Istituto di Meccanica applicata alle macchine, da lui diretto.

Fui assunto, e subito fui conquistato dall'ambiente. Nell'Istituto erano allora presenti il Prof. Fausto Caboni e l'Ing. Gustavo Favretti. Commemorando Ettore Funaioli non posso non ricordare con affetto questi due Colleghi, da tempo prematuramente scomparsi, legati a lui da profonda e reciproca stima e amicizia. Molti dei presenti hanno di loro un caro ricordo personale. In particolare, ricordo la stretta collaborazione – in anni successivi alla scomparsa del prof. Caboni – fra il Prof. Funaioli, primo Direttore del DIEM, e il Prof. Favretti, suo primo successore: credo che per noi tutti sia naturale associare al rimpianto per Ettore quello per il suo allievo ed amico Gustavo Favretti.

Ettore Funaioli fu eminente ricercatore, didatta, organizzatore.

Laureato in Ingegneria presso l'Università di Pisa, iniziò ivi la sua brillante carriera universitaria. Nel 1954 conseguì la Libera Docenza in Meccanica applicata alle macchine e nel 1956 vinse il concorso alla Cattedra della stessa materia presso l'Università di Cagliari.

Nel 1958 fu chiamato a Bologna quale titolare della Cattedra di Meccanica applicata alle macchine, che da allora ha sempre ricoperto fino al giorno in cui andò fuori ruolo, ricevendo da questa Facoltà il titolo di Professore Emerito. Presso questa Facoltà ha tenuto per molti anni anche il corso di Macchine utensili, impostandone i contenuti in modo efficace e moderno, tuttora sostanzialmente valido.

Alla didattica, sempre in primo piano nei suoi pensieri, Ettore Funaioli si è dedicato con un impegno straordinario e senza riserve. Io ebbi la ventura di seguire il suo corso di Meccanica applicata alle macchine nel primo anno in cui lo tenne in questa Facoltà di Ingegneria di Bologna, ed è vivo in me il ricordo della vivacità e concretezza delle sue lezioni, così come quello della severità del suo esame, che noi studenti accettavamo non solo perché erano altri tempi, ma anche perché la riconoscevamo equa e serena. E questo giudizio mi viene spesso confermato da ex allievi, ora Ingegneri professionisti, che lo hanno avuto come Docente.

Anche le sue "Lezioni di Meccanica applicata alle macchine", testo da lui scritto di getto nel 1972, sono testimonianza viva del suo impegno per la didattica e del suo prezioso ingegno di Docente. Impegno ribadito nella magistrale relazione "La Meccanica applicata alle macchine attraverso gli ultimi cinquanta anni", letta il 12 giugno 1996 nella sede dell'Accademia delle Scienze di Bologna, nel corso della cerimonia organizzata dai suoi allievi in occasione dell'uscita dai ruoli del Prof. Funaioli.

Direttore dell'Istituto di Meccanica applicata alle macchine e primo Direttore del DIEM – fondato nel 1987 – ebbe numerosi altri incarichi ed impegni accademici sia nell'Università di Bologna, dove fu, per esempio, delegato del Rettore dal 1976 al 1979, sia al di fuori di essa, come la partecipazione ai Comitati Coordinatori dell'Università della Calabria e della futura Facoltà di Ingegneria di Forlì, dove ha lasciato una significativa impronta del suo pensiero.

La sua produzione scientifica – che gli valse, tra l'altro, l'iscrizione all'Accademia delle Scienze di Bologna, nella quale era Accademico Benedettino – ha riguardato in un primo tempo argomenti di aeronautica generale e di aerodinamica. Successivamente si occupò, sempre molto brillantemente, di lubrificazione – studiando, in particolare, il problema della distribuzione della temperatura del lubrificante entro il meato –, di elasticità e dimensionamento strutturale di organi meccanici, della dinamica delle macchine. Non ritengo sia il caso di illustrare qui in dettaglio tutti gli aspetti dell'attività scientifica di Ettore Funaioli. Voglio piuttosto ricordare con quanto altruismo ha dedicato una parte importante, forse la parte preponderante, della sua attività, nel trasmettere direttamente ai suoi allievi la propria dottrina e, insieme, il culto della serietà e dell'impegno professionale. A questa sua azione molto dobbiamo noi, suoi allievi e collaboratori.

E la sua maggiore gloria scientifica la troviamo forse proprio in questa giornata.

Oggi, infatti, sono riuniti nel suo nome ricercatori che svolgono attività di alto livello in svariati settori della Meccanica: posso dire, con l'orgoglio che mi viene dall'affetto per lui, che dal seme gettato da Ettore Funaioli è nato non un grande albero, ma una foresta, o meglio un ricco frutteto, con alberi abbondanti di frutti saporosi e ricchi di generose promesse per il nostro – per il vostro – futuro.

Per tutto ciò ha lavorato Ettore Funaioli, per tutto questo gli esprimiamo oggi, dal profondo del cuore, il nostro più grato e affettuoso ringraziamento.

GLI INSEGNAMENTI DI ETTORE FUNAIOLI NELLA MIA ATTIVITÀ PRESSO L'ATENEO DI MODENA E REGGIO EMILIA.

Angelo O. Andrisano

Direttore del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Civile

Università di Modena e Reggio Emilia

Responsabile del Laboratorio regionale SIMECH, Distretto HIMECH.

E-mail: angelo.andrisano@unimore.it

Sommario. *Vengono riassunte le più recenti attività accademiche dell'autore trasferitosi nell'Ateneo di Modena il 1.11.1990. Sono richiamate le iniziative intraprese nelle due Facoltà di Ingegneria di Modena e di Reggio Emilia: Attivazione del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Civile, attivazione dei Corsi di Laurea e di Master, della Scuola di Dottorato, il contributo alla realizzazione della nuova sede della Facoltà di Ingegneria di Modena, la docenza nella Accademia Militare, le ricerche nell'ambito delle Rete Regionale dell'Alta Tecnologia Meccanica, il coordinamento dei laboratori SIMECH (Simulazione Meccanica) e LAPIS (Laboratorio di Progettazione Integrata e Simulazione) nell'ambito del Distretto regionale HIMECH ed in sinergia con le aziende meccaniche del territorio.*

Parole chiave: *Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Civile, Scuola di Dottorato di Ricerca in High Mechanics and Automotive Design, Accademia Militare di Modena, Lab. SIMECH.*

1. INTRODUZIONE

Nell'occasione del primo anniversario della scomparsa del prof. ing. Ettore Funaioli e della lodevole iniziativa dei Colleghi bolognesi di organizzare per la sua commemorazione un convegno scientifico con i contributi di tutti gli allievi, ho ritenuto opportuno presentare una breve sintesi delle attività da me portate a termine presso l'Ateneo di Modena e Reggio Emilia, nella Facoltà di Ingegneria, nata proprio nell'anno del mio trasferimento avvenuto il 1.11.1990, a seguito dell'esito positivo del concorso bandito due anni prima dal preesistente Biennio di Ingegneria (Facoltà di Scienze) nella disciplina Disegno di Macchine.

Ho così richiamato le ricerche e le iniziative accademiche più significative degli ultimi anni, da me intraprese presso la sede di Modena, insieme ai miei collaboratori; a tali attività credo di avere apportato contributi significativi, proprio in virtù delle esperienze maturate a Bologna presso l'Istituto di Meccanica Applicata alle Macchine, prima, e presso il Dipartimento di Ingegneria delle Costruzioni Meccaniche (DIEM), dopo, sotto la guida e grazie agli insegnamenti del compianto Maestro. A lui vanno, in questo momento, un commosso ricordo e



Figura 1. Il Polo di Ingegneria di Modena.

la mia più profonda gratitudine per i suggerimenti e i consigli ricevuti, per quanto attiene sia la attività universitaria, sia la sfera della vita privata.

2. IL DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA.

La struttura universitaria all'interno della quale vengono svolte le attività accademiche che vengono descritte è il Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Civile dell'Ateneo di Modena (DIMeC). E' situato nell'edificio collocato sulla destra della fotografia di Fig. 1, dove è rappresentato l'intero polo della Facoltà e dei Dipartimenti universitari ingegneristici modenesi. Il sottoscritto, in veste di Presidente della Commissione Edilizia di Facoltà, è stato membro del Comitato Tecnico del Consorzio per lo Sviluppo della Facoltà di Ingegneria; ha collaborato alla stesura delle specifiche progettuali e alla definizione delle caratteristiche costruttive. Le cariche di Membro del Consorzio e di Responsabile dell'Edilizia di Facoltà sono state ricoperte per tutti gli anni '90, fino alla inaugurazione dei locali, avvenuta nel dicembre del 2000.

Il Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Civile nasce di fatto nel 2002 dal frazionamento dell'ex Dipartimento di Scienze dell'Ingegneria, unica struttura di ricerca cui faceva capo tutto il personale della Facoltà. Il Dipartimento oggi copre una superficie di circa 2000 metri quadrati e potrà presto utilizzare una superficie quasi equivalente, essendo tra breve fruibili i locali che saranno attrezzati con i finanziamenti inerenti il secondo stralcio edilizio.

Il Dipartimento, che è diretto dal sottoscritto fin dalla sua costituzione, consta oggi di 32 docenti e ricercatori di ruolo, 23 dottorandi di ricerca, una cinquantina di unità di personale a contratto, 7 unità di personale tecnico-amministrativo.

Il Dipartimento è punto di riferimento per tutta la attività di ricerca del settore meccanico, per il Laboratorio regionale SIMECH, di cui si farà cenno più avanti, e per tutta l'attività formativa nel settore dell'Ingegneria Meccanica e precisamente:

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Meccanica.

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica.

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria del Veicolo.

Master in Ingegneria del Veicolo.

Scuola di Dottorato in "*High Mechanics and Automotive Design & Technology*".

Le principali linee di ricerca, che sono a vario titolo riconducibili alle esperienze maturate durante il periodo accademico trascorso presso la Facoltà di Ingegneria di Bologna, sotto la guida del professor Funaioli e dei suoi allievi, sono le seguenti:

Trasmissioni meccaniche a ingranaggi (analisi dinamica di ruote a denti dritti; ottimizzazione dei profili; modellazione e studio di riduttori epicicloidali, analisi dinamica sperimentale di coppie di ingranaggi, prove di durata a pitting di gruppi di riduzione).

Metodi e tecniche di progettazione meccanica integrata e di simulazione.

Robotica industriale.

3. IL MASTER IN INGEGNERIA DEL VEICOLO.

Sin dal 1995-96 è stato attivato il Master in Ingegneria del Veicolo, al fine di aumentare e potenziare l'offerta didattica nel settore che sin da allora ha via via connotato, in maniera sempre maggiore, la Facoltà di Ingegneria di Modena. Attraverso la sponsorizzazione di numerose aziende del territorio (v. Fig. 2) ed insieme ad alcuni colleghi del Politecnico di Torino e del Centro Ricerche FIAT, tra i quali amo ricordare il compianto Attilio Garro, la Facoltà ha iniziato a organizzare corsi di Master per ingegneri, finalizzati ad accrescere la preparazione tecnica, per creare gli specialisti richiesti dalle principali case automobilistiche della regione, nonché dai produttori di tutta la componentistica del settore. La collaborazione del Centro Servizi DEMOCenter-SIPE sul piano dei rapporti con le Imprese e la disponibilità di numerosi tecnici di chiara fama operanti nel settore, hanno contribuito a rendere il corso di Master sempre più appetito dai giovani ingegneri del territorio.

Dall'inizio dei corsi ad oggi più di 150 laureati in ingegneria, molti dei quali provenienti da fuori regione, hanno seguito i corsi di Master e sono tutti attualmente inseriti nelle Aziende del settore veicolistico sparse sul territorio nazionale, ma soprattutto regionale.

4. IL DOTTORATO DI RICERCA IN HIGH MECHANICS AND AUTOMOTIVE DESIGN AND TECHNOLOGY.

La Scuola di Dottorato dedicata ai temi dell'Ingegneria Meccanica Avanzata e Tecnica del veicolo è stata inaugurata nel 2005 come naturale evoluzione del Dottorato In Ingegneria Meccanica, attivato a Modena sin dal 1996. In questi due anni la Scuola ha riscosso un notevole successo per numero di studenti iscritti, per la formazione impartita e per la ricerca sviluppata in costante collaborazione con le più importanti aziende del territorio regionale e non solo. Il DIMeC è sede amministrativa della Scuola di Dottorato in "Meccanica Avanzata e Tecnica del veicolo" e sede organizzativa dei Corsi di Dottorato in "Metodi di Simulazione e Progettazione Meccanica" e "Tecniche e Tecnologie del Veicolo".

Nel seguito verranno presentate brevemente le attività di ricerca del Dipartimento che rappresentano i riferimenti per i programmi degli studenti di dottorato cui destinare le borse di studio di dotazione ordinaria e straordinaria derivate dall'apposito "Piano Giovani". Le tematiche trattate rientrano nell'area dell'Ingegneria Meccanica, dei Materiali e Giuridica, ed includono aspetti sia di base, sia professionali, relativi alla progettazione di macchine ed impianti, con particolare riferimento alle competenze connesse con gli aspetti termodinamici, strutturali, tecnologici, e funzionali.



Figura 2. I loghi delle Aziende e degli Enti sostenitori del Master in Ingegneria del Veicolo, organizzato dal Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Civile di Modena.

Vengono anche considerati aspetti di progettazione e di caratterizzazione meccanica di materiali avanzati ed innovativi, e problemi giuridici con particolare riferimento agli aspetti brevettuali. Grande attenzione viene posta allo studio di motori endotermici, ed all'analisi di aspetti termici e strutturali nei vari componenti del motore, in stretta connessione con importanti realtà industriali del territorio. Un altro campo privilegiato di indagine si riferisce alle macchine movimento terra, alle macchine automatiche operatrici di confezionamento e alla robotica industriale; si sviluppano anche tematiche di progettazione avanzata di ingranaggi, con particolare riguardo verso i problemi di dinamica e di rumorosità. Un ulteriore argomento è quello dell'oleodinamica, nei suoi risvolti fluidici e strutturali. Altro settore di indagine è quello relativo ad aspetti biomeccanici e biomedicali, di forte impatto multidisciplinare, ed in stretta pertinenza con realtà tecniche territoriali. Nel settore dei materiali innovativi l'attenzione è rivolta ai materiali di difficile saldabilità, lavorabilità meccanica e fusibilità, quale il titanio. Si indaga anche la possibilità di impiego di materiali polimerici, in sostituzione di metalli, nella realizzazione di componenti meccanici, facendo affidamento sulla loro relativa plasmabilità.

Dal momento che l'ottenimento di risultati importanti in campo industriale richiede sempre più spesso un'adeguata protezione legale e che sono sempre più presenti esigenze di tutela della riservatezza, si è deciso di introdurre anche una componente giuridica nella didattica dei corsi di Dottorato, nella prospettiva sempre più concreta di collocare gli allievi presso le aziende del territorio, rispondendo a tutte le esigenze effettive.

La Scuola di Dottorato si prefigge di conseguire una forte connotazione internazionale per consolidare il centro di eccellenza nel settore HIMECH recentemente attivato. Un elemento qualificante per la formazione scientifica del dottorando è la permanenza all'estero presso Atenei e Laboratori frequentati da autorevoli ricercatori. Si stimola il Dottorando a svolgere parte della tesi di Dottorato in collaborazioni con centri di eccellenza, favorendo consistenti soggiorni in sedi qualificate, preferibilmente estere. Le ricordo in questa sede: University of Exeter e University of Cambridge (UK), Kharkiv State Polytechnic University (UA), University

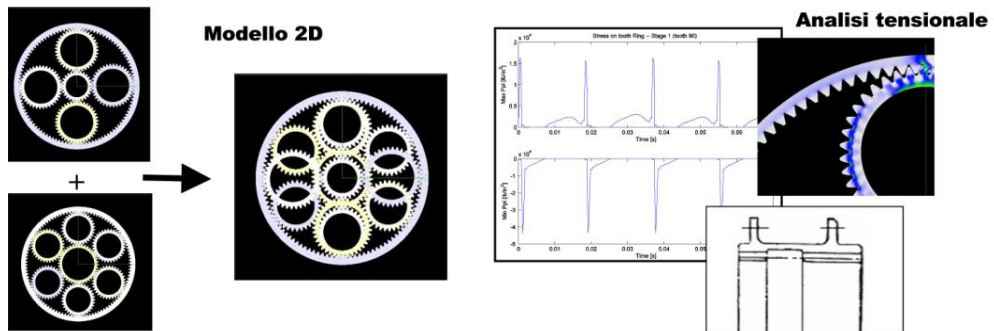


Figura 3. Ottimizzazione di riduttori epicicloidali a più stadi realizzata in collaborazione con Gear Lab, Ohio State University, USA.

of Maryland (USA), Ohio University (USA), Loughborough University (UK), Chalmers University of Technology (S).

Si descrivono brevemente i quattro indirizzi della Scuola.

Metodi di Simulazione e Progettazione Meccanica.

Il percorso formativo in Metodi di Simulazione e Progettazione Meccanica si prefigge di perfezionare le conoscenze relative ai principi di base della progettazione meccanica, in piena sintonia con le tematiche presentate nell'ambito del laboratorio della rete HiMech.

La Scuola intende formare un dottore con forti conoscenze specialistiche nel campo della progettazione meccanica avanzata, con padronanza delle tecniche di rappresentazione, delle metodologie di calcolo numerico ed analitico, nonché di tecniche sperimentali.

Oltre alla tradizionale frequenza ai corsi, alle conferenze e ai seminari organizzati all'interno dell'Ateneo, i dottorandi si giovano anche del contatto con realtà industriali ad elevato livello tecnologico, delle quali è ricco il territorio modenese. Particolare rilievo viene dato alla progettazione delle trasmissioni ad ingranaggi con approccio numerico e verifiche sperimentali (v. Fig. 3).

Grande attenzione viene posta all'implementazione di metodologie di sviluppo nuovi prodotti, con particolare riferimento al settore dell'Ingegneria Industriale. Vengono indagate e sviluppate metodologie ingegneristiche basate sull'applicazione di strumenti di Concurrent Engineering, che ben si prestano a risolvere i problemi legati al progressivo allargamento ed alla crescente interdisciplinarietà delle conoscenze richieste in ambito progettuale.

Per dotare gli studenti della Scuola di Dottorato degli strumenti necessari per un rapido inserimento nel mondo del lavoro, che consenta loro di collocarsi ad alti livelli professionali, e per garantire un efficace trasferimento di competenze tra la comunità scientifica ed industriale, vengono affrontati temi inerenti l'impiego di metodi e tecniche di Robust Design, quali il QFD (Quality Function Deployment), la FMEA (Failure Mode and Effect Analysis), il DOE (Design of Experiments) ed il D F M A (Design for Manufacturing and Assembly), per l'applicazione

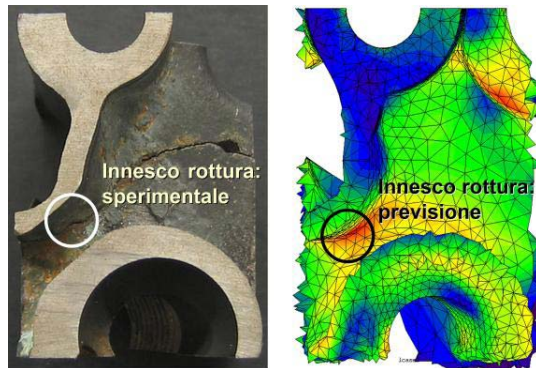


Figura 4. Analisi termostrutturale e verifica sperimentale dell'insorgenza di cricche in una testata motore in seguito a concentrazioni di tensioni.

dei quali esiste una aggiornata dotazione hardware e software, oltre a strumenti di modellazione avanzata e CAE (Computer Aided Engineering) per la generazione di prototipi virtuali.

Tecniche e Tecnologie del Veicolo

Il percorso formativo in Tecniche e Tecnologie del Veicolo si accomuna alle ricerche sviluppate nell'ambito del laboratorio regionale HiMech, finalizzato allo sviluppo di soluzioni innovative nel campo automotive. Particolare attenzione viene destinata alle due grandi aree che costituiscono il veicolo, la motoristica e la telaistica.

Nel campo motoristico le tematiche principali riguardano il calcolo termodinamico e strutturale di componenti, quali la testata, dove l'interazione tra i due aspetti termico e strutturale risulta obbligata (v. Fig. 4) e l'ottimizzazione della componentistica dei motori.

Nel campo telaistico spiccano le simulazioni della rigidità del telaio, modellazioni delle sospensioni, e interpretazioni del comportamento su strada. Si associa a questi temi lo sviluppo di modelli dinamici sempre più complessi.

La Facoltà di Ingegneria è direttamente coinvolta in una serie di cooperazioni tecnico-scientifiche con industrie leader del territorio. Una ulteriore sorgente di stimoli proviene dalla messa in pista della vettura di Formula Student, alla quale la sede di Modena ha partecipato attivamente in quattro edizioni, conseguendo buoni risultati. I dottorandi possono infatti contribuire attivamente al progetto e alla costruzione del veicolo destinato a scendere in pista durante l'annata (v. Fig. 5).

Progettazione di materiali ad alte prestazioni

Il percorso formativo in Progettazione di materiali ad alte prestazioni riguarda la progettazione e l'impiego ingegneristico di materiali metallici e non, con particolare riferimento al campo automotive. Grande rilievo viene dato ai processi produttivi che coinvolgono materiali e leghe speciali di materiali metallici difficilmente trattabili, quali ad esempio il processo di saldatura del titanio. Si studia parallelamente la possibilità d'impiego di materiali polimerici



Figura 5. Il gruppo di studenti e professori che hanno partecipato al Campionato mondiale universitario di “Formula Student”, svoltosi a Bruntingthorpe in Gran Bretagna.

alternativi ai metalli per particolari applicazioni strutturali (v. Fig. 6). Le conoscenze teoriche e numeriche che vengono impartite sono affiancate da attività sperimentali, in modo da completare la personalità scientifica del dottorando, e quindi favorire la sua rapida integrazione nel mondo industriale od universitario.

Diritto Privato e Commerciale: contratti e proprietà industriale.

Questo indirizzo della Scuola si pone essenzialmente come momento di approfondimento scientifico delle principali tematiche del diritto privato afferenti al mondo delle relazioni commerciali, industriali e finanziarie. Le tematiche del Corso riguardano essenzialmente profili relativi al diritto privato patrimoniale (obbligazioni, contratti, responsabilità civile) ed al diritto commerciale d’impresa (“nuovo” diritto societario, diritto bancario, diritto dei mercati finanziari, diritto della concorrenza). Un’attenzione particolare viene dedicata, pertanto, agli istituti volti a disciplinare l’esercizio dell’impresa, specie quella in forma societaria, comprendendone i profili relativi all’attività, al momento organizzativo e patrimoniale, agli strumenti di azione contrattuali e non contrattuali, nonché alle principali tematiche in materia di diritto cartolare e dei valori mobiliari, di tutela della proprietà industriale, di diritto della concorrenza e diritto del commercio internazionale. La Scuola di Dottorato si avvale anche di relatori esterni e internazionali nello svolgimento della tesi di dottorato. Viste le numerose pubblicazioni a livello internazionale che possono vantare i proponenti della Scuola di Dottorato e soprattutto viste le strette relazioni che intercorrono con colleghi di altri atenei nazionali e stranieri da parte di numerosi proponenti, si sono individuati, a seconda del tema della tesi, all’interno della comunità scientifica, i docenti più qualificati, in modo non solo da ampliare le conoscenze del dottorando, ma anche da stimolare la curiosità scientifica di tutti i professori coinvolti nell’iniziativa.

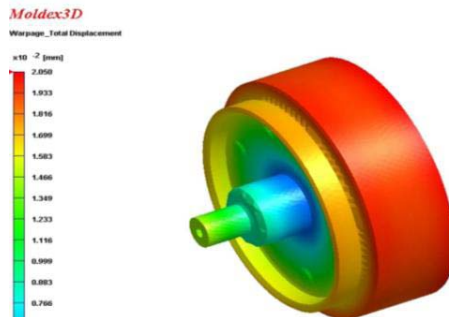


Figura 6. Simulazione e analisi del processo di stampaggio ad iniezione del cilindro interno di un dispositivo TPMS (Tire Pressure Monitoring System) realizzate mediante software CAE Moldex 3D.

5. IL LABORATORIO SIMECH DEL DISTRETTO REGIONALE HIGH MECH.

Le competenze sviluppate negli anni presso il DIMeC e la continuità dei suoi rapporti di collaborazione con numerose realtà produttive, di rilievo nazionale ed internazionale, hanno portato la Regione Emilia Romagna a cofinanziare, nell'ambito della Legge n.7/2004 sullo sviluppo tecnologico, la creazione di un laboratorio regionale a rete (NetLab) dedicato alla "Simulazione e Progettazione Integrata nel Settore Automotive e della Meccanica Avanzata" (acronimo SIMECH).

Il DIMeC è istituzione leader di SIMECH che collabora nella sua attività con Dipartimenti degli Atenei di Bologna e di Parma, di realtà produttive di primaria importanza nell'ambito della Meccanica, quali Case New Holland SpA, Citieffe srl, Gruppo Laserline, Lombardini SpA, Rossi Motoriduttori SpA, SIR SpA, e della Società consortile DEMOCenter-SIPE, centro unificato di riferimento per il trasferimento tecnologico nella Provincia di Modena (v. Fig. 7, 8).

Il Net-Lab SIMECH, attivo dal Giugno 2005, è un laboratorio regionale per lo sviluppo delle tecniche di Simulazione e Progettazione Integrata, tema qualificante inserito nell'Accordo di Programmazione Negoziata MIUR-Regione Emilia Romagna, mirato alla creazione di un'area d'eccellenza tecnologica nel settore della Meccanica Avanzata (Distretto Tecnologico HI-MECH). L'obiettivo principale del laboratorio è la riorganizzazione della collaborazione tra mondo della ricerca e mondo delle imprese attraverso la creazione di un punto di riferimento unico a livello regionale che condivida risorse umane, strumentazioni, facilities e incentivi e valorizzi la conoscenza e il suo trasferimento dall'Accademia al mondo industriale.

Il laboratorio concentra la propria attività sulla progettazione meccanica avanzata (trasmissioni meccaniche, meccanica delle macchine movimento terra, robotica industriale per produzione e montaggio di componenti automobilistici e motoristici), alla progettazione e simulazione dei motori a combustione interna. In tale ambito si sviluppano metodologie di progettazione applicate alle industrie meccaniche già citate. La struttura si pone ora come luogo di sviluppo di competenze tecniche avanzate, mediante la costruzione di una forte massa critica

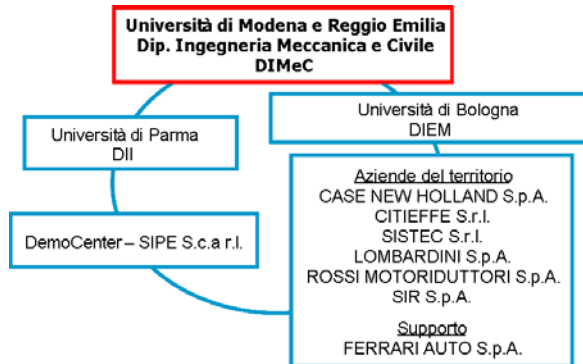


Figura 7. Il laboratorio regionale a rete SIMECH, coordinato dal Dipartimento di Ingegneria Meccanica di Modena.

di ricerca, costantemente alimentata dall’inserimento dei Dottori di Ricerca formati presso la Scuola di Dottorato in "High Mechanics and Automotive Design & Technology"/"Meccanica Avanzata e Tecnica del Veicolo".

I ricercatori del laboratorio si occupano anche di sviluppo nuovi prodotti e di prototipazione virtuale mediante modellazione parametrica tridimensionale, simulazione cineto-dinamica e strutturale, metodologie di Robust Design; modellazione statica e dinamica di sistemi complessi con particolare riferimento alle trasmissioni di potenza ad ingranaggi ed alla relativa sperimentazione.

6. LE TEMATICHE DI RICERCA

Si riferisce in modo più dettagliato sulle più recenti attività di ricerca sviluppate dallo scrivente in collaborazione con i giovani ricercatori del laboratorio.

Trasmissioni meccaniche [1-13]

La modellazione del comportamento statico di sistemi complessi ad ingranaggi, è stata una delle attività che hanno interessato l’intero arco temporale del progetto SIMECH.

L’attività bibliografica sviluppata nel primo periodo di lavoro ha messo in risalto come una corretta analisi statica sia di fondamentale importanza non solo per il corretto dimensionamento degli elementi meccanici di cui è composta una trasmissione ad ingranaggi, ma anche per una loro successiva ottimizzazione rispetto ad aspetti funzionali e tecnologici. Per esempio volendo simulare il comportamento vibratorio di una semplice coppia di ruote dentate, attraverso modelli dinamici di tipo numerico, è necessario calcolare le sollecitazioni sulle dentature (forzanti) attraverso analisi di tipo statico. In questo senso le principali normative vigenti (UNI, ISO, DIN ed AGMA) offrono modelli di tipo analitico che recano conforto solo per applicazioni di tipo standard. Viceversa quando i sistemi analizzati risultano particolarmente complessi (sistemi epicicloidali, ruote coniche, dentature HCR), le normative perdono spesso la loro utilità. Si sono così valutati strumenti software di tipo alternativo in grado di sostituirsi,



Figura 8. I laboratori di ricerca del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Civile di Modena, sede del lab SIMECH.

dove possibile, alle normative stesse. In particolare in commercio esistono tre tipologie di pacchetti software: il primo è costituito da tutti quelle applicazioni che rendono più facilmente fruibile il contenuto delle normative stesse (KissSoft, Ipar-Idis-Rhf), il secondo da codici sviluppati dalle più note case produttrici di macchine per il taglio degli ingranaggi ed il cui know-how è coperto da copyright (es: il T2000 Gleason), mentre il terzo raggruppa i codici agli elementi finiti (FEM), attraverso i quali è possibile modellare una data trasmissione nel suo complesso, una volta che ne sia nota la geometria (Mentat-Marc, Ansys, Calyx). Si sottolinea che i primi due gruppi sono più utili in fase di progettazione da “foglio bianco”, mentre l’ultimo è più utile in fase di verifica, ottimizzazione e prototipazione virtuale. Per quanto detto in precedenza e per la necessità di avere uno strumento il più possibile flessibile, ci si è concentrati sui codici FEM.

Sono state approfondite le conoscenze di due codici in particolare: Mentat-Marc e Calyx per i quali sono state acquisite licenze accademiche. Dal momento che l’utilizzo dei codici agli elementi finiti è strettamente legato al controllo delle geometrie degli ingranaggi, si sono implementate nuove metodologie per la realizzazione dei modelli solidi utilizzati nelle analisi. Il codice Gear Design permette di integrare in un unico ambiente CAD-FEM la possibilità di creare i profili di una larga classe di ingranaggi, di creare modelli tridimensionali di sistemi complessi assemblando più ruote e di prepararne la meshatura per una successiva analisi FEM. Il tutto con la possibilità, una volta implementata la cinematica, di studiare diverse posizioni relative fra i corpi senza dover ricostruire il modello dall’inizio. Questa metodologia ha permesso di ridurre la possibilità di errore nella creazione del modello ed il tempo utilizzato per l’analisi. Con questo strumento è possibile stimare i tipici parametri utili per la verifica statica degli ingranaggi: pressioni di contatto, stato tensionale al piede dente, tensioni sottosuperficiali, errore di trasmissione, rapporto di condotta sotto carico.

La creazione di Gear Design ha comportato l’acquisizione di una serie di competenze specifiche sui processi di taglio e sulla generazione delle geometrie in questione, che sono state acquisite in stretto rapporto con le aziende che hanno partecipato al laboratorio Simech. In

particolare Case New Holland S.p.A (CNH). ha fornito in più di un'occasione un valido supporto applicativo fornendo casi pratici sui quali effettuare le dovute verifiche.

A titolo di esempio, una tematica che si è approfondita dopo colloqui è legata ad alcune fasi di specifici processi di finitura superficiale delle ruote dentate. I tecnici CNH hanno segnalato come la rasatura del profilo attivo del dente lasci in alcuni casi una singolarità geometrica sul profilo stesso, laddove termina la parte trattata e inizia quella grezza. Tale singolarità è talvolta punto di innesco di cricche e quindi origine del collasso a fatica del dente. La problematica è stata affrontata con due differenti approcci. Inizialmente si è modificato il programma Gear Design per realizzare una mesh più fitta in corrispondenza del raccordo dovuto alla rasatura, che è stato approssimato come un arco di circonferenza; in seguito, alla luce dei risultati ottenuti, che evidenziavano una concentrazione di tensioni in grado di provocare l'innesco della cricca, si è ritenuto opportuno analizzare in dettaglio la geometria del raccordo di rasatura al variare dei parametri di lavorazione. A questo scopo, sono state messe a frutto le conoscenze acquisite relativamente al processo di taglio delle ruote dentate, infatti l'accoppiamento tra utensile rasatore e ruota da sbarbare è assimilabile ad un ingranamento ad assi sghembi tra ruote elicoidali e quindi la geometria del dente risultante si può ottenere come profilo di involuppo della geometria dell'utensile. A causa della maggiore complessità dei profili in esame, è stato necessario implementare una nuova metodologia, interamente numerica, per la ricerca dei profili d'involuppo. Al termine dello studio, è stato possibile mettere a disposizione dell'azienda uno strumento in grado di prevedere il raggio minimo del raccordo di rasatura, così da poter individuare una combinazione di parametri tale da evitare l'innesco della cricca.

Ad ulteriore dimostrazione della sempre più stretta collaborazione con le aziende è da citare il fatto che tecnici CNH seguono training presso il SIMECH sull'uso di GEARDESIGN.

Il software Gear Design è stato validato anche attraverso confronti con il software Calyx di cui il laboratorio Simech possiede una licenza accademica. Questo software di ultima generazione permette la modellazione di sistemi complessi ad ingranaggi inclusivi dei supporti, siano essi cuscinetti a rulli sferici o conici. Inoltre esso permette di inglobare nell'analisi l'effetto deformativo dovuto agli alberi ed alle carcasse che circondano gli ingranaggi.

Parallelamente all'attività di analisi statica sono stati sviluppati modelli numerici al fine di stimare la rumorosità degli ingranaggi con particolare attenzione alle coppie cilindriche a denti diritti. Questa tematica è particolarmente cara a CNH che utilizza questo tipo di ingranaggi nelle trasmissioni delle proprie macchine agricole. Si è così sviluppato un modello dinamico non lineare a parametri concentrati del tipo massa-molla-smorzatore, in grado di predire le vibrazioni prodotte dal suddetto sistema. Tale modello, racchiude il comportamento elastico delle ruote, in unica molla di rigidezza variabile nel tempo, e lo smorzamento dovuto all'attrito ed alla lubrificazione in uno smorzatore a coefficiente costante. La non linearità del modello, che nasce dalla necessità di considerare la possibilità di distacco dei denti in presa, ha richiesto l'adozione di un integratore numerico per risolvere l'equazione del moto del sistema.

Questa scelta ha comportato la valutazione di diversi approcci numerici (non-smooth e smooth), testando i relativi algoritmi. Definito il modello dinamico del sistema, ci si è avvalsi delle abilità conseguite nell'ambito dell'analisi statica per valutare la rigidezza tempo-variante inserita nel modello. Tutto l'approccio è stato automatizzato e dotato di un'intuitiva interfaccia utente (l'applicativo software in ambiente Matlab ha preso il nome di Odyna): è possibile a

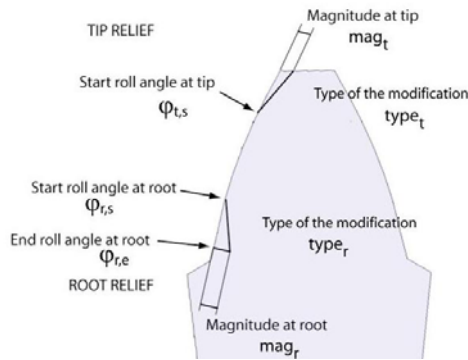


Figura 9. Ottimizzazione delle spoglie di denti diritti di ingranaggi cilindrici per il miglioramento dell'errore di trasmissione statico e del comportamento dinamico.

partire dai parametri di taglio e di montaggio di un ingranaggio, effettuare l'analisi statica in un congruo numero di posizioni attraverso Gear Design in combinazione con MSC Marc (o Calyx) e far passare i risultati, in maniera trasparente, all'integratore numerico, che fornisce la stima della risposta dinamica dell'ingranaggio considerato, in termini di ampiezza di oscillazione. Il funzionamento dell'integratore è stato validato a partire da dati sperimentali presenti in letteratura. Da notare come una caratteristica innovativa del modello sviluppato sia la possibilità di ottenere la risposta dinamica del sistema introducendo nel modello, come forzanti, anche gli errori tecnologici dovuti alle inevitabili tolleranze che sono imposte sugli ingranaggi.

Avendo realizzato uno strumento in grado di stimare, in maniera automatizzata, l'entità delle vibrazioni che si instaurano in un ingranaggio durante il suo funzionamento, si è pensato, sempre in accordo con CNH, di sviluppare metodologie per ricercare combinazioni di parametri ottimali al fine di ridurre le vibrazioni, e dunque il rumore, degli ingranaggi in condizioni operative. In particolare ci si è chiesti come individuare il miglior set di modifiche di profilo, realizzate in testa e al piede del dente, per rendere più morbido l'ingranamento e ridurre così le vibrazioni (v. Fig. 9).

Sono stati sviluppati tre approcci di ottimizzazione, differenti sia per metodologia di ricerca, sia per funzione obiettivo. Il primo di essi, definito euristico, prevede di accoppiare a due a due le molteplici variabili che definiscono l'insieme delle modifiche di profilo e ricercare combinazioni ottimali al variare di due sole variabili per volta. Come criterio, per definire la condizione di ottimo, è stato considerato il solo comportamento statico, cioè si è imposto che la rigidità tempo-variante oscilli in un range ridotto. Il secondo metodo, sempre basato su una condizione di ottimo statica, applica un metodo di ottimizzazione globale: gli algoritmi genetici. Tale approccio (v. Fig. 10) consente di ricercare una condizione ottimale che garantisce di essere un minimo della funzione obiettivo considerata, il che ha permesso di mettere a confronto diverse funzioni obiettivo, operanti sui valori di rigidità statica, in termini del loro effetto sulla dinamica del sistema. Il terzo metodo di ottimizzazione, anch'esso globale, si basa

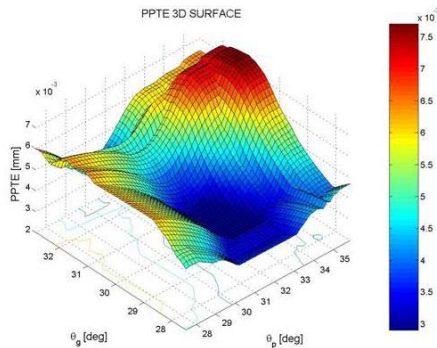


Figura 10. Ottimizzazione numerica del roll angle di inizio modifica in testa su pignone e ruota ottenuta mediante metodo euristico iterativo.

su una ricerca casuale sull'intero dominio di variazione delle variabili e su una ricerca locale con l'algoritmo del semplice, che si basa sul presupposto che il problema sia localmente linearizzabile. Peculiarità di questo metodo è anche l'utilizzo di una funzione obiettivo che si basa sulle ampiezze di oscillazione e dunque sui risultati provenienti dall'integratore numerico.

E' stata poi effettuata una campagna sperimentale finalizzata alla validazione e messa a punto dei modelli dinamici e di ottimizzazione di trasmissioni meccaniche a ingranaggi parallelamente sviluppati e implementati. A tale scopo è stato fornito da CNH al Dipartimento un banco prova ingranaggi, già di proprietà del Centro Ricerche Fiat di Orbassano (TO), che permette di effettuare prove sperimentali su una singola coppia di ruote ad assi paralleli, con possibilità di introdurre disallineamenti fra gli assi sia sul piano verticale sia orizzontale e variazioni di interasse (v. Fig. 11). L'utilizzo di questo apparato sperimentale è stato principalmente finalizzato alla misura della risposta dinamica di una coppia di ruote in termini di errore di trasmissione dinamico, fonte principale di vibrazione e della rumorosità irradiata, simulandone in laboratorio le condizioni di funzionamento, potendo così effettuare analisi comparative con i dati ottenuti dai modelli analitici e numerici.

La prima fase di questo lavoro è consistita nella definizione della catena di misura, delle attrezzature e strumentazioni necessarie e nella scelta del sistema di acquisizione. Come evidenziato dalla preliminare attività di ricerca bibliografica, il modo più conveniente per misurare sperimentalmente l'errore di trasmissione dinamico consiste nell'utilizzo di sensori accelerometrici. Pertanto si è provveduto a montare sul banco in corrispondenza delle due ruote da testare, quattro accelerometri piezoelettrici, due per ogni ruota, orientati tangenzialmente alle ruote stesse. Il banco è poi collegato sui due assi mediante giunti a due motori elastici da 76 kW, dei quali uno funge effettivamente da motore e l'altro da freno. Mediante il quadro elettrico a cui i due motori sono collegati è possibile eseguire un controllo in velocità sul motore che fornisce la coppia motrice, potendo così imporre il regime di rotazione, e un controllo in corrente sul freno, potendo così imporre il carico applicato all'ingranaggio. Ciò rende possibile effettuare prove al variare della velocità di rotazione e della coppia.



Figura 11. Banco prova sperimentale per misure di vibrazione, prove di resistenza e misure di efficienza in trasmissioni ad ingranaggi, realizzato in collaborazione con Case New Holland SpA presso DIMeC.

Essendo tuttavia la coppia assorbita dal freno regolata mediante un controllo in corrente, si è reso necessario equipaggiare i due assi di torsiometri per monitorare l'effettivo valore di momento torcente applicato. E' stato inoltre predisposto un circuito per la lubrificazione dell'ingranaggio testato, simulando così in maniera più fedele le condizioni reali di funzionamento della trasmissione. Un tale apparato sperimentale richiede un sistema di acquisizione realizzato ad hoc per l'applicazione. Per questo si è optato per la realizzazione di un programma per l'acquisizione, il trattamento e l'analisi dei dati specifico per l'applicazione mediante due schede di acquisizione National Instruments e il software Labview. I segnali acquisiti sono sei: quattro provenienti dagli accelerometri e due dai torsiometri montati sui due alberi. I segnali accelerometrici sono condotti alla scheda di acquisizione mediante contatti striscianti che consentono di acquisire mediante cavi elettrici un segnale proveniente da un organo rotante, mentre i torsiometri sono dotati di un'antenna senza file che consente di portare il segnale all'acquisizione. Il programma di acquisizione realizzato permette di acquisire e visualizzare i segnali elettrici provenienti dai sensori, trasformarli nelle grandezze fisiche da misurare e trattare i dati mediante opportuni filtri (medie mobili e filtri passa banda) al fine di eliminare inevitabili disturbi elettrici che possono compromettere l'attendibilità della misura. Per quel che riguarda i quattro segnali accelerometrici, dopo essere filtrati, vengono trattati con semplici formule analitiche per il calcolo dell'errore di trasmissione dinamico in termini di accelerazione sulla retta d'azione. Mediante l'utilizzo di opportuni integratori numerici inclusi nel pacchetto software utilizzato è possibile ricavare l'errore di trasmissione in termini di spostamento. I due segnali provenienti dai torsiometri, oltre a consentire il monitoraggio della coppia di esercizio, permettono di ricavare sperimentalmente il rapporto di trasmissione e il rendimento effettivo dell'ingranaggio, per cui è possibile valutare, oltre al livello di vibrazione emesso, anche l'efficienza dell'ingranaggio al variare di alcuni parametri di esercizio, quali l'interasse, i disallineamenti, i giochi ecc. Il programma di acquisizione implementato consente di salvare tutti i dati relativi alle prove effettuate e include anche la possibilità di effettuare il post processing dei dati senza dover ricorrere a strumenti esterni. Nella fase immediatamente

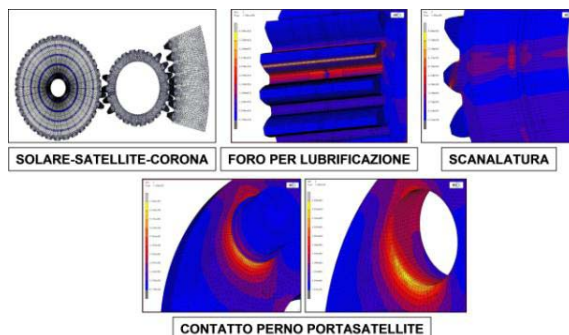


Figura 12. Analisi dell'effetto intaglio su dentature per l'ottimizzazione di riduttori epicicloidali realizzata in collaborazione con Rossi Motoriduttori SpA di Modena.

precedente allo svolgimento delle prove si è proceduto alla messa a punto della catena di misura, alla verifica del corretto funzionamento della strumentazione e delle attrezzature. Le prove sperimentali, svoltesi nel I semestre del 2007 sono state effettuate su coppie di ruote fornite dall'azienda che in fase di esercizio hanno manifestato significativi livelli di rumorosità. Mediante le sperimentazioni al banco prova è stato possibile verificare le condizioni di lavoro in cui le ruote in esame presentano fenomeni vibratori più importanti. Realizzando prove dinamiche al variare del regime di rotazione e del livello di momento torcente è stato possibile ricostruire, in termini di RMS dell'errore di trasmissione dinamico, la risposta in frequenza del sistema, ossia il livello di vibrazione raggiunto dalla trasmissione in funzione della frequenza del forzante dinamico, a parità di coppia applicata, permettendo così di effettuare analisi comparative coi dati ottenuti dalle simulazioni numeriche realizzate sulla medesima coppia di ruote. La possibilità di svolgere in laboratorio questo tipo di prove dinamiche permette inoltre di valutare l'efficacia delle strategie di ottimizzazione del profilo dei denti e dei parametri macrogeometrici dell'ingranaggio implementate nei modelli numerici, oltre che valutare l'influenza di eventuali errori di montaggio (variazioni d'interasse, disallineamenti ecc.) sul comportamento dinamico e sull'efficienza della trasmissione.

Parallelamente allo studio sperimentale del comportamento dinamico delle trasmissioni meccaniche, rivolto prevalentemente al contenimento delle emissioni acustiche, si sono intraprese sia attività di ottimizzazione di riduttori epicicloidali (v. Fig. 12), sia ulteriori attività di indagine sperimentale, in collaborazione con l'azienda Rossi Motoriduttori S.p.A., volta alla previsione dell'insorgenza di fenomeni di pitting sulle ruote e quindi della durata a fatica di questi sistemi. L'esigenza da parte dell'azienda di realizzare questi test nasce dalla volontà di validare i risultati, in termini di vita a fatica, ottenuti da un modello a elementi finiti di un riduttore, prodotto dall'azienda, realizzato congiuntamente dal Centro Ricerche Fiat e SKF, su commissione di Rossi Motoriduttori SpA.

Il programma dei lavori prevedeva una prima campagna di prove estensimetriche per misurare lo stato di tensione deformazione al piede del dente dell'ingranaggio maggiormente

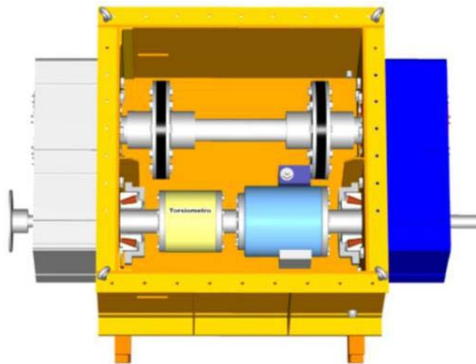


Figura 13. Banco prova per l'analisi sperimentale di riduttori ad assi paralleli, sviluppato in collaborazione con Rossi Motoriduttori SpA di Modena.

sollecitato, in modo da avere un riscontro con lo stato tensionale ricavato con il modello a elementi finiti. Successivamente alle prove estensimetriche erano previste le prove di fatica vere e proprie, della durata di 500 ore ciascuna, svolte sovraccaricando il riduttore fino al 150% del carico nominale, per ottenere l'insorgenza di pitting in tempi ragionevoli.

Per svolgere questa attività è stato allestito un banco prova a ricircolo di potenza meccanica completamente progettato e assemblato presso il DIMeC (v. Fig. 13). Il banco a ricircolo di potenza è stato realizzato disponendo due riduttori speculari, dei quali uno è il riduttore in prova e l'altro di rinvio, contrapposti fra loro, aventi i rispettivi assi veloce e lento collegati mediante alberi di trasmissione. Questo tipo di layout, per prove sperimentali nelle quali si ricerca l'insorgenza di pitting, il quale si verifica in presenza di elevate pressioni di contatto e dunque per elevati valori di carico, è preferibile rispetto ad uno schema a ciclo aperto, in quanto è possibile, imponendo un opportuno precarico su un asse del banco, far circolare all'interno del banco stesso elevate potenze dovendone fornire solo una ridotta percentuale con un motore esterno. Il banco è dunque costituito da un riduttore di prova alimentato da un motore elettrico da 30 kW, l'albero lento in uscita è collegato mediante un albero di trasmissione all'albero lento del riduttore di rinvio, mentre l'albero veloce del riduttore di prova è collegato all'albero veloce del riduttore di prova mediante un albero di trasmissione, su cui è montato un attuatore idraulico torsionale e un torsionometro. L'attuatore idraulico permette di applicare un momento torcente all'albero, prevaricando così il banco e il torsionometro di monitorare il valore di carico imposto.

Il riduttore testato è stato sottoposto, tramite l'attuatore torsionale a una coppia di circa 1000 Nm all'albero di ingresso e a un regime di rotazione di 1500 rpm: questo significa che nel banco durante le prove di pitting circolavano circa 160 kW a fronte di una potenza erogata esternamente dal motore elettrico di 30 kW. Le prove estensimetriche hanno richiesto di strumentare un riduttore, montando estensimetri sulle ruote da interessate in una posizione quanto più vicina possibile al raccordo del piede del dente, zona nella quale si ha la massima sollecitazione flessionale. Si è optato per il montaggio di quattro estensimetri per ognuna delle due ruote del secondo stadio del riduttore, disposti su quattro denti successivi.



Figura 14. Le due sedi del Laboratorio di Progettazione Integrata e Simulazione (LAPIS) di Modena.

Il segnale proveniente dai sensori è stato condotto alla centralina di acquisizione mediante contatti striscianti. Queste prove hanno consentito di ricostruire lo stato tensionale al piede del dente e hanno evidenziato come i livelli di sollecitazioni non risentano della velocità di rotazione, per cui si abbia sostanzialmente assenza di effetti dinamici, essendo state le prove ripetute sia in condizioni “quasi statiche” (pochi giri al minuto) sia alla velocità di esercizio del riduttore (1500 rpm). Si è inoltre riscontrato un ottimo accordo con i dati relativi al modello realizzato da Centro Ricerche Fiat e SKF. Le prove di pitting, tuttora in fase di esecuzione, della durata di circa 500 ore ciascuna, vengono effettuate sovraccaricando il riduttore fino a circa il 150% del carico nominale massimo del riduttore, portando così a circa 1000 Nm il momento torcente applicato all'albero lento. Durante ciascuna prova sono previste ispezioni periodiche ogni 48 ore circa per verificare lo stato delle superfici dei denti, in modo da rilevare eventuali fenomeni di usura o malfunzionamenti. Data l'elevata durata temporale delle prove, si rende necessaria la predisposizione di dispositivi di controllo, in grado di arrestare il banco nel caso di collasso strutturale o di eccessivi livelli di vibrazioni, dovuti per esempio a rotture o malfunzionamenti: per tale motivo, sono stati montati accelerometri su entrambi i riduttori, che permettono di monitorare il livello di vibrazione e che sono collegati al quadro elettrico che regola e alimenta il motore elettrico, il quale viene disattivato nel caso in cui l'ampiezza delle vibrazioni registrate, superi una soglia prestabilita. Inoltre è stato predisposto un circuito di raffreddamento dell'olio del riduttore di prova che consente di mantenere la temperatura del lubrificante al di sotto di un valore limite, e, mediante sonde termiche collocate all'interno del riduttore e collegate al quadro elettrico, il banco viene arrestato automaticamente nell'eventualità in cui la temperatura raggiunga valori fuori soglia. Al termine di ciascuna prova di durata, le ruote del riduttore vengono smontate e i denti da analizzare tagliati, cosicché, mediante analisi superficiale dell'impronta di contatto e mediante analisi al SEM (microscopio elettronico a scansione), si possa verificare l'eventuale presenza di pitting o un'eventuale usura dovuta ad altri fenomeni quali il grippaggio per microsaldatura.

Metodi e tecniche di Progettazione Integrata [14-28]

Il Laboratorio di Progettazione Integrata e Simulazione (LAPIS) nato dalla partnership strategica tra il DIMeC e SIR SpA, nota azienda modenese da lungo tempo leader nel mercato

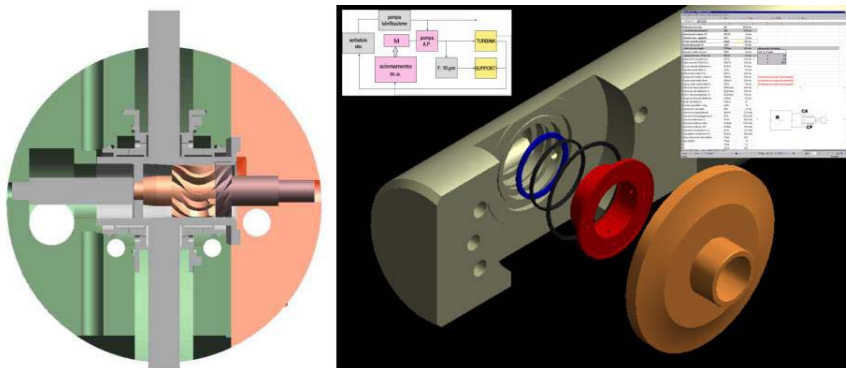


Figura 15. Progettazione parametrica di una famiglia di turbomandrini idrostatici per rettificatrici di profili scanalati interni, realizzata in collaborazione con Samp Utensili SpA, Bologna.

dell'integrazione di soluzioni robotizzate, si compone di due strutture complementari (v. Fig. 14), fortemente integrate.

La prima, dedicata allo sviluppo di nuove metodologie progettuali integrate, basate principalmente su aspetti di analisi numerica e simulazione computazionale, è situata presso il DIMeC, mentre la seconda, di natura sperimentale, è stata realizzata direttamente all'interno dello stabilimento di SIR S.p.A. e si occupa principalmente degli aspetti sperimentali, legati all'automazione dei cicli progettuali e produttivi, ed allo sviluppo di soluzioni robotizzate innovative, temi affrontati grazie alla forte sinergia tra ricercatori e personale universitario e gli ingegneri ed i tecnici della divisione di Ricerca e Sviluppo dell'Azienda modenese.

La dotazione del Laboratorio è costituita di dieci calcolatori di ultima generazione e di un importante apparato software, dedicato alla progettazione ed allo sviluppo di metodologie innovative per l'automazione e la robotica industriale, alla prototipazione virtuale ed allo sviluppo di nuovi prodotti, con riferimento alla meccanica avanzata (v. Figg. 15 e 16).

Strumenti di modellazione tridimensionale parametrica (SolidWorks) e di modellazione di superfici (Rhinoceros 3D), di simulazione CAE (Moldex 3D), ambienti dedicati alla simulazione cineto-dinamica (Cosmos) ed alla programmazione offline di sistemi robotizzati (Fanuc Roboguide, ABB Robot Studio, Robotworks, RoboVis) e ambienti completi di prototipazione virtuale (Delmia Automation), insieme a librerie professionali per lo sviluppo di applicazioni di visione artificiale (Cognex Vision Pro) offrono ai ricercatori del Dipartimento DIMeC e della rete High Mech la possibilità di sperimentare l'applicazione dei più moderni sistemi informatici per la prototipazione virtuale e la progettazione integrata di sistemi meccanici complessi e agli studenti del Corso di Laurea o della Scuola di Dottorato in "High Mechanics and Automotive Design and Technology" di formare alti profili professionali in grado di interfacciarsi direttamente con il mondo del lavoro e di veicolare, la realtà industriale verso la soluzione delle attuali problematiche progettuali e produttive.

Nel settore specifico della ricerca delle migliori soluzioni industriali robotizzate le metodologie implementate possono essere sottoposte a verifica sperimentale, grazie alla disponibilità di una cella stand alone dotata di un moderno robot antropomorfo programmabile

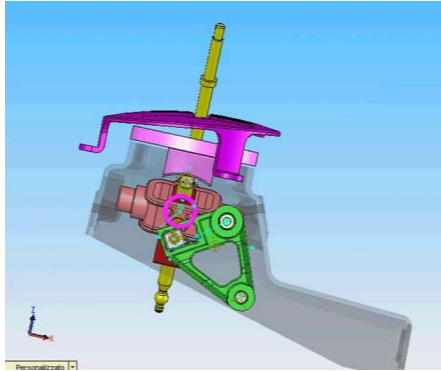


Figura 16. Design for manufacturing: torretta cambio Audi R8 Le Mans realizzata presso LAPIS, CAD SolidWorks.

ABB, caratterizzato da un payload di 10kg, di sistemi di visione artificiale di ultima generazione, di utensili fissi e mobili intercambiabili a compensazione adattativa radiale e direzionale, particolarmente adatti per l'esecuzione di processi tecnologici di interesse industriale ad elevata complessità (v. Fig. 17).

Si sono sviluppati, inoltre, una serie di prototipi per la lavorazione robotizzata di componenti meccanici di forma complessa, quali ingranaggi per macchine movimento terra, alberi a gomito, teste e basamenti di motori ad elevate prestazioni, componenti aeronautici, per i quali si sono indagati approfonditamente tematiche inerenti l'impiego della visione artificiale e della compensazione adattativa, attiva e passiva, in ambito manifatturiero. Si sono, infine, sviluppate soluzioni avanzate per la manifattura robotizzata di prodotti caratteristici della produzione nazionale, quali elementi sanitari di design e superfici sculturate di vario impiego industriale. Grazie a continuative collaborazioni con le più importanti aziende del territorio e non solo, come per esempio Tetrapak SpA, SIR SpA, Case New Holland SpA, Gruppo Barbieri&Tarozi, SampUtensili SpA, CBM SpA, Magneti Marelli SpA, Citieffe srl, i dottorandi oltre che a una formazione di alto livello sono impegnati in problematiche industriali che completano la loro esperienza e soprattutto favoriscono l'inserimento nel mondo del lavoro.

Si cita nel seguito una recente e particolare applicazione (v. Fig. 18). Si sono sviluppate stazioni robotizzate basate sulla programmazione off-line e la compensazione automatizzata delle variazioni di lotto e degli errori di processo in linee di produzione per calzature di fascia alta. In particolare si è considerata la robotizzazione dell'operazione di cardatura nella lavorazione di prodotti calzaturieri di tipo antinfortunistico. Si è sviluppato un metodo di progettazione integrata e programmazione robot basato su prototipi virtuali per la generazione automatica del percorso utensile in funzione della taglia e della geometria (destra-sinistra) della tomaia. Si è successivamente sviluppato un utensile a compensazione pneumatica monodirezionale che consentisse l'uniformità di passata dell'utensile sulla tomaia attraverso la compensazione degli errori di posizionamento della forma all'interno della stazione di lavorazione e della variabilità degli spessori del materiale.

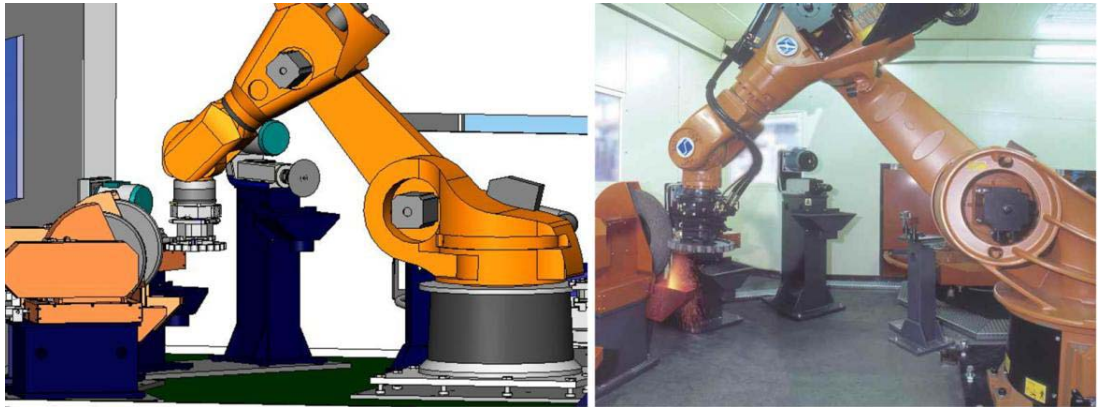


Figura 17. Design for Robotic Manufacturing (Robofactoring) di una cella robotizzata per la sbavatura di getti in ghisa: prototipo virtuale e verifica sperimentale. Ricerca intrapresa in collaborazione con SIR SpA, Modena nell'ambito del laboratorio LAPIS..

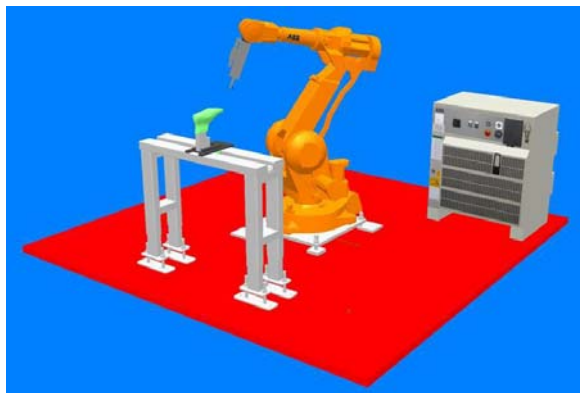


Figura 18. Simulazione comportamentale e programmazione off-line del processo robotizzato di cardatura per il settore calzaturiero, realizzato in LAPIS mediante software ABB Robot Studio, in collaborazione con SIR SpA.

7. L'INSEGNAMENTO AGLI ALLIEVI UFFICIALI DELL' ACCADEMIA MILITARE

Lo scrivente ha aderito, sin dall'a.a. 1995-06, alla richiesta pervenuta dall' Accademia Militare di Modena (v. Fig. 19) di tenere il corso di Disegno Tecnico Industriale per gli allievi ufficiali ingegneri meccanici dell'Esercito Italiano. Memore della esperienza vissuta dal prof. Funaioli presso l'Accademia Navale di Livorno, la collaborazione con la prestigiosa istituzione è stata portata avanti con reciproca soddisfazione e con entusiasmo ed è tuttora in corso.



Figura 19. L'Accademia Militare di Modena, unico istituto di formazione di base per gli ufficiali in servizio permanente dell'Esercito Italiano e dell'Arma dei Carabinieri.

8. I GRUPPI DI RICERCA

In chiusura di questa panoramica sulle attività didattiche e di ricerca sviluppate presso l'Ateneo di Modena mi fa piacere citare i collaboratori che operano all'interno del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e all'interno del Laboratorio Regionale Simech. Le ricerche sulle Trasmissioni Meccaniche hanno visto impegnato il prof. Francesco Pellicano, associato di Meccanica Applicata alle Macchine, il dottore di ricerca ing. Giorgio Bonori, assegnista del lab. SIMECH e i dottorandi Marco Barbieri, Gabriele Bertacchi e Giorgio Scagliarini. Un commosso pensiero va al dottorando Marco Faggioni, prematuramente scomparso nel mese di giugno del 2007. Lo ricordiamo tutti con grande affetto, grati per la totale dedizione con cui ha portato avanti le ricerche sugli ingranaggi, anche in collaborazione con il Politecnico di Kharkiv in Ucraina. Nel campo del Disegno di Macchine e dei Metodi di Progettazione mi fa piacere menzionare l'allievo e amico Giovanni Barbanti, da più di dieci anni professore a contratto di Componentistica Meccanica (SSD ING IND 15) presso la Facoltà di Modena: ha portato all'interno del gruppo di lavoro l'esperienza e le grandi capacità di progettista industriale da sempre impegnato su tematiche di avanguardia e di grande respiro; il ricercatore "anziano" Raol Marzi, cui è affidato il corso di Disegno Tecnico Industriale per gli allievi del corso di Laurea in Ingegneria dei Materiali, i giovani ricercatori del SSD ING IND 15 Marcello Pellicciari e Francesco Leali, i ricercatori del lab. LAPIS Francesco Gherardini, Fabio Pini e Alberto Vergnano. A tutti loro un sentito ringraziamento per l'impegno profuso nelle ricerche portate avanti in questi anni: la loro passione e dedizione sono state elementi imprescindibili per lo sviluppo dei Laboratori regionali e per la crescita di un Dipartimento e di una Facoltà che riconoscono in Ettore Funaioli la figura di un padre nobile della nostra Ingegneria Meccanica.

I gruppi di ricerca



Coordinatore
Angelo O. Andrisano

Gruppo Trasmissioni ad ingranaggi



Francesco Pellicano



Giorgio Bonori



Marco Barbieri



Gabriele Bertacchi



Giorgio Scagliarini



Marcello Faggioni

Gruppo laboratorio Lapis



Marcello Pellicciari



Giovanni Barbanti



Francesco Leali



Fabio Pini



Alberto Vergnano



Francesco Gherardini



Raol Marzi

Figura 20. I due gruppi di ricerca del Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Civile di Modena coordinati dal Prof. Ing. Angelo O. Andrisano.

REFERENCES

- [1] M. Faggioni, K. Avramov, F. Pellicano, S. N. Reshetnikova, 2005. "NONLINEAR OSCILLATIONS AND STABILITY OF GEAR PAIR". Journal of Mechanical Engineering, Ukraine , April, pp 40-45
- [2] A.O. Andrisano, G.Bertacchi,G. Bonori, M. Faggioni, F. Pellicano, G. Amedei, P.Montanari, C. Seghedoni, 2005. "Modellazione di ruote dentate geometrie ed analisi dinamiche", Modena Motori, Maggio.
- [3] A.O. Andrisano, G.Bertacchi, G. Bonori, 2005. "Integrated CAD-FEM procedure to create bidimensional spur gear model", XVII Ingeggraf, XV ADM, Siviglia, Giugno.
- [4] F. Pellicano, M. Faggioni, G. Bonori, 2005. "Non linear dynamics of spur gears", XVII Congresso AIMETA di Meccanica Teorica e Applicata, Firenze, September.
- [5] F. Pellicano, G. Bonori, M. Faggioni, G. Scagliarini, 2006. "NONLINEAR DYNAMICS AND OPTIMIZATION OF SPUR GEARS", Nonlinear Science and Complexity Conference, Beijing, China, August.

- [6] G. Bonori, G. Scagliarini, M. Barbieri, F. Pellicano, 2006. "Vibration of Gears: a Global Optimization Approach", proceedings of ISMA2006 International Conference on Noise and Vibration Engineering, September.
- [7] M.Faggioni, G.Bertacchi, A.O.Andrisano, F.Pellicano, 2007. "Dynamic Optimization of Spur Gears", submitted to ASME J. of Mechanical Design, April.
- [8] M. Barbieri G. Bonori G. Scagliarini F. Pellicano, 2007. "Gear vibration reduction using genetic algorithms". Proceedings of 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June.
- [9] M. Faggioni, F. Pellicano, G. Bertacchi, A.O.Andrisano, 2007. "Dynamic optimization of spur gears", Proceedings of 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June.
- [10] M. Faggioni, F. Pellicano, G. Bertacchi, A.O.Andrisano, 2007. "Dynamic optimization of spur gears", Proceedings of IDETC/CIE 2007, ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, Las Vegas, USA, September.
- [11] G. Scagliarini, M. Faggioni, A. O. Andrisano and F. Pellicano, 2007. "Vibrations of spur gears", XVIII CONGRESSO ASSOCIAZIONE ITALIANA DI MECCANICA TEORICA E APPLICATA, Brescia, Settembre.
- [12] G. Bonori, F. Pellicano, 2007. "Non-smooth dynamics of spur gears with manufacturing errors". Journal of Sound and Vibration, 306, pp. 271–283. See also URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2007.05.013>.
- [13] G. Bonori, M. Barbieri, F. Pellicano, 2007. "Optimum Profile Modifications of Spur Gears by Means of Genetic Algorithms", submitted to J. of Sound and Vibration.
- [14] Andrisano A. O., Leali F., Pellicciari M., Pini F., Vergnano A., *Design methods for intelligent robotic deburring cells*, Proceedings of the 6th International Conference on Intelligent Processing and Manufacturing of Materials – IPMM 2007, Salerno (I), June 25/29, 2007.
- [15] Andrisano A. O., Leali F., Pellicciari M., Pini F., Vergnano A., *Product and Process Robustness Enhancement for a Top Class Automotive Gearshift Tower*, Proceedings of the International Congress XVI ADM - XIX INGEGRAF, Perugia (I), June 6/8, 2007.
- [16] Andrisano A. O., Leali F., Pellicciari M., Pini F., Vergnano A., *3D MID Integrated Design for New Product Development in Advanced Mechatronics*, Proceedings of the International Congress XVI ADM - XIX INGEGRAF, Perugia (I), June 6/8, 2007.
- [17] Andrisano A. O., Crippa M., Leali F., Pellicciari M., *Integrated Design and Development of MID Antenna for TMPS Applications*, Proceedings of the 7th International Congress MID 2006, Fürth (G), September 27/28, 2006.
- [18] Andrisano A. O., Leali F., Pellicciari M., *Digital engineering methods for enhanced flexibility of robofacturing (robotic manufacturing) applications*, Proceedings of the International Conference on Automation, Control and Instrumentation - IADAT aci2006, Valencia (E), July 5/7, 2006.
- [19] Andrisano A. O., Bertacchi G., Bertini S., Bonaretti P., Leali F., Moretti G., Pellicciari M., Pini F., *Innovative research model for the integrated design and simulation of robotic cells in an Italian University - Industry partnership*, Proceedings of the International Congress on Graphic Engineering "Design and Innovation" - XVIII INGEGRAF, Barcelona (E), May 30 - June 2, 2006.

- [20] Andrisano A. O., Barbanti G., Leali F., Pellicciari M., *Parametric design methodologies for the feasibility study of internal grinding spindles*, Proceedings of the International Congress “From the Tradition to the Future” - XVII INGEGRAF/XV ADM, Seville (E), June 1/3, 2005.
- [21] Andrisano A. O., Leali F., Pellicciari M., *Design of iron cast deburring robotic cells with simulation and offline programming tools*, Proceedings of the International Congress “From the Tradition to the Future” - XVII INGEGRAF – XV ADM, Seville (E), June 1/3, 2005.
- [22] Andrisano A. O., Leali F., Pellicciari M., *Integrated design of a robotic cell for lasts roughing*, Proceedings of the “*International Conference on Automation, Control and Instrumentation*” – IADAT-aci2005, Bilbao (E), February 2/4, 2005.
- [23] Andrisano A. O., Leali F., Pellicciari M., *On the methodology of robotic end effectors integrated design*, Atti del Convegno Nazionale XIV ADM - XXXIII AIAS “Innovazione nella Progettazione Industriale”, Bari (I), 31 agosto - 2 settembre, 2004.
- [24] Andrisano A. O., Bassoli E., Gatto A., Leali F., Pellicciari M., *Reverse engineering methodologies applied to complex virtual models development in the medical field*, Atti del Convegno Nazionale XIV ADM - XXXIII AIAS “Innovazione nella Progettazione Industriale”, Bari (I), 31 agosto - 2 settembre, 2004.
- [25] G. Barbanti, M. Pellicciari and A. O. Andrisano, *On Tire Monitoring Systems Temperature Compensation*, SAE paper no 2004-01-1110.
- [26] A. O. Andrisano, G. Barbanti, M. Pellicciari, *On the Integrated Design and Development of a High Speed Cartesian Robot*, proceedings of the “13th ADM International Conference on: Tools and Methods Evolution in Engineering Design, ADM, Associazione Disegno di Macchine; Cassino, Napoli, salerno, 3-6 / 06-2003
- [27] A. O. Andrisano, M. Pellicciari, G. Barbanti, *New Hip Joint Simulator Model for Biomaterials Tribological Analysis*, Materials Engineering, volume 14, april 2003, pp195.
- [28] G. Barbanti, M. Pellicciari and A. O. Andrisano, *Tire Monitoring Systems Design: a novel Approach*, SAE paper no 2003-01-2980.

APPLICATION OF FRACTIONAL CALCULUS TO THE ANALYSIS AND IDENTIFICATION OF VISCOELASTIC SYSTEMS

Giuseppe Catania
*Department of Mechanical and Aeronautical Engineering,
University of Bologna, Italy
E-mail: Giuseppe.catania@mail.ing.unibo.it*

Silvio Sorrentino
*Department of Mechanical and Aeronautical Engineering,
University of Bologna, Italy
E-mail: silvio.sorrentino@mail.ing.unibo.it*

Abstract. *In the present study non-integer order or fractional derivative rheological models are applied to analysis of vibrating mechanical systems. Their effectiveness in fitting experimental data on wide intervals of frequency by means of a minimum number of parameters is first discussed in comparison with some classical integer order derivative models. A technique for evaluating an equivalent damping ratio for fractional derivative models is then introduced, and a numerical procedure for the experimental identification of the parameters of the Fractional Standard Linear Solid model is applied to a High Density Polyethylene (HDPE) beam in axial and flexural vibrations. When applying fractional derivative rheological models to vibrations the resulting equations of motion, after a fractional state-space expansion, can still be studied in terms of modal analysis, but the growth in matrix dimensions is in general so fast to make the calculations too cumbersome, especially for finite element applications. Aimed at reducing this computational effort, a discretization technique for continuous structures is also presented, based on the Rayleigh-Ritz method. The Fractional Standard Linear Solid is again the adopted model, but the same method may be applied to problems involving different rheological linear models. Finally, examples regarding two different continuous structures are proposed and discussed in detail.*

Keywords: *viscoelasticity, fractional calculus, modal analysis, finite element analysis.*

1. INTRODUCTION

The selection of an appropriate rheological model is a relevant problem when studying the dynamic behaviour of mechanical structures made of viscoelastic materials, like for example polymers. The selected model should be accurate in fitting the experimental data on a wide interval of frequencies, from creep and relaxation behaviour to high frequency vibrations, by means of a minimum number of parameters. Regarding vibrations, the model should be able to

reproduce the experimentally found behaviour of the damping ratio ζ_n as a function of the natural angular frequency ω_n [1].

In the present study some linear rheological models are considered, and their effectiveness for the solution of the above mentioned problem are discussed in relation to a High Density Polyethylene (HDPE) beam in axial and flexural vibrations. Structural and hysteretic damping laws are not included in the analysis, since they lead to non-causal behaviour [2].

Classical integer order models are compared to fractional differential ones, considered to be very effective in describing the linear viscoelastic behaviour of polymeric mechanical structures [3]. An extensive literature exists on this topic [4-8], showing how the application of fractional calculus to viscoelasticity can yield physically consistent stress-strain constitutive relations with a few parameters, good curve fitting properties and causal behaviour [9].

Since the evaluation of closed form expressions of an equivalent damping ratio ζ_n for fractional derivative models does not seem an easy task, a different approach is proposed [10-11], based on the standard circle-fit technique [12].

When using fractional derivative models the solution of direct problems, i.e. the evaluation of time or frequency response from a known excitation can still be obtained from the equations of motion using standard tools such as modal analysis [13-15], but regarding the inverse problem, i.e. the identification from measured input-output vibrations, no general technique has so far been established, since the current methods do not seem to easily work with differential operators of non integer order [1].

In the present study a frequency domain method is thus proposed for the experimental identification of the Fractional Zener model, also known as Fractional Standard Linear Solid [7], to compute the frequency dependent complex stress-strain relationship parameters related to the material. The proposed method is first applied to numerically generated frequency response functions for testing its accuracy, and then to experimental inertance data.

Regarding the solution of direct problems, the implementation of fractional constitutive equations in Finite Element formulations has been studied by several authors [16-17], but one of the main drawbacks has been recognized as being the great increase of the computational effort in comparison with traditional integer order derivative formulations. Some authors proposed a direct numerical integration of the equations of motion, using the discrete-time Grünwald fractional derivative [18], other authors proposed iterative solutions of non-conventional eigen- problems [19].

In the present study the problem is addressed in terms of modal analysis of a continuous structure [15]. The difficulties of finding exact solutions and of computational effort due to the fractional state-space expansion are both tackled by means of a Rayleigh-Ritz approximation. The solution is expressed in terms of a linear combination of functions, which in the present study are selected among a set of known eigenfunctions of a different structure with respect to the one under analysis [20]. The resulting condensed eigenproblem is then expanded in a low dimension fractional state-space.

The Fractional Standard Linear Solid model is again considered, even though the proposed technique may also be applied to problems involving other fractional derivative linear models.

Finally, some applications are presented, regarding beams and plates, comparing numerical results with exact analytical solutions.

2. SELECTION OF A RHEOLOGICAL MODEL

In the present study the uniform, rectangular cross-section, straight axis HDPE beam shown in Fig. 1 is considered, Tab.2 showing its geometrical parameters and Tab.1 some HDPE material typical values [21].

Table 1. HDPE typical parameters.

Average density	954 Kg×m ⁻³
Young's modulus	0.2 to 1.6 GPa
Poisson's ratio	0.4

Table 2. Parameters of the beam.

Material	HDPE
Density	$\rho = 1006.3 \text{ Kg}\times\text{m}^{-3}$
Length (x direction)	$L = 1000 \text{ mm}$
Thickness (z direction)	$h_z = 96.58 \text{ mm}$
Thickness (y direction)	$h_y = 24.14 \text{ mm}$
Cross-section area	$A = 2.332\times 10^{-3} \text{ m}^2$
Section moment of inertia	$I_{zz} = 1.1328\times 10^{-7} \text{ m}^4$
Section moment of inertia	$I_{yy} = 1.8125\times 10^{-6} \text{ m}^4$
Total mass	$M = 2.346 \text{ Kg}$

According to data available in the literature, an appropriate model for the HDPE beam should yield a creep compliance $J(t)$ (response to the unit stress step) reaching 95% of its final value after $100 \div 500 \text{ s}$ and a relaxation modulus $G(t)$ (response to the unit strain step) reaching 5% of its initial value after $10 \div 50 \text{ s}$ [21]. On the other hand, the same model should accurately fit the responses of the system under analysis (in the case considered herein, frequency response functions), thus reproducing the experimentally found behaviour of the damping ratio ζ_n as a function of the natural angular frequencies ω_n , as shown for example in Fig. 2.

Subsequently, several different integer order and non-integer order derivative rheological models, depicted in Fig. 3, are considered and compared, discussing their ability to satisfy the above mentioned requirements.

2.1 Integer order derivative models

The simplest real, causal and linear viscoelastic model is the Kelvin-Voigt (Fig. 3a), whose constitutive equation is:

$$\sigma(t) = \left[E + C \frac{d}{dt} \right] \varepsilon(t) \quad (1)$$

where σ and ε denote stress and strain, E is the Young's modulus and C the viscosity constant.

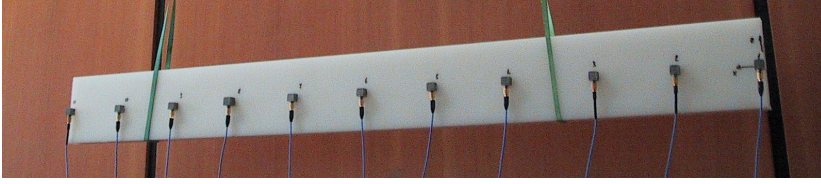


Fig. 1. Experimental testing setup.

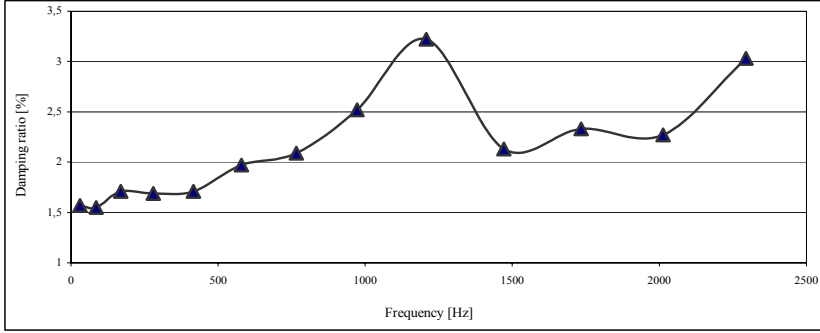


Fig. 2. Experimental damping ratio ζ_n versus natural frequency f_n .

Equation (1) yields the creep compliance and the relaxation modulus:

$$\begin{cases} J(t) = \frac{1}{E} \{1 - \exp[-(t/\tau_c)]\} \\ G(t) = E + C\delta(t) \end{cases}, \quad \tau_c = \frac{C}{E} \quad (2)$$

and the following expression for the damping ratio:

$$\zeta_n = \frac{C\omega_n}{2E} \quad (3)$$

holding for free vibrations of uniform beams. Equation (3) is incompatible with experimental results like those shown in Fig. 2, due to flexural vibrations of free-free HDPE beams.

Assuming $E = 1.5 \times 10^9$ N/m for the HDPE static Young's modulus and $\zeta_n = 0.05$ at a frequency of 200 Hz, Eqn. (3) yields $C = 1.1937 \times 10^5$ Ns/m. The retardation time τ_c should thus be 8×10^{-3} s, meaning that the creep compliance would reach its steady state value (assumed to be at 95% of its asymptotic value) after less than 3×10^{-2} s, which is too short a time. The relaxation time according to the model should be null, in contradiction to experimental data [21].

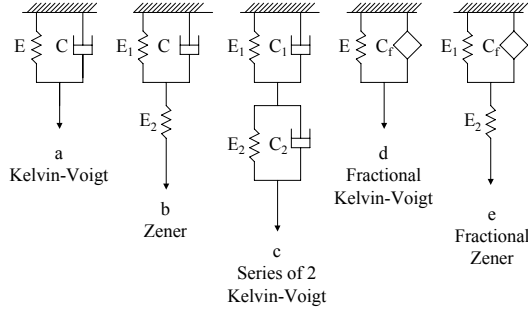


Fig. 3. Analogical models (the Scott-Blair elements are represented by means of square symbols).

The 3-parameter Zener (Fig. 3b) yields the following constitutive equation:

$$\left[1 + \frac{C}{E_1 + E_2} \frac{d}{dt} \right] \sigma(t) = \frac{E_2}{E_1 + E_2} \left[E_1 + C \frac{d}{dt} \right] \varepsilon(t) \quad (4)$$

In this case the creep and relaxation functions take the form:

$$\begin{cases} J(t) = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \{1 - \exp[-(t/\tau_\varepsilon)]\} \\ G(t) = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \{1 + \exp[-(t/\tau_\sigma)]\} \end{cases}, \quad \tau_\varepsilon = \frac{C}{E_1}, \tau_\sigma = \frac{C}{E_1 + E_2}, \quad (5)$$

Regarding the free vibrations of uniform beams, the following approximate expression for the damping ratio can be obtained:

$$\zeta_n = \frac{E_2}{2C\omega_n} \quad (6)$$

The experimental ζ_n values reported in Fig. 2 are also clearly incompatible with Eqn. (6). Moreover, from Eqn. (5), introducing $\tau_\varepsilon = 100$ s and $\tau_\sigma = 10$ s yields $E_1 = C \times 0.01$ s⁻¹ and $E_2 = C \times 0.09$ s⁻¹, so that Eqn. (6) at 200 Hz yields $\zeta_n = 3.581 \times 10^{-5}$, clearly inconsistent with the experimental evidence.

To take into account both the ‘slow’ and ‘fast’ dynamical behaviour, the 4-parameter model obtained by a series of two Kelvin-Voigt elements and reported in Fig. 3c may be adopted, with $C_2 \ll C_1$. The constitutive equation is:

$$\left[1 + \frac{C_1 + C_2}{E_1 + E_2} \frac{d}{dt}\right] \sigma(t) = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \left[1 + \left(\frac{C_1}{E_1} + \frac{C_2}{E_2}\right) \frac{d}{dt} + \frac{C_1 C_2}{E_1 E_2} \frac{d^2}{dt^2}\right] \varepsilon(t) \quad (7)$$

In this case the creep and relaxation functions take the form:

$$\left\{ \begin{array}{l} J(t) = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \left\{ 1 - \frac{\tau_{\varepsilon 1} \exp[-(t/\tau_{\varepsilon 1})] - \tau_{\varepsilon 2} \exp[-(t/\tau_{\varepsilon 2})]}{\tau_{\varepsilon 1} - \tau_{\varepsilon 2}} \right\} \\ G(t) = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \{1 + \exp[-(t/\tau_{\sigma})]\} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \tau_{\varepsilon 1} = \frac{C_1}{E_1}, \tau_{\varepsilon 2} = \frac{C_2}{E_2} \\ \tau_{\sigma} = \frac{C_1 + C_2}{E_1 + E_2} \end{array} \right. \quad (8)$$

Clearly, since $C_2 \ll C_1$, the relevant term in the creep compliance is $\tau_{\varepsilon 1}$. Regarding the free vibrations of uniform beams, the following approximate expression for the damping ratio can be obtained as well:

$$\zeta_n = \frac{1}{2} \left[\frac{E_2}{C_1 \omega_n} + \frac{C_2 \omega_n}{E_2} \right] \quad (9)$$

In comparison to the Zener model, in this case the parameter C_2 can take into account the ‘fast’ dynamics, while it is not influential in the creep compliance and in the relaxation modulus.

A possible choice for the HDPE parameters may be $E_1 = 1.6 \times 10^8$ N/m, $E_2 = 1.5 \times 10^9$ N/m, $C_1 = 1.6 \times 10^{10}$ Ns/m and $C_2 = 1.0 \times 10^6$ Ns/m, yielding a creep compliance which reaches 95% of its final value after 300 s and a relaxation modulus which reaches 5% of its initial value after 30s. Regarding the modal damping ratio, the model is still not realistic, since by increasing the frequency the modal damping ratio soon reaches too high values, in contrast with respect to the experimental evidence.

2.2 Non-integer order derivative models

A further enhancement can be obtained by taking into account models with constitutive equations defined through non integer order derivatives (or fractional derivatives, if the orders are assumed to be rational). Replacing the first derivative (Newton element) with a fractional derivative (Scott-Blair element) in the Kelvin-Voigt model yields the Fractional Standard Linear Solid, also known as Fractional Kelvin-Voigt model [7]:

$$\sigma(t) = \left[E + C_f \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \right] \varepsilon(t) \quad (10)$$

The equivalent analogical model is shown in Fig. 3d. The creep compliance and relaxation modulus become:

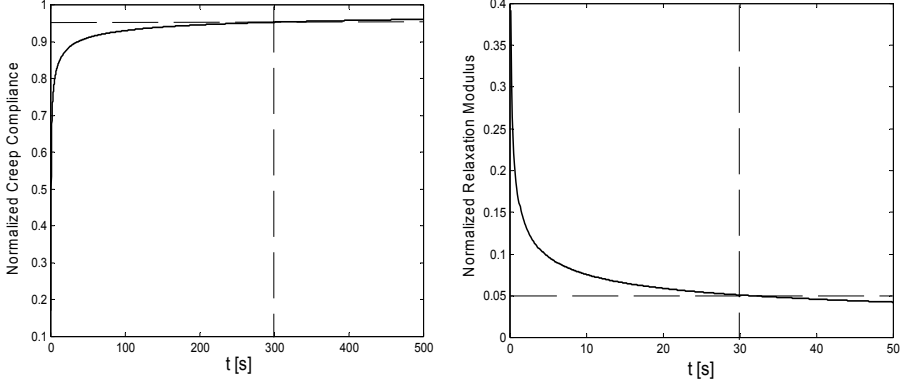


Fig. 4. Example of normalized creep compliance (left) and normalized relaxation modulus (right).

$$\begin{cases} J(t) = \frac{1}{E} \left\{ 1 - E_\alpha \left[- (t / \tau_\epsilon)^\alpha \right] \right\}, \quad \tau_\epsilon^\alpha = \frac{C_f}{E} \\ G(t) = E + C_f \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \end{cases} \quad (11)$$

where E_α is the Mittag-Leffler function [7-22], which plays the role of the exponential holding in the case of integer order derivatives.

The Fractional Kelvin-Voigt can be found to perform very well in modelling both the ‘fast’ dynamics and the creep behaviour, since for small values of the fractional derivative order the Mittag-Leffler function decreases very slowly.

Regarding the relaxation modulus, however, the results are worse, so another parameter is necessary to control the relaxation, yielding the Fractional Zener model, Fig. 3e [7]:

$$\left[1 + \frac{C_f}{E_1 + E_2} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \right] \sigma(t) = \frac{E_2}{E_1 + E_2} \left[E_1 + C_f \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \right] \varepsilon(t) \quad (12)$$

with creep compliance and relaxation modulus:

$$\begin{cases} J(t) = \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \left\{ 1 - E_\alpha \left[- (t / \tau_\epsilon)^\alpha \right] \right\} \\ G(t) = \frac{E_2}{E_1 + E_2} \left\{ E_0 + E_1 E_\alpha \left[- (t / \tau_\sigma)^\alpha \right] \right\} \end{cases}, \quad \begin{cases} \tau_\epsilon^\alpha = \frac{C_f}{E_1} \\ \tau_\sigma^\alpha = \frac{C_f}{E_1 + E_2} \end{cases} \quad (13)$$

The creep compliance (with normalized asymptotic value = 1) and relaxation modulus

(with normalized initial value = 1) computed using the parameters in Tab. 3 identified for HDPE are shown in Fig. 4.

Since in the case of the Fractional Zener model the evaluation of an approximate closed form expression of ζ_n does not seem an easy task, a different approach is proposed in the following section.

2.3 Evaluation of an equivalent damping ratio

The circle fit identification technique for the damping ratio is based on the assumption that the Nyquist plot of the mobility $M(\omega)$ is a circumference for any mode n [12]. If this assumption is still acceptable when considering non-integer derivative models, then the circle fit can also be applied in such cases, taking into account that the physical meaning of the identified parameter ζ_n changes depending on the selected model.

The angle δ shown in Fig. 5 can be adopted to define a circle shape estimator. It can be expressed as:

$$\delta = \arctan\left(\frac{\text{Im}[M_n(\omega)]}{\text{Re}[M_n(\omega)]}\right) + \arctan\left(\frac{\text{Im}[M_n(\omega)]}{\text{Re}[M_n(\omega_0)] - \text{Re}[M_n(\omega)]}\right) \quad (14)$$

where ω_0 is the value of angular frequency for which $\text{Im}[M_n(\omega_0)] = 0$. If the Nyquist plot of $M_n(\omega)$ is a circumference, $\delta = \pi/2$ for every value of $\omega \neq \omega_0$.

The difference between the actual value $\delta(\omega)$ and $\pi/2$ thus provides a measure of the error made in approximating the Nyquist plot with a circumference. The absolute value of the relative error can then be expressed as follows:

$$\varepsilon(\omega) = \left| \frac{2\delta(\omega)}{\pi} - 1 \right| \quad (15)$$

Figure 5 show the maximum of $\varepsilon(\omega)$ in function of α . Similar results can be obtained for the other parameters of the Fractional Zener model. The maximum absolute error is in any case very small, which means that the approximation of the Nyquist plots of the mobility with circumferences is perfectly acceptable. The circle fit technique can thus be adopted as a tool for estimating the ability of a non-integer derivative model to fit experimental measurements in a given frequency range.

3. EXPERIMENTAL IDENTIFICATION

When considering homogeneous free-free beams in flexural or axial vibration, the receptance can be written in general form as:

$$H(x, x_f; \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(x_f)}{M[E(\omega)\chi_n - \omega^2]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Res}_n}{E(\omega)\chi_n - \omega^2} \quad (16)$$

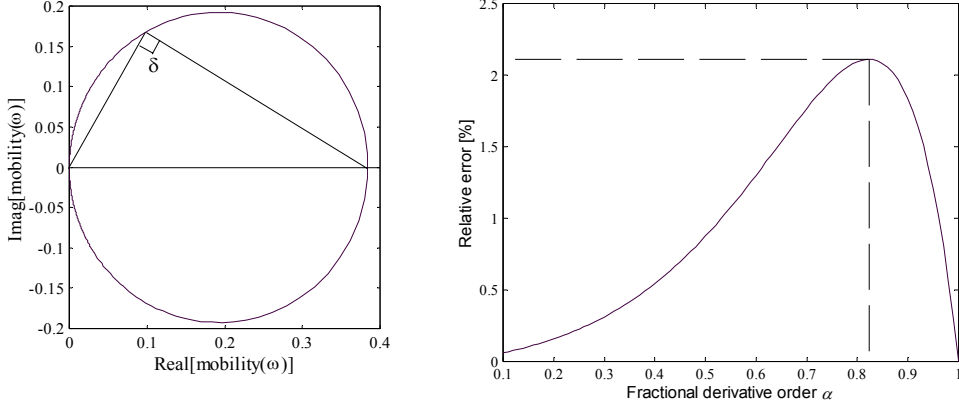


Fig. 5. Nyquist plot of the mobility, mode 3 (left) and maximum relative error in function of α , mode 3 (right).

where M is the total mass of the beam, E is the material Young's modulus, n is the mode order, χ_n is a modal parameter, ϕ_n is the normalized eigenfunction, ω is the angular frequency, x_f and x are the force and response points respectively [23]. The internal dissipation can be modelled replacing the real valued Young's modulus in the modal stiffness by its complex representation [9]. In the case of the Fractional Zener model, it can be expressed as:

$$E(\omega) = \frac{E_0 + a(i\omega)^\alpha}{1 + b(i\omega)^\alpha} \quad (17)$$

where i is the imaginary unit.

3.1 Identification technique

Under the assumption of well-separated modes (which often holds true for beams in axial or flexural vibrations), $E(\omega)$ can be identified from Eqn. (16) writing the following equation for the 4 unknown parameters E_0 , a , b and α :

$$\begin{aligned} \xi E_0 + \xi(i\omega)^\alpha a - (i\omega)^\alpha b &= 1 \\ \xi &= \frac{H_n(\omega)\chi_n}{\omega^2 H_n(\omega) + \text{Res}_n} \end{aligned} \quad (18)$$

valid for the n^{th} mode in a neighbourhood of its natural frequency.

Assuming a trial value for the fractional derivative order α , and evaluating Eqn. (18) in correspondence with different modes, yields a linear system with complex coefficient matrix \mathbf{A} .

In order to ensure the reality and causality of the model, the constitutive parameters must be real and the system can thus be written in the form:

$$\begin{bmatrix} \text{Re}[\mathbf{A}] \\ \text{Im}[\mathbf{A}] \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}_r \mathbf{y} = \mathbf{d}_r, \quad \mathbf{y} = [E_0 \ a \ b]^T \quad (19)$$

The solution can be computed using the Singular Value Decomposition technique, paying attention to the ill-conditioning of the system Eqn. (19). The latter problem can be solved by normalizing each variable with respect to the quadratic norm of the corresponding column of the matrix \mathbf{A}_r .

An error estimate may help in identifying the optimal solution with respect to the fractional derivative order α . Different expressions for the error estimate can be given in the form:

$$\text{err}_i = \frac{\sqrt{\Psi_i^T \Psi_i}}{N}, \quad i = 1 \dots 4, \quad \begin{cases} \Psi_1 = \mathbf{A} \mathbf{y} - \mathbf{1}; \\ \Psi_2 = \mathbf{A}_r \mathbf{y} - \mathbf{d}_r \\ \Psi_3 = \text{Re}[\mathbf{A}] \mathbf{y} - \mathbf{1} \\ \Psi_4 = \text{Im}[\mathbf{A}] \mathbf{y} - \mathbf{1} \end{cases} \quad (20)$$

where N is the number of equations.

The above described method generally proves both numerically stable and accurate, even if noise is added to numerically generated frequency response functions. Figure 6 shows the error functions due to the identification of $E_0 = 1.2 \times 10^9 \text{ Nm}^{-2}$, $a = 10^7 \text{ Nm}^{-2} \text{ s}^\alpha$, $b = 10^{-3} \text{ s}^\alpha$, $\alpha = 0.3$, using numerically generated data and added white noise with amplitude $E_0 \times 10^{-3}$.

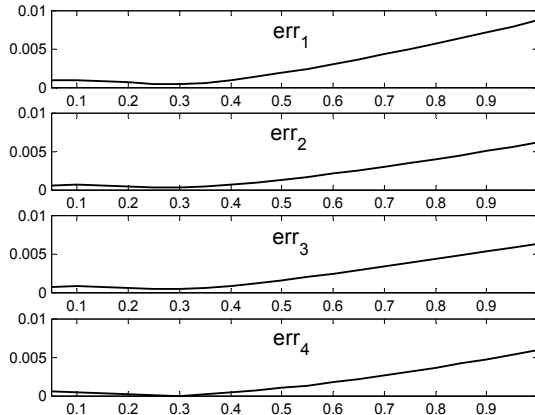


Fig. 6. Error estimators err_1 , err_2 , err_3 and err_4 versus the fractional derivative order α .

3.2 Application

The uniform, rectangular cross-section, straight axis HDPE beam shown in Fig.1 was tested with respect to flexural and axial free vibration. Restraining the beam by means of flexible, rubber-made couplings to the frame approximates the free-free boundary conditions. The adopted Cartesian reference frame has its main direction x along the axis of the beam and directions y, z along the cross-section principal axes of inertia. The experimental degrees of freedom (d.o.f.s.) are selected in correspondence with the three displacement components along x, y, z with respect to 11 equally spaced ($\Delta x = 0.1$ m) points on the axis of the beam. The system was excited by means of an instrumented ICP hammer in correspondence with the d.o.f.s x_f and the acceleration responses were evaluated with miniaturized ICP piezoelectric accelerometers in correspondence with the d.o.f.s x_r .

The frequency response functions (inertances) were estimated with the H1 technique [12], 25 averages, with respect to all the combinations of excitation-response in the same vibrational condition (axial, flexural x - y and flexural x - z), using a rectangular force window, without response windowing prior acquisition. The adopted sampling frequency is $f_s = 51200$ Hz, with $N = 2^{16}$ samples, with acquisition time $T = 1.28$ s and frequency resolution $\Delta f = 0.78125$ Hz. The data were acquired by means of a DSP VXI Agilent 16 channel acquisition card, using the MTS-Ideas Test Software to interface the hardware. The coherence was very good up to about 2000 Hz, and the linearity of the system was also checked by comparing the frequency response functions obtained by swapping the force and response d.o.f.s.

Table 3. Identified parameters.

Fractional derivative order	$\alpha = 0.358$
Complex impedance parameters	$E_0 = 1.358 \times 10^9 \text{ Nm}^{-2}$ $a = 7 \times 10^6 \text{ Nm}^{-2} \text{ s}^\alpha$ $b = 1.5 \times 10^{-5} \text{ s}^\alpha$

Table 3 shows the identified constitutive parameters. Since the functions err_i defined in the previous section do not seem to suggest a clear indication for the fractional derivative order when dealing with experimental data, the selected value for α is the one which yields creep retardation ($\tau_\epsilon = 300$ s) and relaxation ($\tau_\sigma = 30$ s) times according to [16], as shown in Fig 4, representing the theoretical creep compliance and relaxation modulus of the material. Figure 7 compares some estimated flexural x - y inertance functions (thick lines, according to the parameters of Tab.3) with experimental data (thin lines). Good agreement can be found in the frequency interval 0-1000 Hz. Figure 8 (left) shows the theoretical plot of the equivalent modal damping ratio with respect to natural frequency computed through the circle fit for flexural vibration using the identified parameters of Tab.3. It appears that this parameter slowly increases with respect to frequency, with good agreement with identified experimental results. Figure 8 (right) compares the previous result with that related to a series of 2 Kelvin-Voigt elements, with the same parameters as the ones discussed in the introduction, except for C_2 , which is slightly reduced in order to obtain the same value of ζ_n for the 5th mode for both models. This latter model exhibits an unrealistic behaviour beyond the frequency of 250 Hz.

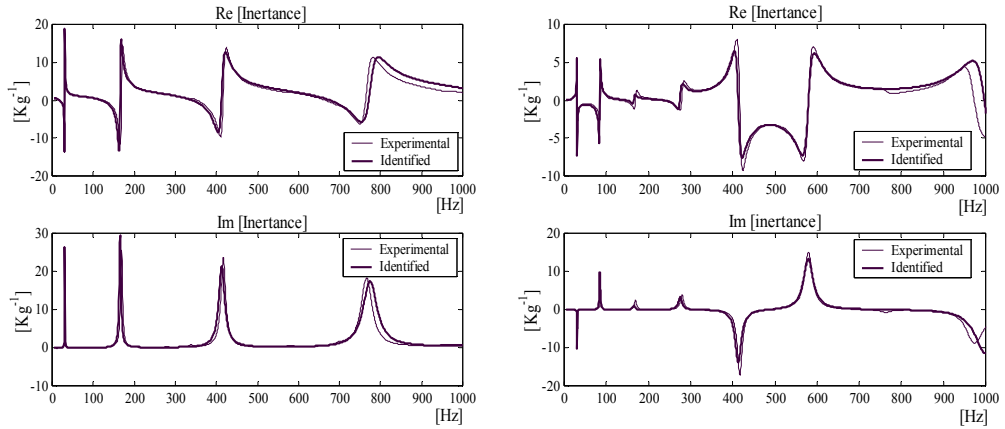


Fig. 7. Inertance: $x_f = 0.5$ m, $x_r = 0.5$ m (left); $x_f = 0.9$ m, $x_r = 0.3$ m (right).

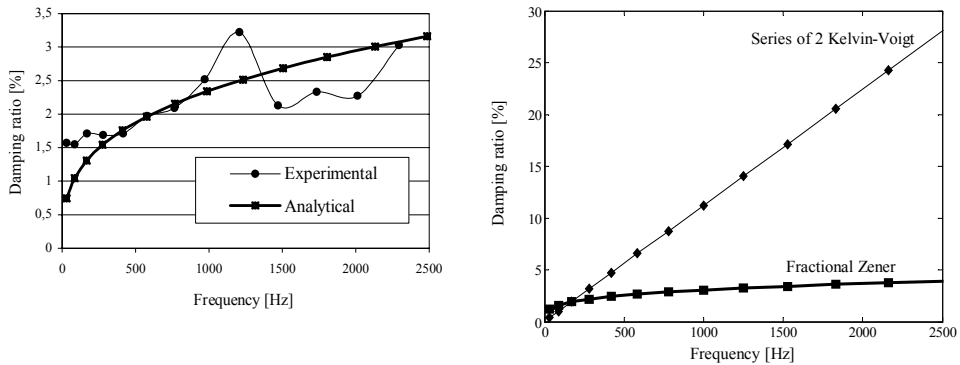


Fig. 8. Damping ratio ζ_n [%] versus natural frequency f_n [Hz].

3.3 Discussion

The capability of the Fractional Zener model to accurately fit experimental data from both creep-relaxation and vibration tests was outlined herein. The equivalent damping ratio versus natural frequency functional relationship can also be modelled with good accuracy, globally matching most experimentally obtained damping estimates. On the other hand, standard integer-order derivative models such as the series of 2 Kelvin-Voigt elements seem to lack this feature, since they exhibit a linear relationship between ζ_n and f_n in the high frequency range.

Different assumptions for the fractional derivative order do not seem to affect the error estimator, meaning that different solutions \mathbf{y} are equivalent with respect to the identification problem from vibrations. Introducing the creep retardation and relaxation times (equal to

experimental known values) as two further constraints, a single optimal fractional derivative order can be obtained, also yielding the optimal \mathbf{y} choice.

Regarding the comparison of experimental and estimated frequency response functions, the results are good and consistent over the frequency interval 0-1000 Hz. Beyond the frequency of 1000 Hz the estimated frequency response functions do not seem to show good agreement with respect to experimental data. This could mean that the simple Fractional Zener model is still not able to fit the experimental data whenever high frequencies are concerned, and a different model, adopting more parameters, should be investigated as well.

4. MODAL ANALYSIS

The dynamic behaviour of a viscoelastic material can generally be described by means of a complex representation of Young's modulus in the Laplace domain [9]. In the present analysis the Fractional Standard Linear Solid model is considered, yielding the complex impedance:

$$E(s) = \frac{E_0 + as^\alpha}{1 + bs^\alpha} \quad (21)$$

which gives Eqn. (17) after substituting $s = i\omega$.

Equation (21) replaces the real-valued Young's modulus in the Laplace domain differential equilibrium equation, modelling a vibrating system with absorption.

4.1 Beam example

As a first example, a homogeneous Euler-Bernoulli beam is considered:

$$\rho_A s^2 w(x, s) + EI w^{IV}(x, s) = F(x, s) \quad (22)$$

where ρ_A is the mass per unit length of the beam, I is its cross-section area moment of inertia, and the roman number denotes derivation with respect to the spatial variable x , which in this case represents the position along the beam axis. Introducing the complex Young's modulus (21) in Eqn. (22), and multiplying both sides for its denominator, the assumption of a rational value for the fractional derivative order $\alpha = p/q$ yields:

$$\left[\rho_A bs^{(2q+p)\mu} + \rho_A s^{2q\mu} \right] w(x, s) + \left[aIs^{p\mu} + E_0I \right] w^{IV}(x, s) = (1 + bs^{p\mu})F(x, s) \quad (23)$$

where $\mu = 1/q$.

Equation (23) can be rewritten in a fractional state-space form as follows [15]:

$$s^\mu A[\mathbf{w}] + B[\mathbf{w}] = \mathbf{f} \quad (24)$$

where \mathbf{w} is the fractional state vector (of dimension $2q + p$ in the case of the Fractional

Standard Linear Solid model, including the displacement and all its fractional time derivatives of order multiples of μ up to $2 + \alpha - \mu$, \mathbf{f} is the external force density vector (dimension $2q + p$) and A and B are linear homogeneous differential operators which can be expressed in the following matrix-form:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} = & \begin{bmatrix}
 \overbrace{0} & \overbrace{C} & & \overbrace{M} & \overbrace{D} \\
 & C & & M & D \\
 C & & M & D & \\
 & M & D & & \\
 M & D & & & \\
 & D & & & \\
 \underbrace{D} & & & & \underbrace{0} \\
 \underbrace{2q+p} & & & & \underbrace{2q+p}
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} = & \begin{bmatrix}
 \overbrace{K} & \overbrace{0} & \overbrace{0} & \overbrace{0} \\
 & -C & -M & -D \\
 0 & -C & -M & -D \\
 & & -M & -D \\
 & -M & -D & \\
 0 & -M & -D & \\
 & & -D & \\
 \underbrace{0} & \underbrace{-D} & & \underbrace{0} \\
 \underbrace{2q+p} & & & \underbrace{2q+p}
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

where M and K are the mass and stiffness linear differential operators respectively, whilst C and D are linear differential operators depending on the fractional terms in Eqn.(1) [15].

For the Euler-Bernoulli beam, Eqn. (21) yields:

$$D = b\rho_A(\cdot), \quad M = \rho_A(\cdot), \quad C = aI \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4}(\cdot), \quad K = E_0 I \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4}(\cdot)
 \tag{26}$$

In this case D and M are not differential operators.

The position of the antidiagonals containing the operators C, M and D in Eqn.s (25) depends on the fractional derivative order. In the case of the Fractional Standard Linear Solid model, in A the operator C occupies the p^{th} antidiagonal, the operator M the $2q^{\text{th}}$ antidiagonal and the operator D the $(2q + p)^{\text{th}}$ antidiagonal.

4.2 Plate example

The validity of the fractional state-space representation (24) and (25) is rather general and is not restricted to Euler-Bernoulli beams only. As a second example, a homogeneous Kirchhoff rectangular plate is considered. Its equilibrium equation in the Laplace domain is:

$$\begin{aligned}
 \rho_h s^2 w(\mathbf{x}, s) + \kappa \nabla^4 w(\mathbf{x}, s) &= F(\mathbf{x}, s) \\
 \kappa = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \nabla^4(\cdot) &= \frac{\partial^4}{\partial x^4}(\cdot) + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}(\cdot) + \frac{\partial^4}{\partial y^4}(\cdot)
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

where $\mathbf{x} = (x, y)$ denotes the spatial coordinates, ρ_h the mass per unit area of the plate and ν the Poisson's ratio [15]. Substituting the complex expression of the Young's modulus (21) as done in equation (23) for the Euler-Bernoulli beam, the equilibrium equation can be rewritten in the fractional state-space, keeping exactly the same expressions (24) and (25), in which:

$$D = b \rho_h(\cdot), \quad M = \rho_h(\cdot), \quad C = \frac{ah^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \nabla^4(\cdot), \quad K = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \nabla^4(\cdot) \quad (28)$$

4.3 Expansion theorem and response functions

The fractional state-space representation Eqn. (24) is valid for a wide class of continuous systems, the only difference being the definition of the operators D, M, C and K. It is worth noting that this representation is valid for non-homogeneous structures as well, provided the parameter d in the complex Young's modulus does not depend on the spatial coordinates.

Introducing the change of variable:

$$\lambda = s^\mu \quad (29)$$

equation (24) yields the differential eigenproblem:

$$\lambda A[\mathbf{z}] + B[\mathbf{z}] = \mathbf{0} \quad (30)$$

where the eigenvectors \mathbf{z}_n take the form:

$$\mathbf{z}_n = [\phi_n(\mathbf{x}) \quad \lambda_n \phi_n(\mathbf{x}) \quad \lambda_n^2 \phi_n(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \lambda_n^{2q+p-1} \phi_n(\mathbf{x})]^\top \quad (31)$$

and $\phi_n(\mathbf{x})$ are functions depending on the spatial variables only. The eigenvector orthogonality properties, defined through inner products, apply as follows [15]:

$$\begin{cases} (\mathbf{z}_m, A_f[\mathbf{z}_n]) = \delta_{n,m} \tilde{a}_n \\ (\mathbf{z}_m, B_f[\mathbf{z}_n]) = \delta_{n,m} \tilde{b}_n \\ \delta_{n,n} = 1, \quad \delta_{n,m \neq n} = 0 \\ (f_1, f_2) = \int_{\Omega} f_1 \cdot f_2 \, d\Omega \end{cases} \quad (32)$$

Equation (32) states the eigenvectors \mathbf{z}_n linear independency, so that any vector in the same space can be expressed as their linear combination.

Assuming a scalar displacement w , the general solution of the equation of motion in the time domain can be written as a linear combination of modes:

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\mathbf{x}) r_n(t) \quad (33)$$

Assuming for b a constant value with respect to the spatial variable x , the unit impulse response can be expressed in the following form:

$${}_x h_{x_f}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_f) \phi_n(x)}{\tilde{a}_n} \left[e_n(t) + b \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_n(t) \right] \quad (34)$$

x_f referring to the excitation position, whilst the functions $e_n(t)$ can be defined as follows [15]:

$$e_n(t) = \sum_{j=0}^{q-1} r_n^{2q-j-1} E_t(1 - j\mu, r_n^q) \quad (35)$$

$$E_t(\nu, \xi) = t^\nu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\xi t)^i}{\Gamma(\nu + i + 1)}$$

where $\Gamma(\cdot)$ is the Gamma function [22].

Since the systems under analysis are assumed to be linear-time-invariant, the steady-state response w to a harmonic excitation force distribution of amplitude f_0 acting at a coordinate \mathbf{x}_f with angular frequency ω is a harmonic oscillation at the same angular frequency.

The receptance can thus be expressed as:

$$H(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_f, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(\mathbf{x}_f) \phi_n(\mathbf{x}_o)}{\tilde{a}_n [(i\omega)^\mu - \lambda_n]} \quad (36)$$

Other frequency response functions can be derived directly from Eqn.(36).

5. APPROXIMATION TECHNIQUE

The following approximation technique consists of two stages. The starting point is the selection of a structure with known eigenfunctions (or at least with a set of linearly independent shape functions) among the structures which differ from the one under analysis for: *i*) different distributions of internal parameters (for example homogeneous or non-homogeneous stiffness), *ii*) a set of different external constraints. The case (*i*) was studied in [25-26], whilst the present work deals with case (*ii*). In the following, the above mentioned selected structure is referred to as ‘companion’ structure.

5.1 Analytical developments

In the first stage a Rayleigh-Ritz condensation technique is applied to the ‘companion’ structure, by approximating its displacement by means of a set of N linearly independent shape

functions $\varphi_j(\mathbf{x})$, $j = 1 \dots N$:

$$w(\mathbf{x}, t) \cong \sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) \hat{r}_j(t) = \boldsymbol{\varphi}^T \hat{\mathbf{r}} \quad (37)$$

This approach is particularly effective in the case of fractional derivative models, since in Eqn. (37) the eigenfunctions of the purely elastic structure, obtained by considering $a = b = 0$ in Eqn. (1), can be conveniently adopted [25-26].

Laplace transforming equation (37) and substituting in equation (24) yields:

$$s^\mu \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{B} \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (38)$$

where the fractional state vector \mathbf{u} includes the coordinates $\hat{\mathbf{r}}$ and all their time fractional derivatives of order multiple of μ up to $2 + \alpha - \mu$, the external force density vector $\tilde{\mathbf{f}}$ can be written in the form:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\varphi}, f) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (39)$$

and the $N(2q + p) \times N(2q + p)$ matrices \mathbf{A} and \mathbf{B} can be defined by analogy with the differential operators Eqn.s (25):

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{2cm}}_{Np} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{N(p+1)} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & \mathbf{C} & \mathbf{M} & \mathbf{D} \\ & \mathbf{C} & \mathbf{M} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C} & & \mathbf{M} & \mathbf{D} \\ & \mathbf{M} & \mathbf{D} & \\ \mathbf{M} & \mathbf{D} & & \\ & \mathbf{D} & & \\ \mathbf{D} & & & 0 \end{array} \right] \\ \underbrace{\hspace{2cm}}_{N(2q+p)} \end{array} \quad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{2cm}}_{Np} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{N(p+1)} \\ \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{K} & 0 & 0 & 0 \\ & -\mathbf{C} & -\mathbf{M} & -\mathbf{D} \\ 0 & -\mathbf{C} & -\mathbf{M} & -\mathbf{D} \\ & & -\mathbf{M} & -\mathbf{D} \\ & -\mathbf{M} & -\mathbf{D} & \\ 0 & -\mathbf{M} & -\mathbf{D} & \\ & & -\mathbf{D} & \\ 0 & -\mathbf{D} & & 0 \end{array} \right] \\ \underbrace{\hspace{2cm}}_{N(2q+p)} \end{array} \quad (40)$$

in which the $N \times N$ matrices \mathbf{D} , \mathbf{M} , \mathbf{C} and \mathbf{K} are built up by means of inner products among the differential operators D , M , C , K and the functions φ_j :

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= (\varphi_i, D[\varphi_j])_{i,j}, & \mathbf{M} &= (\varphi_i, M[\varphi_j])_{i,j} \\ \mathbf{C} &= (\varphi_i, C[\varphi_j])_{i,j}, & \mathbf{K} &= (\varphi_i, K[\varphi_j])_{i,j}\end{aligned}\quad (41)$$

with $i, j = 1, \dots, N$.

Integrating by parts the inner products in Eqn. (41), in particular cases it is possible to take into account the boundary conditions in the matrices \mathbf{D} , \mathbf{M} , \mathbf{C} and \mathbf{K} . As a consequence, it is possible to introduce the set of different external constraints which makes the difference among the ‘companion’ structure and the one under analysis. This operation represents the second stage of the proposed approximation technique.

The same results can also be obtained by following a more general variational approach, using potential-like functionals. As an example, a translational elastic constraint is considered, which is adopted for the application in the following sections.

Given a stiffness distribution $k(\mathbf{x})$, the related elastic potential of the constraint can be written as:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} k(\mathbf{x}) w^2(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (42)$$

which, after introducing equation (37), yields an additional term for the stiffness matrix \mathbf{K} in the form of a $N \times N$ matrix:

$$\Delta \mathbf{K} = (\varphi_i, k \cdot \varphi_j)_{i,j} \quad (43)$$

In the same way it would be possible to take into account viscoelastic constraints, yielding additional terms $\Delta \mathbf{C}$ and $\Delta \mathbf{D}$ for the matrices \mathbf{C} and \mathbf{D} respectively, not considered in the present study. By increasing the modulus of the distribution $k(\mathbf{x})$ the compliant constraint tends to become a rigid one.

After replacing \mathbf{K} with $\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}$ in Eqn. (40), Eqn. (38) yields the algebraic eigenproblem:

$$(\tilde{\lambda} \mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (44)$$

which has precisely the same form as Galerkin’s equations [9].

Its solution consists of a set of $N(2q + p)$ eigenvalues $\tilde{\lambda}$ and eigenvectors \mathbf{v} . Substituting $\mathbf{u} = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{r}}$ (where \mathbf{V} is the matrix of the eigenvectors \mathbf{v}) in Eqn. (38) yields:

$$\tilde{r}_n = \frac{f_n}{\hat{a}_n (s^\mu - \tilde{\lambda}_n)}, \quad \hat{a}_n = \mathbf{v}_n^T \mathbf{A} \mathbf{v}_n \quad (45)$$

If a single external force of amplitude f_0 acting at a coordinate \mathbf{x}_f is considered, f_n can be expressed as:

$$f_n = f_0 \hat{\phi}_n(\mathbf{x}_f), \quad \hat{\phi}_n(\cdot) = \sum_{j=1}^N v_{j,n} \varphi_j(\cdot) \quad (46)$$

From Eqn.s (40), (45) and (46) the unit impulse response can be obtained:

$${}_x h_{x_f}(t) \cong \sum_{n=1}^{N(2q+p)} \frac{\hat{\phi}_n(\mathbf{x}_f) \hat{\phi}_n(\mathbf{x})}{\hat{a}_n} \left[e_n(t) + b \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} e_n(t) \right] \quad (47)$$

as well as the receptance:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{x}_f, \omega) \cong \sum_{n=1}^{N(2q+p)} \frac{\hat{\phi}_n(\mathbf{x}_f) \hat{\phi}_n(\mathbf{x})}{\hat{a}_n [(i\omega)^\mu - \lambda_n]} \quad (48)$$

The proposed technique is applied to study the x - y flexural vibrations of a homogeneous Euler-Bernoulli beam (example 1) and the out of plane vibrations of a homogeneous isotropic Kirchhoff plate (example 2).

In both examples the material is High Density Polyethylene (HDPE), whose parameters are shown in Tab.s 1 and 3, and the adopted shape functions are chosen from the eigenfunctions obtained from the purely elastic models, assuming $a = b = 0$ in Eqn. (21).

Example 1: beam.

A homogeneous Euler-Bernoulli beam with elastic supports at its ends is considered (Fig. 9). Its significant parameters are reported in Tab. 2. By increasing the concentrated constraint stiffness k , the free-free beam (which in this example plays the role of ‘companion’ structure) is modified until it approximates the pinned-pinned beam. The stiffness distribution which models the compliant constraint is given by:

$$k(x) = k [\delta(x) + \delta(x-l)] \quad (49)$$

where $\delta(\cdot)$ denotes the Dirac distribution and the parameter k has the same dimension as E_0 [N/m²]. Hence the correction $\Delta \mathbf{K}$ due to the constraint takes the form:

$$\Delta \mathbf{K} = k [\boldsymbol{\varphi}(0) \boldsymbol{\varphi}^T(0) + \boldsymbol{\varphi}(l) \boldsymbol{\varphi}^T(l)] \quad (50)$$

where $\boldsymbol{\varphi}(x)$ contains the first N normalized eigenfunctions of the free-free beam, the first two of them being rigid body modes [27].

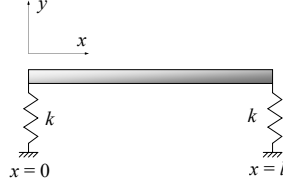


Fig. 9. Example 1. Euler-Bernoulli beam on elastic supports.

The effect of increasing the dimensionless parameter k/E_0 is first studied considering the natural angular frequencies:

$$\omega_n = \frac{\chi_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{E_0 I}{\rho_A}} \quad (51)$$

The estimated eigenfrequency parameters χ for the first 6 modes are reported in Tab. 4, where they are compared with the exact values for a pinned-pinned Euler Bernoulli beam. It can be observed that with $N = 7$ the approximation is fair on the first 5 modes, whilst with $N = 14$ the result is quite good for all the 6 modes considered, and it converges significantly with the exact values.

Table 4: natural eigenfrequencies χ of the beam

Mode n	Exact $\chi_n = n\pi$	Estimated $N = 7$ $k / E_0 = 10^{-3}$	Estimated $N = 14$ $k / E_0 = 10^{-2}$
1	3.1416	3.1396	3.1414
2	6.2832	6.2744	6.2824
3	9.4248	9.3700	9.4204
4	12.5664	12.5113	12.5598
5	15.7080	15.4656	15.6877
6	18.8496	21.4553	18.8284

The viscoelastic properties of the material are then considered for computing the frequency response of the beam, according to the proposed technique. Figure 10 (left) shows the receptance modulus evaluated in $x_o = 0.6$ m and forced in $x_f = 0.8$ m, using $N = 14$ free-free eigenfunctions with $k/E_0 = 10^{-2}$. It is compared with the plot of the exact receptance modulus of the pinned-pinned beam [20]:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\sigma^3 E(\omega) I} \left[\frac{\sin[\sigma(l-x_f)] \sin(\sigma x_o)}{\sin(\sigma l)} - \frac{\sinh[\sigma(l-x_f)] \sinh(\sigma x_o)}{\sinh(\sigma l)} \right] \quad (52)$$

$$\sigma = \sqrt[4]{\frac{\rho_A \omega^2}{E(\omega) I}}, \quad 0 \leq x_o \leq x_f < l$$

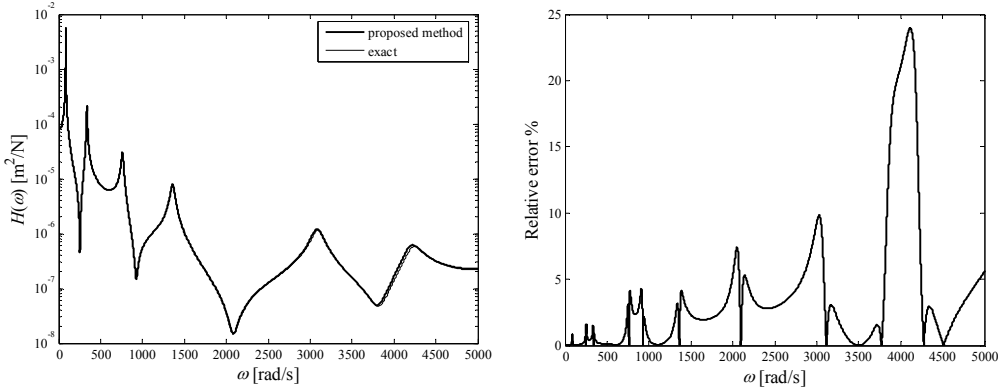


Fig. 10. Example 1. Frf modulus ($x_o = 0.6$ m, $x_f = 0.8$ m): proposed technique ($N = 14$ modes) versus exact solution (left); relative error with $N = 14$ modes (right) .

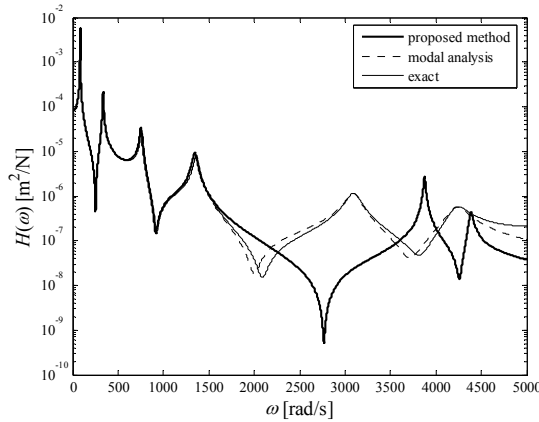


Fig. 11. Example 1. Frf modulus ($x_o = 0.6$ m, $x_f = 0.8$ m): proposed technique ($N = 7$ modes) versus exact solution.

Figure 10 shows the relative error: as for the natural eigenfrequencies, the approximation is very good. Figure 11 shows the same receptance plots, but computed with $N = 7$ free-free eigenfunctions only, taking $k/E_0 = 10^{-3}$. In addition, a curve representing the receptance modulus obtained with $N = 7$ pinned-pinned eigenfunctions is superimposed. As was expected, in this case the approximation is far worse, and it is acceptable only for the first 4 modes. It should be pointed out that in this case increasing k/E_0 does not improve the result.

Example 2: plate.

A simply supported homogeneous isotropic Kirchhoff plate with a linear pattern elastic constraint is considered (Fig. 12). Its significant parameters are reported in Tab. 5.

Table 5: parameters of the homogeneous isotropic plate

Length (x direction)	$l_x = 2000$ mm
Length (y direction)	$l_y = 1000$ mm
Thickness	$h = 24.14$ mm

By increasing the stiffness k , distributed along a straight line dividing the rectangular plate in two equal parts, the simply supported model (the ‘companion’ structure) is modified until it approximates a model which for each half exhibits the behaviour of both a simply supported square plate and a simply supported square plate with one edge clamped. The stiffness density distribution of the compliant constraint is given by:

$$k(x, y) = k / l_y \cdot \delta(x - x_k), \quad x_k = 1 \text{ m} \quad (53)$$

where also in this case the parameter k has the same dimension as E_0 [N/m²].

The correction $\Delta \mathbf{K}$ due to the constraint takes the form:

$$\Delta \mathbf{K} = \frac{k}{l_y} \int_0^{l_y} \boldsymbol{\varphi}(x_k, y) \boldsymbol{\varphi}^T(x_k, y) dy \quad (54)$$

where $\boldsymbol{\varphi}(x, y)$ contains the first N normalized eigenfunctions of the simply supported plate [27]. The effect of increasing the dimensionless parameter k/E_0 is first studied considering the natural angular frequencies:

$$\omega_{nm} = \frac{\chi_{nm}^2}{l_y^2} \sqrt{\frac{E_0 h^3}{12 \rho_h (1 - \nu^2)}} \quad (55)$$

The estimated eigenfrequency parameters χ^2 for the first 14 modes are reported in Tab. 6, where they are compared with the exact values for both a simply supported 1×1 square plate and a simply supported square plate of the same size with one edge clamped [27-28].

It can be observed that with $N = 36$ the approximation is fair except for mode 12, whilst with $N = 100$ the result is very good for all the 14 modes considered. Clearly, the estimated natural eigenfrequencies for modes 1, 3, 4, 7, 9, 10, 13 and 14 perfectly match the exact values, since the eigenfunctions for the 1×1 square plate are a subset of those for the 2×1 rectangular plate.

Figures 13 to 15 show the estimated 3D shapes for modes 1, 3, 4, 5 and 6, whilst Fig. 15 (right) highlights the dependency of the 3 lowest natural eigenfrequencies on the parameter k . Taking $k = 0$ yields the values of χ^2 for the rectangular 2×1 plate (12.3370, 19.7392 and 41.4958 respectively). Note that the third natural eigenfrequency immediately jumps down to a smaller value.

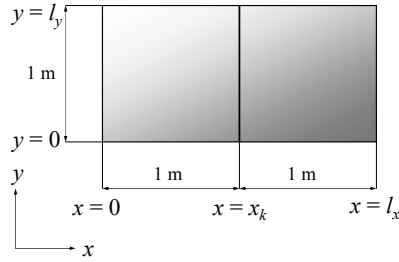


Fig. 12. Example 2. Simply supported Kirchhoff plate with the addition of a linear elastic foundation along $x = x_k$.

Table 6: natural eigenfrequencies χ^2 of the plate

Mode n	Exact	Estimated $N = 36$ $k / E_0 = 10^{-1}$	Estimated $N = 100$ $k / E_0 = 10^{-1}$
1	19.7392 [1,1] ^o	19.7392	19.7392
2	23.6464 [1,1]*	23.8360	23.6698
3	49.3480 [2,1] ^o	49.3480	49.3480
4	49.3480 [1,2] ^o	49.3480	49.3480
5	51.6743 [1,2]*	52.0182	51.7173
6	58.6464 [2,1]*	60.0889	58.8127
7	78.9568 [2,2] ^o	78.9568	78.9568
8	86.1345 [2,2]*	88.1208	86.3653
9	98.6980 [3,1] ^o	98.6980	98.6980
10	98.6980 [1,3] ^o	98.6980	98.6980
11	100.2698 [1,3]*	100.7266	100.3202
12	113.2281 [3,1]*	136.2363	113.9304
13	128.3049 [3,2] ^o	128.3049	128.3049
14	128.3049 [2,3] ^o	128.3049	128.3049
^o simply supported ($l_x = l_y = 1$ m): $\chi^2 = \pi^2(i^2 + j^2)$, $i, j = 1, 2, \dots$			
* simply supported with one edge clamped ($l_x = l_y = 1$ m): $\frac{\sqrt{\chi^2 - (m\pi)^2}}{\sqrt{\chi^2 + (m\pi)^2}} = \frac{\tan \sqrt{\chi^2 - (m\pi)^2}}{\tanh \sqrt{\chi^2 + (m\pi)^2}}, \quad m = 1, 2, \dots$			

The viscoelastic properties of the material are then considered for computing the frequency response of the plate, according to the proposed technique. Figure 17 shows the receptance modulus evaluated and forced in $x_o = (0.3, 0.3)$ m, using $N = 25$ eigenfunctions of the simply supported 2×1 rectangular plate with $k/E_0 = 10^{-1}$. It is compared with the receptance moduli of the simply supported 1×1 square plate and of the simply supported 1×1 square plate with one edge clamped. In both cases the frequency responses are computed directly using the exact eigenfunctions, avoiding the fractional state-space expansion, according to:

$$H(\omega) = \sum_{n,m} \frac{\varphi_{nm}(x_f, y_f) \varphi_{nm}(x_o, y_o)}{\chi_{nm}^4 \kappa(\omega) - \rho_h \omega^2} \quad (56)$$

where $\kappa(\omega)$ is obtained introducing $s = i\omega$ in Eqn.s (21) and (27). The eigenfunctions $\varphi_{nm}(x,y)$ for a plate simply supported on four edges are [27-28]:

$$\varphi_{nm}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{l_x} \sin \frac{m\pi y}{l_y} \quad (57)$$

whilst for a plate simply supported on three edges, and clamped along $x = x_k$, they are:

$$\varphi_{nm}(x, y) = \left[\sin(\beta_n x) - \frac{\sin(\beta_n x_k) \sinh(\gamma_n x)}{\sinh(\gamma_n x_k)} \right] \left[\sin \frac{m\pi y}{l_y} \right] \quad (58)$$

$$\beta_n = \sqrt{\chi_{nm}^2 - (m\pi / l_y)^2}, \quad \gamma_n = \sqrt{\chi_{nm}^2 + (m\pi / l_y)^2}$$

In Eqn. (56) the eigenfunctions (57) and (58) are normalized as follows:

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \varphi_{nm}^2(x, y) dx dy = 1 \quad (59)$$

The accuracy of the result is verified testing the two limit cases: *i*) keeping $x_k = 1$ m constant, and reducing l_x to a value very close to x_k , the system receptance approximates the one due to the simply supported 1×1 square plate with one edge clamped, as shown in Fig. 16 (left, $l_x = 1.005$ m); *ii*) further reducing l_x until $l_x = x_k$, the system receptance suddenly jumps to approximate the one due to the simply supported 1×1 square plate, as shown in Fig. 16 (right, $l_x = 1.001$ m). In both cases the estimates match the reference plots very well.

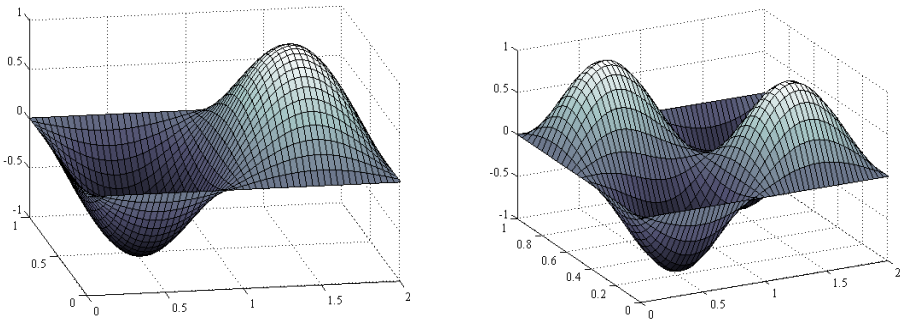


Fig. 13. Example 2. Modes 1 (left) and 3 (right).

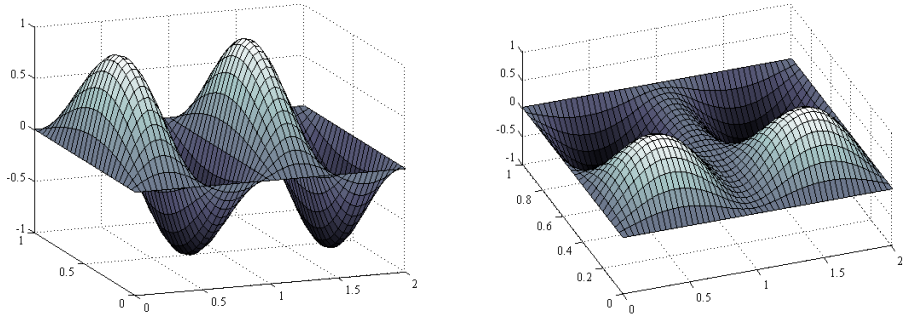


Fig. 14. Example 2. Modes 4 (left) and 5 (right).

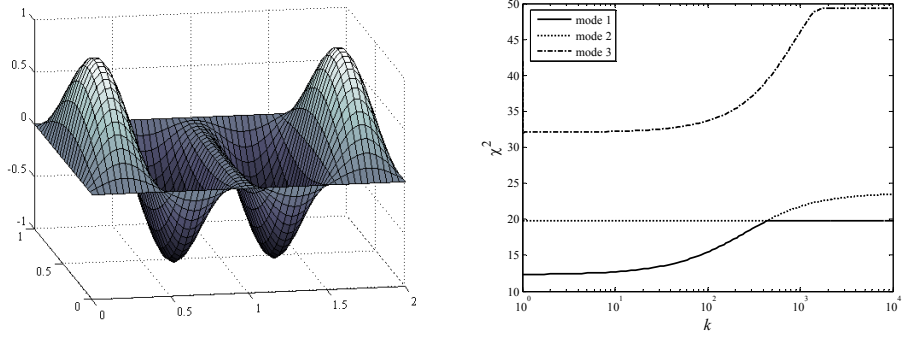


Fig. 15. Example 2. Mode 6 (left) and dependency of the 3 lowest natural eigenfrequencies on the parameter k (right).

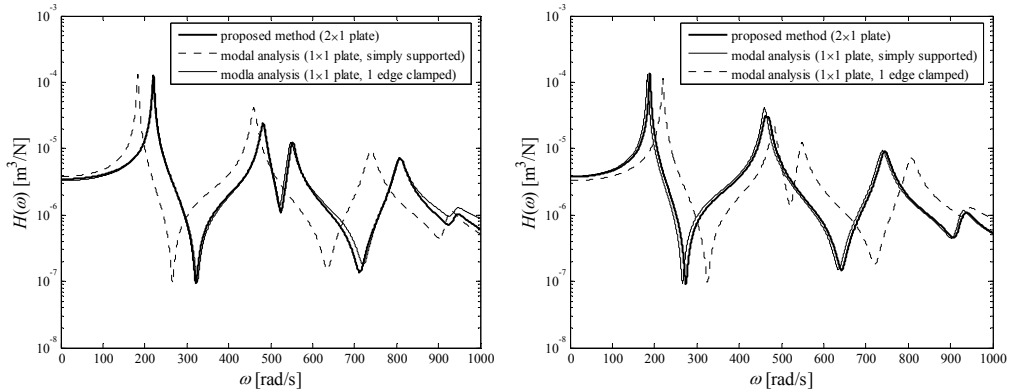


Fig. 16. Example 2. Frf modulus, $\mathbf{x}_o = \mathbf{x}_f = (0.3, 0.3)$, $N = 25$ modes, $l_x = 1.005$ m (left), $l_x = 1.001$ m (right).

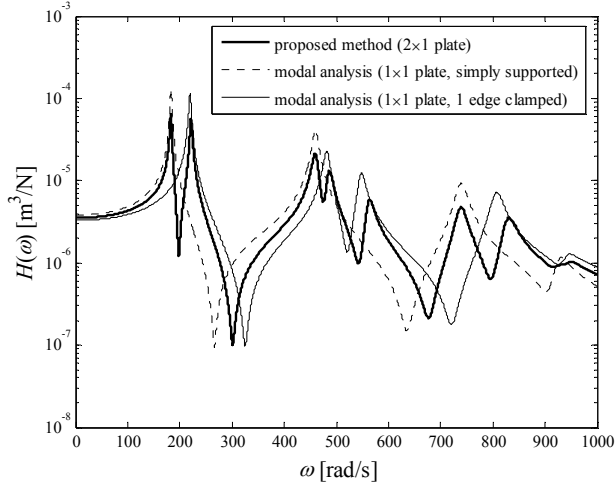


Fig. 17. Example 2. Frf modulus, $\mathbf{x}_o = \mathbf{x}_f = (0.3, 0.3)$, $N = 25$ modes.

2. CONCLUSION

The complex Young's modulus of a homogeneous beam made from HDPE was identified according to the Fractional Standard Linear Solid model using frequency domain experimental data. The accuracy of the adopted technique were successfully tested considering numerically generated frequency response functions with addition of noise.

Creep retardation and relaxation times obtained from the complex Young's modulus identified parameters are in agreement with those available in the literature, while analytically evaluated frequency response functions also match experimental estimates. A procedure for estimating an equivalent damping ratio was successfully adopted for testing the identified model in reproducing experimental damping estimates.

The proposed technique for reducing the computational effort due to the modal analysis implementing fractional derivative models was successfully tested on polymeric beams and plates with different external constraints. Its accuracy was studied by comparison with exact analytical solutions, yielding good results even using a set of just a few eigenfunctions.

Future work will be devoted to developing a global, more general MDOF identification method and to the application of the proposed technique for reducing the computational effort adopting less restrictive classes of functions for the approximation of the solutions, as well as to the analysis of the effectiveness of varying the composition of a given set of such functions.

Acknowledgement

The present study was developed within the LAV (Laboratory of Acoustics and Vibration), with the contribution of Regione Emilia Romagna, PRRIIT, misura 3.4, azione A, obiettivo 2.

REFERENCES

- [1] Catania, G., Sorrentino, S., 2005. "Experimental identification of a fractional derivative linear model for viscoelastic materials". In proceedings of ASME IDETC/CIE 2005, Long Beach, USA.
- [2] Frammartino, D., 2000. "Modelli analitici evoluti per lo studio di sistemi smorzati". MS Thesis, Politecnico di Torino, Torino, Italy.
- [3] Jones, D.G., 2001. *Handbook of viscoelastic vibration damping*. Wiley, New York, USA.
- [4] Nutting, P.G., 1921. "A new general law of deformation". *Journal of the Franklin Institute* **191**, pp. 679-685.
- [5] Gemant, A., 1936. "A method of analyzing experimental results obtained from elasto-viscous bodies", *Physics* **7**, 311-317.
- [6] Caputo, M., Mainardi, F., 1971. "Linear models of dissipation in anelastic solids". *Rivista del Nuovo Cimento I*, pp. 161-198.
- [7] Mainardi, F., 1997. "Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics". In *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*, Springer, New York, USA.
- [8] Beyer, H., Kempfle, S., 1995. "Definition of physically consistent damping laws with fractional derivatives". *Zeitschrift für Angewandte Mathematic und Mechanic* **75**, pp. 623-635.
- [9] Gaul, L., 1999. "The influence of damping on waves and vibrations". *Mechanical Systems and Signal Processing* **13**, pp. 1-30.
- [10] Catania, G., Sorrentino, S., 2006. "Fractional derivative linear models for describing the viscoelastic dynamic behaviour of polymeric beams". In proceedings of IMAC 2006, Saint Louis, USA.
- [11] Catania, G., Sorrentino, S., 2007. "Analytical modeling and experimental identification of viscoelastic mechanical systems". In *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer, Dordrecht, The Netherlands, pp. 403-416.
- [12] Ewins, D.J., 2000. *Modal Testing: theory, practice and application, 2nd ed.* Research Studies Press, Baldock, UK.
- [13] Bagley, R.L., Torvik, P.J., 1983. "Fractional calculus: a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures". *AIAA Journal* **21**, pp. 741-748.
- [14] Sorrentino, S., 2003. "Metodi analitici per lo studio di sistemi vibranti con operatori differenziali di ordine non intero". PhD Thesis, Politecnico di Torino, Torino, Italy.
- [15] Sorrentino, S., Garibaldi, L., 2004. "Modal analysis of continuous systems with damping distributions defined according to fractional derivative models". In proceedings of Noise and Vibration Engineering Conference ISMA 2004, Leuven, Belgium.
- [16] Padovan, J., 1987. "Computational algorithms for FE formulations involving fractional operators". *Computational Mechanics* **2**, pp. 271-287.

- [17] Enelund, M., Josefson J., 1999. "Time-domain finite element analysis of viscoelastic structures with fractional derivative constitutive relations". *AIAA Journal* **35**, pp. 1630-1637.
- [18] Schmidt, A., Gaul, L., 2002. "Application of fractional calculus to viscoelastically damped structures in the finite element method". In proceedings of International Conference on Structural Dynamics Modelling, Madeira, Portugal.
- [19] Fenander, A., 1996. "Modal syntesis when modelling damping by use of fractional derivatives", *AIAA Journal* **34**, pp. 1051-1058.
- [20] Catania, G., Sorrentino, S., 2007. "Discrete spectral modelling of continuous structures with fractional derivative viscoelastic behaviour". In proceedings of ASME IDETC/CIE 2007, Las Vegas, USA.
- [21] McCrum, N.G., Buckley, C.P., Bucknall, C.B., 1988. *Principles of polymer engineering*. Oxford University Press, Oxford, UK.
- [22] Miller, K.S., Ross B., 1993. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley, New York.
- [23] Timoshenko, S., Young, D.H., 1955. *Vibrations problems in Engineering, 3rd ed.* Van Nostrand, New York, USA.
- [24] Meirovitch, L., 1967. *Analytical methods in vibrations*. Macmillan, New York, USA.
- [25] Catania, G., Fasana, A., Sorrentino, S., 2006. "Finite element analysis of vibrating non-homogeneous beams with fractional derivative viscoelastic models". In proceedings of IFAC 2006, Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, Porto, Portugal.
- [26] Sorrentino, S., Fasana, A., 2007. "Finite element analysis of linear systems with fractional derivative damping models". *Journal of Sound and Vibration* **299** (4-5), pp. 839-853.
- [27] Blevins, R.D., 1979. *Formulas for natural frequency and mode shape*. Krieger, Malabar, USA.
- [28] Leissa, A.W., 1977. "Recent research in plate vibrations: classical theory". *The Shock and Vibration Digest* **9** (10), pp. 13-24.

ANALISI DI SENSIBILITA' DI UNA MACCHINA EQUILIBRATRICE AL VARIARE DI PARAMETRI CINEMATICI E DINAMICI

Marco Cocconcelli

*Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, Italia
E-mail: marco.cocconcelli@unimore.it*

Riccardo Rubini

*Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, Italia
E-mail: riccardo.rubini@unimore.it*

Sommario. *Vengono riportati i risultati della simulazione dinamica di un equilibratore per ruote da autotrazione allo scopo di individuare il legame tra differenti soluzioni costruttive e sensibilità allo squilibrio dei trasduttori di misura. Basato su un recente brevetto [1], il dispositivo – del quale è stato realizzato un modello a parametri concentrati – unisce una elevata sensibilità caratterizzata dalla flessibilità torsionale di particolari giunti complianti, ad una notevole precisione di lavoro ottenuta con una originale costruzione che introduce nel sistema due nuovi vincoli cinematici virtuali.*

Parole chiave: *equilibratore, giunti complianti, simulazione dinamica*

1. INTRODUZIONE

I criteri costruttivi ed il posizionamento dei trasduttori di misura delle vibrazioni possono variare sensibilmente tra differenti modelli di macchina di equilibratura per ruote da autotrazione [2,3], che tuttavia presentano una caratteristica comune: la ruota da equilibrare deve essere montata a sbalzo per evidenti esigenze operative. In tali condizioni, le informazioni trasmesse all'algoritmo di equilibratura sono indipendenti dal punto di applicazione di eventuali forze di eccitazione, escludendo la possibilità di impiegare il medesimo equilibratore per diverse taglie di ruote. La citata limitazione è stata superata da una innovativa configurazione cinematica [1] che affianca nuovi vincoli virtuali a quelli reali. Un modello cineto-elastodinamico del dispositivo in esame è stato proposto dagli autori [4] e validato per squilibri statici. In questo articolo si vuole estendere la modellazione dell'equilibratore per gomme al caso più generico di squilibrio dinamico e studiare la risposta dei sensori montati sulla macchina al variare di parametri geometrici e costruttivi della stessa.

Nel prossimo paragrafo si introduce la macchina equilibratrice ed il suo schema cinematico. Nel paragrafo 3 viene presentato il modello cineto-elastodinamico, e nel paragrafo 4 si procede all'analisi di sensibilità del modello al variare di significativi parametri geometrici e costruttivi. La discussione dei risultati e le conclusioni chiudono l'articolo.

2. DESCRIZIONE DELLA MACCHINA

Il dispositivo analizzato è costituito da un albero di prova, sul quale deve essere montata la ruota, una struttura intermedia ed un telaio [1]. Fisicamente l'albero, che viene azionato da motore elettrico e trasmissione a cinghia, è sospeso mediante cuscinetto sulla parte intermedia della macchina (Fig. 1), che a sua volta è montata a sbalzo sul telaio: i supporti sono costituiti da sensori che rilevano lo squilibrio e trasmettono le informazioni all'algoritmo di equilibratura.

L'originalità di questo modello di equilibratore nasce dalla particolare configurazione geometrica (Fig. 1) che si presenta come la sovrapposizione di due quadrilateri articolati con membri collegati da giunti complianti. Un primo quadrilatero è composto da una biella 1 sulla quale viene montato l'albero, da una seconda biella 3 che funge da collegamento con il secondo quadrilatero e dai membri 2 e 4 che chiudono la struttura. Il secondo quadrilatero è composto dalla biella intermedia 3, dal membro 7 vincolato a telaio e dai membri 5 e 6. Due sensori di spostamento sono posti tra i membri 1 e 3 (sensore S_{13}) e i membri 3 e 7 (sensore S_{37}).

I movimenti relativi tra i membri 1-3 e 3-7 sono descritti cinematicamente da una rotazione dei membri stessi attorno ai rispettivi centri di istantanea rotazione (CIR_{13} e CIR_{37} rispettivamente). Tali centri di istantanea rotazione sono univocamente determinati rispettivamente dall'inclinazione dei membri 2-4 e 5-6. Per piccole rotazioni la posizione dei centri rispetto ad un sistema di riferimento assoluto non varia, o comunque tali variazioni sono trascurabili. Sotto questa ipotesi i movimenti del membro intermedio 3 corrispondono all'inflessione di una trave appoggiata a due supporti e caricata esternamente in corrispondenza di una data posizione: in particolare la funzione di supporto è svolta dai centri di rotazione che risultano essere appoggi virtuali, mentre i carichi esterni vengono applicati in corrispondenza dei sensori S_{13} e S_{37} .

3. MODELLO CINETO-ELASTODINAMICO

Il modello cineto-elastodinamico della macchina equilibratrice si compone delle seguenti parti: modellazione dei giunti complianti, modellazione dei sensori, equazioni di congruenza (vincoli cinematici) ed equazioni di D'Alembert. Per un'analisi più completa del modello si rimanda a [4].

Modellazione dei giunti complianti

Nella realizzazione del meccanismo proposta in [1] i giunti complianti sostituiscono le coppie rotoidali che vengono utilizzate comunemente nello schema cinematico del quadrilatero articolato. Tali giunti complianti sono ottenuti lavorando un foglio di lamiera sul quale vengono

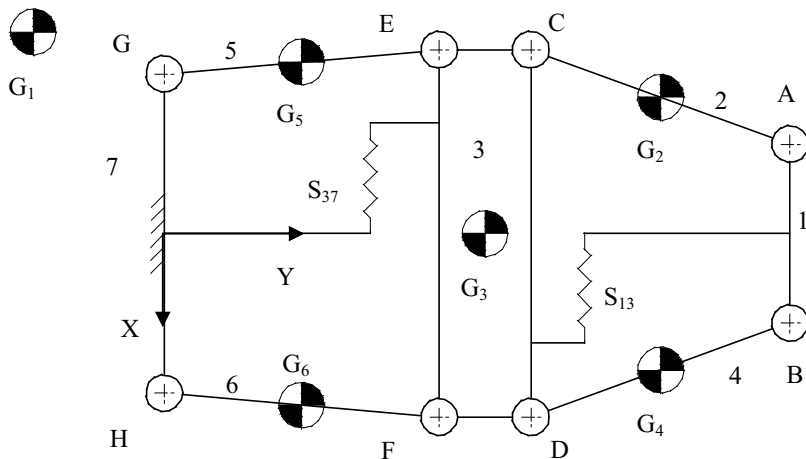


Figura 1. Macchina di equilibratura: schema cinematico, posizione dei baricentri dei membri e dei trasduttori.

praticati degli incavi semi-circolari per permettere la plasticizzazione locale del materiale a seguito della flessione della lamiera stessa. L'utilizzo dei giunti complianti può quindi essere assimilato al comportamento di una coppia rotoidale ideale alla quale venga applicata una coppia esterna che in prima approssimazione può considerarsi dipendente in modo lineare dalla rotazione relativa delle estremità dei giunti stessi e dalla derivata temporale della rotazione stessa. Ne consegue:

$$M_I^{cmp} = \left| k_I (\Delta\theta_{mn} + b\Delta\dot{\theta}_{mn}) \right| \quad (1)$$

dove si è indicato con I l' i -esima coppia rotoidale alla quale è applicata la coppia M e con θ_{jk} la rotazione relativa delle estremità del giunto I congiungente i membri m e n . I coefficienti di proporzionalità elastica k e viscoelastica b sono stati determinati per ogni giunto realizzando un modello agli elementi finiti [5] che possa fornire gli spostamenti relativi delle estremità dei giunti per una assegnata coppia esterna dalla quale calcolare i valori cercati.

Modellazione dei sensori

I sensori di spostamento presenti nel sistema sono due: il sensore S_{13} che misura gli spostamenti relativi tra il membro 1 ed il membro 3, ed il sensore S_{37} tra i membri 3 e 7.

Sotto l'aspetto cinematico i sensori non aggiungono e non tolgono gradi di libertà al sistema (sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti) e possono essere modellati come se fossero costituiti da una diade. La diade appartiene alla famiglia dei Gruppi di Assur, particolari meccanismi aventi la proprietà di non variare i gradi di libertà dei meccanismi ai quali vengono aggiunti. La diade è costituita da due membri vincolati tra loro da una coppia prismatica e

collegati al meccanismo attraverso coppie rotoidali che, nello specifico caso in esame, giacciono sull'asse della coppia prismatica.

L'effetto dinamico dei sensori sulla macchina equilibratrice è paragonabile all'azione di una forzante visco-elastica proporzionale alle variazioni di distanza tra le estremità del sensore stesso ed alle loro derivate temporali. Le equazioni che generano sono quindi:

$$F_{ij}^{sens} = k(\Delta_{ij} + c\dot{\Delta}_{ij}) \quad (2)$$

dove si è indicata con Δ_{ij} la generica variazione di lunghezza del sensore S_{ij} . I coefficienti di proporzionalità k e c possono essere ricavati sperimentalmente.

Equazioni di congruenza

Le equazioni di congruenza descrivono le relazioni cinematiche che devono essere soddisfatte affinché non vi sia apertura delle catene cinematiche che compongono il sistema.

I vincoli cinematici sono dunque costituiti dalle equazioni di chiusura dei due quadrilateri, dalle equazioni di chiusura delle velocità – ottenibili dalle precedenti per derivazione temporale – e dalle equazioni di chiusura per le accelerazioni, anch'esse ottenibili per derivazione successiva. Di seguito si riportano le sole le equazioni di chiusura per la posizione dalle quali ottenere le relazioni sulla velocità e accelerazione:

$$\left. \begin{aligned} l_2c_2 + l_1c_1 &= l_3c_3 + l_4c_4, \\ l_2s_2 + l_1s_1 &= l_3s_3 + l_4s_4, \\ l_5c_5 + l_3c_3 &= l_7 + l_6c_6, \\ l_5s_5 + l_3s_3 &= l_6s_6. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

dove con c_j e s_j si sono indicati rispettivamente il coseno ed il seno del generico angolo θ_2 e con l_j la lunghezza del j-esimo membro.

Equazioni di D'Alembert

Per ciascun membro del sistema vengono scritte le equazioni di D'Alembert che permettono di determinare il comportamento dinamico di ciascun membro.

Di seguito sono riportate come esempio le equazioni di D'Alembert per il membro 1 sul quale viene applicata la forzante esterna nel generico caso di squilibrio dinamico della ruota (F^{ext} e M^{ext}).

$$\left. \begin{aligned} -m_1a_{1x} + R_{21x} - R_{41x} + F_x^{ext} + F_{31x}^{sens} &= 0, \\ -m_1a_{1y} + R_{21y} - R_{41y} + F_y^{ext} + F_{31y}^{sens} &= 0, \\ -I_{z1}\ddot{\theta}_1 + R_{21x}d_{A1y} - R_{21y}d_{A1x} - R_{41y}d_{B1x} + R_{41x}d_{B1y} - M_A^{cmp} - M_B^{cmp} + M^{ext} + M_{31-1}^{sens} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Dove con m_l e I_{zl} si sono indicate la massa del membro 1 ed il suo momento d'inerzia rispetto all'asse z perpendicolare al piano del meccanismo, con R_{jlx} e R_{jly} le componenti delle reazioni vincolari lungo gli assi x ed y nelle coppie congiungenti il membro j con il membro 1. I generici parametri d_{jlx} e d_{jly} indicano le componenti rispetto ad un sistema di riferimento assoluto del braccio della reazione vincolare della coppia J rispetto al polo dei momenti che si è scelto sul membro 1. Le componenti di accelerazione del baricentro del membro 1 sono indicate da a_{lx} e a_{ly} , così come l'accelerazione angolare del membro è $\ddot{\theta}_1$, mentre con M_{3l-l}^{sens} si è indicato il momento che la forza derivante dal sensore S_{j3} genera rispetto al polo dei momenti.

Le equazioni (1)-(4) portano ad ottenere un sistema di cinquanta equazioni in cinquantaquattro incognite: gradi di libertà del sistema saranno considerate le variazioni di lunghezza tra le estremità dei sensori ed il valore di queste all'istante iniziale.

In appendice vengono riportate tutte le equazioni del sistema, mentre si rimanda alla lettura di [4] per completezza.

4. ANALISI DI SENSIBILITÀ DEL MODELLO

Il modello cineto-elastodinamico della macchina equilibratrice, validato per una sollecitazione statica in [4] e richiamato nel paragrafo precedente, è ora utilizzato per prove dinamiche volte a individuare le configurazioni costruttive della macchina che garantiscono una sensibilità maggiore dei sensori sotto diverse condizioni di carico quali diverse tipologie di ruote.

La sensibilità dei sensori è stata calcolata nel seguente modo: un carico sinusoidale è stato applicato al membro 1 del sistema simulando così gli effetti di uno squilibrio statico in una ruota con velocità angolare assegnata. Si è calcolata la Trasformata di Fourier (FFT) del segnale acquisito dai sensori e l'ampiezza della componente in frequenza corrispondente alla frequenza di rotazione è stata assunta come indice di sensibilità. La stessa definizione di sensibilità del sensore è stata utilizzata nelle prove di squilibrio dinamico.

I parametri geometrici e costruttivi utilizzati per l'analisi di sensibilità sono due: la lunghezza del membro 7 che costituisce il telaio della macchina equilibratrice e l'inclinazione del sensore S_{13} rispetto alla perpendicolare all'asse dell'albero.

Analisi di sensibilità rispetto alla posizione del punto CIR₃₇

La variazione di distanza tra i giunti G ed H (Fig.1) permette di spostare rispetto al sistema di riferimento assoluto la posizione del centro di istantanea rotazione tra i membri 3 e 7 (CIR₃₇). Poiché il comportamento cinematico del membro 3 rispetto a telaio è assimilabile ad una rotazione attorno al punto CIR₃₇: la forza sui sensori verrà amplificata od attenuata dalla posizione relativa tra carichi e supporti. Scopo di questa prova è determinare il dimensionamento che garantisce la maggiore amplificazione dello squilibrio al trasduttore.

A parità di altre condizioni geometriche del sistema, una variazione di lunghezza del membro 7 produce una maggiore o minore inclinazione dei membri 5 e 6 di collegamento tra il membro intermedio 3 ed il telaio. Tale inclinazione (angolo beta) è stata utilizzata per determinare le diverse configurazioni utilizzate in questa prova. In particolare la condizione in

cui i membri 5 e 6 risultano paralleli tra loro è stata assunta come configurazione di riferimento ($\beta = 0^\circ$), per valori di lunghezza del membro 7 maggiori si è assunto l'angolo β crescente, mentre per valori inferiori si è assunto un angolo β negativo.

Le configurazioni utilizzate in questa prova, ossia i valori assunti dall'angolo β sono raccolte in Tab. 1 assieme alla componente lungo l'asse y del sistema di riferimento fisso dei rispettivi centri di istantanea rotazione CIR_{37y} (i centri appartengono all'asse di simmetria del meccanismo, ossia la componente lungo l'asse x è costantemente nulla).

Tabella 1. Valori assunti dall'angolo β nelle differenti configurazioni di prova del sistema.

Beta [gradi]	-15	-10	-5	0	5	10	15
CIR_{37y} [mm]	-261,04	-420,115	-892,507	∞	982,707	510,315	351,240

Analisi di sensibilità rispetto all'inclinazione del sensore S_{13}

L'autore [1] del brevetto in studio, pur suggerendo di mantenere il sensore S_{13} perpendicolare all'asse dell'albero sul quale viene montata la gomma da equilibrare, non esclude la possibilità di assumere un'inclinazione diversa senza però specificarne l'entità e soprattutto senza evidenziare possibili vantaggi e svantaggi di una configurazione rispetto alle altre. Tale analisi di sensibilità è pertanto condotta per verificare quali conseguenze abbia l'orientamento del sensore S_{13} sul sistema di bilanciamento.

L'orientamento del sensore è stato misurato prendendo come riferimento l'angolo α che l'asse longitudinale del sensore stesso forma con la perpendicolare all'albero di rotazione sul quale viene montata la ruota da equilibrare. Le rotazioni si assumono positive se antiorarie.

In Tab. 2 sono riportati i valori dell'angolo α nelle diverse configurazioni considerate.

Tabella 2. Valori assunti dall'angolo α nelle differenti configurazioni di prova del sistema.

Alfa [gradi]	-15	-10	-5	0	5	10	15
-----------------	-----	-----	----	---	---	----	----

Entrambe le analisi sono effettuate sotto diverse configurazioni di carico: in particolare si è scelto di applicare la forzante esterna – di ampiezza massima 4N – in quattro diverse posizioni assiali del rotore denominate “foro 1”, “foro 8”, “foro 15” e “foro 22”. Allo scopo di simulare anche la presenza di una coppia di squilibrio dinamico sono stati assunti tre valori di entità

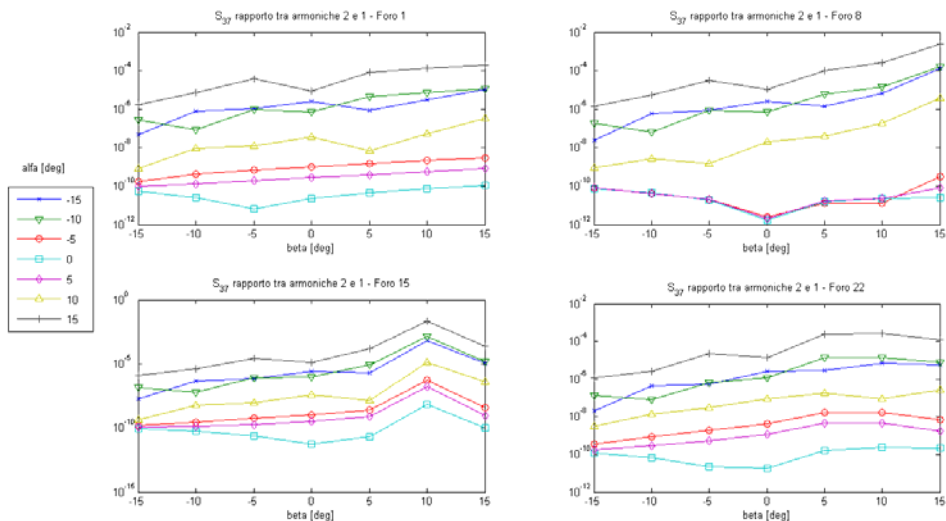


Figura 2. Rapporto tra le ampiezze della seconda e della prima armonica del segnale del sensore S_{37} al variare dei parametri geometrici del meccanismo (angoli α e β).

molto differente riportati in Tab. 3 unitamente ai valori delle posizioni di eccitazione (fori) rispetto al sistema di riferimento assoluto.

Tabella 3. Posizioni assolute dei punti di eccitazione ed ampiezze di prova delle coppie di squilibrio dinamico.

	Posizioni assolute dei punti di eccitazione			
Foro	1	8	15	22
[mm]	(0; 161,549)	(0; 336,549)	(0; 511,549)	(0; 686,549)
	Ampiezze delle coppie di squilibrio dinamico			
[N m]	0,1	1	10	

5. RISULTATI

Il numero delle possibili combinazioni parametriche adottate nelle simulazioni – tra sollecitazioni e configurazioni del sistema analizzate – è pari a cinquecentottantotto e rendono quindi necessaria una rappresentazione dei risultati che sia sintetica ma anche esaustiva. Di seguito verrà mostrata una serie di grafici, ognuno dei quali ottenuto per una determinata configurazione di carico mantenendo in un primo tempo costante il valore della coppia esterna

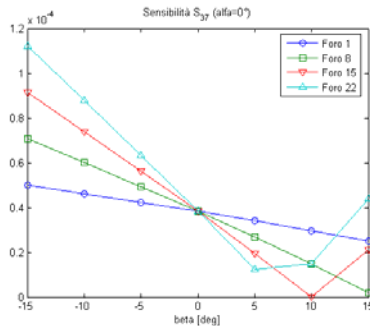


Figura 3. Ampiezza della prima armonica del segnale rilevato dal sensore S₁₃ al variare della configurazione del quadrilatero inferiore ed al variare del punto di applicazione della forzante.

(pari a 1 Nm): in ciascuno, in ascissa, viene riportata la variazione dell'angolo beta, in ordinata il valore della specifica grandezza scalare oggetto d'esame; inoltre su ogni grafico verranno riportate sette curve, ognuna delle quali relativa ad un determinato valore dell'angolo alfa. Tali indicazioni hanno validità per i seguenti grafici fatta eccezione dove esplicitamente indicato.

Le grandezze scalari che si è scelto di utilizzare per la valutazione critica delle differenti configurazioni del sistema sono legate alla sensibilità dei sensori S₃₇ e S₁₃: l'ampiezza della prima armonica risultante dall'analisi in frequenza del segnale registrato ed il rapporto tra la seconda e la prima armonica, che è indice di quanto il segnale sinusoidale acquisito dai sensori sia privo di componenti spurie ossia di armoniche superiori della frequenza fondamentale.

In Fig. 2 sono riportati i valori del rapporto tra la seconda e la prima armonica del segnale rilevato sul sensore S₃₇. Risulta evidente come valori dell'angolo alfa appartenenti ad un intorno di 0° (ad es. -5°, 0°, 5°) siano da preferire poiché garantiscono un basso valore del rapporto rumore-segnale, così come si ottiene adottando valori negativi per l'angolo beta, per i quali il centro di istantanea rotazione risulta essere spostato a sinistra del meccanismo così come rappresentato in Fig. 1, ed il carico quindi applicato tra i due appoggi virtuali.

Nel grafico relativo ad una sollecitazione periodica esterna applicata nel foro 15 si vede come vi sia un aumento dell'ampiezza della seconda armonica rispetto alla prima in corrispondenza di un valore di beta pari a 10°: in tale configurazione il centro di istantanea rotazione CIR₃₇ viene a essere quasi coincidente con il punto di applicazione della forzante (si confrontino i valori nelle Tab. 2 e 4), e di conseguenza le reazioni vincolari equilibrano il quadrilatero inferiore (membri 3, 5, 6, 7), ed il membro intermedio compie piccole oscillazioni di entità paragonabile a quella del rumore presente.

In Fig. 3 è riportato il valore dell'ampiezza della prima armonica del segnale rilevato dal sensore S₃₇ al variare del punto di applicazione della forzante esterna in corrispondenza di un valore dell'angolo alfa arbitrariamente scelto come 0°. Il grafico completa le indicazioni ricevute dai grafici di Fig. 2: nella configurazione in cui l'angolo beta assume valore 0° il quadrilatero inferiore diviene un parallelogramma articolato avendo coppie di membri paralleli tra loro e di conseguenza il centro di istantanea rotazione CIR₃₇ si posiziona all'infinito (come

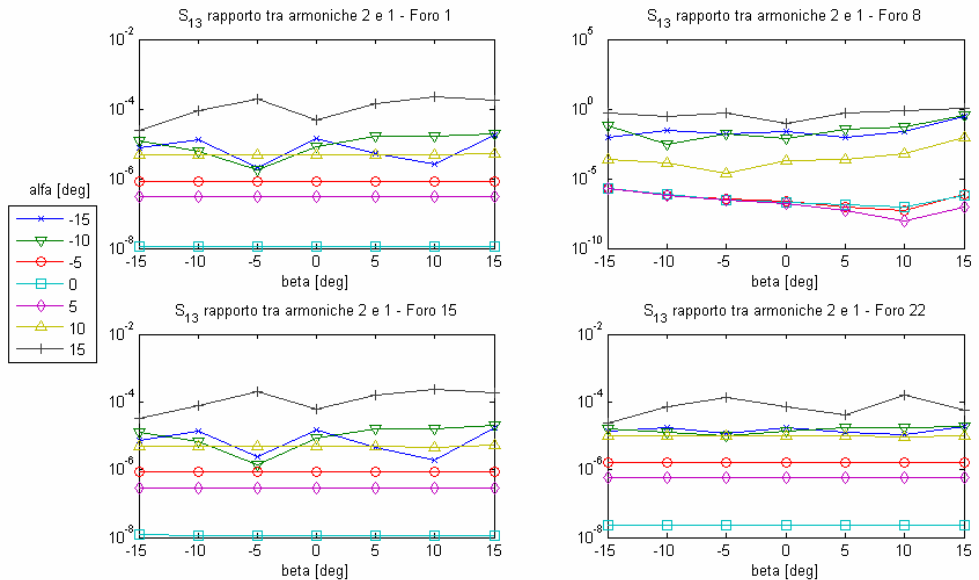


Figura 4. Rapporto tra le ampiezze della seconda e della prima armonica del segnale del sensore S_{13} al variare dei parametri geometrici del meccanismo (angoli alfa e beta).

indicato anche in Tab. 2) e la forza rilevata dal sensore è indipendente dal punto di applicazione della forzante esterna. Tale risultato induce quindi ad utilizzare valori negativi dell'angolo beta che permettono un'amplificazione dell'effetto dello squilibrio sul sensore. Infine dalla Fig. 3 si ha conferma di quanto ipotizzato precedentemente: se l'angolo beta assume un valore di 10° , il centro di istantanea rotazione CIR_{37} viene a coincidere con il punto di applicazione della forzante quando applicata nel foro 15 e conseguentemente il quadrilatero si auto-equilibra ed il sistema rimane fermo.

Variazioni dell'angolo alfa non hanno dato risultati sensibilmente differenti da quelli evidenziati in Fig.3.

In Fig. 4 sono riportati i valori dei rapporti tra le ampiezze della seconda e prima armonica del segnale rilevato dal sensore S_{13} . Anche da questi grafici risulta che i valori ottimali dell'angolo alfa da utilizzare per l'orientamento del sensore S_{13} sono da scegliersi in un intorno di 0° . Si noti che per piccoli valori dell'angolo alfa, la risposta del sensore S_{13} non è sensibile a variazioni dell'angolo beta. Nel caso di applicazione del carico di squilibrio nella posizione 8, cioè in corrispondenza del centro di istantanea rotazione CIR_{13} tra membro mobile e membro intermedio, il quadrilatero superiore – costituito dai membri 1, 2, 3 e 4 – auto-equilibra la forzante e gli scostamenti del sensore sono paragonabili ai livelli del rumore presente nel segnale.

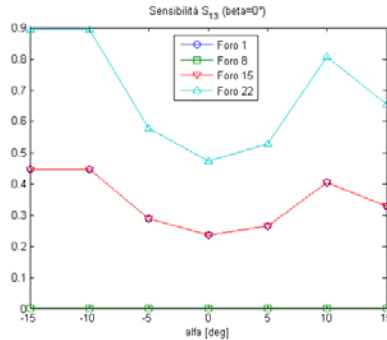


Figura 5. Ampiezza della prima armonica del segnale rilevato dal sensore S₁₃ al variare dell'orientamento del sensore e del punto di applicazione della forzante di simulazione.

I valori dell'angolo alfa che minimizzano il rapporto tra le ampiezze della seconda e della prima armonica sono concentrati in un intorno di 0° (sensore perpendicolare all'asse di rotazione). Per piccoli valori dell'angolo alfa la risposta del sensore non risulta sensibile a variazioni dell'angolo beta. Nel caso in cui il carico esterno venga applicato in corrispondenza del foro 8, cioè nel centro di istantanea rotazione tra membro mobile e membro intermedio, il sistema auto-equilibra lo squilibrio simulato ed il sensore rileva un segnale deformato rispetto alla forzante sinusoidale. I rapporti di Fig. 4, pur presentando valori molto bassi, superano di un ordine di grandezza quelli ottenuti tra le ampiezze di linee spettrali non armoniche (rumore) e quella della fondamentale.

In Fig. 5 viene riportata l'ampiezza della prima armonica in funzione dell'inclinazione del sensore S₁₃ (angolo alfa) e della variazione del punto di applicazione della forzante esterna per un assegnato valore dell'angolo beta (pari a -15°): sebbene i valori maggiori si abbiano in corrispondenza di +10° e -10°, dalla precedente Fig. 4 si constata un decremento della risposta del sensore rendendo preferibili piccoli valori di alfa; il grafico dell'ampiezza della prima armonica per un valore di alfa pari a 0°, tuttavia, ha lo svantaggio di presentare un minimo locale.

Nelle Figg. 6 e 7 si riportano rispettivamente la sensibilità del sensore S₃₇ ed il rapporto tra le ampiezze della seconda e prima armonica del segnale rilevato, al variare della coppia esterna applicata e del valore assunto dall'angolo beta. Ciascuno dei grafici è stato tracciato mantenendo costante il valore dell'angolo alfa e nell'ipotesi di applicare la forzante esterna nel foro 15.

La coppia applicata permette di simulare la risposta del sistema ad uno squilibrio dinamico della ruota. Una variazione nel valore di tale coppia (tre ordini di grandezza considerati) non viene rilevata dal sensore S₃₇ come evidenziato dalla Fig. 6.

La Fig. 7 mostra come la qualità del segnale peggiori all'aumento della coppia applicata se l'inclinazione del sensore S₁₃ si discosta da un intorno di 0°. Analogamente a quanto mostrato in Fig. 2, se il quadrilatero inferiore presenta un valore di beta negativo si riduce il rapporto tra seconda e prima armonica.

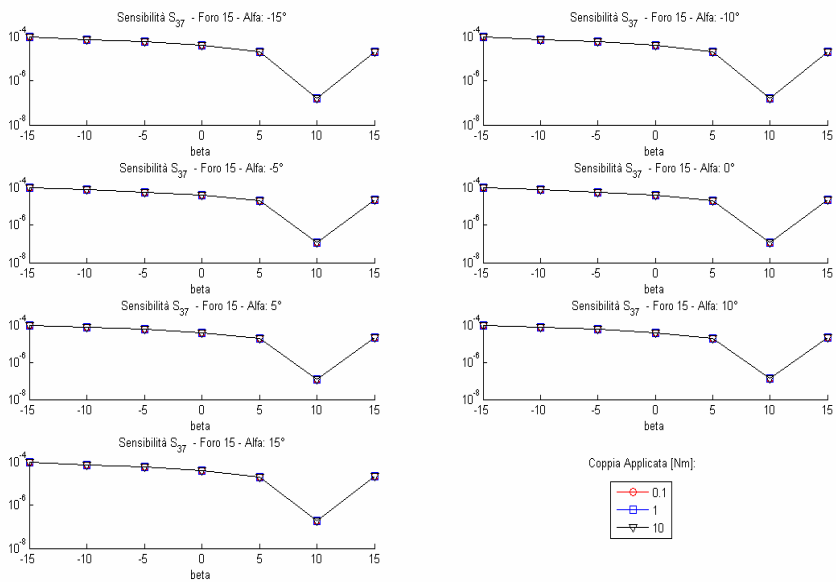


Figura 6. Ampiezza della prima armonica del segnale rilevato dal sensore S_{37} al variare della coppia.

Nelle Figg. 8 e 9 si riportano rispettivamente la sensibilità del sensore S_{13} ed il rapporto tra le ampiezze della seconda e della prima armonica del segnale rilevato, al variare della coppia esterna applicata e del valore assunto dall'angolo beta. Il sensore S_{13} è più sensibile, all'aumentare della coppia applicata, se assume un'inclinazione maggiore di 5° , mentre ha un comportamento opposto se l'angolo alfa rimane compreso in un intorno di 0° . Il rapporto tra l'ampiezza della seconda e della prima armonica rimane quasi costante se l'inclinazione del sensore è nulla, mentre tende a diminuire al crescere della coppia per angoli di inclinazione più elevati.

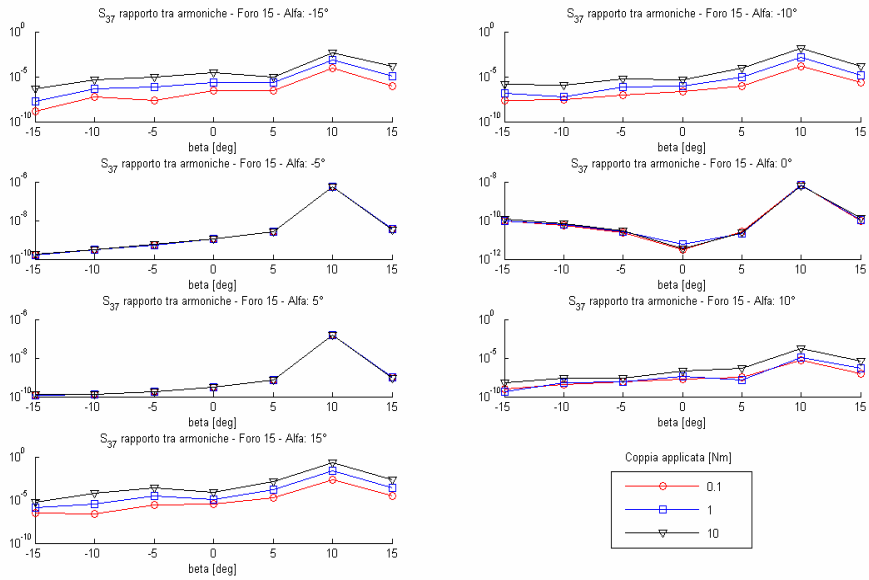


Figura 7. Rapporto tra le ampiezze della seconda e della prima armonica del sensore S_{37} al variare della coppia.

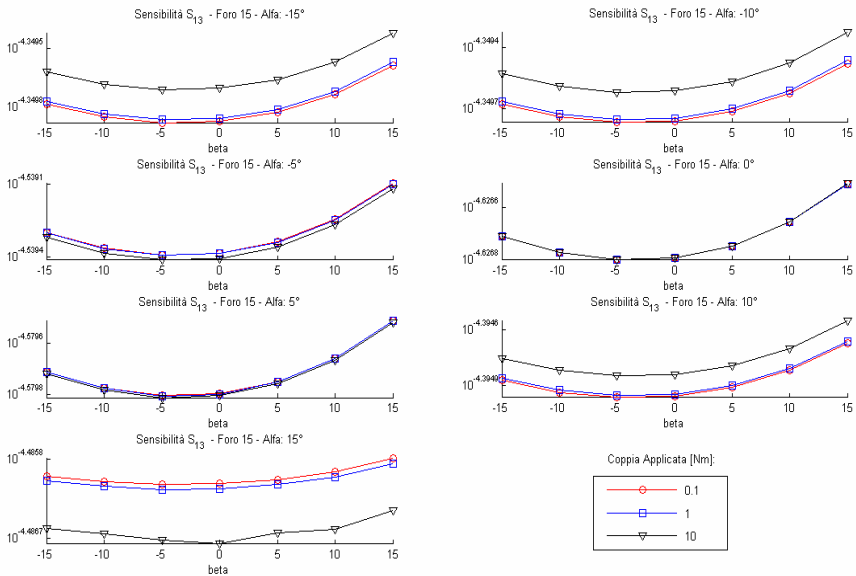


Figura 8. Ampiezza della prima armonica del segnale rilevato dal sensore S_{13} al variare della coppia.

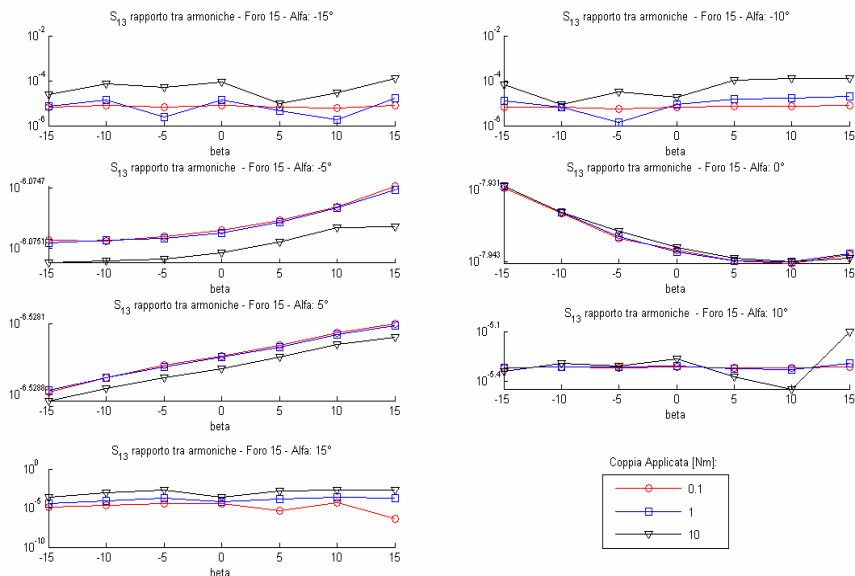


Figura 9. Rapporto tra le ampiezze della seconda e della prima armonica del sensore S_{37} al variare della coppia.

6. CONCLUSIONI

Il questo articolo si è ripreso e sviluppato un modello cineto-elastodinamico di una macchina equilibratrice – precedentemente realizzato dagli autori [4] – per simulare la risposta del sistema al variare di parametri geometrici e costruttivi. La macchina è costituita da due quadrilateri articolati, uno mobile ed uno vincolato a telaio, aventi un membro intermedio in comune. La ruota viene montata a sbalzo su un albero rotante vincolato alla biella del quadrilatero mobile. Due sensori S_{13} e S_{37} misurano gli spostamenti relativi rispettivamente tra albero e membro intermedio e tra membro intermedio e telaio. Si è scelto di modificare la configurazione geometrica della macchina – variando la posizione del centro di istantanea rotazione tra telaio e membro intermedio del quadrilatero vincolato a telaio – e quella costruttiva, imponendo differenti orientamenti del sensore posto tra albero e membro intermedio.

I parametri utilizzati per la valutazione critica delle configurazioni sono la sensibilità dei sensori allo squilibrio ed il rapporto tra le prime componenti armoniche per valutare la presenza di distorsioni nel segnale sinusoidale acquisito dai trasduttori.

I risultati riportati nelle Figg. da 2 a 9 portano a concludere che un assetto ottimale della macchina equilibratrice atto a rilevare uno squilibrio statico sia caratterizzato da un valore dell'angolo beta negativo elevato – pari a -15° nel campo di variabilità studiata – ed un valore dell'angolo alfa compreso tra 0° e -5° . Nel caso di squilibrio dinamico la sensibilità del

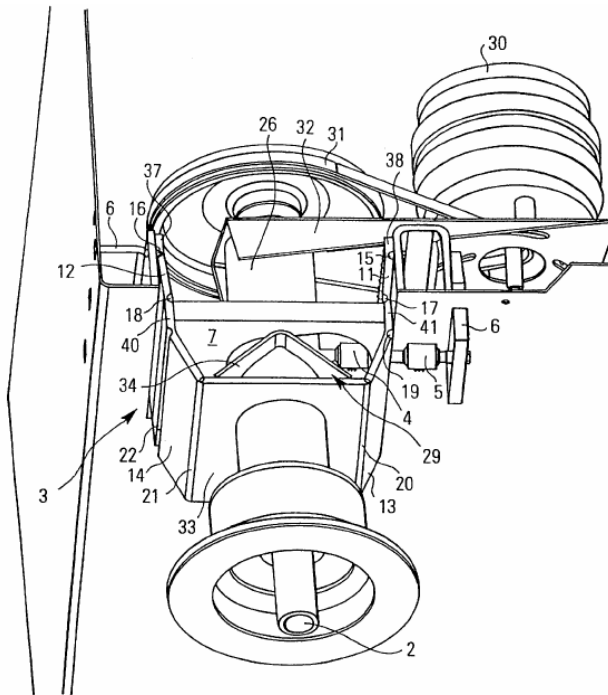


Figura 10. Disegno costruttivo della macchina equilibratrice. Tratto da [1]

sensore S_{13} si incrementa per angoli beta positivi ed angoli alfa maggiori in modulo di 5° .

BIBLIOGRAFIA

- [1] Goebel, E., 2002. "Device for measuring the forces generated by a rotor imbalance", U.S. Patent: US 6430992 B1.
- [2] Curchod, DB., 1984. "Drive shaft mounting assembly for dynamic wheel balancing machine", U.S. Patent: US 4449407.
- [3] Hill, JM., 1985. "Wheel balancer two plane calibration apparatus and method". U.S. Patent: US 4494400.
- [4] Cocconcelli, M. and Rubini R., 2007. "A kineto-elastodynamic model of a compliant mechanism" In Proceedings of Artic Conference on Dynamics and Control Vibrations, Ivalo, Finland, pp.6-14.
- [5] Zhang, S. and Fasse, ED., 2001. "A finite-element-based method to determine the spatial stiffness properties of a notch hinge". *Journal of mechanical design*, **123** pp. 141-147.

APPENDICE

Di seguito vengono riportate le equazioni complete del modello presentato. Per gli indici utilizzati si faccia riferimento al paragrafo 3 ed alla Figg 1.

Modello dei giunti complianti:

$$\left. \begin{aligned}
 M_A^{cmp} &= \left| k_A \left(\Delta\theta_{12} + b\Delta\dot{\theta}_{12} \right) \right|, \\
 M_B^{cmp} &= \left| k_B \left(\Delta\theta_{41} + b\Delta\dot{\theta}_{41} \right) \right|, \\
 M_C^{cmp} &= \left| k_C \left(\Delta\theta_{23} + b\Delta\dot{\theta}_{23} \right) \right|, \\
 M_D^{cmp} &= \left| k_D \left(\Delta\theta_{34} + b\Delta\dot{\theta}_{34} \right) \right|, \\
 M_E^{cmp} &= \left| k_E \left(\Delta\theta_{35} + b\Delta\dot{\theta}_{35} \right) \right|, \\
 M_F^{cmp} &= \left| k_F \left(\Delta\theta_{63} + b\Delta\dot{\theta}_{63} \right) \right|, \\
 M_H^{cmp} &= \left| k_H \left(\Delta\theta_6 + b\Delta\dot{\theta}_6 \right) \right|, \\
 M_G^{cmp} &= \left| k_G \left(\Delta\theta_5 + b\Delta\dot{\theta}_5 \right) \right|.
 \end{aligned} \right\} \quad (A.1)$$

Modello dei sensori:

$$F_{ij}^{sens} = k \left(\Delta_{ij} + c\dot{\Delta}_{ij} \right) \quad (A.2)$$

Equazioni di congruenza:

$$\left. \begin{aligned}
 l_2c_2 + l_1c_1 &= l_3c_3 + l_4c_4, \\
 l_2s_2 + l_1s_1 &= l_3s_3 + l_4s_4, \\
 l_5c_5 + l_3c_3 &= l_7 + l_6c_6, \\
 l_5s_5 + l_3s_3 &= l_6s_6.
 \end{aligned} \right\} \quad (A.3)$$

$$\left. \begin{aligned}
 l_2s_2\dot{\theta}_2 + l_1s_1\dot{\theta}_1 &= l_3s_3\dot{\theta}_3 + l_4s_4\dot{\theta}_4, \\
 l_2c_2\dot{\theta}_2 + l_1c_1\dot{\theta}_1 &= l_3c_3\dot{\theta}_3 + l_4c_4\dot{\theta}_4, \\
 l_5s_5\dot{\theta}_5 + l_3s_3\dot{\theta}_3 &= l_6s_6\dot{\theta}_6, \\
 l_5c_5\dot{\theta}_5 + l_3c_3\dot{\theta}_3 &= l_6c_6\dot{\theta}_6.
 \end{aligned} \right\} \quad (A.4)$$

$$\left. \begin{aligned}
& l_2 c_2 \ddot{\theta}_2^2 + l_2 s_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 c_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 s_1 \ddot{\theta}_1 = l_3 c_3 \dot{\theta}_3^2 + l_3 s_3 \ddot{\theta}_3 + l_4 c_4 \dot{\theta}_4^2 + l_4 s_4 \ddot{\theta}_4, \\
& -l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 + l_2 c_2 \ddot{\theta}_2 - l_1 s_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 c_1 \ddot{\theta}_1 = -l_3 s_3 \dot{\theta}_3^2 + l_3 c_3 \ddot{\theta}_3 - l_4 s_4 \dot{\theta}_4^2 + l_4 c_4 \ddot{\theta}_4, \\
& l_5 c_5 \dot{\theta}_5^2 + l_5 s_5 \ddot{\theta}_5 + l_3 c_3 \dot{\theta}_3^2 + l_3 s_3 \ddot{\theta}_3 = l_6 c_6 \dot{\theta}_6^2 + l_6 s_6 \ddot{\theta}_6, \\
& -l_5 s_5 \dot{\theta}_5^2 + l_5 c_5 \ddot{\theta}_5 - l_3 s_3 \dot{\theta}_3^2 + l_3 c_3 \ddot{\theta}_3 = -l_6 s_6 \dot{\theta}_6^2 + l_6 c_6 \ddot{\theta}_6.
\end{aligned} \right\} \quad (A.5)$$

Equazioni di D'Alembert:

$$\left. \begin{aligned}
& -m_1 a_{1x} + R_{21x} - R_{41x} + F_x^{ext} + F_{31x}^{sens} = 0, \\
& -m_1 a_{1y} + R_{21y} - R_{41y} + F_y^{ext} + F_{31y}^{sens} = 0, \\
& -I_{z1} \ddot{\theta}_1 + R_{21x} d_{A1y} - R_{21y} d_{A1x} - R_{41y} d_{B1x} + R_{41x} d_{B1y} - M_A^{cmp} - M_B^{cmp} + M^{ext} + M_{31-1}^{sens} = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (A.6)$$

$$\left. \begin{aligned}
& -m_2 a_{2x} + R_{32x} - R_{12x} = 0, \\
& -m_2 a_{2y} + R_{32y} - R_{12y} = 0, \\
& -I_{z2} \ddot{\theta}_2 + R_{32x} d_{C2y} - R_{32y} d_{C2x} + R_{12x} d_{A2y} - R_{12y} d_{A2x} - M_C^{cmp} - M_A^{cmp} = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (A.7)$$

$$\left. \begin{aligned}
& -m_3 a_{3x} - R_{23x} + R_{43x} + R_{53x} - R_{63x} + F_{13x}^{sens} + F_{73x}^{sens} = 0, \\
& -m_3 a_{3y} - R_{23y} + R_{43y} + R_{53y} - R_{63y} + F_{13y}^{sens} + F_{73y}^{sens} = 0, \\
& -I_{z3} \ddot{\theta}_3 + R_{23y} d_{C3x} + R_{23x} d_{C3y} + R_{53x} d_{E3y} - R_{53y} d_{E3x} + R_{43y} d_{D3x} - R_{43x} d_{D3y} - R_{63x} d_{F3y} + \\
& \quad - R_{63y} d_{F3x} - M_C^{cmp} - M_D^{cmp} - M_E^{cmp} - M_F^{cmp} + M_{13-3}^{sens} + M_{73-3}^{sens} = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (A.8)$$

$$\left. \begin{aligned}
& -m_4 a_{4x} + R_{14x} - R_{34x} = 0, \\
& -m_4 a_{4y} + R_{14y} - R_{34y} = 0, \\
& -I_{z4} \ddot{\theta}_4 + R_{14x} d_{B4y} - R_{14y} d_{B4x} - R_{34x} d_{D4y} - R_{34y} d_{D4x} - M_B^{cmp} - M_D^{cmp} = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (A.9)$$

$$\left. \begin{aligned}
& -m_5 a_{5x} + R_{75x} - R_{35x} = 0, \\
& -m_5 a_{5y} + R_{75y} - R_{35y} = 0, \\
& -I_{z5} \ddot{\theta}_5 + R_{35x} d_{E5y} + R_{35y} d_{E5x} + R_{75x} d_{G5y} + R_{75y} d_{G5x} - M_E^{cmp} - M_G^{cmp} = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (A.10)$$

$$\left. \begin{aligned}
& -m_6 a_{6x} + R_{36x} - R_{76x} = 0, \\
& -m_6 a_{6y} + R_{36y} - R_{76y} = 0, \\
& -I_{z6} \ddot{\theta}_6 - R_{36x} d_{F6y} + R_{36y} d_{F6x} - R_{76x} d_{H6y} + R_{76y} d_{H6x} - M_F^{cmp} - M_H^{cmp} = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (A.11)$$

CALCOLO EFFICIENTE DEL COMPORTAMENTO STRUTTURALE DI COSTRUZIONI INCOLLATE COMPLESSE

Eugenio Dragoni, Davide Castagnetti, Andrea Spaggiari

Dipartimento di Scienze e Metodi dell'Ingegneria

Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

eugenio.dragoni@unimore.it, davide.castagnetti@unimore.it, andrea.spaggiari@unimore.it

Abstract. Il lavoro è orientato allo sviluppo di tecniche computazionali efficienti ed accurate per l'analisi semplificata del comportamento elastico e post-elastico di giunzioni e di strutture incollate. L'obiettivo è superare le principali limitazioni dei metodi di calcolo esistenti, in particolare la loro dipendenza da elementi speciali o da procedure non implementate negli applicativi commerciali più diffusi. Si propongono due modelli ridotti, entrambi basati sulla rappresentazione degli aderenti mediante elementi strutturali (travi o gusci) e dell'adesivo per mezzo di un singolo strato di elementi solidi (tensione piana o esaedri). La differenza tra i due modelli risiede nel fatto che in un caso lo spessore dell'adesivo è esteso fino al piano di mezzzeria degli aderenti e le proprietà elastiche sono incrementate proporzionalmente. Nell'altro caso, invece, lo strato adesivo mantiene le sue proprietà reali e la connessione agli aderenti è realizzata mediante vincoli cinematici convenzionali. Le analisi di verifica riguardano il campo elastico ed il campo post-elastico. In entrambi i casi si effettua il confronto tra modelli ridotti e modelli completi, computazionalmente onerosi. Per l'analisi post-elastica si fa riferimento anche a prove sperimentali. Le analisi in campo elastico sono condotte su una serie di configurazioni bidimensionali (giunto a sovrapposizione semplice) e sono poi estese a due configurazioni tridimensionali (giunto a sovrapposizione semplice e mensola a squadretta). In campo post-elastico il modello ridotto che ha fornito i migliori risultati in campo elastico è applicato ad una giunzione T-Peel sollecitata fino a collasso per la quale il criterio che regola il cedimento dell'adesivo è basato sul concetto delle tensioni "regolarizzate". Nel complesso, i risultati mostrano un buon accordo tra i modelli ridotti ed i modelli completi nella previsione sia delle tensioni elastiche nell'adesivo che del comportamento post-elastico fino a collasso. Si riscontra inoltre, a favore dei metodi ridotti, una drastica diminuzione dei tempi di calcolo, in particolare per geometrie tridimensionali.

Parole chiave: adesivi strutturali, simulazione efficiente, giunti incollati strutturali, collasso

1. INTRODUZIONE

Il lavoro riguarda lo sviluppo di tecniche agli elementi finiti per l'analisi efficiente delle tensioni e la previsione del comportamento post-elastico fino a collasso di giunzioni strutturali incollate. Il crescente impiego dei giunti incollati per applicazioni strutturali è stato accompagnato dallo sviluppo di modelli analitici e numerici per analizzare o prevedere la risposta di questi giunti. Tra i modelli numerici il metodo agli elementi finiti è stato impiegato molto diffusamente e sono stati sviluppati parecchi elementi speciali per modellare l'adesivo, sia in due che in tre dimensioni [1] - [10]. L'obiettivo che ha guidato la formulazione di questi elementi è quello di cogliere le principali caratteristiche delle tensioni nello strato adesivo, in modo semplice, efficiente e computazionalmente poco dispendioso.

Lo svantaggio maggiore di questi metodi semplificati, per il calcolo delle tensioni nell'adesivo, consiste nella loro dipendenza da elementi speciali o da algoritmi che non sono facilmente implementabili nei software commerciali agli elementi finiti per l'analisi di strutture complesse.

Il presente lavoro intende ovviare alle limitazioni connesse a tali metodi, verificando l'applicabilità di due modelli computazionali semplificati per la previsione del comportamento elastico e post-elastico, fino a collasso, della giunzione incollata. Questi metodi sono basati su strumenti di modellazione ordinari ed elementi standard (sia solidi continui che semi-strutturali), comunemente implementati nella maggior parte dei software commerciali.

Il lavoro è suddiviso in due fasi, la prima dedicata al comportamento elastico, la seconda al collasso post-elastico. La prima fase è articolata a sua volta in due passi: il primo consiste in una campagna di analisi esplorative su configurazioni single-lap 2D (secondo i criteri del Design-Of-Experiments). Nel secondo passo si applica il metodo semplificato, che ha fornito i migliori risultati nelle strutture 2D, a due strutture 3D. Come riferimento si impiega la soluzione numerica esatta fornita da un modello computazionale intensivo. Il confronto è svolto relativamente alle tensioni "regolarizzate", ossia lette sulla superficie media dello strato di adesivo. Nella seconda fase del lavoro, il modello computazionale ridotto, che ha fornito le migliori previsioni in campo elastico viene applicato ad una giunzione di tipo T-Peel, già esaminata sperimentalmente da Goglio et al [11]. Tale configurazione è utile per valutare le prestazioni del modello in campo post-elastico e consente di effettuare un confronto tra i risultati numerici con quelli sperimentali.

I risultati ottenuti in entrambe le fasi mostrano le ottime potenzialità di uno dei due metodi semplificati, sia in termini di previsione dello stato tensionale che del comportamento post-elastico del giunto. Notevole è infine l'efficienza computazionale, con una drastica riduzione del tempo di calcolo.

2. METODO

Si presentano le due fasi del lavoro, la prima di previsione del comportamento elastico, articolata in due passi, la seconda di analisi del comportamento post-elastico del giunto, fino a collasso.


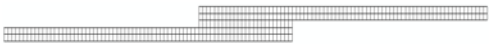
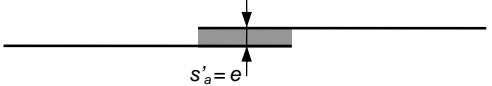
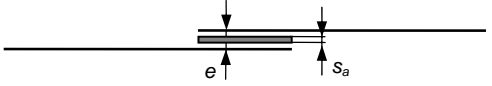
2.1. Analisi Delle Tensioni Elastiche

La Tabella 1 mostra schematicamente i differenti metodi esaminati in questa prima fase del lavoro per l'analisi di giunzioni incollate. La prima riga descrive la configurazione reale che si è considerata, costituita da una giunzione single-lap. La seconda riga (modello A) rappresenta l'approccio classico mediante un modello completo agli elementi finiti, con dimensione degli elementi molto ridotta e , conseguentemente, di elevato onere computazionale. Questo modello è stato considerato come quello che fornisce la soluzione esatta a cui fare riferimento. La terza e la quarta riga della tabella (modelli B e C) illustrano i metodi ridotti proposti in questa analisi.

Entrambi i modelli semplificati, B e C, riproducono gli aderendi con elementi strutturali di tipo trave e descrivono l'adesivo con una singola riga di elementi continui in tensione piana. Gli elementi trave giacciono sulla linea d'asse degli aderendi ad una distanza reciproca, e , pari all'eccentricità degli aderendi stessi. Nel modello ridotto B, l'adesivo è esteso fino agli assi aderendi (spessore $s'_a = e > s_a$). Il modulo elastico è quindi aumentato proporzionalmente fino a $E'_a = E_a \cdot s'_a / s_a$, così da conservare la stessa rigidità dello strato adesivo originario per deformazioni sia normali che tangenziali. Nel modello ridotto C, l'adesivo conserva lo spessore reale, s_a , ed è connesso, su entrambi i lati, ai nodi delle travi degli aderendi mediante vincoli cinematici interni (tied lines) che rendono uguali i gradi di libertà corrispondenti.

La convalida dei modelli in esame è articolata in due passi: il primo in cui si realizza un'analisi esplorativa 2D, il secondo, di verifica, dedicato a configurazioni 3D.

Tabella 1 – Geometria di riferimento e modelli semplificati per giunzione single-lap

Modello	Schema
Geometria di riferimento	
Modello completo (A)	
Modello ridotto (B)	
Modello ridotto (C)	

Nel primo passo si considera la configurazione single-lap come caso di prova, in quanto ben documentata in letteratura [8], [13], esaminando un'ampia varietà di geometrie e materiali

degli aderendi. Le tensioni fornite dai metodi computazionali ridotti, *B* e *C*, sono confrontate inizialmente con i risultati del modello analitico di Goland e Reissner [13] e poi con la soluzione ottenuta dal modello convenzionale agli elementi finiti, *A*.

Nel secondo passo, il modello ridotto che ha dimostrato di fornire i risultati migliori nell'analisi sistematica del primo passo, è applicato a due configurazioni geometriche 3D ed i risultati confrontati con la previsione di un modello completo ed intensivo agli elementi finiti.

Tutte le analisi agli elementi finiti descritte nel seguito sono svolte con il software ABAQUS, versione 6.6 [14].

2.1.1. Analisi Sistematica 2D

Si è svolta un'analisi sistematica orientata a confrontare i risultati del metodo *A* (riferimento), del metodo *B* e del metodo *C* (nuove proposte) per un'ampia varietà di geometrie e proprietà elastiche del giunto, pianificate sulla base dei criteri di progettazione degli esperimenti [15]. Le variabili coinvolte nell'analisi sono raccolte in Tab. 2, ove *t* rappresenta lo spessore degli aderendi, *c* la semi-lunghezza di sovrapposizione, *E* il modulo elastico e *ν* il coefficiente di Poisson degli aderendi (Fig. 1). La scelta del tipo e dei valori di queste variabili è stata guidata dal modello analitico di Goland e Reissner [13] e dai criteri dell'analisi dimensionale [16].

Tabella 2 – Valori dei parametri del giunto impiegati nel piano di analisi sistematica

<i>t</i> (mm)	0.3	1	3
<i>c/t</i>	1.5	3	6
<i>E</i> (MPa)	23000	69000	206000
<i>ν</i>	0.3	0.3	0.3
Materiale tipico	Vetroresina 25% 0° 50% 45° 25% 90°	Alluminio	Acciaio

Combinando in tutti i modi possibili le variabili della Tab. 2 si ottiene un piano fattoriale completo di analisi costituito da 27 configurazioni. Da un'analisi dimensionale del problema si è verificato che è possibile mantenere costanti, senza perdita di generalità, le proprietà dello strato adesivo. I valori adottati sono spessore dell'adesivo $s_a = 0.1$ mm, modulo di Young $E_a = 2500$ MPa e coefficiente di Poisson $\nu_a = 0.3$. Inoltre si è considerato costante il rapporto tra la lunghezza dell'aderendo fuori dalla sovrapposizione, *l*, e lo spessore degli aderendi, *t*, pari a $l/t = 25$. Ciascun parametro di Tab. 2 varia su tre livelli e copre un intervallo sufficientemente esteso da includere la maggior parte dei casi reali. La sola eccezione a questa regola è

rappresentata dal parametro c/t che è stato limitato al valore di 6 per l'impossibilità di gestire modelli numerici completi con sovrapposizioni più lunghe, che talvolta ricorrono nella pratica. Per ciascuna configurazione studiata si sono applicati, in passi successivi, tre livelli di carico al giunto. I livelli di carico sono stati calcolati con le formule analitiche di Goland e Reissner [13] in modo da realizzare valori di picco delle tensioni normali, sulla mezzeria dell'adesivo, che siano in rapporto di 0.001, 0.01 e 0.1 con il modulo di Young, E_a , dell'adesivo. I modelli computazionali sono stati implementati, per ciascuna delle configurazioni considerate nell'analisi sistematica, secondo i seguenti criteri.

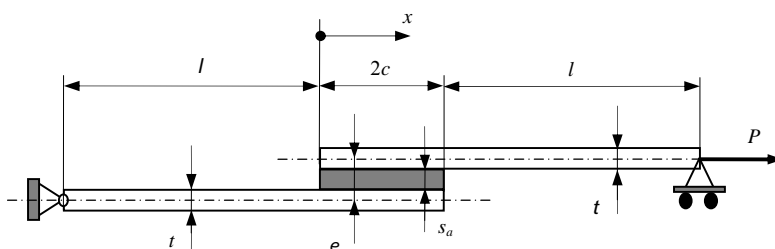


Figura 1 – Geometria di riferimento per analisi elastica

Modello intensivo completo A. Il modello completo, *A*, riproduce esattamente la geometria del giunto di Fig. 1. La mesh è realizzata con elementi quadratici, in tensione piana, rettangolari, di altezza 0.025 mm e lunghezza 0.05 mm, uniformemente distribuiti nel modello. Ciò porta ad avere quattro elementi nello spessore dell'adesivo. La dimensione adottata per gli elementi nell'analisi è stata scelta dopo una procedura di convergenza incentrata sulle tensioni di picco che nascono sulla mezzeria dello strato adesivo.

Modello semplificato B. Il modello semplificato *B*, rappresenta la geometria della giunzione impiegando elementi strutturali di tipo trave per gli aderendi ed estendendo lo strato adesivo fino ai nodi degli elementi trave. Di conseguenza l'adesivo ha spessore pari all'eccentricità degli aderendi. La mesh è costituita da elementi trave quadratici sugli aderendi, con lunghezza pari all'eccentricità. Lo strato adesivo è modellato attraverso un'unica riga di elementi in tensione piana, quadratici, di forma quadrata, con lunghezza (in direzione longitudinale) pari all'eccentricità degli aderendi. La dimensione longitudinale degli elementi è stata scelta a seguito di un processo iterativo fino ad ottenere la convergenza dei risultati.

Modello semplificato C. Il modello semplificato *C*, riproduce la geometria della giunzione impiegando elementi strutturali di tipo trave per modellare gli aderendi e mantenendo lo spessore reale dello strato adesivo.

Questa scelta crea un gioco tra gli aderendi, modellati con elementi trave quadratici, ed il corrispondente bordo dello strato adesivo, discretizzato mediante una singola riga di elementi quadratici, in tensione piana, di forma rettangolare. La connessione tra la mesh degli aderendi e

quella dell'adesivo è assicurata attraverso l'impiego di vincoli cinematici interni che collegano i nodi corrispondenti delle parti connesse. Questi vincoli, realizzati attraverso l'opzione *TIE di ABAQUS e disponibili in tutti i principali software agli elementi finiti, rendono i gradi di libertà di ciascun nodo coinvolto nel vincolamento, uguali ai corrispondenti gradi di libertà di un nodo di riferimento appartenente ad un'altra entità geometrica. Anche in questo caso l'analisi di convergenza svolta ha indicato come lunghezza ottimale degli elementi (sia trave che quadrilateri) un valore pari all'eccentricità degli aderenti.

2.1.2. Analisi Di Configurazioni 3D

Questa fase è relativa alla verifica dei modelli esplorati al passo precedente e riguarda l'analisi di configurazioni 3D di giunzioni incollate. Si considera innanzitutto una delle configurazioni di giunzione single-lap esaminate nella esplorazione sistematica, modellandola ora come struttura tridimensionale. Successivamente si svolge l'analisi di una squadretta incollata ad una parete rigida e sottoposta ad un carico a sbalzo.

Sulla base dei risultati ottenuti al primo passo dell'analisi (Sezione 2.2), che hanno mostrato che il modello *B* fornisce prestazioni scadenti rispetto al modello *C* (vedi Risultati), la verifica svolta in questo passo è concentrata sul confronto tra il metodo completo *A*, (caso di riferimento) ed il metodo ridotto *C*, (nuova proposta).

Analisi di giunzione single-lap 3D. Come prima verifica del modello *C*, si è esaminata una delle configurazioni dell'analisi sistematica svolta al passo precedente. In particolare si è considerato il caso del giunto corrispondente a spessore degli aderenti $t = 1$ mm, rapporto tra la semi-lunghezza di sovrapposizione e lo spessore degli aderenti $c/t = 6$ mm ed aderenti in alluminio. La larghezza nella direzione ortogonale al piano del foglio è stata assunta pari a 5 mm e grazie alla simmetria della configurazione tridimensionale, sia il modello *A* che il modello *C* considerano solo metà del giunto nella direzione della larghezza.

Sia il metodo *A* che il metodo *C* sono stati implementati estendendo al caso 3D le stesse regole seguite per la configurazione piana. In particolare, nel metodo *A* gli aderenti e l'adesivo sono stati modellati attraverso elementi esaedrici con una dimensione, in direzione della larghezza, uguale a quella nella direzione longitudinale. Come conseguenza il modello contiene 189440 elementi e 206000 nodi, per un totale di 620058 gradi di libertà. Nel caso del modello *C* gli aderenti sono stati rappresentati tramite elementi strutturali quadratici di tipo shell, mentre lo strato adesivo è stato discretizzato mediante un unico strato di elementi quadratici esaedrici. Le dimensioni degli elementi sono, anche in questo caso, le stesse impiegate per il caso piano, ed in particolare la dimensione nella direzione dello spessore è pari a quella nella direzione longitudinale. Complessivamente il modello contiene 158 elementi e 778 nodi per un totale di 4002 gradi di libertà, quindi più di 150 volte in meno rispetto al modello completo *A*.

La giunzione è stata caricata con gli stessi tre livelli di carico imposti, nel caso dell'analisi piana, per questa stessa configurazione.

Analisi di squadretta a mensola 3D. Una seconda verifica per il metodo semplificato, *C*, è stata effettuata considerando la configurazione di Figura 2. Una squadretta di alluminio ($E=69000$ MPa, $\nu = 0.3$) è incollata ad una parete di acciaio mediante uno strato di adesivo epossidico ($s_a = 0.1$ mm, $E_a = 2500$ MPa, $\nu_a = 0.3$) ed è soggetta ad un carico asimmetrico a

sbalzo ($P = 100 \text{ N}$). La parete è incastrata lungo il suo contorno. È applicato un unico valore di carico alla struttura perché la non linearità geometrica è scarsamente significativa per tale configurazione.

La qualità dell'analisi semplificata è verificata confrontando i risultati del metodo *C* con quanto previsto da un modello convenzionale agli elementi finiti (metodo *A*). In relazione al notevole impiego di risorse necessarie per eseguire il modello *A*, la discretizzazione degli aderendi (squadretta e parete) è stata effettuata mediante elementi esaedrici con lati di 0.15 mm nel piano degli aderendi ed una lunghezza, nello spessore, variabile uniformemente da 0.03 (in prossimità dell'adesivo) fino a circa 0.45 mm (sulla faccia opposta). Nel metodo *C*, la squadretta e la parete sono stati modellati con elementi shell quadratici disposti sul piano medio degli aderendi e vincolati cinematicamente allo strato adesivo, descritto tramite un singolo strato di elementi esaedrici quadratici. Come nel caso del modello 2D ridotto, anche in questo modello 3D ridotto le dimensioni di tutti gli elementi nel piano delle parti sono uguali alla distanza tra le superfici medie degli aderendi. Il metodo *A* contiene 178984 elementi e 207720 nodi, per un totale di 623160 gradi di libertà, mentre il modello *C*, contiene 118 elementi e 589 nodi per un totale di 2850 gradi di libertà, corrispondenti a circa 220 volte meno del modello completo.

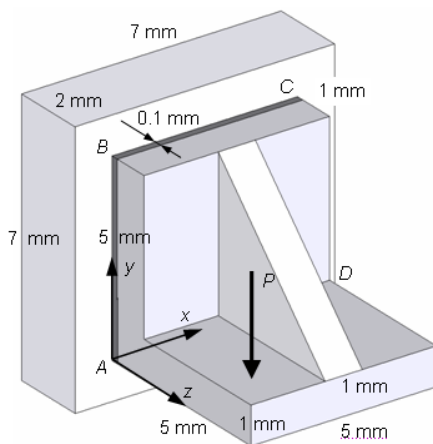


Figura 2 – Geometria del problema di verifica 3D

2.2. Analisi A Collasso 2D

Questa fase è incentrata sulla verifica dell'applicabilità del metodo semplificato *C*, che si è mostrato più accurato nella previsione del comportamento elastico, all'analisi del comportamento post-elastico, fino a collasso, di costruzioni incollate. Si è scelta, a tal fine, una

giunzione T-Peel conforme alla normativa ASTM-D 1876 [16] con geometria carico e vincoli come raffigurato in Fig. 3a e conforme al caso esaminato sperimentalmente da Goglio et al [11]. In Figura 3b è mostrato il modello intensivo agli elementi finiti (metodo A) assunto, anche in questo caso, come soluzione numerica esatta, a cui fare riferimento. In Figura 3c è mostrato lo schema relativo al metodo semplificato C, sviluppato secondo i criteri esposti nel primo passo dell'analisi. Entrambi i modelli sfruttano la simmetria del giunto, riproducendone solo la metà superiore. Anche in questa fase tutte le analisi agli elementi finiti di seguito presentate sono state svolte con il software ABAQUS 6.6 [14] con solutore Standard e considerando la non linearità geometrica.

Rispetto all'analisi elastica della fase iniziale, al fine di svolgere l'analisi a collasso della giunzione, si è dovuto modellare, per l'adesivo, anche il tratto post-elastico del legame costitutivo (Fig. 4). A tal fine si è introdotta un'opportuna tensione di snervamento, R_{sa} , calcolata sulla base del criterio di cedimento proposto da Goglio et al. [11]. Questi propone, come valore critico per l'adesivo, il valore massimo di tensione previsto dal modello analitico di Bigwood e Crocombe [19], in corrispondenza del carico di collasso della struttura. Si tratta di un criterio di cedimento alle tensioni "regolarizzate", che si svincola dalle singolarità dello stato tensionale presenti all'interfaccia aderendo-adesivo, riconducendosi alla situazione che caratterizza l'adesivo sul suo piano medio.

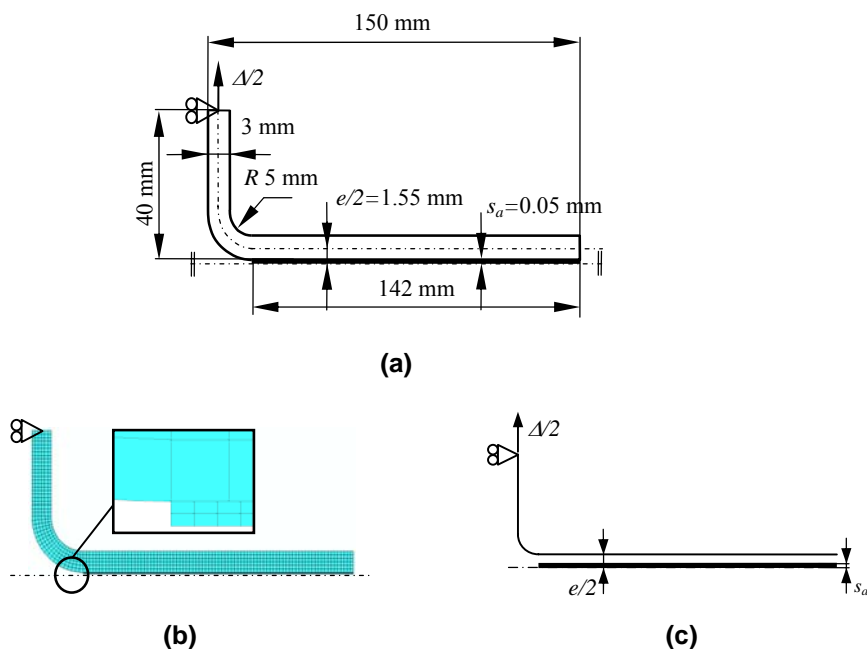


Figura 3 – Geometria di riferimento (a), modello completo (b) e ridotto (c) del giunto T-Peel

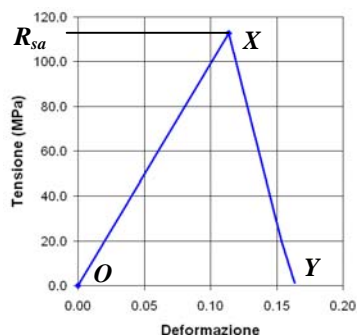


Figura 4 – Legame costitutivo adesivo

Il valore limite di tensione è stato calcolato, per la specifica geometria del giunto, con riferimento al carico critico di collasso della giunzione, $F_{medio} = 1379$ N, misurato sperimentalmente [11], ed è risultato pari ad $R_{sa} = 106$ MPa.

Il legame tensione-deformazione complessivamente adottato per l'adesivo è illustrato in Fig. 4. Il tratto elastico OX si estende, con pendenza pari al modulo elastico $E = 880$ MPa, fino al valore della tensione critica, R_{sa} . Il tratto post-elastico, XY, corrispondente al degrado delle proprietà meccaniche dell'adesivo, è stato reso quanto possibile verticale, compatibilmente con la stabilità dei calcoli, in modo da riprodurre il comportamento fragile caratteristico di questo adesivo.

Questa legge è stata implementata all'interno del software ABAQUS [14] come legge di semplice comportamento plastico (*PLASTIC). Pur essendo disponibili nel software leggi e modelli più complessi che ben si prestano a rappresentare il comportamento dell'adesivo, si è adottato anche in questo caso il criterio della massima semplicità applicativa, basandosi sulle stime effettuate in letteratura [18].

Per l'aderendo si è considerato un legame costitutivo elastico lineare, in quanto, attraverso analisi specifiche, si è verificato che la sollecitazione a cui è soggetto rimane al di sotto del valore della tensione di snervamento ($R_s = 306$ MPa).

Sia il metodo A che il C sono stati implementati applicando i criteri individuati nella fase iniziale di analisi elastica relativa a configurazioni piane.

Modello intensivo completo A. Il modello computazionale completo, A, riproduce esattamente la geometria di riferimento di Fig. 3a e considera le proprietà del materiale indicate sopra per aderendo ed adesivo. L'aderendo è descritto mediante elementi in tensione piana, quadratici, ad integrazione completa, di forma quadrata con lato di 0.5 mm. Per l'adesivo si sono impiegati, invece, elementi in tensione piana, lineari, ad integrazione ridotta, in quanto più adatti per lo specifico legame costitutivo, elasto-plastico fragile, considerato. La forma degli elementi è rettangolare, con una lunghezza di 0.05 mm ed un'altezza di 0.025 mm, in modo da

avere due elementi nello spessore di metà strato adesivo. Per l'aderendo è stato necessario aumentare la dimensione degli elementi, rispetto a quanto adottato nel paragrafo precedente, per evitare l'esplosione del numero di gradi di libertà a valori non gestibili computazionalmente. Complessivamente il modello possiede 7888 elementi e 15896 nodi, per un totale di 31808 gradi di libertà.

Modello semplificato C. Il metodo computazionale ridotto *C*, è stato implementato discretizzando gli aderendi con elementi strutturali di tipo trave e conservando lo spessore reale dell'adesivo. L'adesivo è stato discretizzato con una sola riga di elementi nello spessore, ora dimezzato per simmetria. In totale il modello è costituito da 214 elementi, 711 nodi, per un totale di 1665 gradi di libertà, circa 19 volte in meno del modello completo, *A*.

In entrambi i modelli computazionali è stato applicato uno spostamento di $\Delta/2 = 1.5$ mm sull'estremità superiore dell'aderendo.

3. RISULTATI

3.1. Analisi Delle Tensioni Elastiche

3.1.1. Analisi Sistematica 2D

In Figura 5 si presenta, per la stessa configurazione di giunto esaminata anche tramite un modello 3D, (Sezione 2.1.2), una mappa del campo di tensioni normali (Fig. 5a) e tangenziali (Fig. 5b) lungo la linea di incollaggio, per il valore di carico intermedio corrispondente a $\sigma_{\max}/E_a = 0.01$. L'andamento delle tensioni previsto dai modelli computazionali ridotti *B* e *C* sulla linea di mezzeria dell'adesivo è confrontato con i risultati forniti dal metodo intensivo *A*, e la previsione analitica secondo Goland e Reissner [13].

I risultati presentati per l'analisi sistematica riguardano i metodi *A*, *B* e *C*. In Figura 6 le tensioni di picco normali (a) e tangenziali (b), previste dal modello ridotto *B* sulla linea di mezzeria dell'adesivo, sono confrontate con la previsione delle tensioni fornite dal metodo *A*. In Figura 7 si ha la mappa complessiva dell'errore relativo che compete al metodo *C* per le tensioni di picco normali (a) e tangenziali (b), sulla linea di mezzeria dell'adesivo, confrontate con la previsione delle tensioni fornite dal metodo *A*. Il confronto è svolto in termini di errore relativo. Sia per le tensioni normali che tangenziali l'errore relativo è definito come il rapporto, sulla tensione di picco prevista dal metodo *A*, della differenza tra la tensione di picco del metodo ridotto (rispettivamente *B* o *C*) e la tensione di picco del metodo *A*.

Per ciascuna configurazione di giunzione (numerata lungo l'asse orizzontale), gli istogrammi di Fig. 6 e Fig. 7 riportano tre colonne, una per ciascun valore del modulo elastico degli aderendi (Tab. 2). La singola colonna rappresenta il valore medio degli errori relativi associati ai tre incrementi di carico considerati nell'analisi di quel particolare giunto.

Per tutte le analisi 2D, svolte in questo passo del lavoro, il tempo di calcolo richiesto dai modelli computazionali intensivi (*A*) è stato mediamente in un rapporto di 600 ad 1 rispetto ai modelli ridotti, sia *B* che *C*.

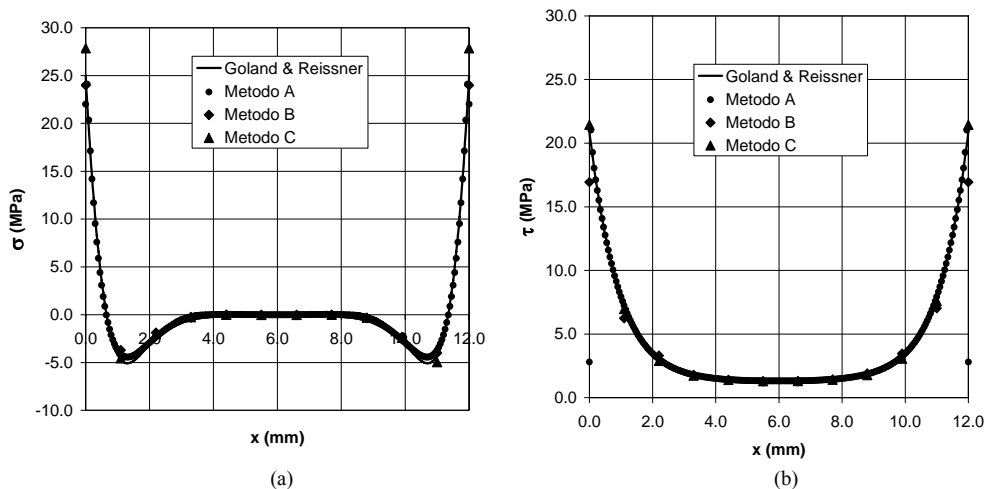


Figura 5 – Tensioni sulla mezzeria dello strato adesivo nella giunzione single-lap 2D per carico corrispondente a $\sigma_{\max}/E_a=0.01$: (a) distribuzione delle tensioni normali; (b) distribuzione delle tensioni tangenziali

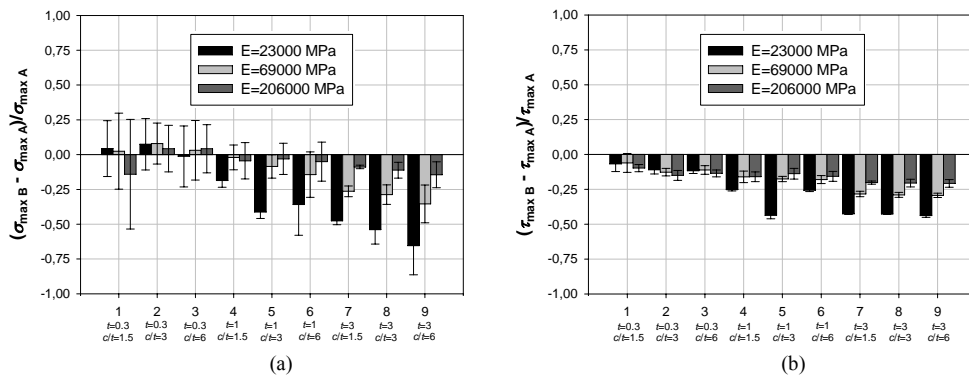


Figura 6 – Errori relativi delle tensioni normali (a) e delle tensioni tangenziali (b) tra il metodo B ed il metodo A per l'intero set di giunzioni single-lap 2D

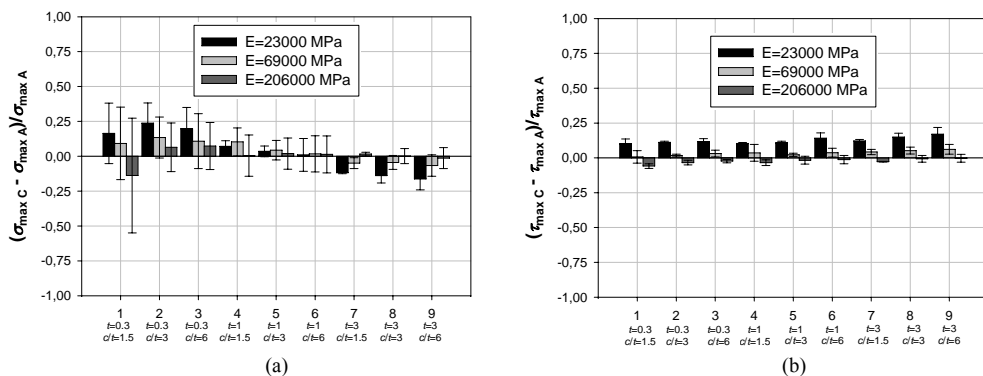


Figura 7 – Errori relativi delle tensioni normali (a) e delle tensioni tangenziali (b) tra il metodo C ed il metodo A per l'intero set di giunzioni single-lap 2D

3.1.2. Analisi Configurazioni 3D

Analisi di giunzione single-lap 3D. I risultati di tensione dei metodi A e C per il giunto single-lap 3D sono confrontati in Fig. 8 per i tre livelli di carico considerati. Tutti i valori presentati nel diagramma sono stati letti sul piano di mezzeria dell'adesivo. Le distribuzioni delle tensioni normali Fig. 8a e delle tensioni tangenziali Fig. 8b si riferiscono alla linea di intersezione tra il piano di mezzeria dello strato adesivo ed il piano di simmetria del giunto. Si è inoltre effettuato un confronto, non riportato per brevità, tra i risultati del modello computazionale 3D, quello 2D e la previsione analitica di Goland e Reissner [13], per il giunto single-lap in questa stessa condizione nominale di Fig. 8, verificando un ottimo accordo per tutte le distribuzioni lungo il piano di mezzeria dello strato adesivo.

Nell'analisi della giunzione single-lap 3D il tempo di calcolo impiegato per la risoluzione del modello intensivo, A, è stato di circa 2100 volte quello necessario per risolvere il metodo ridotto C.

Analisi di squadretta a mensola 3D. I risultati dell'analisi della squadretta a mensola 3D sono presentati nei diagrammi 3D di Fig. 9 e Fig. 10. I vertici del piano x-y nei diagrammi di Fig.9 e Fig. 10 corrispondono ai vertici dell'area incollata in Fig. 2 come indicato dalle lettere. Ciascun diagramma contiene due superfici, corrispondenti al metodo A (griglia rada) ed al metodo C (griglia fine). Le superfici rappresentate in Fig. 9 mostrano il campo di spostamenti normale alla parete nel piano di mezzeria dell'adesivo e le superfici rappresentate in Fig. 10 mostrano i campi di tensione normale (a) e tangenziale (b), sul piano medio dell'adesivo, per ambedue i metodi analizzati.

In questa analisi il tempo di calcolo impiegato dal modello completo, A, è stato di circa 2500 volte superiore quello richiesto per il modello ridotto C.

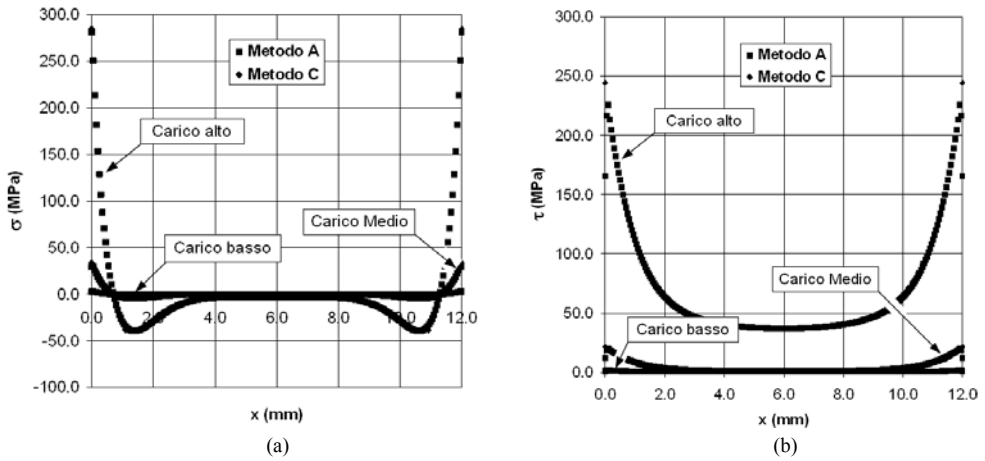


Figura 8 – Distribuzione delle tensioni normali (a) e tangenziali (b) nel giunto single-lap 3D per tre livelli di carico sulla linea di intersezione tra il piano di mezziera dell'adesivo ed il piano di simmetria del giunto

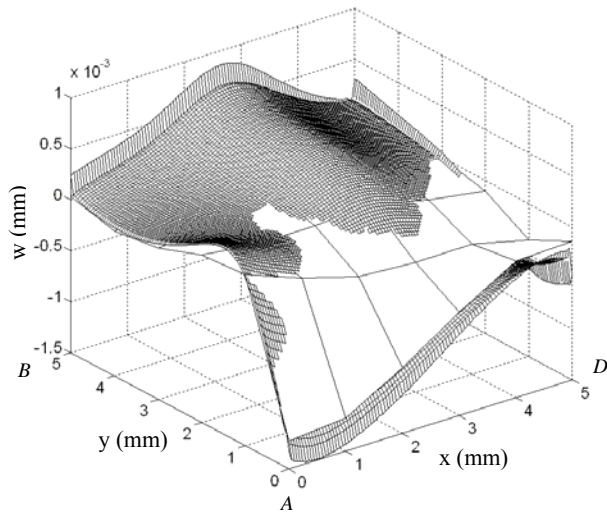
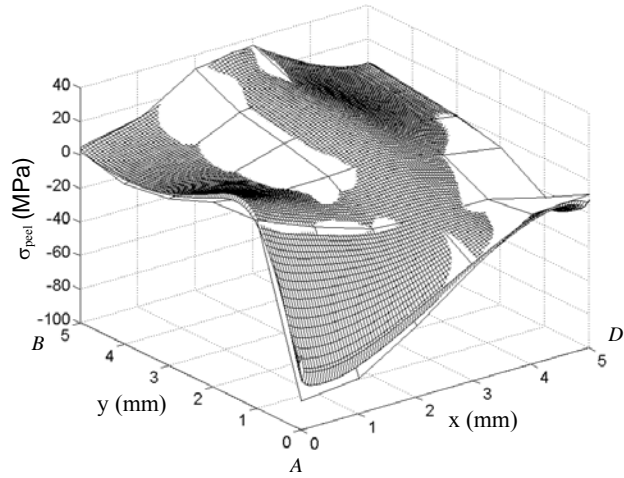
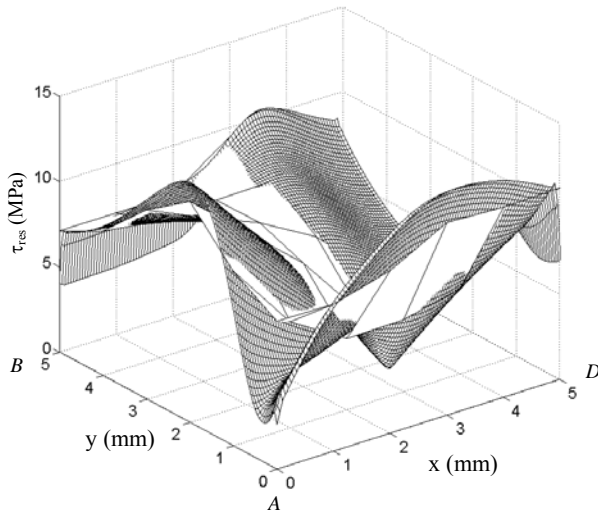


Figura 9 – Campo di spostamento normale alla parete nel piano di mezziera dell'adesivo per la squadretta di Figura 2. Griglia fine metodo A, griglia rada metodo C



(a)



(b)

Figura 10 – Campo di tensione normale (a) e tangenziale (b) nella mezzeria dell’adesivo. Griglia fine metodo A, griglia rada metodo C

3.2. Analisi a Collasso 2D

Per quanto concerne la fase di comportamento elastico, i risultati del modello computazionale ridotto C, per la configurazione T-peel sono stati confrontati con le previsioni del metodo analitico di Bigwood e Crocombe [19] e con i risultati forniti dal modello

computazionale intensivo, *A*. Relativamente alla fase di collasso strutturale è stato possibile un confronto, oltre che con il modello numerico intensivo, anche con i risultati sperimentali presentati in [11] per quella specifica geometria.

Nel riportare i risultati numerici in forma grafica, ad ogni valore di carico computazionale è stato associato un valore di spostamento doppio di quello applicato numericamente. La correzione tiene conto del fatto che i risultati sperimentali si riferiscono allo spostamento relativo tra le estremità caricate del giunto completo, mentre i modelli numerici descrivono solo la metà della configurazione.

La Figura 11 mostra le curve forza-spostamento, fino a collasso, previste rispettivamente con il metodo computazionale intensivo, *A* (Fig. 11a) ed il metodo computazionale ridotto *C* (Fig. 11b).

In Figura 12 sono riportati i medesimi andamenti ottenuti sperimentalmente in [11] per la geometria in esame. Inoltre la Figura 13 mostra un confronto complessivo dell'errore percentuale che si ha tra i valori di picco della forza di collasso, secondo i due metodi computazionali (*A* e *C*) ed il valor medio derivante dalle prove sperimentali.

La Tabella 3 mostra la differenza di onere computazionale che si ha applicando il metodo semplificato *C* rispetto al metodo intensivo, *A*, sia in termini di gradi di libertà del modello che di tempo di CPU.

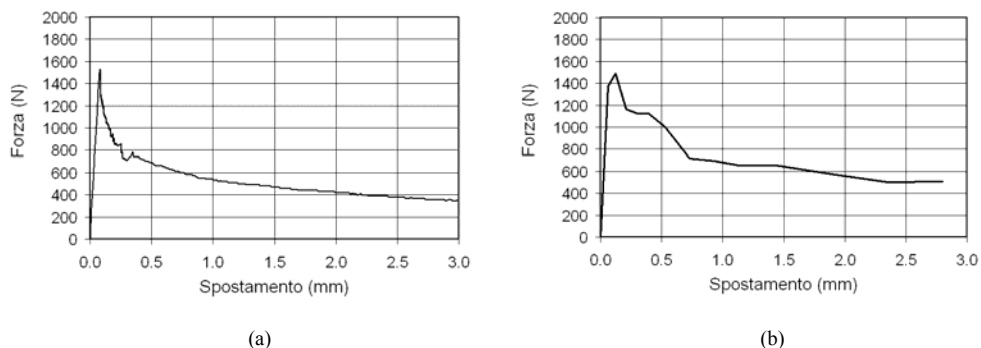


Figura 11 – Curva forza-spostamento: (a) metodo computazionale intensivo, *A*; (b) metodo computazionale ridotto *C*

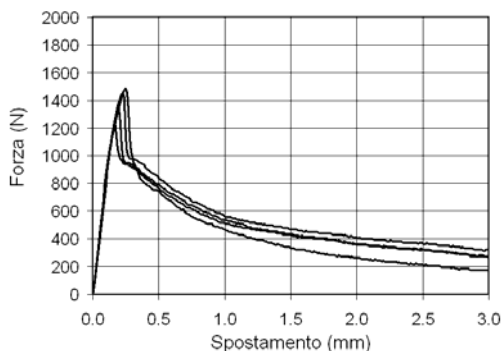


Figura 12 – Diagramma forza-spostamento da prove sperimentali

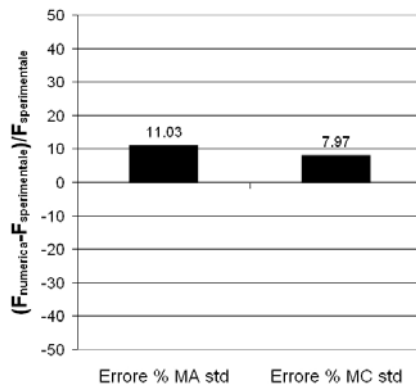


Figura 13 – Errori percentuali per metodo A e metodo C rispetto alle prove sperimentali

Tabella 3 – Confronto tra metodo A e metodo C in termini di gradi di libertà e tempi di calcolo

	GdL	Solutore	Tempo CPU (s)
Metodo A	31808	Standard	30878
Metodo C	1665	Standard	14.4

4. DISCUSSIONE

4.1. Analisi Delle Tensioni Elastiche

Analisi sistematica 2D. Dal confronto del campo di tensioni nello strato adesivo, per una specifica configurazione (Fig. 5), emerge il buon accordo tra i metodi computazionali ridotti (*B* e *C*), il metodo completo, *A*, ed il riferimento analitico di Goland e Reissner [13]. In particolare il metodo *C* fornisce una buona previsione anche dei valori di picco di tensione, sia normali che tangenziali.

Per quanto riguarda l'analisi sistematica si osserva, dai diagrammi di Fig. 6, che l'errore relativo del metodo ridotto *B*, sul picco tensionale (normale e tangenziale) è rilevante, specialmente per le geometrie dei giunti dal 4 al 9 con aderendi in composito. Inoltre si nota una sottostima sistematica delle tensioni di picco. Ciò può essere attribuito alla diversa flessibilità del giunto causata dall'estensione dello spessore di adesivo. Per migliorare l'accuratezza del metodo ridotto *B*, si sono considerate anche differenti formule per il calcolo del modulo elastico corretto, che fornissero sia valori più bassi che più alti, ma senza ottenere mai risultati migliori di quelli qui presentati. Pertanto il metodo può essere utilizzato solo per fornire stime sull'ordine di grandezza delle tensioni.

Dagli istogrammi di Fig. 7 si nota, invece, come il metodo ridotto *C*, mostri una buona accuratezza sull'intera gamma di geometrie e materiali, per tutti i livelli di carico esaminati. Nel caso della previsione del valor massimo di tensione normale l'accuratezza del metodo è inferiore solo nel caso di giunti con aderenti più sottili (1, 2, 3) dove è più importante l'effetto della non linearità geometrica, come si osserva in Fig. 7a.

Maggiore appare la precisione del metodo sui valori di picco di tensione tangenziale, come si nota in Fig. 7b. Nel complesso si sono ottenute ottime previsioni soprattutto per materiali ad alto modulo elastico e comunque con medie di errore relativo inferiori al 15%. Si è verificato, inoltre, anche se non riportato per brevità, che entrambi i metodi computazionali ridotti proposti (*B* e *C*) risultano essere sostanzialmente indipendenti dalla non linearità associata al livello di carico, sebbene si noti come il metodo *C* dia risultati più accurati del metodo *B*.

Relativamente ai tempi di elaborazione rilevati, per il caso di analisi 2D, appare evidente come questo drastico risparmio sia diretta conseguenza della riduzione del numero di gradi di libertà coinvolti nel modello, per entrambi i metodi ridotti (*B* e *C*).

L'efficienza dei metodi proposti consente quindi di affrontare l'analisi anche di strutture con dimensioni che le renderebbero non gestibili, se affrontate mediante i metodi numerici tradizionali, in quanto risulterebbero computazionalmente troppo onerose.

4.1.1. Analisi Configurazioni 3D

Analisi di giunzione single-lap 3D. Il confronto di Figura 8, effettuato sulla distribuzione di tensioni sulla mezzeria dell'adesivo, appare molto convincente. I risultati forniti dal metodo intensivo, *A*, e dal metodo ridotto *C*, sono molto simili, sia in termini di tensioni normali che tangenziali ed indipendentemente dal carico applicato. L'accordo tra i due modelli è buono anche relativamente ai valori di picco delle tensioni ed anche nel caso di carichi che producono tensioni ben oltre le normali risorse di un buon adesivo strutturale. Il modello ridotto *C*, riesce, inoltre, a rappresentare senza difficoltà l'effetto di fenomeni tipicamente tridimensionali, come la curvatura anticlastica del giunto, garantendo un ottimo accordo della previsione tensionale anche fuori dal piano di simmetria della giunzione, fino sui bordi esterni (non mostrato per brevità).

Analisi di squadretta a mensola 3D. Il confronto di Figura 9, relativo agli spostamenti normali al piano dello strato adesivo per la squadretta 3D, mostra un buon accordo tra il modello computazionale completo, *A*, e quello ridotto *C*. Nonostante la bassa risoluzione dovuta allo scarso numero di elementi su cui è basato, il modello ridotto *C*, fornisce una stima eccellente degli spostamenti sull'intero piano di mezzeria dell'adesivo, con piccole differenze solamente sui bordi dell'adesivo.

I risultati riportati in Figura 10 mostrano, inoltre, che le prestazioni del metodo ridotto *C*, sono molto buone anche per quanto riguarda la distribuzione tridimensionale di tensioni normali (Fig. 10a) e tangenziali (Fig. 10b), dove gli scostamenti tra le due superfici sono significativi solo sul contorno dello strato di adesivo a causa di effetti di bordo.

Anche nel caso tridimensionale, in virtù del numero estremamente ridotto di gradi di libertà ad esso associati, il modello ridotto *C* conferma un notevole risparmio in termini di onere computazionale.

4.2. Analisi a Collasso

In Figura 11 e Figura 12 si osserva complessivamente una buona corrispondenza degli andamenti della caratteristica forza-spostamento del giunto T-peel tra simulazione ed esperimento. In particolare il tratto di salita elastica, fino al raggiungimento di forza massima di collasso, è molto simile sia confrontando tra loro i metodi computazionali, sia assumendo come riferimento le risposte ottenute nelle prove sperimentali. Le prove sperimentali, mostrate in Fig. 12, sono, però, caratterizzate da valori di corsa maggiori per il raggiungimento della forza massima di collasso, probabilmente imputabili ai giochi presenti nella catena cinematica dell'attrezzatura sperimentale. Per quanto riguarda il tratto di discesa, rappresentativo dell'evoluzione del collasso della giunzione, si osserva che il metodo computazionale ridotto *C*, fornisce una previsione delle forze moderatamente superiore a quanto misurato sperimentalmente. Buona è, invece, la previsione in tal senso del metodo completo, *A*.

Un esame specifico è riservato ai valori di picco della forza di collasso, per i quali si è valutato l'errore percentuale tra previsione numerica e risultato sperimentale. Dal confronto di Figura 13 emerge un buon accordo dei valori, con un errore massimo del 11%, in eccesso, per il metodo numerico *A*, e di circa l'8% per il metodo ridotto *C*, sempre rispetto al dato sperimentale.

Anche limitandosi ad un confronto solo tra i metodi numerici, il metodo *C* mostra uno scostamento contenuto (meno del 3%), come forze di picco, rispetto al metodo *A*.

Interessante è il confronto in termini di tempi di analisi e gradi di libertà del modello, mostrato in Tab. 3 tra metodo computazionale completo *A*, e ridotto *C*. Il risparmio nell'impiego del metodo ridotto *C*, a livello di tempo di occupazione della CPU, è di tre ordini di grandezza (>2100 volte). Nel complesso, quindi, il metodo *C*, pur caratterizzato da risultati di precisione lievemente inferiore, consente una drastica diminuzione dell'onere computazionale, problema che tipicamente caratterizza le analisi numeriche delle giunzioni incollate.

Nel caso di analisi su strutture più complesse ed estese, frequenti nella pratica industriale, la riduzione dei gradi di libertà coinvolti nel modello e dei conseguenti tempi di calcolo risulterebbe, inoltre, ancora più significativa. Da tale punto di vista il metodo proposto costituisce una valida alternativa ai tradizionali modelli intensivi, tipo il metodo *A*, che saturano molto rapidamente le risorse di calcolo. Rispetto all'impiego di elementi speciali per la modellazione dello strato adesivo (molle, connettori, elementi special purpose), il metodo *C* ha inoltre il vantaggio evidente che si basa sugli elementi standard dei software commerciali agli elementi finiti, senza necessità di specifiche implementazioni o di competenze specialistiche dell'operatore.

5. CONCLUSIONI

Al fine di sviluppare tecniche computazionali efficienti per l'analisi strutturale, in campo elastico e post-elastico, di giunzioni incollate complesse, si esaminano due metodi numerici semplificati, basati sull'uso originale di strumenti di modellazione e di elementi finiti convenzionali. Tali metodi sono confrontati con una soluzione analitica presente in letteratura, con un modello completo agli elementi finiti e con risultati sperimentali.

Entrambi i modelli proposti, sviluppati con il software ABAQUS, descrivono gli aderendi con elementi strutturali (travi o gusci) e lo strato adesivo con un singolo strato di elementi solidi (tensione piana o esaedri). Gli elementi dell'adesivo possono, alternativamente, subire un aumento di spessore, esteso fino alla mezzzeria degli aderendi, con variazione proporzionale delle costanti elastiche (metodo *B*), oppure mantenere lo stesso spessore e le stesse proprietà elastiche dello strato adesivo reale (metodo *C*). La connessione dell'adesivo agli aderendi è realizzata per mezzo della fusione dei nodi (metodo *B*) o attraverso vincoli interni cinematici standard (metodo *C*). Per entrambi i metodi, la lunghezza degli elementi nel piano dell'adesivo è pari alla distanza tra le superfici medie degli aderendi. Le analisi di verifica riguardano il campo elastico ed il campo post-elastico. In campo elastico, le verifiche iniziano dall'analisi estensiva di configurazioni single-lap 2D, pianificate secondo i criteri della metodologia DOE, e sono quindi estese a configurazioni 3D, che includono, tra l'altro, una squadretta a mensola incollata ad una parete rigida. In campo post-elastico, la verifica riguarda la previsione del comportamento post-elastico di una giunzione T-peel, secondo una specifica configurazione reperita in letteratura. Entrambi i metodi ridotti consentono una riduzione del numero di gradi di libertà del modello che va da 50 a 150 volte rispetto al modello intensivo, con diminuzione dei tempi di calcolo variabile tra un fattore 600 (casi piani) ed un fattore 2500 (casi 3D). Anche se il metodo *B* è affetto da errori significativi, il metodo *C* fornisce risultati di buona accuratezza sia in campo elastico che nella previsione del comportamento post-elastico per configurazioni sia 2D che 3D. L'accuratezza e la facilità di applicazione rendono questo metodo molto valido per effettuare analisi elastiche ed a collasso di strutture incollate in parete sottile, di geometria complessa e di grandi dimensioni.

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Rao, B. N., Rao, Y. V. K. S. and Yadagiri, S., 1982, "Analysis of composite bonded joints", *Fibre Science and Technology*, 17, pp. 77-90.
- [2] Yadagiri, S., Reddy, C. P. and Reddy, T. S., 1987, "Viscoelastic analysis of adhesively bonded joints", *Computers & Structures*, 27, 4, pp. 445-454.
- [3] Reddy, J. N. and Roy, S., 1988, "Non-linear analysis of adhesively bonded joints", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 23, pp. 97-112.
- [4] Amijima, S. and Fujii, T., 1987, "A microcomputer program for stress analysis of adhesive-bonded joints", *Int. J. of Adhesion and adhesives*, 7, pp. 199-204.
- [5] Carpenter, W. C., 1990, "Viscoelastic analysis of bonded connections", *Computers and Structures*, 36 (6), pp. 1141-1152.
- [6] Lin, C. C. and Lin, Y. S., 1992, "A finite element model of single-lap adhesive joints", *Int. J. Solids Structures*, 30 (12).
- [7] Edlund, U. and Klarbring, A., 1992, "A geometrically nonlinear model of the adhesive joint problem and its numerical treatment", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 96, 329-350.
- [8] Andruet, R. H., Dillard, D. A., and Holzer, S. M., 2001, "Two- and three-dimensional geometrical nonlinear finite elements for analysis of adhesive joints", *Int. J. of Adhesion and Adhesives*, 21, pp. 17-34.
- [9] Goncalves, J. P. M., Moura, M. F. S. F. and Castro, P.M.S.T., 2002, "A three-dimensional finite element model for stress analysis of adhesive joints", *Int. J. of Adhesion and Adhesives*, 22, pp.

357-365.

- [10] Tong, L. and Sun, X., 2003, "Adhesive elements for stress analysis of bonded patch to curved thin walled structures", *Computational Mechanics*, 30, pp 143-154.
- [11] Goglio, L., Rossetto, M., Dragoni, E.: A simple failure criterion for the design of adhesive joints, 7th Int. Conf. Struct. Adhesives in Engineering (SAEVII), Bristol, 15-17 July 2004.
- [12] Castagnetti, D. and Dragoni, E., 2006, "Efficient stress analysis of adhesively bonded joints by finite elements techniques", *Proceedings of ESDA 2006, 8th biennial ASME Conference*.
- [13] Goland, M. and Reissner, E., 1944, "The stresses in cemented joints", *J. of Applied Mechanics*, 1944.
- [14] ABAQUS 6.6, 2006, "Users' Manual", DS-Simulia.
- [15] Montgomery, D. C., "Design and analysis of experiments", John Wiley and Sons, 2005, 6th Edition, USA, ISBN 0417661597.
- [16] H. Langhaar, "Dimensional analysis and theory of models", John Wiley & Sons, 1951.
- [17] ASTM-D 1876: "Standard test method for peel resistance of adhesives (T-Peel Test)", (2001).
- [18] Pironi A.: Simulation of fracture in bonded joints with a cohesive model, 15th European Conference of Fracture, Stockholm, Sweden, August 11-13, (2004)
- [19] D. A. Bigwood , A. D. Crocombe: Elastic analysis and engineering design formulae for bonded joints, *Int. J. of Adhesion and Adhesives*, 9, pp. 229-242 (1989).
- [20] Castagnetti, D., Dragoni, E., Spaggiari A. (2007) "Metodi efficienti agli elementi finiti per l'analisi a collasso di strutture incollate" *Atti del XXXVI Convegno Nazionale AIAS*, 4-8 Settembre, Ischia.

A NEW SEQUENTIAL APPROACH TO THE MODELLING OF HUMAN DIARTHRODIAL JOINTS

Riccardo Franci

*Department of Mechanical and Aeronautical Engineering,
University of Bologna, Italy
E-mail: riccardo.franci@unibo.it*

Vincenzo Parenti Castelli

*Department of Mechanical and Aeronautical Engineering,
University of Bologna, Italy
E-mail: vincenzo.parenticastelli@mail.ing.unibo.it*

Nicola Sancisi

*Department of Mechanical and Aeronautical Engineering,
University of Bologna, Italy
E-mail: nicola.sancisi@mail.ing.unibo.it*

Abstract. *The basic role played by models of the diarthrodial joints in surgery, in pre-surgical planning and in prosthesis design has been widely stressed in the literature. Different approaches have been proposed in order to highlight the role of the main anatomical structures of the joint. Most models are based on in vivo measurements which, however, are difficult to perform. This paper presents a sequential procedure based on three steps for the modelling of a joint. At each step a more and more complicated model of the joint is provided. Starting with a limited number of the passive anatomical structures of the joint (ligaments, for instance), all the structures, both passive and active (muscles), are incorporated in the final model step by step. This procedure makes it possible to progressively gain a deeper understanding of each structure of the joint. Examples of application to the knee and ankle joints are finally reported, which show the potential of the sequential procedure proposed in this paper.*

Keywords: *human joints, models, equivalent mechanisms, sequential procedure*

1. INTRODUCTION

The study of human diarthrodial joints has involved efforts of an impressive number of researchers. Basic studies focussed on experimental measurements of the relative motion of the main bones of the joint under investigation. The measurements performed in vitro (cadaver specimens) and/or in vivo (patients and volunteers) have the following various purposes:

- to test and validate measurement techniques [1, 2] as well as define standardization of diagnosis and rehabilitation procedures [3];
- to obtain a deeper knowledge on the behaviour of these joints which exhibit a quite complicated anatomical structure [4, 5, 6];
- to validate and improve mathematical models of the articulations [7, 8].

Mathematical models are among the most powerful tools for the functional analysis of such a complicated biological structures and represent helpful tools for the solution of important issues such as, for instance:

- definition of surgical and diagnostic procedures for joint disorders caused by injuries and/or diseases;
- designing prosthesis devices [9];
- assessment of the role of the joint biological structures in the joint characteristics in normal and pathological conditions [1];

Planar and spatial mathematical models of joints have been presented in the literature [8-13]. Planar models proved to be of great usefulness. However, for many joints they cannot take into account some complicated and subtle phenomena involved in the joint motion since most of them intrinsically have a three-dimensional motion.

The models presented in the literature are based on two different approaches. The first one models the biological structures of the joint connections such as ligaments, muscles, and articular surfaces by means of linear and non-linear elastic and dumping elements, lumped and/or distributed parameters, and finds the relative motion of the main bones by solving the equations of motion of the resulting model [1, 2, 14-16]. The main bones are allowed to have up to six degrees of freedom (DOF) in their relative motion which finally depends on the external forces applied to the joint and on the elastic and dumping characteristics of the joint connecting structures. These models are computationally demanding but are also suitable to simulate the dynamic behaviour of the joint in addition to its kinematic and static behaviour.

The second approach, instead, models the joint as a linkage or an equivalent mechanism [17-19] whose geometry is based, as much as possible, on the joint's anatomical structures. The motion of the mechanism predicts the relative motion of the joint's main anatomical structures. These mechanisms are suitable to analyze the passive motion of the joint, that is, the motion of the joint under virtually unloaded conditions (no external loads), which is believed to have a great relevance for a deeper understanding of the joint kinematics [1]. Indeed, for instance, with regard to the knee joint "the actual motion patterns of the human knee joint depend on a combination of its passive motion characteristics and the external loads" [1].

Examples of equivalent mechanisms with one or more DOFs have been proposed in the literature to account for the joint passive motion. Most of them are planar mechanisms and only a few are spatial. For example, one of the first spatial equivalent mechanism (with one DOF) for the study of the knee passive motion was presented in [19, 20]. The power of this model was that it combined a relative simplicity with the ability to take the tibia-femur spatial motion

into good account.

The authors of this paper started working on this field by basing their research on the O'Connor approach [19]. In particular, much work was done mainly on the modelling of passive motion of the human knee and the ankle joints. Remarkable results were obtained and presented in [21-24].

Passive motion involves only some anatomical structures, i.e. the main passive structures of the joint. Instead, the modelling of kinetostatic and dynamic behaviour of the joints involves all the anatomical structures, that comprise both passive (ligaments, tendons, and bones) and active (muscles) structures. In this case, ligament elasticity is necessarily involved, thus making the models mathematically more complicated since model elements would have a subtle relation with the anatomical structures. This would make the outcomes of the models difficult to interpret and the model itself less useful to surgeons and to prosthesis designers.

In this context a new approach has been devised and presented here in a structured form for the kinematic, kinetostatic and dynamic modelling of diarthrodial joints. The approach makes it possible to consider all the anatomical structures of a joint, both the passive and the active ones, making their role in the kinematic and kinetostatic-dynamic behaviour of the joint itself evident. The approach relies upon some basic hypotheses and is based on three main steps from which, in order, three joint models of increasing complexity can be obtained. More precisely, the first step models the joint passive motion, the second step takes into account the kinetostatic behaviour of the joint under external loads, and the third step considers the (dynamic) influence of the active elements such as the muscles.

The following sections are organized as follows: the general presentation of the proposed approach is presented in section 2. Section 3 exhibits some application of the proposed approach to some joints, and the corresponding results of the simulation and measurements. Finally, some conclusions are reported.

2. NEW SEQUENTIAL APPROACH

The new sequential approach proposed relies upon experimental measurements and mechanical models of the articulations. Three different steps are involved in the whole process. Each step refers to a model: each model is an evolution of the model obtained at the previous step. A process of optimization makes it possible to define the main geometric and structural parameters of the model at each step. The three steps therefore provide three different models, which for convenience are called M1, M2 and M3 respectively.

All models rely upon two basic rules:

- once a parameter has been identified at a particular step, it is left unmodified at the next steps;
- parameters identified at each step must be chosen in a way that they do not alter the results obtained at the previous steps.

These two rules guarantee that the results obtained at each step do not worsen those already obtained at previous steps and, most importantly, they make it possible to choose new parameters without violating possible anatomical constraints satisfied at previous steps.

In this sense, the proposed sequential approach is substantially an inductive procedure that starts from the definition of a simple model that can replicate the behaviour of the articulation under very strict conditions (with only some basic anatomical structures considered). This preliminary model is then enriched, at each step, by adding further anatomical structures which make the model progressively more complex, i.e. more sophisticated, in order to obtain a more generalized model which can replicate the behaviour of the joint under less restrictive conditions.

The three models identified at each step are the following:

- **STEP 1 (M1 model).** This is the model of the passive motion of the articulation. It refers to the joint's main anatomical structures which are involved during the motion of the joint under virtually unloaded conditions. In practice they are the passive structures that guide the motion of the joint: in most cases they are represented by bones which are in mutual contact during the motion and ligaments that interconnect the bones. Since no external force and moment are considered, the passive structures involved do not normally provide forces. This allows the assumption that all structures behave as rigid bodies. Thus, the M1 model can be represented by an equivalent planar or spatial mechanism having rigid bodies. The geometric parameters of the models are identified by an optimization process based on in vivo measurements of the joint passive motion.
- **STEP 2 (M2 model).** The M2 model comprises the M1 model with the addition of the remaining passive structures, the ones that are not considered in the previous step. External forces and moments are considered and all the passive structures involved (both those of the M1 Model and those added at this step) are now considered as elastic or viscoelastic structures. The physical model no longer has the feature of a rigid body equivalent mechanism, but it incorporates elastic/viscoelastic elements. Once again, the model's geometric and structural parameters are identified by mean of an optimization procedure based on experimental data collected by in vivo experiments. The identification procedure is performed by satisfying the rules of the sequential approach.
- **STEP 3 (M3 model).** The M3 model comprises the M2 model with the addition of all the active joint structures, i.e. mainly all muscles involved in the motion of the joint. The physical model has similar rigid-elastic/viscoelastic features to the M2 model but incorporates dynamic loads (inertia). Once again, an optimization procedure makes it possible to identify the remaining geometrical and structural parameters of the model.

At each step it is therefore possible to identify the role of the added structures.

In conclusion, the M1 model allows the study of the joint passive motion which mainly comprises kinematic concepts; in fact, no forces are involved. The role of the main passive structures, such as ligaments and bones, which guide the motion of the joint under no external load is highlighted.

The M2 model studies the motion and the stiffness of the joint under external loads. It allows considerations on the joint stability, to understand the role that both the main and the secondary passive structures play on it. The model, in practice, is represented by a mechanical

system with both rigid and elastic/viscoelastic links which allow kinematic, static and kinetostatic analyses to be performed.

The M3 model is the most complete and complex model: it incorporates all the structures of the joint and allows kinematic, static and dynamic analyses to be performed. The role of the active structures such as the muscles is highlighted by this model.

Each model has its own advantages and disadvantages: M1 is simple and computationally not too much expensive but provides a limited amount of information, whilst M3 is computationally demanding but provides all the information related to the behaviour of the joint.

3. APPLICATIONS

As an application of the proposed procedure, the M1 model is reported for two important human joints, namely the knee and the ankle. Model M2 for the knee is reported in [25], while the M2 model for the ankle was partially developed in [26], when this new procedure was still not completely devised. At the moment, M3 models for these two joints are under developments.

The human knee

The knee is a joint which allows the relative motion between three bones of the legs, i.e. the femur, tibia and patella (Fig. 1). Two sub-joints can be recognized according to the bones that enter into contact with each other during knee flexion: the tibio-femoral joint (TF) allows the relative motion between the femur and tibia and the patello-femoral joint (PF) allows the relative motion between the patella and femur. These motions are guided in general by articular surfaces (the femur and tibia condyles, the trochlea and the back surface of the patella), by passive structures (such as the ligaments) and by active structures (such as the muscles).

The passive motion of the knee is thus the relative motion of the tibia, femur and patella when no loads are applied to the articulation. Several studies [11, 17] prove that the movement of the TF during passive flexion is a one DOF motion: once the flexion angle is imposed on the articulation, the corresponding pose (position and orientation) of the tibia with respect to the femur is defined, both univocally and experimentally replicable. The same result holds also for the relative movement of the patella and femur [27]: although the PF is slightly more slack during passive flexion if compared to the TF, experimental results prove that for a given flexion angle of the knee the relative pose of the patella with respect to the femur is replicable. As a consequence, the patella also has a one DOF of unresisted motion with respect to the femur.

Among the equivalent spatial parallel mechanisms proposed to simulate the passive motion of the knee, one DOF mechanisms have been presented which can accurately replicate the passive motion of the TF [11, 21, 28, 29] and PF [30]. The first equivalent mechanism for the modelling of the whole knee has been presented in [30]. The philosophy of equivalent mechanisms fits well with the rules of the new approach proposed in this study: these models can indeed replicate the knee passive motion by modelling only those structures that actually

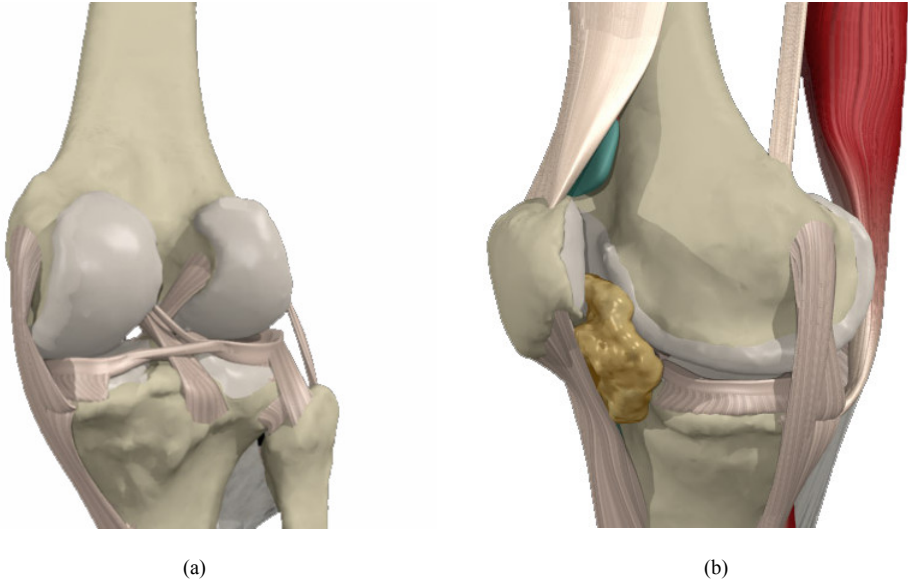


Figure 1. The knee joint: (a) posterior view and (b) medial view.

influence this particular motion. On the contrary, the other structures are excluded from the passive motion model: they will be modelled in step 2 or step 3 of the procedure.

The passive motion model of the knee required by the first step can be devised by referring to the above-cited studies. In this paper, in particular, TF motion is modelled by means of a 5-5 fully parallel mechanism (defined in the following) as in [28], while PF motion is modelled by means of a revolute joint, suitably connected to the femur and tibia, as presented in [30]. The key aspects of these models are reported below.

In order to define a model which can replicate the passive motion of the knee, it is fundamental to understand how articular surfaces, and passive and active structures influence both TF and PF motion. As regards articular surfaces, the femur and tibia condyles can be fitted by spheres centred on points \mathbf{A}_1 and \mathbf{A}_2 on the tibia and on points \mathbf{B}_1 and \mathbf{B}_2 on the femur (Fig. 2). These spheres have to remain in contact two by two during passive flexion and can thus be replaced by two kinematically equivalent rigid binary links connected at the femur and tibia through spherical pairs centred at points \mathbf{A}_i and \mathbf{B}_i , $i = 1, 2$. Furthermore, the trochlea and the portions of femoral condyles which are involved in PF contact can be approximated by a cylinder. Thus, the relative motion of the patella and femur occurs about an axis, i.e. the axis of the approximating cylinder, while axial translation can be ignored. As a consequence, the contact between the patella and femur can be modelled by a revolute joint which mutually connects the two bones. This joint can be identified on the femur by the unit vector \mathbf{n}_1 (parallel to the joint axis) and the point \mathbf{Q}_1 (arbitrarily chosen on the joint axis); the joint can be identified on the patella accordingly, by means of the unit vector \mathbf{n}_2 and the point \mathbf{Q}_2 . The axis

on the femur and the one on the patella are constrained to be coincident during passive motion, while the distance λ between Q_1 and Q_2 has to remain constant.

Moreover, since no forces are exerted on the knee, no forces can be exerted by the passive structures to satisfy the equilibrium of the system composed of the tibia, femur and patella. The internal forces due to the passive structures could be internally autobalanced, thus invalidating the concept of unloaded condition, but these circumstances would be extremely complex to achieve on the full flexion-extension movement, also considering friction between articular components. As a consequence, the ligaments cannot be tight during passive flexion: they can at the most reach the limit between laxity and tension. These considerations are supported by experimental observations which show that some fibres of the anterior cruciate (ACL), posterior cruciate (PCL), medial collateral (MCL) and patellar (PL) ligaments remain almost isometric in passive flexion, while other structures are slack. Because of this property, these fibres can be seen as four rigid binary links: the first three links are connected at the femur and tibia through spherical pairs centred respectively at the points A_j and B_j , $j = 3, 4, 5$; the last one is connected at the points C_1 on the tibia and D_1 on the patella through spherical pairs (Fig. 2).

As regards active structures, they can intrinsically exert forces but, in general, they practically do not oppose external forces when inactive. Since no loads are applied to the joint during passive motion, active structures remain inactive: they cannot guide the passive motion

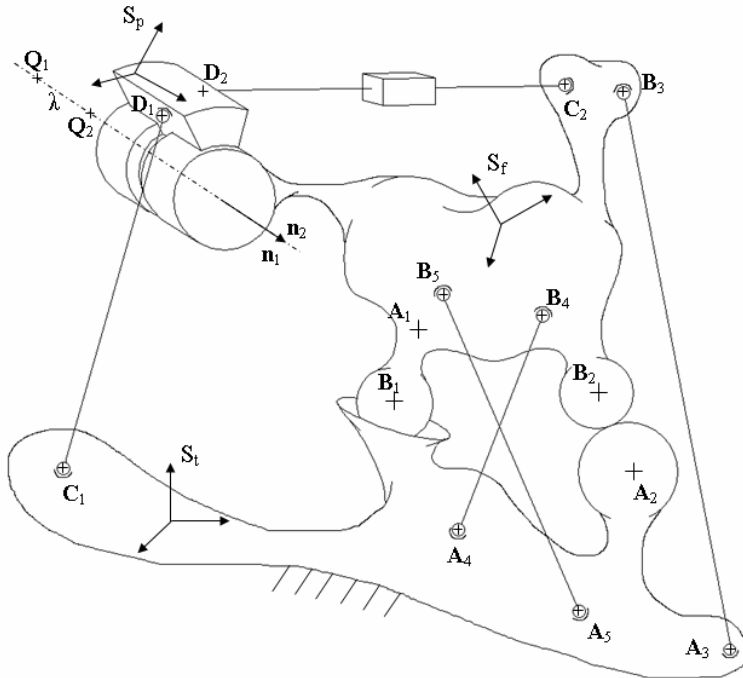


Figure 2. Schematic of the knee complex joint.

of the knee. As a consequence, the muscles are not considered in the M1 model, in general; only the quadriceps is represented for completeness. It is modelled by means of two rigid links joined together by a prismatic pair; this two-link complex is then connected at the point \mathbf{C}_2 on the femur and \mathbf{D}_2 on the patella through spherical pairs (Fig. 2). It can be easily proved that the addition of the two-link complex to the model does not modify PF and TF motion.

The passive motion model of the knee is represented in Fig. 2. It can be proved that the mechanism has one DOF, if idle inessential DOFs are ignored. In particular, the TF sub-chain (i.e. the mechanism composed by the femur and tibia and by the links connected at the points \mathbf{A}_i and \mathbf{B}_i , $i = 1, 2, \dots, 5$) is a 5-5 fully parallel mechanism.

The relative motion between the tibia, femur and patella can be found by solving the closure equations of the equivalent mechanism. In particular, the solution of these equations provides the relative poses of three anatomical frames, respectively attached to the tibia (S_t), femur (S_f) and patella (S_p), once the flexion angle is imposed on the joint. More detailed information on the coordinate reference systems are reported in [30]. A relative pose of the femur with respect to the tibia can be expressed by means of the 3x3 rotation matrix R_{tf} for the transformation of vector components from S_f to S_t , and the position \mathbf{P}_{tf} of the origin of S_f in S_t . Matrix R_{tf} can be expressed as a function of three rotation parameters α_{tf} , β_{tf} and γ_{tf} , which represent the flexion, ab/adduction and intra/extra rotation angles of the femur relatively to the tibia, according to the Grood and Suntay convention [31]. Likewise, the matrix R_{fp} (function of the angles α_{fp} , β_{fp} and γ_{fp}) and the vector \mathbf{P}_{fp} express a relative pose of the patella with respect to the tibia. Even though the Grood and Suntay convention was originally defined for the TF, its application on other joints (the PF included) is becoming routine practice in the scientific literature.

The closure equations of the complete mechanism are:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{A}_i - R_{tf} \cdot \mathbf{B}_i - \mathbf{P}_{tf}\| &= L_i \quad (i=1, 2, \dots, 5) \\
 R_{fp} \cdot \mathbf{n}_2 &= \mathbf{n}_1 \\
 R_{fp} \cdot \mathbf{Q}_2 + \mathbf{P}_{fp} &= \lambda \mathbf{n}_1 + \mathbf{Q}_1 \\
 \|R_{tf} \cdot (R_{fp} \cdot \mathbf{D}_1 + \mathbf{P}_{fp}) + \mathbf{P}_{tf} - \mathbf{C}_1\| &= L
 \end{aligned} \tag{1}$$

where the points \mathbf{A}_i and \mathbf{C}_1 are measured in S_t , the points \mathbf{B}_i , \mathbf{C}_2 , \mathbf{Q}_1 and the vector \mathbf{n}_1 are measured in S_f , the points \mathbf{Q}_2 , \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 and the vector \mathbf{n}_2 are measured in S_p ; L_i are the lengths of the rigid links connected at the points \mathbf{A}_i and \mathbf{B}_i ; L is the length of the link connected at the points \mathbf{C}_1 and \mathbf{D}_1 . The first 5 scalar equations and the last one constrain the points \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i and \mathbf{C}_1 , \mathbf{D}_1 to keep a constant distance; the second and the third vectorial equations force the axis identified by \mathbf{n}_1 and \mathbf{Q}_1 to be coincident with that identified by \mathbf{n}_2 and \mathbf{Q}_2 ; moreover, the third vectorial equation constrains \mathbf{Q}_1 and \mathbf{Q}_2 to keep a constant distance.

In the second vectorial expression of (1) only two out of three equations are independent, since \mathbf{n}_1 and \mathbf{n}_2 both have unitary norms. Thus, if the flexion angle α_{tf} is assigned, (1) is a system of 11 equations in the 11 unknowns β_{tf} , γ_{tf} , α_{fp} , β_{fp} , γ_{fp} and \mathbf{P}_{tf} , \mathbf{P}_{fp} components. These parameters define the relative pose of the tibia, femur and patella at each imposed flexion

angle. System (1) is a nonlinear system which normally provides more than one solution for a given value of the input angle. Specific procedures could be used to find all the possible solutions [32]. However, in this context only one solution is of practical interest and can be easily found by a numerical method, for instance, by a quasi-Newton numerical procedure [33].

As a result of step 1 of the proposed procedure, the model parameters which define the structures which guide the passive motion of the knee are determined. These parameters are the components of the insertion points \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i , \mathbf{C}_i , \mathbf{D}_i , those of the points \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 (only four out of six components are independent, because of the arbitrariness of the points), the components of the vectors \mathbf{n}_1 and \mathbf{n}_2 (only four out of six components are independent, since these vectors have unitary norm), the link lengths L_i , L and the distance λ between \mathbf{Q}_1 and \mathbf{Q}_2 . These parameters constitute a set of 51 geometrical parameters which define the M1 model of the knee and which have to be identified on experimental data. This set will remain unchanged during steps 2 and 3 of the procedure, in order to observe the first rule of the sequential approach.

The experimental data provide both the geometric dimensions of the main anatomical structures, which are used as a first tentative geometry of the mechanism, and the relative pose of the tibia, femur and patella at a number n of selected values of the flexion angle within a complete excursion.

The identification procedure used to synthesize the optimum geometry of the mechanism is based on optimization. At each step of the optimization iterative process, the closure equations (1) are solved for each measured flexion angle; then the relative poses of the tibia, femur and patella are iteratively compared with the poses obtained by measurement data by means of an error function f (objective function). The function is the sum of the squared and weighted errors of the experimental values of the variables with respect to the calculated ones, for all the n values of the flexion angle (α_{ij}). The function f is defined as follows:

$$f = \sum_{j=1}^{11} \sum_{i=1}^n \frac{(x_{ji} - x_{ji}^*)^2}{(x_{j_{\max}} - x_{j_{\min}})^2} \quad (2)$$

where, x_{ji} is the actual value of the j -th dependent variable, $j = 1, 2, \dots, 11$, of the 11 ones at the i -th pose, $i = 1, 2, \dots, n$; x_{ji}^* is the corresponding experimental value of the variable x_{ji} ; $x_{j_{\max}}$ and $x_{j_{\min}}$ are the maximum and minimum values of each of the dependent variables obtained during the experimental session.

If equation system (1) does not provide a real solution then an arbitrarily high value is given to the objective function f . If the objective function reaches a minimum the process stops, otherwise a new geometry of the mechanism is defined and the equation (2) is evaluated once again.

This particular objective function is proposed since it proved to be effective [21, 22, 34]. Since the function f is highly nonlinear and has discontinuities, the optimization procedure is initially solved by means of a genetic algorithm or, alternatively, by means of a direct search

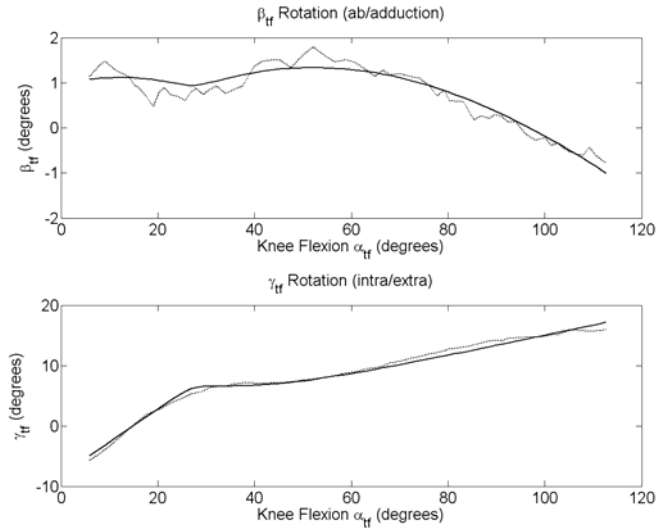


Figure 3. Passive motion simulation: angles β_{tf} and γ_{tf} versus knee flexion angle α_{tf} .

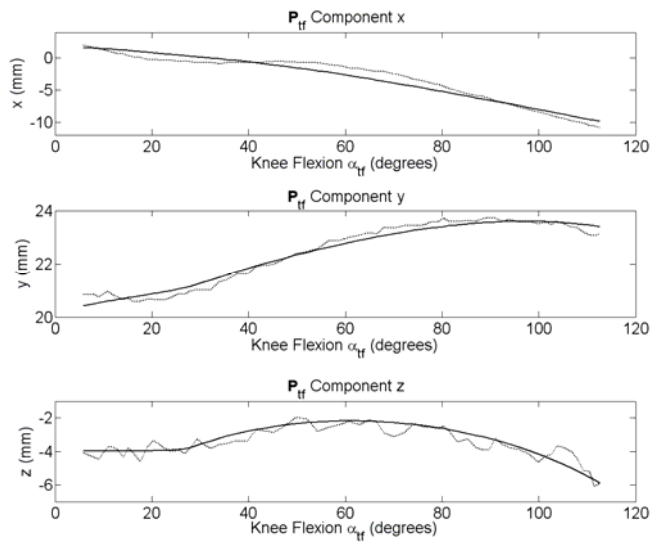


Figure 4. Passive motion simulation: \mathbf{P}_{tf} components versus knee flexion angle α_{tf} .

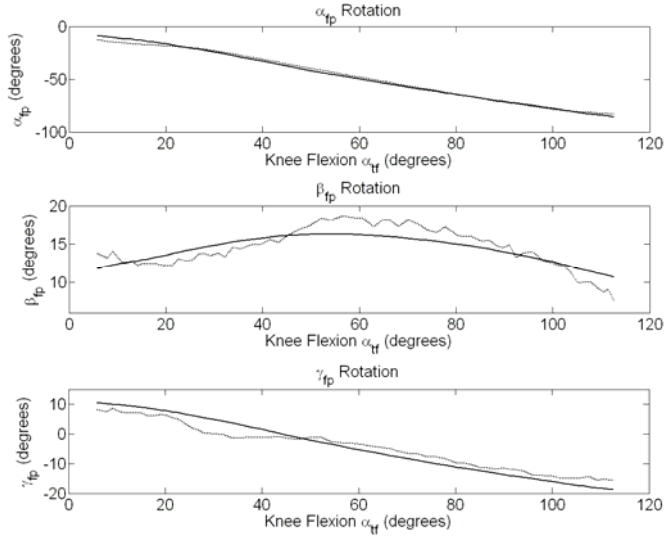


Figure 5. Passive motion simulation: angles α_{fp} , β_{fp} and γ_{fp} versus knee flexion angle α_{tf} .

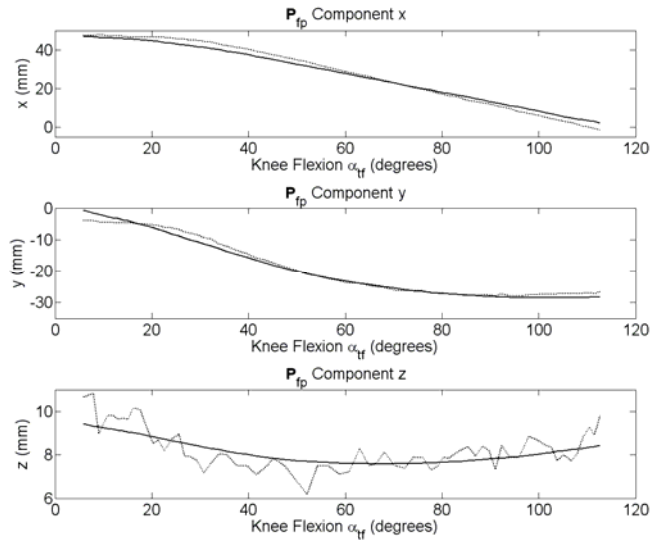


Figure 6. Passive motion simulation: \mathbf{P}_{fp} components versus knee flexion angle α_{tf} .

method [36]. The obtained solution is then refined by means of a quasi-Newton algorithm [34]. It is worth noting that the introduction of lower and upper bounds to the values of the 51 parameters that define the geometry of the equivalent mechanism provides a final geometry of the optimized equivalent mechanism which retains the anatomical feature of the knee joint.

Figures 3-6 report both experimental and simulation data of a specimen. In particular, the angles β_{tf} , γ_{tf} , and the \mathbf{P}_{tf} components are reported in Fig. 3 and Fig. 4 respectively, as a function of the knee flexion angle; the angles α_{fp} , β_{fp} , γ_{fp} and the \mathbf{P}_{fp} components are reported accordingly in Fig. 5 and Fig. 6.

These results show that the proposed kinematic model of the knee joint can accurately reproduce the relative motion of the patella, femur and tibia in passive flexion.

The human ankle joint

The human ankle joint features three main bones: the tibia which forms the inside, or medial, portion of the ankle; the fibula which forms the lateral, or outside portion of the ankle; and the talus underneath (Fig. 7). A fourth bone, the calcaneus, is considered as rigidly joined with the talus.

Clinical evidence and experimental results show that the passive relative motion of the tibia and talus, which are the main bones of the ankle joint, is a complex spatial motion that can be replicated very well by one-DOF spatial equivalent mechanisms [6, 22, 35]. Like the knee joint, these mechanisms are based on the geometry of the main anatomical structures of the ankle joint, namely on the shape of the talus and tibio/fibula bones at their interface and on two main ligaments. Moreover, these mechanisms rely upon the experimental observations that some fibres of the calcaneofibular ligament (CaFiL) and the tibiocalcaneal ligament (TiCaL) are nearly isometric during ankle passive motion. The location of this ligaments is shown in Fig. 7.

In particular, in [22] the relative motion of the talus/calcaneus, considered as a single bone, with respect to the tibia/fibula, also considered as a single bone, was modelled by means of three sphere-to-sphere contact points at the tibiotalar interface and by the isometric fibres of the CaFiL and TiCaL ligaments.

The three contact points were identified at the lateral malleolus (a pyramidal process on the lateral surface of the lower extremity of fibula), at the internal region of the inferior surface of the distal tibia articulated with the talus surface, and at the medial malleolus (a pyramidal process on the medial surface of the lower extremity of tibia).

Based on these observations and assumptions a schematic of the M1 model of the ankle joint is shown in Fig. 8. Here the two talocalcaneal and tibiofibular segments feature three sphere-to-sphere contact points where points \mathbf{A}_i and \mathbf{B}_i , $i = 3, 4, 5$, represent the centres of the mating spherical surfaces fixed to the tibia/fibula and talus/calcaneus respectively, while points \mathbf{A}_i , and \mathbf{B}_i , $i = 1, 2$, represent the insertion points on the two segments of two isometric fibres of the two ligaments CaFiL and TiCaL respectively.

During the relative motion of the two ankle segments, each pair of mating spherical surfaces maintains the contact; therefore the distance $L_i = A_i B_i$, $i = 3, 4, 5$, is constant. Moreover the distance $L_i = A_i B_i$, $i = 1, 2$ is also constant during the passive motion since it represents the length of the ligament isometric fibre.

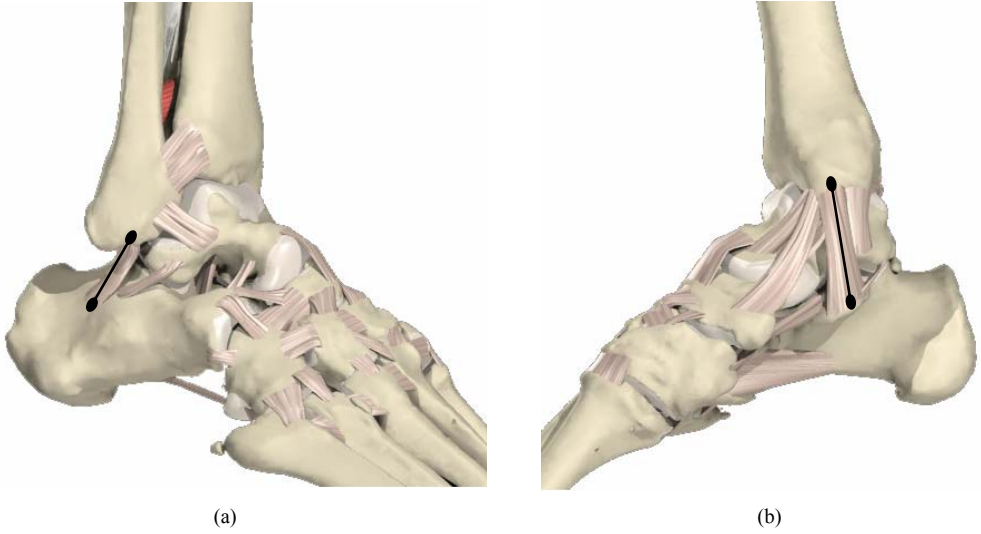


Figure 7. The ligaments of a right human ankle joint: (a) calcaneofibular (CaFiL) and (b) tibiocalcaneal (TiCaL).

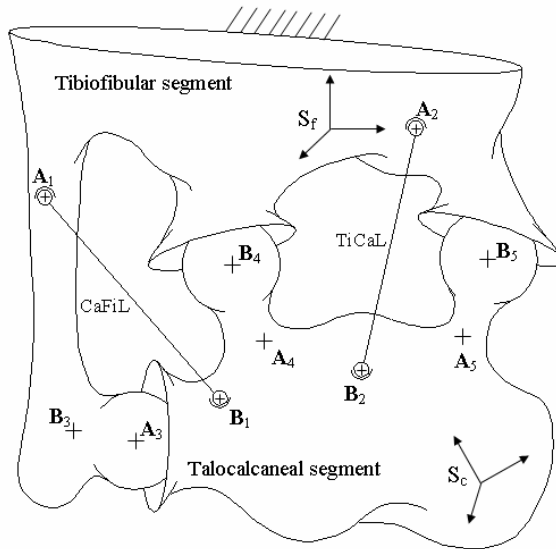


Figure 8. Schematic of the ankle complex joint.

According to these assumptions, the equivalent mechanism is defined by two rigid bodies, i.e. the tibiofibular and talocalcaneal segments, interconnected by five rigid binary links \mathbf{A}_i and \mathbf{B}_i , $i = 1, 2, \dots, 5$, where \mathbf{A}_i and \mathbf{B}_i , $i = 1, 2$ replace the isometric fibres while \mathbf{A}_i and \mathbf{B}_i , $i = 3, 4, 5$, represent the centres of the talus/calcaneus and tibia/fibula spherical surfaces respectively. This equivalent mechanism can be more synthetically represented by a spatial fully-parallel mechanism (FPM) of type 5-5 which provides the movable platform with one-DOF with respect to the fixed base (rotation of links about the axes through their ending points \mathbf{A}_i and \mathbf{B}_i , is irrelevant to the relative mobility of the two main segments).

The closure equations of the 5-5 FPM can be found based on the consideration that each pair of points $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$, $i = 1, 2, \dots, 5$, is constrained to maintain a constant mutual distance L_i , during motion. With these considerations, the closure equations of the M1 model of the ankle joint with one-DOF can be expressed by:

$$\|\mathbf{A}_i - R \cdot \mathbf{B}_i - \mathbf{P}\| = L_i \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \quad (3)$$

where the points \mathbf{A}_i and \mathbf{B}_i are measured in the Cartesian reference systems S_f and S_c respectively, which are embedded in the tibiofibular segment and the talocalcaneal segment respectively. More detailed information on the coordinate reference systems is reported in [24]. The symbol $\|\cdot\|$ is the L^2 -norm of the vector, and \mathbf{P} the position of the origin O_c of S_c in the reference system S_f . The rotation matrix R , that transforms the components of a vector from system S_c to system S_f , can be expressed as a function of three parameters α , β and γ (intra/extra rotation, pronation/supination and dorsi/plantar flexion of the foot with respect to the tibia) that represent the rotation angles of the human ankle, as deduced by the Grood and Suntay convention [24, 31].

For a given geometry of the 5-5 FPM, the system (3) can be regarded as a system of five nonlinear equations in six variables, i.e. the three components of vector \mathbf{P} and the three orientation parameters which define the rotation matrix R . If, for instance, the angle γ (the ankle flexion) is given, the remaining five variables can be found by solving system (3).

Like the knee joint, the non-linear system (3) is solved by means of a quasi-Newton numerical procedure [33]. Moreover, the geometrical parameters of the ankle model are identified on experimental data by means of an identification procedure similar to the one presented in the previous paragraph. At each step of the optimization iterative process, the closure equations (3) are solved for each measured flexion angle (γ), thus the relative pose of the talocalcaneal segment with respect to the tibiofibular segment is iteratively compared with the pose obtained by measurement data. An error function f , similar to Eq. (2), was evaluated to compare the relative pose of the talocalcaneal segment with respect to the tibiofibular segment with the pose obtained by measurement data. In this case the error function f is thus defined:

$$f = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^n \frac{(x_{ji} - x_{ji}^*)^2}{(x_{j_{\max}} - x_{j_{\min}})^2} \quad (4)$$

where it is worth noting that $j = 1, 2, \dots, 5$ instead of $j = 1, 2, \dots, 11$ as described in Eq. (2).

Like the knee, the optimization problem is solved by means of a genetic algorithm [34] followed by a quasi-Newton algorithm [33]. It is worth noting that the introduction of lower and upper bounds to the values of the 35 parameters (points \mathbf{A}_i and \mathbf{B}_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ and lengths L_i , $i = 1, 2, \dots, 5$), that define the geometry of the equivalent mechanism, provides a final geometry of the optimized equivalent mechanism which retains the anatomical feature of the ankle joint.

For different legs, the poses of the talus with respect to the tibia obtained by means of the experimental sessions were compared with those obtained by means of the 5-5 equivalent FPM.

Figures 9 and 10 report both experimental and simulation data of a specimen. In particular, the angles α , β and the positions x , y , and z of the origin of the reference system S_c with respect to S_f are reported in Fig. 9 and Fig. 10 respectively, as functions of the ankle flexion angle.

The experimental results are identified by the symbol “ Δ ” and interpolated by a dash-dot line. The interpolation makes it possible to use a higher number of experimental data, which may be useful for the optimal synthesis of the geometry of the model M1.

Inspection of the figures reveals that the new equivalent spatial mechanism replicate the passive motion of the human ankle very well.

4. CONCLUSION

This paper presents a sequential procedure for the modelling of diarthrodial joints.

The procedure relies upon some basic assumptions (rules) and provides, in three sequential steps, three different joint models (M1, M2 and M3 respectively) with increasing complexity that incorporate both more and more complex anatomical structures and different joint loading conditions.

In particular, the M1 model provides a model of the passive motion of the joint and incorporates only some basic anatomical structures of the joint. The M2 model comprises the M1 model with the addition of further passive structures and external forces. Elastic behaviour of the passive structures is taken into account in the model. The M3 model comprises the M2 model and the active anatomical structures such as the muscles. The M3 model is the most complete model and can provide kinematic, static and dynamic information on joint behaviour. However, all the models have an important role: step by step they make it possible to highlight the role that each individual joint structure plays in the joint.

Finally, the results of the M1 model for both the knee and the ankle are reported, showing the efficiency of the proposed procedure.

Acknowledgements

The authors would like to thank Dr Leardini of Istituti Ortopedici Rizzoli for the efficient collaboration in providing the measurement data of in the vivo experiments.

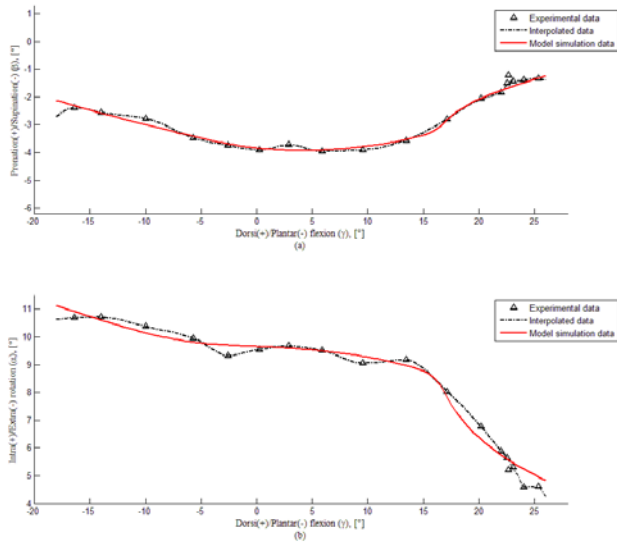


Figure 9. Passive motion simulation: angles β , (a), and α , (b), versus ankle flexion angle γ .

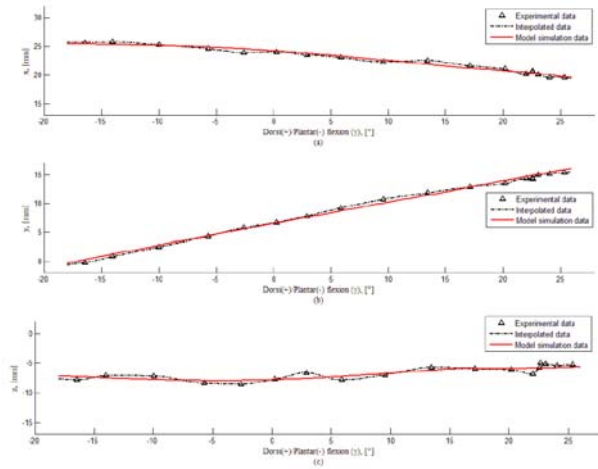


Figure 10. Passive motion simulation: x, (a), y, (b), and z, (c) versus ankle flexion angle γ .

REFERENCES

- [1] Blankevoort, L., Huiskes, R., and Lange, A. D., 1988. "Envelope of passive knee joint motion". *Journal of Biomechanics*, **21**(9), pp. 705 – 720.
- [2] Andriacchi, T.P., Mikosz, R.P., Hampton, S.J., and Galante, J.O., 1983. "Model studies of the stiffness characteristics of the human knee joint". *Journal of Biomechanics*, **16**(1), pp. 23-29.
- [3] Blankevoort, L., Huiskes, R., and De Lange, A., 1990. "Helical axes of passive knee joint motions". *Journal of Biomechanics*, **23**(12), pp. 1219-1229.
- [4] Shiavi, R., Limbird, T., Frazer, M., Stivers, K., Strauss, A., and Abramovitz, J., 1987. "Helical motion analysis of the Knee - I. Methodology for studying kinematics during locomotion". *Journal of Biomechanics*, **20**(5), pp. 459-469.
- [5] Shiavi, R., Limbird, T., Frazer, M., Stivers, K., Strauss, A., and Abramovitz, J., 1987. "Helical motion analysis of the Knee - II. Kinematics of uninjured and injured knees during walking and pivoting". *Journal of Biomechanics*, **20**(7), pp. 653-665.
- [6] Leardini, A., O'Connor, J.J., Catani, F., and Giannini, S., 1999. "Kinematics of the human ankle complex in passive flexion: a single degree of freedom system". *Journal of Biomechanics*, **32**(2), February, pp. 111–118.
- [7] La Fortune, M.A., Cavanagh, P.R., Sommer III, H.J., and Kalenak, A., 1992. "Three-dimensional kinematics of the human knee during walking". *Journal of Biomechanics*, **25**(4), pp. 347-357.
- [8] Leardini, A., O'Connor, J.J., Catani, F., and Giannini, S., 1999. "A geometric model of the human ankle joint". *Journal of Biomechanics*, **32**(6), pp. 585–591.
- [9] Essinger, J.R., Leyvraz, P.F., Heegard, J.H., and Robertson, D.D., 1989. "A mathematical model for the evaluation of the behaviour during flexion of condylar-type knee prosthesis". *Journal of Biomechanics*, **22**(11/12), pp. 1229-1241.
- [10] Hefzy, M.S., and Cooke, T.D.V., 1996. "Review of knee models: 1996 update", *Appl. Mech. Rev.*, **49**(10), part 2, pp. 187-193.
- [11] Wilson, D., and O'Connor, J.J., 1997. "A three-dimensional geometric model of the knee for the study of joint forces in gait". *Gait and Posture*, **5**, pp. 108–115.
- [12] Stauffer, R., Chao, E., and Brewster, R., 1977. "Force and motion analysis of the normal, diseased, and prosthetic ankle joint". *Clinical Orthopaedics and Related Research*, **127**, pp. 189–196.
- [13] Dul, J., and Johnson, G., 1985. "A kinematic model of the ankle joint". *Journal of Biomedical Engineering*, **7**, pp. 137–143.
- [14] Tumer, T.S., and Engin, A.E., 1993. "Three-body segment dynamic model of the human knee". *ASME Journal of Biomechanical Engineering*, **115**, pp. 350-356.
- [15] Rahman, E.A., and Hefzy, M.S., 1993. "A two-dimensional dynamic anatomical model of the human knee joint". *ASME Journal of Biomechanical Engineering*, **115**, pp. 357-365.
- [16] Wismans, J., Velpaus, F., Janssen, J., Huson, A, and Struben, P., 1980. "A three-dimensional mathematical model of the knee-joint". *Journal of Biomechanics*, **13**, pp. 677-685.

- [17] Goodfellow, J.W., and O'Connor, J.J., 1978. "The mechanics of the knee and prosthesis design". *Journal of Bone Joint Surgery [Br]*, **60-B**, pp. 358–369.
- [18] O'Connor, J.J., Shercliff, T.L., Biden, E., and Goodfellow, J.W., 1989. "The geometry of the knee in the sagittal plane". *Journal of engineering in Medicine*, **203**, pp. 223-233.
- [19] Wilson, D.R., and O'Connor, J.J., 1997. "A three-dimensional geometric model of the knee for the study of joint forces in gait". *Gait and Posture*, **5**, pp. 108-115.
- [20] Wilson, D.R., Feikes, J.D., and O'Connor, J.J., 1998. "Ligament and articular contact guide passive knee flexion". *Journal of Biomechanics*, **31**, pp.1127-1136.
- [21] Sancisi, N., and Parenti-Castelli, V., 2007. "A 1-dof parallel spherical wrist for the modelling of the knee passive motion". In Proceedings of the 12th IFToMM World Congress in Mechanism and Machine Science, Besancon, France, June, pp. 1–6.
- [22] Franci, R., and Parenti-Castelli, V., 2007. "A 5-5 one degree of freedom fully-parallel mechanism for the modelling of passive motion at the human ankle joint". In Proceedings of ASME-IDETC/CIE 2007, International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering, Las Vegas, Nevada, USA, September, pp. 1–8.
- [23] Parenti-Castelli V., 2007. "Kinematic and kinetostatic modelling of human articulations: knee and ankle joints". DSTA 2007, 9th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications, Eds., Awrejcewicz J., Olejnik P., and Mrozowski J), ISBN 978-83-924382-9-8, Łódź, Poland, December, pp. 65-88.
- [24] Franci, R., and Parenti-Castelli, V., 2008. "A one-degree-of-freedom spherical wrist for the modelling of passive motion of the human ankle joint". In Proceedings of IAK 2008, Conference on Interdisciplinary Applications of Kinematics, Kecskemethy, A. (ed.), Lima, Peru, January, pp.1-13.
- [25] Sancisi, N., and Parenti-Castelli, V., 2008. "A Sequential Approach for Modelling the Knee Joint Stiffness". In Proceedings of Romansy 2008, 17th CISM-IFToMM Symposium on Robot Design, Dynamics, and Control, Tokyo, Japan, July, pp.1-9.
- [26] Corazza, F., O'Connor, J.J., Leardini, A., and Parenti-Castelli, V., 2003. "Ligament fibre recruitment and forces for the anterior drawer test at the human ankle joint". *Journal of Biomechanics*, **36**, pp. 363-372.
- [27] Belvedere, C., Catani, F., Ensini, A., Moctezuma de la Barrera, J.L., and Leardini, A., 2007. "Patellar tracking during total knee arthroplasty: an in vitro feasibility study". *Knee Surgery, Sports Traumatology, Arthroscopy*, **15**, pp. 985–993.
- [28] Parenti-Castelli, V., and Di Gregorio, R., 2000. "Parallel mechanisms applied to the human knee passive motion simulation". In *Advances in Robot Kinematics*, Kluwer Academic, pp. 333–344.
- [29] Parenti-Castelli, V., Leardini, A., Di Gregorio, R., and O'Connor, J.J., 2003. "On the modeling of passive motion of the human knee joint by means of equivalent planar and spatial parallel mechanisms". *Autonomous Robots*, **125**(2), pp. 219–232.
- [30] Sancisi, N., and Parenti-Castelli, V., 2007. "A new 3d kinematic model of the patellofemoral joint during knee passive motion". In Proceedings of AIMeTA 2007, Brescia, Italy, September, pp. 1–12.

- [31] Grood, E.S., and Suntay, W.J., 1983. "A joint coordinate system for the clinical description of three-dimensional motions: application to the knee". *Journal of Biomechanical Engineering*, **105**(2), pp. 136–144.
- [32] Innocenti, C., and Parenti-Castelli, V., 1993. "Closedform direct position analysis of a 5-5 parallel mechanism". *Journal of Mechanical Design*, Transactions of the ASME, **115**(3), pp. 515–521.
- [33] Powell, M., 1978. "The convergence of variable metric methods for nonlinearly constrained optimization calculations". *Nonlinear Programming*, **3**, pp. 27-63.
- [34] Ottoboni, A., Parenti-Castelli, V., and Leardini, A., 2005. "On the limits of the articular surface approximation of the human knee passive motion models". In Proceedings of AIMeTA 2005, Firenze, Italy, September, pp. 1–11.
- [35] Di Gregorio, R., Parenti-Castelli, V., O'Connor, J.J., and A. Leardini, 2007. "Mathematical models of passive motion at the human ankle joint by equivalent spatial parallel mechanisms". *Medical & Biology Engineering & Computing*, **45**(3), pp. 305–313.
- [36] Torczon, V., 1997. "On the convergence of pattern search algorithms". *SIAM Journal on Optimization*, **7**(1), February, pp. 1–25.

RECENT DEVELOPMENT OF HYBRID METHODS FOR FATIGUE ANALYSIS OF MECHANICAL STRUCTURES

Alessandro Freddi
*Department of Mechanical and Aeronautical Engineering,
University of Bologna, Italy
E-mail: alessandro.freddi@unibo.it*

Abstract. *The paper presents some recent advancements in hybrid methods for the fatigue analysis of mechanical structures and for the developing of strain gauges sensors, with the collaboration of researchers and candidates for a Doctor degree.*

Keywords: *structures fatigues, local deformation, local stress distribution, strain sensors*

1. INTRODUCTION

With the use of a powerful numerical simulation approach, the scientific community involved in the fatigue design has oriented its research activity to a more efficient interaction between experimental - which it is typical for the fatigue analysis of materials - and numerical tools, in order to solve design problems of mechanical structures of complex geometries subjected to loads of variable amplitudes, establishing a new approach with the development of so called “hybrid methods”.

Experiments are planned for direct measurement of the local strain in geometrical discontinuities of complex bodies not referable to the beams theory of Saint Venant.

The local strain history, in the framework of the theory of the local strain approach, is fundamental in local damage estimation.

Alternatively, the local stress approach, derived from the historical Wöhler theory, is based on the assumption that the local σ -N curve in the geometrical discontinuities of the structures can be derived from the S-N curve of the material, obtained from classic specimens, through an extrapolation driven by the “local relative stress gradient”.

In this case, the finite element method has the task of calculating the peak as well as the gradient of the stress in the discontinuities that derive from the applied loadings.

The author wishes to present a brief comparison of the application of the two models and to remark on some critical points as part of the activities in the Structure Lab. of the Department.

2. THE LOCAL DEFORMATION APPROACH

The task of fatigue life estimation for structures in low cycle fatigue is best considered by moving from the knowledge of local strain in geometrical discontinuities. The experimental observations of a limited local plastic zone, surrounded by elastic constraints, motivated a design philosophy relating the fatigue life of the structure to the life of small unnotched specimen that are cycled with the same strain history as the material in the discontinuity.

Saintvenantian bodies

This “strain controlled” approach proved adequate for notched beams or other “saintvenantian” components, based on three simulation model of [1] :

- ❖ the stress-strain law of the material tested in cyclic condition (**cyclic curve**) that describe the hysteretic behavior in the root of the notch, Fig.1a)
- ❖ the stress and the strain concentrations factors that describe the reduction of the stress and the increment of the strain at the root of the notch in comparison with the elastic linear solution, Fig.1 b)

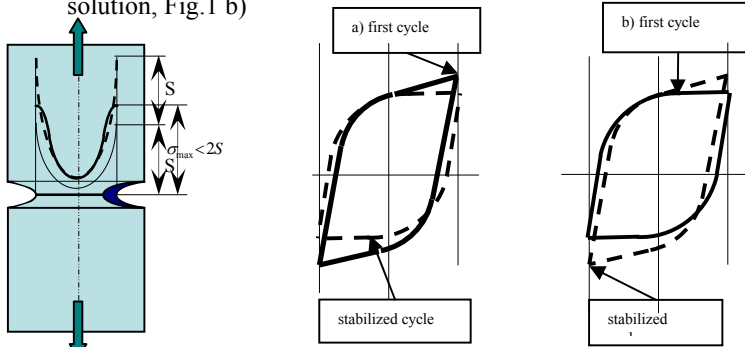


Figure 1a) The material characterization at fixed deformation and the local strain approach in a saintvenantian structure.

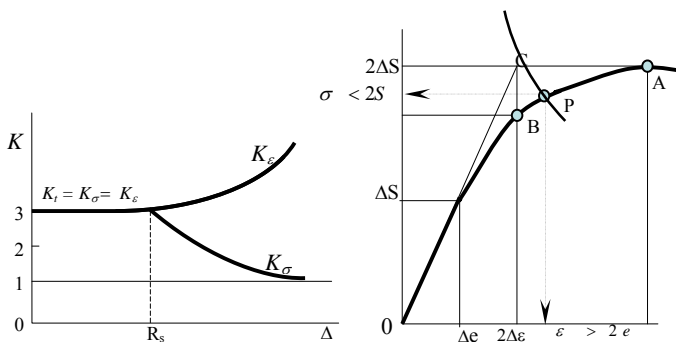


Figure 1b) Example of K_σ , stress concentration factor and K_ϵ , strain concentration factor; S is the nominal stress related directly to the loads, $2\Delta S$ is the theoretical maximum elastic stress.

In Fig 1 b) the coordinates of point C represent the stress and strain at the root of the notch in the case of perfect elastic behavior of the material, and the coordinates of point P represent the real stress and strain at the root of the notch, due to local yielding. In accordance with the Neuber model both points stay on a hyperbola, i.e. the product of the coordinates are constant, Eqn. (1). (In the example the stress concentration factor in the elastic field is equal to 2)

$$K_t \Delta S \cdot K_t \Delta e = \Delta \sigma \cdot \Delta \varepsilon \tag{1}$$

- ❖ The expected fatigue life based on the enucleation of the first visible crack can then be determined if the strain–life relationship is known, Fig.2. The theoretical assumption is that the initiation of the small crack is due only to the history of the peak value of the strain and not to the distribution of strain in the surrounding volume of the material or, in other words, the fatigue life in the geometrical discontinuity of a structure, with a certain strain–time history, is the same as the life of an unnotched specimen of the same material, with the same strain–time history in the full section of its body. Thus, there is no influence of the gradient of stress and strain on the fatigue life.

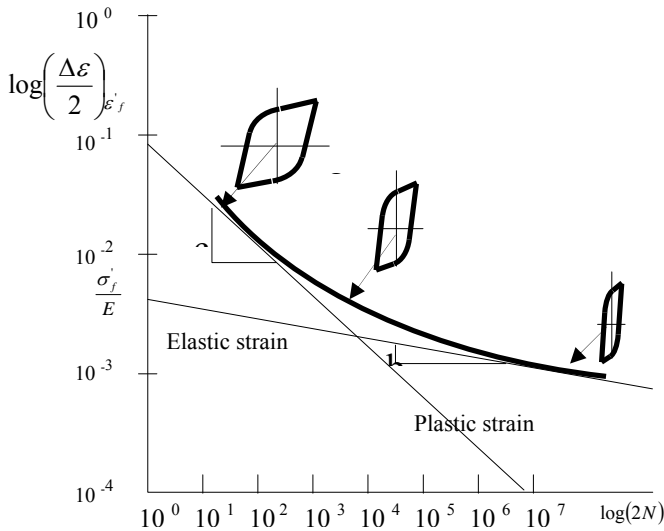


Figure 2. The strain-life curve.

The whole simulation is summarized by the following formulas, valid for Saint Venant bodies:

$$\frac{\Delta\epsilon_t}{2} = \frac{\Delta\epsilon_e}{2} + \frac{\Delta\epsilon_p}{2} = \left(\frac{\Delta\sigma}{2E}\right) + \left(\frac{\Delta\sigma}{2K'}\right)^{1/n'} \quad (2) \text{ Material law}$$

$$\Delta\epsilon \cdot \Delta\sigma = K_t^2 \cdot \Delta e \cdot \Delta S \quad (3) \text{ Neuber hyperbola}$$

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N)^b + \epsilon'_f (2N)^c \quad (4) \text{ Manson-Coffin law}$$

where:

ΔS	Nominal stress range	K'	Cyclic strain hardening coefficient
Δe	Nominal strain range	n'	Cyclic strain hardening exponent
$\Delta\sigma$	Local stress range	σ'_f	Fatigue strength coefficient
$\Delta\epsilon$	Local total strain range	ϵ'_f	Fatigue ductility coefficient
$\Delta\epsilon_e$	Local elastic strain range	b	Fatigue strength exponent
$\Delta\epsilon_p$	Local plastic strain range	c	Fatigue ductility exponent
K_t	Stress concentration factor	σ_m	Mean local stress
E	Elasticity modulus	$2N$	Reversals to failure

Variable amplitude. Assuming a cumulative damage theory, it is possible to extend the theory to load histories of variable amplitude. As a matter of fact, the variable amplitude of the loadings locally generates a sequence of hysteresis loops.

The sequence a) of applied loads in Fig. 3, applying the Eqn. (2) (3) for each amplitude ΔS of the load, produces the sequence b) of hysteresis loops that does not respect the real material behaviour called “memory effect”. A proper algorithm for cycle counting is necessary in order to reduce the complex history a) to a series of closed load cycles. In the same Fig. 3a) a “Rain

Flow” counting method is represented, that permits the preservation of the memory effect, as shown in Fig. 3 c), since this method transforms the real variable history into an equivalent series made only of closed cycles of loads. In fact, a closed cycle produces a closed hysteresis loop and, in this way, all the loops are generated in proper sequence.

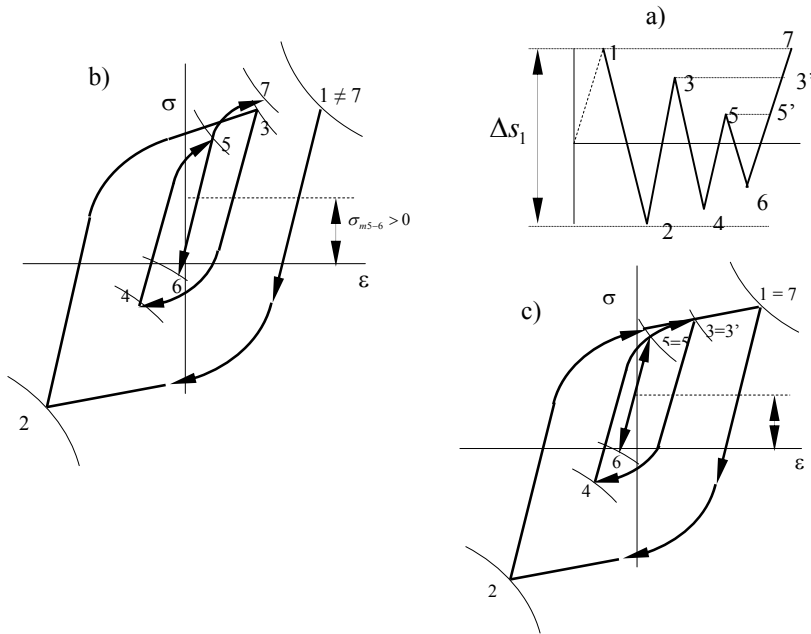


Figure 3. The hysteresis loop sequence in the case of variable loadings a), without b) and with c) memory effect.

Every local hysteretic cycle with its strain amplitude and its mean stress gives its contribution $D = \frac{1}{N}$ to the cumulative damage, calculated with a linear rule.

As an example, Fig. 4 shows the final comparison between the life calculated with the described method and the life determined by experiments for shafts, for two different variable torsion torque histories. In a Laboratory test on notched specimens of NiCrMoV steel, they simulated the loads applied to a rotor shaft of a real turbo machine, due to the out-of-synchronisation and short-circuit conditions.

The comparison diagram between the experimentally determined and calculated values of fatigue life shows an acceptable agreement and substantially validates the simulation of Eqn. (2),(3),(4).

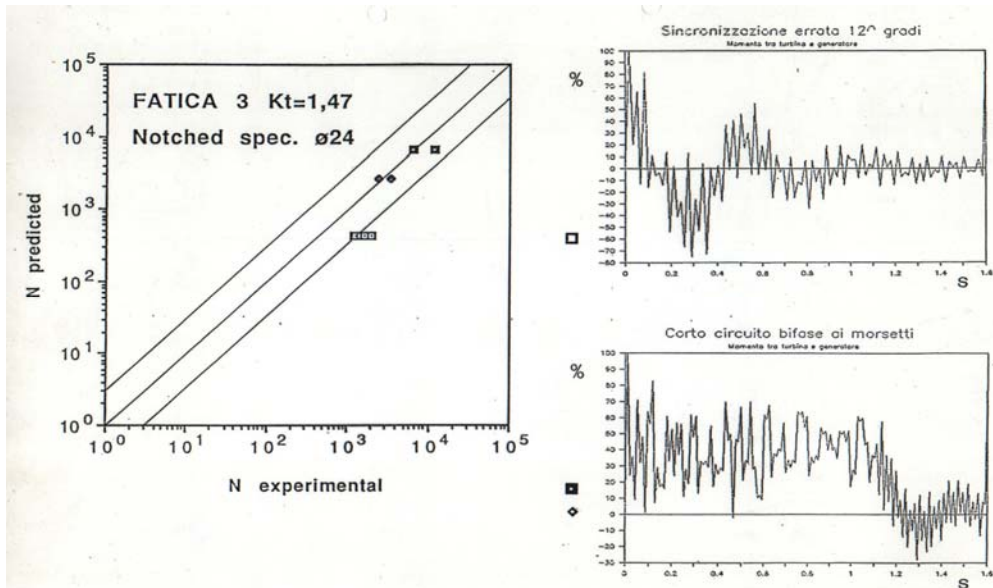


Figure 4. A comparison between values predicted by simulation and determined by experiments of the life of a notched model of NiCrMoV turbomachinery steel with a stress concentration factor equal to 1,47, for two different loading histories, respectively due to an error in synchronisation (□) and a short circuit (■) and (◇). Specimens 24 mm in diameter, subjected to torsion loads.

Non-saintvenantian bodies

In the case of complex bodies that can not be studied with the elementary assumptions of Saint Venant theory, it is not possible to define concentration factor for the structure, as foreseen by Eqn (3) and the classic simulation approach based on the previous parameters is not allowed.

A hybrid method is suggested in this case, consisting in a direct measurement of strain in the geometrical discontinuity where the first fatigue damage will presumably be located.

The steps are the following:

- ❖ the local strain - time history is directly measured in the points of interest through a strain gauge located in the direction of the maximum strain
- ❖ Once the local deformation is determined, from the constitutive experimentally obtained relationship between stress and strain, the local stress versus time history is derived. These material data must be obtained in an unnotched specimen of the same material, subjected to cyclic strain-controlled axial loads of constant amplitude, after a certain number of loading cycles, in order to stabilize the material behaviour.

- ❖ From local strain and from the corresponding stress, the sequence of hysteresis loops is determined at different instants of time, Fig. 5.
- ❖ Alternatively, the value of the amplitude $\Delta\sigma$ for each measured value of strain amplitude $\Delta\varepsilon$ can be obtained, in the frame of the Neuber approximated Equation from Eqn. (3), rewritten in this way:

$$\Delta\sigma \cdot \Delta\varepsilon = \Delta\sigma_{elastic} \cdot \Delta\varepsilon_{elastic} \quad (3')$$

Where the second term is known from the elastic solution, derived, e.g. with the Finite Element Method applied in the geometrical discontinuity.

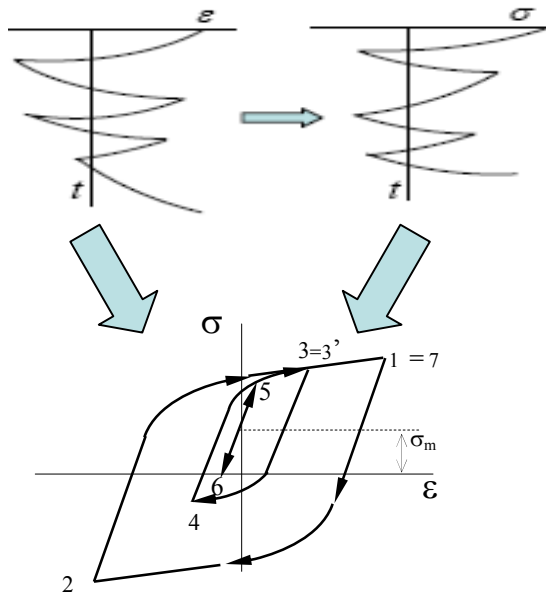


Figure 5. From the measured strain-time history and from the stress-versus time history obtained from an unnotched specimen of the same material, subjected to cyclic strain-controlled axial load of constant amplitude, the hysteresis loop sequence in the geometrical discontinuities of the structure can be experimentally reconstructed and the damage parameters calculated.

Fig. 6 shows an example of an application of strain gauges in a discontinuity point of a complex structure, part of a heavy machine, where the previous experience had indicated a fatigue damage location in the form of a crack.

The experiment was organized on a new component mounted on the machine in place of the cracked one, with the gauges located in the direction of the expected crack, subjected to the same loading history as the previous damaged component. A local strain versus time was recorded.



Figure 6. Direct measurement of local strain

3. THE LOCAL STRESS APPROACH

Saintvenantian bodies

The local stress approach, derived from the classical Wöhler theory, is based on the assumption that the local σ -N curve in the notch of a beam can be derived from the S-N curve of the material, obtained from classical saintvenantian specimens, through the definition of stress concentration factors and fatigue notch factors.

Fig.7 illustrates these two steps, with an example of a stress concentration factor $K_t = \alpha_k = 3,1$ and a fatigue notch factor $K_f = \beta_k = 2,2$.

- ❖ A first one from the fatigue limit of the material for the smooth specimen to the fatigue limit of the notched specimen with the same diameter of the root of the notch, with a reduction of the fatigue limit of the smooth specimen by a factor K_f .
- ❖ A second one from this limit to a limit for the maximum local stress, multiplying the previous one by the K_t factor, for the amplification effect due to the notch.

This transformation from nominal stress curve S/N for an unnotched body to a local stress curve σ /N of a notched body, can be achieved according to the philosophy of the “support factor” introduced particularly by several researchers of the German school and codified in Norms and Guidelines , see e.g. [2-19], [22],[23], expressed by:

$$n = \frac{K_t}{K_f} = \frac{\alpha_k}{\beta_k} \quad (5)$$

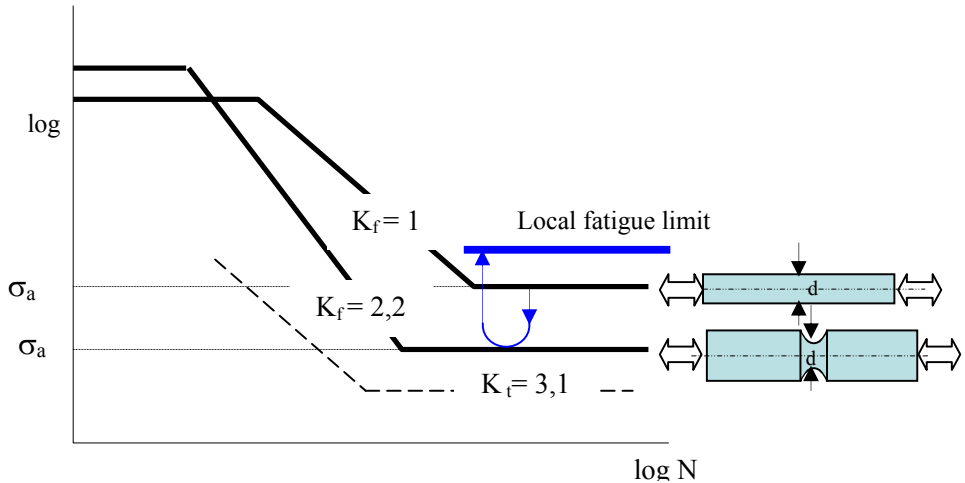


Figure 7. The local fatigue limit obtained by the support factor.

In a more general formulation, the support factor is the ratio between the local fatigue limit in the critical point of a geometrical discontinuities characterized by a not uniform stress distribution, and the fatigue limit of a smooth specimen with an uniform stress distribution.

$$n = \frac{\sigma_{aDlocal}}{\sigma_{aD}} \quad (6)$$

In other words, in the structure of this parameter is present a strong influence of the relative stress gradient in the point of maximum stress, defined as:

$$\chi = \frac{1}{\sigma_{max}} \cdot \frac{d\sigma}{dx} \quad (7)$$

where:

- x is the perpendicular axis toward the most stressed point
- σ is the normal stress in this direction in the plane of maximum principal stress
- σ_{max} is the maximum stress value

For a given material, e.g. hardened normalized steel (C45) [9], Fig. 8 shows the typical shape of the support factor as a function of the relative gradient, experimentally determined.

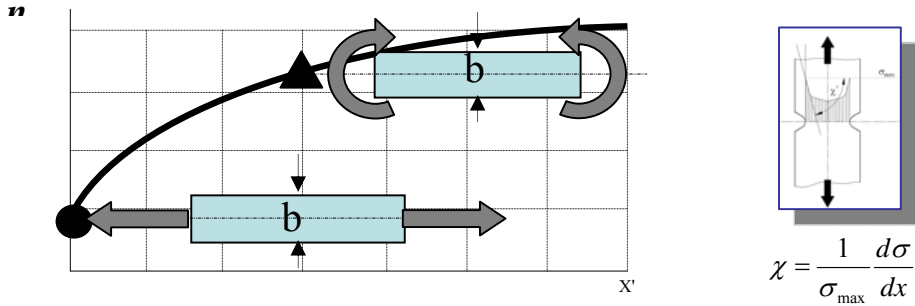


Figure 8. Relationship between the support factor and relative stress gradient

The two points of the curve show the values of the support factor for push-pull load ($\chi=0$) and alternating bending loads ($\chi=2/b$)

Local fatigue limit for infinite life

In the present study only the most recent theories will be shown. For a complete analysis of the theories see [24] where a review is presented of all the proposed theories based on the local stress concept correlating fatigue life prediction, by means of the support effect number, both to a material constant (typically the static tensile strength σ_B , the yield strength $\sigma_{0.2}$ or a purposely computed characteristic material constant) and to a geometric parameter, i.e. the notch radius ρ or the relative stress gradient [2-22].

FKM-Guideline

In the FKM-Guideline [28], a very authoritative point of view in Germany, the following support factor n as a function of the relative stress gradient is suggested:

Table 1. Values of the support factor

$$n = 1 + \chi \cdot 10^{-\left(a_G - 0.5 + \frac{\sigma_B}{b_G}\right)} \quad \chi \leq 0.1 \text{ mm}^{-1} \quad (8)$$

$$n = 1 + \sqrt{\chi} \cdot 10^{-\left(a_G + \frac{\sigma_B}{b_G}\right)} \quad 0.1 \text{ mm}^{-1} \leq \chi \leq 1 \text{ mm}^{-1} \quad (9)$$

$$n = 1 + \sqrt[4]{\chi} \cdot 10^{-\left(a_G + \frac{\sigma_B}{b_G}\right)} \quad 1 \text{ mm}^{-1} \leq \chi \leq 100 \text{ mm}^{-1} \quad (10)$$

where a_G and b_G are material constants reported, for steel, in Table 2.

Table 2. Values of the coefficients

	Stainless steel	Steel
a_G	0.40	0.50
b_G	2400	2700

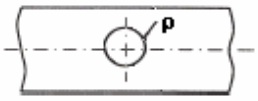
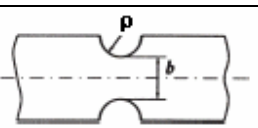
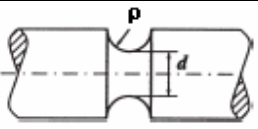
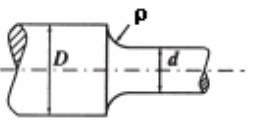
For the static tensile strength σ_B is suggested, if this is not available, the following value obtained from the Vickers hardness $\sigma_B = 3.3HV$.

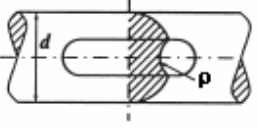
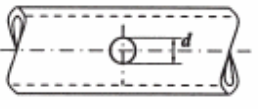
For j superimposed notches or, more generally, to account for mechanical or thermal treatments, the suggestion is to sum the relative stress gradients:

$$\chi = \sum_{i=1}^j \chi_i \tag{11}$$

Table 3 for stress gradient formulations is provided by Siebel and Stieler [14]:

Table 3. Relative stress gradient for the main geometries

Notch geometry	Relative stress gradient χ		
	Type of load		
	Axial	Bending	Torsion
	$\chi = \frac{2}{\rho}$	—	—
	$\chi = \frac{2}{\rho}$	$\chi = \frac{2}{\rho} + \frac{2}{b}$	—
	$\chi = \frac{2}{\rho}$	$\chi = \frac{2}{\rho} + \frac{2}{d}$	$\chi = \frac{2}{d} + \frac{1}{\rho}$
	$\chi = \frac{2}{\rho}$	$\chi = \frac{2}{D+d} + \frac{2}{\rho}$	$\chi = \frac{2}{D+d} + \frac{1}{\rho}$

	—	—	$\chi = \frac{2}{\rho}$
	—	$\chi = \frac{2}{D} + \frac{8}{\rho}$	$\chi = \frac{2}{D} + \frac{6}{\rho}$

Local stress S-N curve for a complete fatigue life description

It is more difficult to extrapolate the fatigue life curve from an unnotched specimen to a local discontinuity of a complex body in the field of low-cycle and medium cycle fatigue, i.e. in the oblique part of the fatigue curve, as well as to extrapolate the “knee” of the curve.

Observing the behaviour of the fatigue life of a body with a sharp notch, it can be stated that, under the same imposed local stress, the specimen with the highest gradient (χ_3) is expected to fail after a greater number of cycles than the specimens with χ_1 and χ_2 , Fig.9.

k is defined by the relationship in the same Figure.

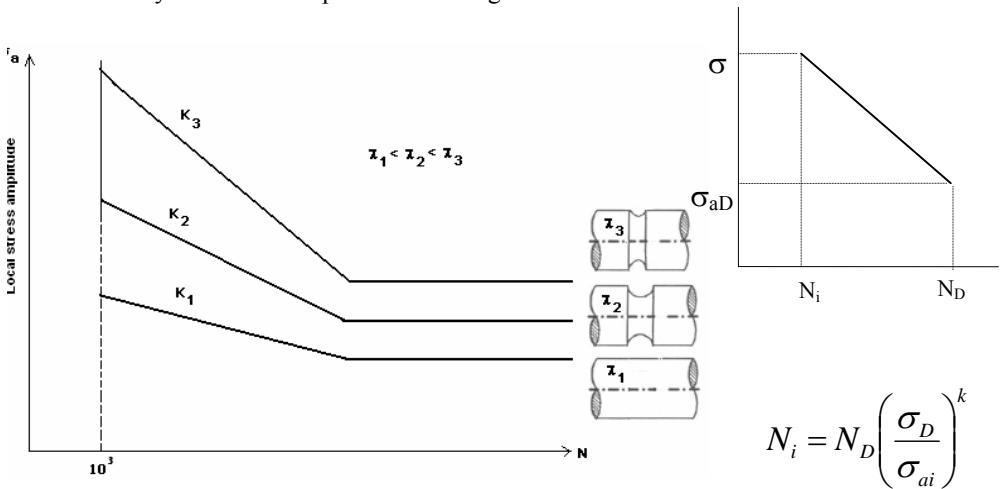


Figure 9. Comparison between the slopes of three samples with different values of the relative stress gradient and slope equation.

For sharp notched component the fatigue behaviour is dominated by the crack propagation mechanism i.e. the S-N curve tends to have a steep slope; for smooth or blunt notched components the fatigue behavior is controlled by the crack initiation mode and the S-N- curve has a flatter slope.

Non-saintvenantian bodies

The importance of the stress gradient for assessing the fatigue strength in components clearly emerged from the analysis with the constraints of Saint Venant elementary theory. The stress gradient actually makes it possible to know and describe the uneven stress field due to the geometry and/or to the type of acting loading, not only for beams.

Concentrating the critical analysis on the application to non-saintvenantian bodies, which is the most interesting development of this philosophy, see e.g. Fig. 10, the fatigue behaviour of a complex structure with a critical geometric discontinuity is based on the assumption that the local σ -N curve in the most critical point can be derived from the S-N curve of the material, obtained from classical saintvenentian specimens, through an “experimentally based” extrapolation driven by the “local relative stress gradient”.

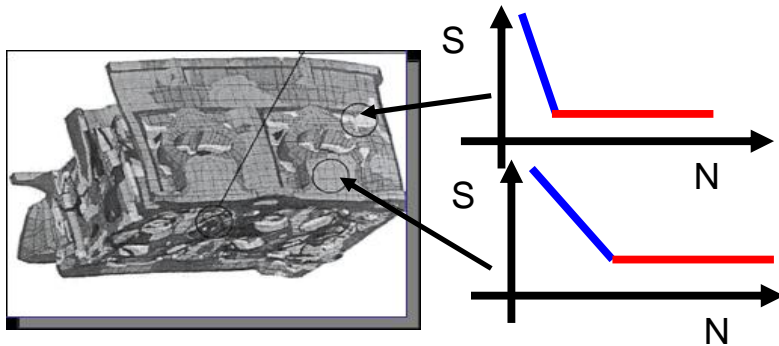


Figure 10. Example of a non saintvenantian body with geometric discontinuities, potentially sources of fatigue damage (from Eichlseder [20])

The main steps of the procedure for obtaining the proper value of the support factor for a *given material* are the following:

Through two experiments: determination of the fatigue limits on specimens with two different stress gradient values.

Through a numerical approach (FEM): determination of the maximum relative stress in the geometric discontinuity of the real structure.

Through an interpolation formula: determination of the support factor.

W. Eichlseder Theory

A recent formulation has been proposed by W. Eichlseder that moved towards a more

comprehensive formulation of the S-N curves for generally complex shaped components, for which the Saint Venant assumption is not applicable.

For the fatigue limit of infinite life, this theory suggests the following expression of the support effect, as a function of the relative local stress gradient, in general calculated with the finite element method in the critical areas of a complex body. This theory concerns the possibility of computing the fatigue life in each node of the meshed structure by the knowledge of only two S-N curves of the material.

The proposed extrapolation formulas are the following:

- ❖ for the support coefficient:

$$n = \left(1 + \left(\frac{\sigma_{bf}}{\sigma_{tf}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\chi}{(2/b)} \right)^{K_D} \right) \quad (12)$$

- ❖ for the slope and for the knee of the short/medium life part of the fatigue local curve the following Eqns. (13), (14), are suggested:

$$k = k_{\min} + \frac{k_{\max} - k_{\min}}{n^{K_k}} \quad (13)$$

$$\log(N_D) = \log(N_{D\min}) + \frac{\log(N_{D\max}) - \log(N_{D\min})}{n^{K_n}} \quad (14)$$

where:

$\sigma_{DLocal} (\chi \neq 0)$	Local fatigue limit of the critical point of the <i>component</i>
σ_{bf}	Fatigue limit of the <i>smooth specimen</i> under rotating bending load ($\chi = 2/b$)
σ_{tf}	Fatigue limit of the <i>smooth specimen</i> under axial load ($\chi = 0$)
$(2/b)$	Relative stress gradient of the specimen under rotating bending
χ	Relative stress gradient in the critical point of the <i>component</i>
K_D	Damping coefficient for the fatigue limit
k_{\min}	Slope of smooth specimen under rotating bending load
k_{\max}	Slope of smooth specimen under axial load
k	Slope of the S-N curve in the critical point of the <i>component</i>
K_k	Damping coefficient for the slope k

N_D	Number of cycles at the fatigue limit in the critical point of the <i>component</i>
$N_{D\min}$	Number of cycles at the fatigue limit for the specimen under rotating bending load
$N_{D\max}$	Number of cycles at the fatigue limit for the specimen under axial load
K_n	Damping coefficient for the number of cycles at the fatigue limit

The exponent K_D in the formula (12) makes it possible to account for the history of the support effect over the stress gradient.

As reported in [24], the correlation between the fatigue life of smooth and notched components in the low-intermediate life region does not follow the same rules as in the infinite life region, owing to an increasing cyclic plastic yielding. Eichlseder [19-20] thus proposed a different damping coefficient value for the fatigue limit and the slope k , K_D and K_k respectively.

K_D , K_k and K_n are characteristic exponents of the class of material. For steel, the following values were proposed, Table 4:

Table 4. Values of the exponents

	K_D	K_k	K_n
Steel	0.3	6.3	2.9

Fig.11 shows typical trends of the fatigue limit $\sigma_{adlocal}$ and the slope k over the relative stress gradient, according to Eqns. (6) and (14).

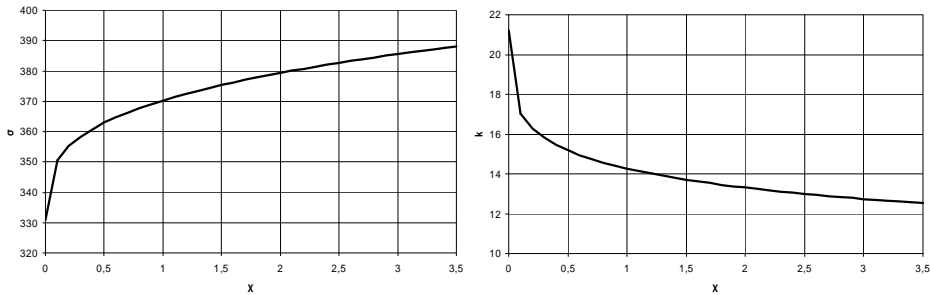


Figure 11. General trend of the fatigue limit and the slope k over the relative stress gradient (from Eichlseder)

The most general formulation of (12) for the interpolation to the fatigue curve for a local stress gradient is carried out on the basis of two fatigue limits, corresponding to two reference situations: a null gradient and a not null gradient:

$$n = \left(1 + \left(\frac{\sigma_{D(\chi \neq 0)}}{\sigma_{D(\chi = 0)}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\chi}{\chi \neq 0} \right)^{k_D} \right) \quad (15)$$

A null, or close to null, gradient can be obtained, for example, with thin thickness hollow specimens under torsion loading.

Likewise, a not null gradient could be obtained for several geometric and loading configurations. These values are usually already known for a wide variety of materials and make it possible to determine the fatigue life in each stressed area of the component according to the proposed theory.

4. A NEW FORMULA

The Eichlseder's formulation appears very attractive for the k-slope prevision of the local S-N curve. Nevertheless, it is not possible to neglect some difficulties that arise in the medium and also more in the short life part of the fatigue curve.

- ❖ The first criticism is due to the fact that in the first part of the curve, the life is dominated by a local plastic response of the material that it is difficult to treat in term of stress as an alternative of strain.
- ❖ As a second point, the fatigue life does not increase linearly respect to the local stress gradient, but as it appears from Figs.8 and 11, the benefit of the gradient is strong for low gradient but becomes more and more ineffective with high gradient, where Fracture Mechanics controls the phenomenon.

This difficulties become clear in the application of Eqn. (13) that brings sometimes to some inaccuracies for the k values. As a matter of fact, while the null value of χ confirms the maximum value k_{max} , the minimum value k_{min} is in some cases overestimated. For this reason in [24] a new formula is proposed for the k value estimation, that seems more general and consistent in a multiplicity of cases:

$$k = k_K \cdot \left[1 + \left(\frac{k_i}{k_K} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\chi}{\chi_i} \right)^{0.05} \right] \quad (16)$$

where:

Slope of S-N curve for a specimen with a relative stress gradient of null value

k_K

k_i Slope of S-N curve for a specimen with a relative stress gradient of not a null value

χ Relative stress gradient in the critical point in the component

χ_i Relative stress gradient in the reference specimen of k_i slope

Equation (16) has the same structure of Eqn (12). Also for the application of this model the knowledge of only two slopes values of two fatigue curves for the same material is required.

In [24] an algorithm is also developed in order to simplify the calculation and to give robust results. Fig. 12-13 give an example of an application of the Eqn.(15) for two steels, compared with the results of the Eqn.(13).

In [25] an application is shown to the local stress method applied to a fatigue gear analysis.

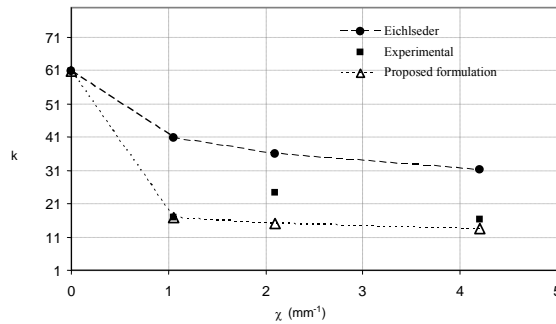


Figure 12: Comparison between experimental and calculated values of the slopes of S-N curves, for a C15 steel

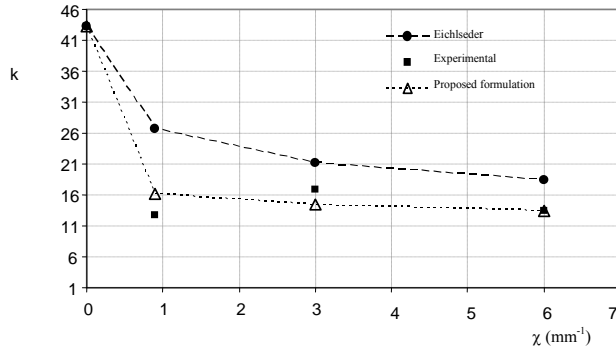


Figure 13: Comparison between experimental and calculated values of the slopes of S-N curves, for a 13CrMo44 steel

5. CONCLUSION

This paper tries to analyse the two main approaches used in fatigue simulation of bodies of simple as well as complex form and with loads of variable amplitudes.

The local deformation theory can be rationally extended to geometrical discontinuities of non saintvenantian bodies through a hybrid approach that utilises a measurement of the local deformation by means of a strain gauge located in the critical point. With this technique, especially suitable for the low cycle fatigue, a complete description of the sequence of the local hysteresis loops is obtained and, by means of the Manson-Coffin life curves, every contributing factor to the total damage are evaluated.

The local stress approach can also be extended, by means of an extrapolation of the support factor from beams to non saintvenantian bodies, through a numerical determination of the relative stress gradient in every critical points.

The hybrid approach consists, in this case, in the combination of theoretical and numerical methods with the validation of the model through suitable experimental tests. Advantages and disadvantages of both methods as well as the problematical aspects of the theories are pointed out:

- ❖ The local deformation approach is particularly recommended for low cycle fatigue, since cyclic strain-controlled tests can better characterize the fatigue behaviour of a material than cyclic stress-controlled tests can. On the other side, the direct strain measurement presents some complications due to the short time of recording offered by strain gauges stressed at high level of deformation and to the risk of an average information on the point strain.

- ❖ The local stress approach seems attractive for extending the classical Wöhler theory at the discontinuities in complex bodies, for the determination of the fatigue limit. The simulation of the slope of the local curve for short life prevision seems more uncertain for the role of a local non-linearity of the material, while for medium and high life prevision it is very useful to have a unique fatigue curve description, without a discontinuity between the medium and infinite parts of the life: in fact, the cumulative damage estimation can be carried on within the same simulation model. The effort to find better formulas for the slope in the medium life, seems promising as, e.g. the proposal in [24].

6. CITING REFERENCES

- [1] Stephens, R. I., Fatemi, A., Stephens, R. R., and Fuchs, H. O., 2001. Metal Fatigue in Engineering, 2nd ed., Wiley, New York.
- [2] Neuber, H., 1937. Kerbspannungslehre. 1st Edition. Springer-Verlag, Berlin
- [3] Thum, A., Federn, K., 1939. Spannungszustand und Bruchausbildung. Springer-Verlag. Berlin
- [4] Philipp, H.A., 1942. Forsch. Ing.-Wes. 13.
- [5] Heywood, R.B., 1947. The relationship between fatigue and stress concentration, Aircraft Engineering 19, pp. 81-84
- [6] Siebel, E., Meuth, H.O., 1949. Die Wirkung von Kerben bei schwingender Beanspruchung, VDI Journal 91, pp. 319-323
- [7] Bollenrath F., Troost, A., 1950. Wechselbeziehungen zwischen Spannungs-und Verformungsgradient. Teil 1. Arch. Eisenhüttenwesen 21, 11/12, p. 431-436
- [8] Bollenrath, F., Troost, A., 1951. Wechselbeziehungen zwischen Spannungs-und Verformungsgradient. Teil 2. Arch. Eisenhüttenwesen 22, 9/10, p. 327-335
- [9] Bollenrath, F., Troost, A., 1952. Wechselbeziehungen zwischen Spannungs-und Verformungsgradient. Teil 3. Arch. Eisenhüttenwesen 23, 5/6, p. 193-201
- [10] Petersen, C., 1951. Die Vorgänge im zugig und wechselnd beanspruchten Metallgefüge. Teil 3. Z. Metallkunde 42, H.6, pp. 161-170
- [11] Petersen, C., 1952. Die Vorgänge im zugig und wechselnd beanspruchten Metallgefüge. Teil 4. Z. Metallkunde 43, H.12, pp. 429-433
- [12] Kuhn, P. and Hardraht, H.F., 1952. An Engineering Method for Estimating the Notch-Size Effect in Fatigue test on Steel. NACA TN2805, Langlet Aeronautical Laboratory, Washington.
- [13] Stieler, M., 1954. Untersuchungen über die Dauerschwingfestigkeit metallischer Bauteile bei Raumtemperatur, Dissertation, TU Stuttgart
- [14] Siebel, E., Stieler M., 1955. Ungleichformige Spannungsverteilung bei schwingender Beanspruchung, VDI-Z 97, pp. 121-126.
- [15] Heywood, R.B., 1962. Designing against fatigue, London, Chapman and Hall

- [16] Neuber, H., 1968. Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsberechnungen, *Konstruktion* 20(7), pp. 245-251
- [17] Hück, M., Thrainer, L., Schütz, W., 1981. Berechnung von Wöhlerlinien für Bauteile aus Stahl, Stahlguss und Grauguss – Synthetische Wöhlerlinien
- [18] Dietmann, H., 1985. Zur Berechnung von Kerbwirkungszahlen, *Konstruktion* 37(2), pp. 67-71.
- [19] Eichlseder, W., Leitner, H., 2002. Influence of Stress Gradient on S/N-Curve, *New Trends in Fatigue and Fracture*
- [20] Eichlseder, W., 2002. Fatigue analysis by local stress concept based on finite elements results, *Computers and Structures* 80, pp. 2109-13.
- [21] Haibach, E. 2002. Betriebsfestigkeit – Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung 2.Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany.
- [22] Forschungskuratorium Maschinenbau (FKM), 2003. Analytical strength assessment of components in mechanical engineering. 5th , revised edition, English version, VDMA Verlag GmbH.
- [23] Niemann G., Winter, H., Hohn B.R., Davoli, P., 2006. Manuale degli organi di macchine. Edizione italiana, Tecniche Nuove.
- [24] Reggiani, B., 2007. Doktor-degree Thesis: Simulation models in Biomechanics and Experimental Mechanics. Tesi di Dottorato in Meccanica dei materiali e dei processi tecnologici. Università degli Studi di Bologna.
- [25] Comandini M., Olmi G., Freddi A., 2007. Fatigue performance of shot-peened gears investigated by using experimental and numerical methods. Work in progress.

COUNTING THE ESSENTIAL KINEMATIC PARAMETERS OF A SPATIAL MANIPULATOR

Carlo Innocenti

Department of Mechanical and Civil Engineering,

University of Modena and Reggio Emilia, Italy

E-mail: carlo.innocenti@unimore.it

Abstract. *The paper focuses on the enumeration of the kinematically-relevant geometric parameters of a spatial manipulator. The number of geometric parameters that are necessary to describe the kinematically-relevant dimensions of all links of a manipulator is determined first. After having pointed out that two manipulators of the same type but with different link dimensions might exhibit the same kinematic behavior, the number of the essential kinematic parameters is found. Lower in number than the previous ones, these latter parameters are the only ones that can be detected by manipulator calibration. If two manipulators of the same kind share the same set of essential parameters, they also exhibit identical kinematic behavior. The paper contributes to clarify a subject dealt with so far by the technical literature in contradictory terms.*

Keywords: *spatial manipulators, kinematic parameters, calibration.*

1. INTRODUCTION

Pivotal to manipulator control, the kinematic model of a manipulator relates the joint transducer readings to the rigid-body position of the end-effector. If based solely on the nominal kinematic parameters of the links of the manipulator, the kinematic model generally proves unsatisfactory because it does not take into account manufacturing and assembly imperfections. A substantial improvement in the accuracy of the end-effector positioning can be attained by replacing, in the kinematic model, the nominal values of the kinematic parameters with the actual values. In turn, these can be determined by kinematic calibration [1], which is an experimental procedure that is executed once or a few times in the useful life of a manipulator. Loosely speaking, the kinematic calibration is aimed at assessing the actual values of the kinematic parameters of a manipulator based on a number of recordings of sets of transducer readings together with the corresponding rigid-body positions of the end-effector.

In order to actually solve a kinematic calibration problem – and in addition to collecting the required experimental data – it is necessary to identify a proper number of unknown kinematic parameters. These would then appear in a set of equations, the solution of which would yield the answer to the calibration problem.

In kinematic calibration, there is some freedom in choosing the unknown kinematic parameters, much the same as the geometry of a manipulator link can be parameterized in a

number of equivalent ways. Despite this, the number of the unknown parameters of a calibration problem is not arbitrary, but amounts to a precise value that depends on the manipulator's structure. Several assessments of this value have been presented in the technical literature, all pertaining to spatial serial manipulators with revolute and prismatic joints. More precisely, three different estimates of the number of calibration parameters have been proposed: the first is presented in [2]; the second is reported in [3]-[6]; and the third is accounted for in [7]. A specialization of the first two expressions to serial manipulators with revolute joints exclusively is reported in [8] and [9]. Needless to say, only one of the above-mentioned assessments is correct at the best. Choosing less or more than the correct number of calibration parameters would lead to inadequate calibration or, respectively, indeterminacy of the calibration parameters, as explained in [3].

The number of calibration parameters even transcends the scope of calibration. Because calibration parameters express the deviation of the actual kinematic behavior of a manipulator from the nominal behavior, their number generally matches the number of the essential kinematic parameters that encapsulate the kinematic behavior of the manipulator. Different manipulators with the same structure but different link dimensions exhibit the same kinematic performance (i.e., have the same kinematic model) provided that they share the same set of essential kinematic parameters. Therefore these parameters are intrinsic features of any manipulator, and their number is an attribute of the manipulator itself.

This paper presents an original way to assess the number of essential kinematic parameters of a spatial manipulator. The adopted approach is applicable to any general-geometry spatial manipulator, either serial, parallel or hybrid, provided that all kinematic pairs are of the lower type. This paper complements a previous contribution ([10]), where substantially the same expression for the number of essential kinematic parameters has been incidentally put forward, without proof. When specialized to the case of spatial serial manipulators with revolute and prismatic joints, the resulting number of essential kinematic parameters matches the estimate reported in [3]-[6] for the number of calibration parameters.

Determination of the number of essential kinematic parameters is preceded in the paper by the preliminary estimate of the number of descriptive kinematic parameters of a manipulator. Higher in number than the essential parameters, the descriptive parameters collectively specify the kinematically-relevant dimensions of every link of a manipulator.

The approach here adopted for computing the number of descriptive and essential kinematic parameters provides useful hints on the actual choice of these parameters too, as well as on the selection of the kinematic calibration parameters. The presented results can be easily extended to co-operating manipulators and to manipulators with higher kinematic pairs.

An example shows application of the presented results to a case study.

2. NUMBER OF DESCRIPTIVE KINEMATIC PARAMETERS

The present section is devoted to evaluating the minimum number of linear and angular dimensions that suffice in completely defining the kinematically-relevant geometry of all links of a given manipulator. Identifying this minimum set of dimensions, here collectively referred to as descriptive kinematic parameters, is a preliminary step towards the assessment of the number of essential kinematic parameters.

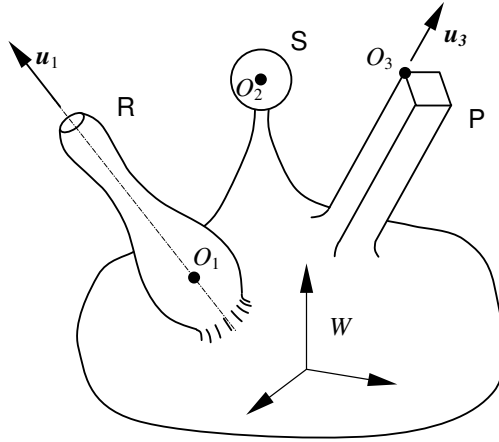


Figure 1. The pairing elements of a generic manipulator link.

The manipulator here considered is spatial, composed of rigid links connected by lower kinematic pairs, and assigned the task of indexing its end-effector in space through a sequence of rigid-body positions (locations) with respect to the manipulator base. There is no restriction on either the topology of the manipulator's kinematic chain or the number of actuators. Moreover, the geometry of all links is supposed to be generic. For the scope of the present section, the distinction between passive and actuated joints is immaterial.

The number of descriptive parameters of a manipulator can be obtained as the sum of the numbers of kinematically-relevant dimensions of its links. A generic link is considered first. For instance, Fig. 1 shows a manipulator link endowed with revolute (R), spherical (S), and prismatic (P) pairing elements. These pairing elements are part of R, S, and P joints that connect the considered link to adjacent manipulator links.

The kinematically-relevant geometry of the link shown in Fig. 1 can be specified by locating its three pairing elements with respect to a reference frame W fixed to the link. The revolute pairing element is characterized by an axisymmetric non-cylindrical surface. It is supposed that this pairing element perfectly mates with the corresponding revolute pairing element fixed to the adjacent link of the manipulator. This is equivalent to saying that there is no need to describe the shape of the revolute pairing element (or of pairing elements of other kinds) in order to ensure its correct matching with the other element of the same kinematic pair. For the considered link, the only kinematically-relevant data associated with the revolute pairing element is the position of its pairing surface with respect to reference frame W . This position can be specified by the components of a unit vector u_1 parallel to the axis of the revolute pairing element (two independent parameters) plus the coordinates of a given point, O_1 , on the same axis (for instance, the point on the cross-section of maximum diameter of the axisymmetric surface; three additional parameters).

Table 1. Number of locating parameters for the pairing elements of lower kinematic pairs.

Type of pairing element	Number of locating parameters
R (revolute)	5
P (prismatic)	5
H (helical)	5
C (cylindrical)	4
S (spherical)	3
E (planar)	3

As for the position of the spherical pairing element with respect to W (see Fig. 1), it is completely specified by the three coordinates of its center O_2 . Finally, the location of the prismatic pairing element – a non-axisymmetric cylinder – can be parameterized by five parameters: four are needed to specify the position with respect to W of one of its generatrices – the line through point O_3 and parallel to unit vector \mathbf{u}_3 – whereas one parameter is required for identifying the angular position of the pairing element about the aforementioned generatrix.

The number of locating parameters for all types of pairing elements of lower kinematic pairs is reported in Tab. 1. It is worth observing that each of these numbers coincides with the complement to six of the number of freedoms of the corresponding kinematic pair. This is not an accidental occurrence: a pairing element is a special rigid surface that keeps superimposing on itself following any movement allowed by the kinematic pair it belongs to. Consequently, the motions allowed by the kinematic pair do not alter the location of a pairing element. The hypothetical independent motions that would alter such a location are six (the number of degrees of freedom of a rigid body in space) minus the number of freedoms of the considered joint. Specifying the values of the parameters that correspond to these hypothetical independent motions actually prevents them from taking place, thus locating the pairing element with respect to the considered link.

Based on the previous considerations, the number a of parameters that are required to locate all pairing elements of a generic link of the manipulator with respect to a reference frame fixed to the considered link is provided by

$$a = 5(n_R + n_P + n_H) + 4n_C + 3(n_S + n_E) \quad (1)$$

In Eqn. (1), n_R , n_P , n_H , n_C , n_S , and n_E are the numbers of pairing elements of type R, P, H, C, S, and E on the considered link (the meaning of these symbols is explained in the left column of Tab. 1).

Quantity a provided by Eqn. (1) does not always express the number of kinematically-relevant dimensions of a link. In most instances, the choice of the reference frame fixed to the link is arbitrary. By changing the position of the reference frame, the a parameters specifying the positions of the pairing elements with respect to the reference frame also change, but the

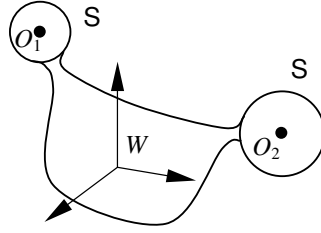


Figure 2. A binary link with spherical pairing elements (SS link).

geometry of the considered link does not. Since there are generally ∞^6 ways of attaching a reference frame to a link, six of the a parameters provided by Eqn. (1) are associated with the choice of the reference frame and does not convey any information about the geometry of the link. As a result, the number b of kinematically-relevant parameters of a generic manipulator link is

$$b = 5(n_R + n_p + n_H) + 4n_C + 3(n_S + n_E) - 6 \quad (2)$$

For the link in Fig. 1, Eqn. (2) yields $b = 7$. Special cases apart, these seven parameters can be selected in the ensuing fashion. The reference frame W can be chosen with origin at O_2 , z -axis parallel to unit vector \mathbf{u}_3 , and x -axis intersecting the generatrix through point O_3 . Accordingly, the seven kinematically-relevant parameters of the link are: the coordinates of point O_1 (three parameters), the direction of unit vector \mathbf{u}_1 (two parameters), the x -coordinate of point O_3 (one parameter) and the orientation of the P pairing element about the generatrix through O_3 (one parameter).

There are two kinds of exceptions to Eqn. (2). The first one occurs when the considered link is the base or the end-effector of the manipulator. In this case the choice of the reference frame is not arbitrary: the reference frame on the base is the one with respect to which the location of the end-effector is of relevance, whereas the reference frame on the end-effector has a position dictated by the manipulator tool. Therefore, for the base and the end-effector, the number of kinematically-relevant parameters is still provided by Eqn. (1). (Equivalently, the choice of the reference frame on the base and end-effector can still be considered as arbitrary, but additional six-parameter geometric features have to be taken into account: the location of the workshop with respect to reference frame fixed to the base link of the manipulator, and the location of the tool of the manipulator with respect to the reference frame fixed to the end-effector. Again, the number of kinematically-meaningful geometric parameters of base and end-effector provided by a modified right-hand side of Eqn. (2) coincides with the value provided by the right-hand side of Eqn. (1).)

The second exception is encountered when the considered link is binary with spherical or planar pairing elements, hence of type SS, ES, or EE. An example of such a link is shown in Fig. 2. For it, on the one hand, there should be only one kinematically-relevant dimension, namely the distance between the centers O_1 and O_2 of the spherical pairing elements. On the

other hand, Eqn. (2) yields $b = 0$, which is incorrect. The failure of Eqn. (2) for an SS link can be explained by going back to Eqn. (1), which correctly provides $a = 6$ (six are the parameters actually needed to locate the two S pairing elements with respect to a reference frame W attached to the SS link). Differently from what happens for a generic link, by changing the position of W these six parameters can now vary in ∞^5 ways only, not ∞^6 . More precisely, for any of the ∞^6 possible locations of reference frame W on the link, there is a simple infinity of locations that share the same set of coordinates of centers O_1 and O_2 : these are the locations that can be reached by revolving W about the line through points O_1 and O_2 . The same happens for ES links (revolution of W about the line through the center of the spherical pairing element and orthogonal to the planar pairing element) and for EE links (translation of W along the direction parallel to both planar pairing elements). Accordingly, for SS, ES, and EE binary links Eqn. (2) should be replaced by

$$c = 3(n_s + n_e) - 5 \quad (3)$$

Similarly to Eqn. (2), this equation holds provided that the considered binary link has a general geometry. Specifically, for an SS links the centers of the spherical pairing elements must not coincide, whereas the planar pairing elements of an EE link must not be parallel.

Differently from the other types of links, there will be never the need to compute the number of kinematically-relevant parameters of SS, ES, and EE links by resorting to the left-hand side of Eqn. (1): for obvious reasons, these links can never be either the base or the end-effector of any manipulator.

It is now straightforward to compute the number of descriptive kinematic parameters of a generic manipulator. If N_{SS} , N_{ES} , and N_{EE} , are the number of SS, ES, and EE links respectively, the number D of descriptive parameters of the manipulator is obtained by summing up the number provided by Eqn. (1) for two of the manipulator's links (base and end-effector), the number provided by Eqn. (3) for $N_{SS}+N_{ES}+N_{EE}$ links, and the number provided by Eqn. (2) for the remaining $m-2-N_{SS}-N_{ES}-N_{EE}$ links (here m is the overall number of the links of the manipulator, inclusive of the base). The ensuing expression can be easily obtained

$$D = 10(N_R + N_P + N_H) + 8N_C + 6(N_S + N_E - m + 2) + N_{SS} + N_{ES} + N_{EE} \quad (4)$$

In this equation, N_i is the number of kinematic pairs of type i ($i = R, P, H, C, S, E$). This latter number is, in turn, half of the sum of the values that quantity n_i takes for every link of the manipulator.

The number D of descriptive parameters provided by Eqn. (4) is the minimum number of parameters that can completely describe the kinematically-relevant geometric features of all links of a general-geometry manipulator, inclusive of the placement of the manipulator base with respect to the shop floor and the location of the manipulator tool with respect to the end-effector.

3. NUMBER OF ESSENTIAL KINEMATIC PARAMETERS

The descriptive kinematic parameters counted in the previous section are strictly sufficient for specifying the basic shape of every link of a manipulator. Yet they are not sufficient for

defining the kinematic model of the manipulator. What still is missing is the relationship between the variable(s) of motion of an actuated joint connecting two links, and the relative position of these links.

Let us consider, for instance, the case of a rotary direct drive that embodies the actuated revolute joint connecting two adjacent links, k and $k+1$, of a manipulator. The part of the direct drive fixed to link k will be conventionally referred to as stator, whereas the other will be the rotor. For a given set of the descriptive parameters of the manipulator, the stator can be connected to link k in infinitely-many positions, the difference between any of these positions being a rotation about the axis of the revolute joint. Similarly, the descriptive parameters do not specify the angular position of the rotor about its axis, and with respect to link $k+1$. Even if the reading from the transducer that supposedly equip the considered direct drive conveys the correct information about the position of the rotor relative to the stator, it does not suffice to specify the position of link $k+1$ relative to link k because of the unknown positions of rotor and stator relative to link $k+1$ and k respectively. More precisely, any transducer reading has to be supplemented with the difference between the angular positions of the rotor relative to link $k+1$ and of the stator relative to link k in order to provide the position of link $k+1$ relative to link k . This difference will be generically referred to as transducer reading offset.

The set of descriptive kinematic parameters of a manipulator, if supplemented with the offsets of the transducers readings, suffices for defining the kinematic model of the manipulator. The number G of this extended set of parameters is given by the number D of descriptive parameters augmented by the number N_A of actuated degrees of freedom

$$G = D + N_A \quad (5)$$

There is only one transducer reading offset associated with an actuated one-degree-of-freedom joint. The number of transducer reading offset of a multi-degree-of-freedom joint might be lower than the number of degrees of freedom of the joint, and generally matches the number of actuated degrees of freedom in the joint.

An expression for N_A can be obtained by the so-called Grübler criterion

$$N_A + N_L = 6(m - 1) - 5(N_R + N_P + N_H) - 4N_C - 3(N_S + N_E) \quad (6)$$

In this equation, N_L is the number of passive degrees of freedom of the manipulator, i.e., the number of its internal liabilities. Any other symbol in Eqn. (6) has an already-specified meaning.

Insertion of the expressions provided by Eqns. (4) and (6) for D and, respectively, N_A into Eqn. (5) yields the ensuing relation

$$G = 5(N_R + N_P + N_H) + 4N_C + 3(N_S + N_E) + N_{SS} + N_{ES} + N_{EE} - N_L + 6 \quad (7)$$

A further refinement is necessary in order to obtain the number of essential kinematic parameters of a manipulator, i.e., the minimum number of parameters that define the kinematic model of the manipulator. As dictated by Eqn. (5), the number G of parameters defined by Eqn. (7) is simply the number of descriptive parameters augmented by the number transducer reading offsets. These G parameters surely suffice in defining the kinematic model of the

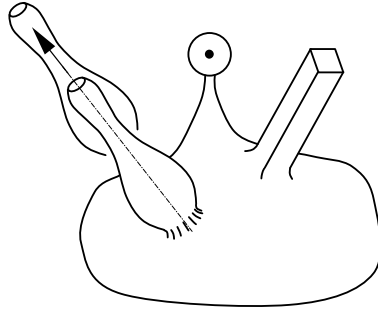


Figure 3. A special geometric alteration for link k .

manipulator. Nevertheless, as will be shown hereafter, two different manipulators of the same kind, but with different sets of these G parameters, might share the same kinematic model and therefore have the same kinematic behavior. This is equivalent to saying that some of the G parameters are superfluous for defining the kinematic model of the manipulator.

Let us consider, for instance, a generic manipulator link (link k , see Fig. 3) connected to an adjacent link (link $k+1$) by a revolute joint, indifferently passive or actuated. The set of descriptive parameters of the manipulator – as well as the extended set of G parameters – completely define the kinematically-relevant geometry of links k and $k+1$. Consider now the ensuing hypothetical alteration of the geometry of these links: on both of them, the revolute pairing element is shifted along the joint axis, in the same direction, and by the same amount. Following this alteration, the set of descriptive parameters obviously changes. Nevertheless, the resulting set of possible rigid-body positions of link $k+1$ relative to link k is still the same as before the alteration. The considered geometric modification does not change the constraint between links k and $k+1$, and the manipulator's kinematic model does not change either. Rather than the two displacements considered separately, what is relevant for the kinematic model of the manipulator is the differential displacement of the two revolute pairing elements along the joint axis. This is equivalent to saying that the two descriptive parameters that axially locate the revolute pairing elements on links k and $k+1$ can be merged into a single parameter, the variation of which would surely imply a modification of the kinematic model of the manipulator.

In addition to the simultaneous axial shift, there is no other movement that the pairing elements of a revolute joint can undergo without affecting the set of relative locations of the links connected by the joint. In view of obtaining the number K of parameters strictly sufficient for defining the kinematic model of a manipulator, it is undoubtedly necessary to decrease the number G given by Eqn. (7) by one unit for every revolute joint. Similar adjustments are in order for the other types of joints.

Table 2 summarizes, for every type of lower kinematic pair, the number of descriptive parameters that can be spared in defining the kinematic model of a manipulator. The same table synthetically describes the corresponding number of independent rigid-body displacements that

Table 2. Number of undetectable parameters for lower kinematic pairs.

Type of pairing element	Number of undetectable parameters
R (revolute)	1 (translation parallel to pair axis)
P (prismatic)	3 (one rotation parallel and two rotations orthogonal to sliding direction)
H (helical)	1 (rotation about the pair axis, or translation along the pair axis, or screw movement about the pair axis with a pitch different from that of the pair)
C (cylindrical)	0
S (spherical)	0
E (planar)	1 (one translation orthogonal to the pairing elements)

– if simultaneously experienced by both pairing elements of a joint – leave unchanged the constrained realized by the kinematic pair.

With the aid of Tab. 2, it is easy to derive from Eqn. (7) the number K of independent parameters that are strictly sufficient in defining the kinematic model of a general-geometry manipulator

$$K = 4(N_R + N_H + N_C) + 3N_S + 2(N_P + N_E) + N_{SS} + N_{ES} + N_{EE} - N_L + 6 \quad (8)$$

This equation applies to spatial manipulators that have to carry their end-effector through sequences of rigid-body positions in space. It holds regardless of both the number of actuated degrees of freedom of the manipulator and the connectivity ([11]) of the end-effector relative to the base.

Since the kinematic model of a manipulator depends on K parameters only – and any variation of these parameters implies a change of the kinematic model – only K geometric dimensions, inclusive of the transducer reading offsets, have a bearing on the kinematic behavior of the manipulator. For this very reason, these K parameters are here termed as essential kinematic parameters of the manipulator.

Equation (8) is the main result of the present paper. In most cases, the deviations of the K essential kinematic parameters from their nominal values can be detected by recording a series of transducer readings, together with the corresponding end-effector locations. Therefore K generally matches the number of calibration parameters of a manipulator, and Eqn. (8) generalizes to any spatial manipulator the expressions reported in [3]-[6] for spatial serial manipulators with revolute and prismatic joints.

There are instances, though, where not all the K variations of the essential kinematic parameters with respect to their nominal values can be detected by kinematic calibration. For manipulators with special geometry, an infinitesimal variation of the first order of some essential parameters might imply an infinitesimal variation of the second order of the kinematic model. The calibration problem, when linearized due to the smallness of the unknown calibration parameters, would then be singular, signaling that some of the unknown calibration

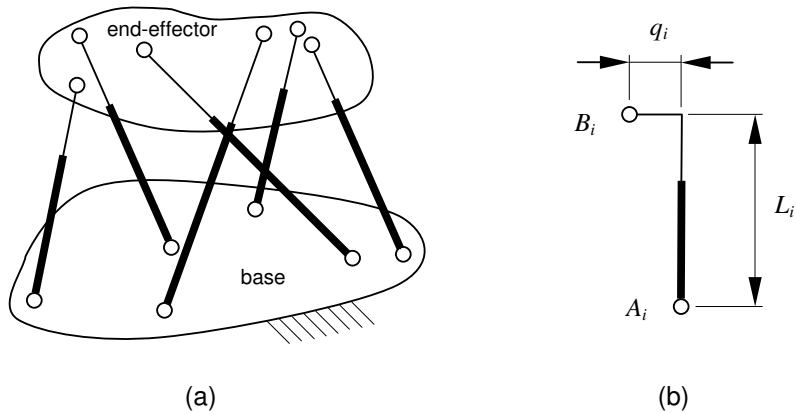


Figure 4. A general-geometry fully-parallel manipulator (with special-geometry legs) and a general-geometry leg.

parameters are indeterminate. If this happens, indeterminacy can be avoided by discarding from the outset the unknown calibration parameters whose first-order variations have no noticeable bearing on the manipulator kinematic model. Therefore, in these cases, the number of calibration parameters is lower than the number K of essential kinematic parameters provided by Eqn. (8). Nevertheless, Eqn. (8) still provides a guesstimate of the number of calibration parameters.

4. EXAMPLE

Equation (8) will be now applied to assess the number of essential kinematic parameters of the six-degree-of-freedom manipulator shown in Fig. 4a. The number of calibration parameters of this manipulator will be determined too. The chosen example is so elementary that the reader can easily check the correctness of the reported results. At the same time, it offers the pretext for discussing the scope of application of Eqn. (8), and its extension to the assessment of the number of calibration parameters.

The manipulator shown in Fig. 4a is commonly known as general-geometry fully-parallel manipulator. It has twelve passive spherical pairs ($N_S=12$) and six variable-length legs with one actuated prismatic pair each ($N_P=6$). Because each leg can freely revolve about the line through the centers of the spherical joints at its extremities, the manipulator has six internal liberties ($N_L=6$). All other variables on the right-hand side of Eqn. (8) are zero ($N_R = N_H = N_C = N_E = N_{SS} = N_{ES} = N_{EE} = 0$). According to Eqn. (8), the number K of essential kinematic parameters for the considered manipulator is 48.

In order to check this result, let us consider that three parameters are required for locating each spherical joint with respect to a reference fixed to either the base or the end-effector. Therefore 36 parameters are expended for the spherical joints alone. Six more parameters take into account the offsets of the readings of the six linear transducers that supposedly equip the variable-length legs. At first sight, for the considered manipulator there is no need of any

additional parameter in order to define the kinematic model. The latter would then depend on 42 geometric dimensions only, contrary to the estimate provided by Eqn. (8).

This discrepancy can be justified by observing that the manipulator in Fig. 4a is a general-geometry fully-parallel manipulator, not a general-geometry manipulator *tout court*. The geometry of each leg is special in that the line joining the centers of the kinematic pairing elements at the extremities of a leg is parallel to the sliding motion between the pairing elements of the actuated prismatic pair. A general-geometry leg would be the one shown in Fig. 4b, characterized by a non-zero offset dimension q_i . If provision for zero offset parameters q_i ($i = 1, \dots, 6$) is made, the number of essential parameters for the manipulator in Fig. 4a agrees with the estimate provided by Eqn. (8).

Determination of the number of calibration parameters for the fully-parallel manipulator in Fig. 4a is now addressed. Although considering the kinematic model of this manipulator as defined by 42 or 48 parameters is, to a certain extent, a matter of preferences, there should not be such an option in determining the number of its calibration parameters: any manipulator that is nominally fully-parallel (i.e., $q_i = 0$, $i = 1, \dots, 6$) acquires a true general geometry as soon as all kinds of manufacturing and assembly imperfections are factored in. Since the calibration parameters are nothing else than the variations of the essential parameters relative to their nominal values, for the manipulator in Fig. 4a their number should amount to 48. Obviously, six of these parameters would be the offsets q_i of the legs (see Fig. 4b).

It turns out that such an estimate for the number of calibration parameters is not accurate, and it is so due to the special geometry of the manipulator in Fig. 4a. A detailed explanation is reported hereafter. Because it stems from the difference between the actual and nominal values of an essential kinematic parameter, each calibration parameter is presumably small in value. Accordingly, unknown parameters q_i , $i = 1, \dots, 6$, are expected to be much lower than dimensions L_i (see Fig. 4b) for an actual manipulator that is nominally fully-parallel. If q_i can be considered as an infinitesimal of the first order with respect to L_i , then the difference between the length of segment A_iB_i and L_i is infinitesimal of the second order with respect to L_i . Since each leg affects the location of the end-effector through its length solely, and this length is not appreciably affected by a small parameter q_i , there is no chance of detecting q_i by the kinematic calibration of the manipulator, especially if linearized procedures are employed. Hence the number of calibration parameters for a manipulator that is nominally of the type shown in Fig. 4a is 42.

Obviously, should a manipulator with the same topology as the one shown in Fig. 4a have a truly general geometry, the nominal values of all offsets q_i would be different from zero, and the number of calibration parameters would match the number of essential parameters (i.e., 48).

5. CONCLUSION

A new expression has been derived to assess the number of essential kinematic parameters of a general-geometry spatial manipulator that has to place its end-effector at prescribed rigid-body positions in space. The presented expression generalizes the results available in the literature for serial spatial manipulators.

The reasoning here adopted to obtain the proposed expression can be easily tailored to manipulators with different tasks (regional, orientational manipulators) or with different task spaces (planar, spherical manipulators).

Because the number of essential kinematic parameters of a manipulator generally equals the number of calibration parameters, the presented results can be taken advantage of in deciding the number and type of unknown parameters in kinematic calibration problems of general-geometry spatial manipulators. For special-geometry manipulators, the proposed expression might overestimate the number of calibration parameters. Despite this, it still offers a convenient starting point for the correct assessment of such a number.

REFERENCES

- [1] Roth, Z.S., Mooring, B.W., and Ravani, B., 1987, "An Overview of Robot Calibration". *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **3**(5), October, pp. 377-385.
- [2] Everett, L.J., Driels, M., and Mooring, B.W., 1987, "Kinematic Modelling for Robot Calibration". In *Proc. of the IEEE International Conference of Robotics and Automation*, Raleigh, NC, Mar. 31-Apr. 3, Vol. 4, pp. 183-189.
- [3] Everett, L.J., and Hsu, T.-W., 1988, "The Theory of Kinematic Parameter Identification for Industrial Robots". *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **110**(1), March, pp. 96-100.
- [4] Everett, L.J., and Suryohadiprojo, A.H., 1988, "A Study of Kinematic Models for Forward Calibration of Manipulators". In *Proc. of the IEEE International Conference of Robotics and Automation*, Philadelphia, PA, 24-29 April, Vol. 2, pp. 798-800.
- [5] Goswami, A., and Bosnik, J.R., 1993, "On a Relationship Between the Physical Features of Robotic Manipulators and the Kinematic Parameters Produced by Numerical Calibration". *ASME Journal of Mechanical Design*, **115**(4), December, pp. 892-900.
- [6] Karan, B., and Vukobratović, M., 1994, "Calibration and Accuracy of Manipulation Robot Models – An Overview". *Mechanism and Machine Theory*, **29**(3), pp. 479-500.
- [7] Goswami, A., Quaid, A., and Peshkin, M., 1993, "Complete Parameter Identification of a Robot from Partial Pose Information". In *Proc. of the IEEE International Conference of Robotics and Automation*, Atlanta, GA, 2-6 May, Vol. 1, pp. 168-173.
- [8] Veitschegger, W.K., and Wu, C.-H., 1987, "A Method for Calibrating and Compensating Robot Kinematic Errors". In *Proc. of the IEEE International Conference of Robotics and Automation*, Raleigh, NC, Mar. 31-Apr. 3, Vol. 4, pp. 39-44.
- [9] Veitschegger, W.K., and Wu, C.-H., 1988, "Robot Calibration and Compensation". *IEEE Journal of Robotics and Automation*, **4**(6), December, pp. 643-656.
- [10] Innocenti, C., 2007, "Statics as a Means to Assess the Sensitivity of a Manipulator to Kinematic Parameter Deviations". In *Proc. of the IEEE International Conference of Robotics and Automation*, Rome, 10-14 April, pp. 4401-4406.
- [11] Hunt, K.H., 1978. *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Clarendon Press, Oxford, pp. 30-31.

PROGETTAZIONE DI PRODOTTO: NUOVE (?) PROBLEMATICHE

Gianluca Medri

Dipartimento di Ingegneria Industriale

Università degli Studi di Parma

E-mail: gmedri@racine.ra.it – gianluca.medri@unipr.it

Sommario. *Si presentano alcune delle problematiche che il progettista è costretto ad affrontare da una visione moderna della progettazione di un prodotto industriale: il moderno ruolo del cliente/utente, il rapporto con l'estetica e l'ergonomia di uso e l'attenzione ai rischi di materiale.*

Parole chiave :*progettazione di prodotto, sviluppo di nuovo prodotto, innovazione industriale.*

1. INTRODUZIONE

Il progettista si trova oggi ad affrontare situazioni nuove e diverse rispetto a quelle abituali, fino a poco tempo fa, in campo industriale.

Lo sviluppo delle conoscenze e della coscienza del cliente/utente e la sua affermazione come principale “entità di convalida” dell’attività produttiva, basata sui principi della Qualità Totale, pongono ulteriori limiti e/o obiettivi alla progettazione che viene gestita con crescente difficoltà se ci si riferisce ai criteri puramente tecnici (nel senso riduttivo del termine) dell’ingegnere. Nasce, quindi, la necessità di una più attenta considerazione delle esigenze di utenti e operatori, che travalichi il semplice aspetto funzionale, in senso riduttivamente fisico-tecnico, del manufatto industriale.

Si analizzano brevemente tre aspetti del rapporto utente-prodotto che hanno generato (o dovrebbero aver generato) una profonda modificazione del modo di progettare:

1. La valutazione psicologica del nuovo prodotto;
2. L’ergonomia d’uso e l’interazione operatore-prodotto;
3. L’impatto dei materiali e dei processi produttivi sulla salute.

2. NOVITA' ED INNOVAZIONE

L’innovazione di prodotto è, da sempre, soggetta ad una sorta di **darwinismo di mercato** che non garantisce un duraturo successo di manufatto semplicemente per il fatto che questo è nuovo/moderno/cambiato (la trattazione che segue si basa su [1]). Questo fenomeno ha portato al continuo miglioramento funzionale e tecnologico degli strumenti che l’uomo usa nel suo percorso su questa terra e, conseguentemente, ha contribuito fortemente all’elevazione del livello di vita in senso economico-sociale e anche antropologico.

Tuttavia, nei settori merceologici destinati a funzioni situate “in basso” (che stanno acquisendo forte importanza nel mercato come conseguenza delle migliorate condizioni di vita) nella “scala dei bisogni umani” di Maslow:

- sopravvivenza
- sicurezza
- accettazione sociale
- posizione sociale
- realizzazione di sé stessi

la selezione “naturale” fisiologicamente corretta dei prodotti è spesso, apparentemente o realmente, attenuata o alterata da spinte e condizioni che esulano dalla sfera razionale-tecnica e funzionalistica-economica, che prevede la gerarchizzazione del prodotto su basi oggettive di valutazione delle *performance* e dei costi (questi ultimi intesi come metriche del consumo/dispendio di risorse).

In natura, la selezione delle mutazioni degli organismi viventi è ritenuta (ragionevolmente, a parte alcune incongruenze dovute probabilmente alla difficoltà di spiegare l’inconoscibile e l’imponderabile) legata all’adattamento all’ambiente di riferimento. Quindi, sopravvive l’organismo **più adattabile**, non *il migliore* o *il più forte*. Il processo di sopravvivenza è affidato alla continuazione della riproduzione delle nuove mutazioni: conseguentemente i “difetti/debolezze” dei nuovi organismi che non siano invalidanti fino a dopo la riproduzione (e a dopo il termine della cura della prole) non sono identificati come negativi nella selezione e non possono essere eliminati dal processo naturale.

La selezione neo-darwiniana di mercato opera in modo simile: il prodotto si deve adattare all’ambiente (alla richiesta del mercato, anche in termini di “mode”) per imporsi e per sopravvivere (essere commercializzato con successo e conquistare il mercato); difetti/carenze, anche gravi, che si manifestano dopo l’obsolescenza psicologica dell’utente o dopo il periodo d’uso convenzionalmente accettato, non hanno effetto sulla valutazione del prodotto. Il problema per il progettista (e non solo per lui!) è che l’obsolescenza psicologica è soggettiva perché legata ai costumi e alla cultura, e fortemente influenzata dalla pubblicità – con un cortocircuito socioeconomico che può vanificare gli effetti positivi del darwinismo di mercato.

Un esempio classico, per rimanere in un ambito ad elevato contenuto tecnologico, è il settore delle autovetture per trasporto persone ad uso privato. Analisi basate su criteri puramente tecnici e razionali non possono spiegare perché le diffusissime politiche di continua immissione di modelli differenziati solamente dall’estetica (e spesso con interventi puramente cosmetici, nel senso deteriore della parola!) e da minimi interventi funzionali (legati a marginali variazioni di ergonomia o di prestazioni meccaniche) abbiano tanto successo. A onor del vero, non tutte le aziende automobilistiche praticano queste tecniche commerciali, ma sono una minoranza quelle che introducono veri miglioramenti funzionali nei nuovi prodotti.

Eppure i costi di vita utile delle autovetture sono relativamente elevati e quindi ci si potrebbe aspettare da parte del cliente/utente un’oculata procedura di scelta del prodotto, che basasse su ponderati ragionamenti economici e funzionali la decisione di procedere alla sostituzione dell’autovettura posseduta.

Specificamente, l’acquisto di un autoveicolo medio comporta spese di investimento

superiori a cinque volte il reddito medio mensile di una famiglia dei paesi industrializzati, con deprezzamento annuale reale di poco inferiore ad una mensilità di reddito familiare e costi annuali di gestione pari (o superiori) ad una mensilità. Una scelta basata anche su fattori psicologici può essere giustificata dal fatto che le prestazioni funzionali degli autoveicoli sono oramai livellate, ma questo non giustifica la sostituzione dell'autoveicolo in tempi brevi (quattro o cinque anni) con la spinta principale dell'estetica! Un'autovettura attuale è sicura per un periodo di esercizio ben superiore a dieci anni, se assoggettata a manutenzione accurata; inoltre, si potrebbe fronteggiare la naturale evoluzione della tecnologia e delle norme su motori e/o sicurezza con una progettazione modulare che permettesse un *upgrade* economicamente conveniente (cioè una sostituzione a basso costo di parti funzionali dell'autoveicolo per adeguarsi alle variazioni della legislazione e ai miglioramenti tecnologici).

Esempi ulteriori si hanno nel settore dell'abbigliamento: la qualità degli abiti di produzione industriale è tale che, spesso, questi non sopportano lavaggi ripetuti ed intensi perché la previsione di vita è di un anno (o di una sola stagione!). Infatti, capita di vedere finiture e stoffe incollate invece che cucite e colori che sbiadiscono al primo lavaggio.

Evidentemente, nella valutazione del *Value* funzionale del prodotto (inteso come rapporto tra *performance* e costo) si insinuano spinte di competizione interpersonale o di soddisfazione psicologica, che prevaricano le necessità "reali" del cliente/utente e portano a distinguere il *Value* reale dal *Value* percepito. Naturalmente, qui per "reale" si intende l'oggettività del bisogno e la sua congruenza con standard razionali di funzionalità; infatti, per il cliente/utente che desidera un oggetto la necessità soggettiva è sempre reale!

Una manifestazione classica di certa progettazione di nuovo prodotto, che non ha giustificazione tecnica (e spesso risulta anche incomprensibile, perché crea prodotti a funzionalità limitata rispetto a quella possibile tecnicamente), è lo *skeuomorphism* = imitazione priva di necessità funzionale (come identificato da Molotch, 2005). Lo *skeuomorphism* consiste nella progettazione e realizzazione di oggetti nuovi con una forma consueta che permetta di non "spaventare" il cliente/utente, perché quella è la forma accettata e tradizionale per quel settore merceologico o per quel prodotto. Esso tradisce la funzione "didattica" e culturale che deve essere immanente nella progettazione, perché si possano ottenere e consolidare progressi continui (anche in senso antropologico).

Da quanto detto appare chiaro che, più in alcuni settori merceologici che in altri, anche spinte irrazionali ed emozionali sono alla base del processo di formazione del bisogno del prodotto. Alcune di queste situazioni sono bene descritte dal termine *dreamketing*, che individua la tendenza del progettista a realizzare un sogno del cliente più che a soddisfarne un'esigenza fisica.

Infatti, soprattutto per prodotti di uso personale, l'aspetto emozionale può essere importante quanto la funzionalità (e in certi casi addirittura prevalente) e la sua soddisfazione entra nella *performance* attesa. Spesso non interessa solamente l'estetica o il *design*, che pure sono molto importanti in questi casi, ma anche la disponibilità del manufatto, intesa sia come possesso sia come funzionalità (in senso qualitativo, non tecnico, cioè la certezza/consapevolezza di avere certe funzioni a disposizione). Lo studio della psicologia dell'utente tipo, individuato dalla definizione del target di mercato, è estremamente importante e si deve coniugare alle valutazioni standard, quali la propensione alla spesa e le necessità

funzionali “fisiche”: questa è la base dell’*Industrial Design*.

In genere il progettista tecnico è impreparato a gestire al meglio queste situazioni, difficilmente analizzabili con metodiche puramente “razionali” che, oltre ad essere insufficienti, possono fuorviare l’analista.

E’ interessante il fatto che le pulsioni psicologiche individuali (generalmente talmente diffuse da diventare comportamenti sociali di interi gruppi etnico-culturali o comportamenti collettivi di interi strati di popolazione) del cliente/utente sono spesso sfruttate nella commercializzazione di prodotti non coerenti con uno sviluppo sostenibile o di cui non esiste una reale necessità funzionale. Questo porta ad effetti dannosi per il singolo e per la collettività, e assume i connotati di un vero e proprio comportamento autolesionistico non conscio, generato da condizionamenti esterni (messi in opera da progettisti e produttori non sempre in buona fede).

3. L’ESTETICA E IL PRODOTTO

La componente estetica del prodotto diventa, per quanto precedentemente, un fattore che il progettista industriale non può più permettersi di trascurare, o almeno di trascurare *a priori*, nello sviluppo di prodotto. Un manufatto [1]

“è esteticamente valido quando visualmente (meglio sarebbe dire fisicamente, inserendo udito e tatto nei sensi coinvolti) desta emozioni positive (gratificanti, piacevoli, eccitanti etc.) in larga parte di una popolazione omogenea culturalmente (ed etnicamente), che ne costituisce il potenziale mercato e bacino d’utenza”

Occorre comprendere che l’estetica del prodotto è anche uno strumento di comunicazione/controllo nei riguardi del cliente, oltre che una caratteristica funzionale del manufatto: la sua funzione è di attirare il potenziale cliente e di gratificarlo come utente dopo l’acquisto (durante l’uso e/o il possesso del manufatto). Le analisi estetiche di prodotto devono essere mirate al *target* di mercato, perché l’estetica non è oggettiva.

Ovviamente quella estetica non è l’unica componente emozionale della scelta del prodotto (e della eventuale conseguente *customer satisfaction*) del cliente/utente.

A livello operativo, il progettista industriale ha a che fare con (almeno) tre classi di manufatti [1]:

- **Prodotto con esclusiva funzionalità estetica:** nella progettazione del manufatto si deve tenere conto della funzione principale, che è quella estetica. E’ tuttavia possibile prevedere un uso pratico del prodotto. In generale non vi sono limiti economici (di prezzo d’acquisto) e spesso si usa la tecnologia di produzione per creare effetti estetici (e. g. acciaio damascato). Ma, attenzione, la produzione seriale può introdurre limitazioni inaccettabili (per ragioni tecnologiche) per la funzione estetica o ridurre sensibilmente la qualità o, infine, ridurre l’appetibilità per la perdita del requisito dell’esclusività. E’ problematico (ma non impossibile) l’impiego di tecniche strutturate di progettazione a causa del pericolo di limitare (o addirittura negare) la creatività richiesta per oggetti “estetici”.

- **Prodotto a contenuto estetico:** il manufatto deve avere una funzionalità operativa pratica ben definita e richiesta dal cliente/utente, mentre la componente estetica è importante ma non principale. Si possono applicare tecniche di ottimizzazione tecnologica, funzionale e di scelta dei materiali. In questo modo solitamente si ottiene un oggetto contemporaneamente più funzionale, meno costoso e complessivamente più appetibile.
- **Prodotto ad estetica ininfluente:** l'estetica non rientra nelle funzioni dichiarate e/o richieste del prodotto, per esplicita scelta del committente e/o per tradizione/prassi del settore merceologico o della tipologia di prodotto. Tuttavia, sia nella pianificazione del prodotto sia nella valutazione delle alternative progettuali, non conviene mai escludere la componente estetica senza avere esaminato la dinamica del mercato specifico. Infatti, in certe situazioni, a parità di altre condizioni, la scelta da parte del cliente/utente potrebbe essere influenzata dall'aspetto estetico del manufatto. Inoltre, un buon prodotto, dal punto di vista funzionale-tecnico, dovrebbe essere reso più accattivante (e in ultima analisi più efficiente nel rapporto con l'utente) anche con l'ausilio dell'estetica.

E' abbastanza interessante il fatto che in campo tecnico, senza riferimento esplicito all'estetica soggettivizzata dalla cultura, sia oggettivamente individuabile e apprezzata la bellezza di un oggetto perfettamente funzionale e "disegnato" dalle leggi fisiche. Infatti, la nostra discendenza dall'*homo faber* ci porta ad apprezzare, consciamente o inconsciamente, il manufatto efficiente e disegnato sulla necessità funzionale.

4. RAPPORTO TRA OGGETTO E CLIENTE/UTENTE

Il reale "sistema funzionale" è costituito dal manufatto e dal suo utente/operatore: per essere pienamente efficiente esso deve essere progettato nella sua interezza. Il problema dell'interazione manufatto-operatore non riguarda, quindi, solo problemi di sicurezza o di benessere dell'utente, ma anche, e soprattutto, la funzionalità! (Vedi [1])

L'interfaccia/interazione utente-prodotto è, in pratica, una componente essenziale della funzionalità, esattamente come tutte le altre connessioni interne al prodotto, anche se a volte essa è quantitativamente molto ridotta (fino alla minima dimensione di un pulsante!). Conseguentemente la progettazione di forma di prodotti e componenti deve tenere conto dell'interazione utente/operatore-prodotto nello svolgimento della funzione, durante tutta la vita di servizio fino alla dismissione.

L'interazione utente-prodotto è sempre **bidirezionale** e deve essere accuratamente progettata, verificata e controllata in servizio. Le problematiche progettuali coinvolte sono difficoltose e complesse perché il controllo dell'utente da parte del progettista è spesso aleatorio, anche quando si cerca di fissarlo per mezzo di istruzioni d'uso cogenti, per la naturale ed incontrollata/incontrollabile diversità delle persone (e anche per possibili atteggiamenti psicologici di insofferenza verso le regole). In generale, il comportamento dell'utente in sede progettuale è obbligatoriamente individuato con analisi statistiche o con elaborazioni logiche, con continui richiami alla Murphy's Law (ricordando che non esistono sistemi completamente *fool-proof*) e con verifiche sperimentali su campioni reali.

La banalità "teorica" delle considerazioni sopra riportate si scontra con la realtà di una

parte non trascurabile dei manufatti prodotti su scala industriale. La produzione artigianale o pre-industriale ha sempre avuto caratteristiche di operabilità (nel senso di facilità di uso, maneggiabilità ed efficienza di controllo) e di ergonomia garantite dallo stretto contatto tra produttore e cliente/utente e dalla esplicita e rapida selezione darwiniana di prodotti e forme che ciò comporta, fomentata dalla reazione immediata e diretta dell'utente in caso di malfunzionamento (che spesso travalicava la semplice rampogna o la restituzione del manufatto: si racconta di armaioli trafitti con le spade malfabbricate o difettose!). Coloro che si stupiscono della maneggiabilità ed ergonomia di manufatti vecchi di millenni si dimenticano che l'uomo ha sempre progettato e costruito istintivamente per l'uomo!

Sembra, invece, che i moderni progettisti/produttori di nuovi manufatti pretendano che l'utente si adatti alla loro complessità sempre crescente. Questo atteggiamento, dichiarato o implicito, non tiene conto del fatto che lo sviluppo tecnologico sta procedendo ad un ritmo accelerato rispetto allo sviluppo delle capacità fisico-psicologiche dell'uomo.

I progressi ottenuti dall'uomo, in riferimento all'interazione con l'ambiente (e quindi anche con i manufatti), dopo lo sviluppo intellettuale delle grandi civiltà sono generalmente confinati al campo scientifico/tecnologico.

L'abilità manuale in senso fisico si è sviluppata più in senso collettivo che in senso stretto: l'affinamento dei movimenti delle mani e delle dita, che era patrimonio di classi ristrette (artigiani, artisti e scribi) è stato raggiunto dalla massima parte dei componenti delle società civilizzate. Lo stesso è avvenuto con le capacità intellettuali standard (logica, scrittura e lettura, comprensione di rudimenti di matematica etc.).

La comprensione e la descrizione dell'Universo fisico hanno fatto progressi da gigante, pur con tutti i distinguo del caso; queste conoscenze si stanno sviluppando in senso stretto e in senso collettivo (cioè si approfondiscono e lentamente diventano patrimonio di un numero sempre maggiore di persone), anche se appare probabile un asintoto statistico.

In sintesi, l'attuale situazione di "sofferenza" nasce dal fatto che, a causa dello sviluppo di strutture industriali di produzione di massa governata da forti motivazioni economiche (sacrosante, ma spesso limitate come orizzonte o, peggio, egoistiche), il legame diretto progettista/produttore-utente si è spezzato e, di fatto, si è attenuata e posticipata la retroazione del cliente sulla funzionalità/maneggiabilità del prodotto.

Infatti, un cliente/utente, in relazione ad una data necessità funzionale, può trovare sul mercato manufatti nei quali gli aspetti funzionale (in senso limitativo), produttivo ed economico hanno prevaricato ergonomia e facilità d'uso (e in qualche caso anche la sicurezza); in questi casi spesso non basta la vasta disponibilità attuale di prodotti diversi, perché si è instaurata una omologazione di certe caratteristiche tra i produttori concorrenti. Chi ha trovato umoristica la battuta di Henry Ford sull'automobile Modello T (**disponibile in tutti i colori a condizione che fosse richiesto il nero**), dovrebbe considerare quale *comfort* può offrire al guidatore un'auto nera in condizioni ambientali di forte soleggiamento e quale sia la visibilità passiva di tale auto nell'oscurità o nella nebbia.

I continui *trade-off* tra elevata e rapida disponibilità del prodotto e bassi costi, da un lato, e reale *customer satisfaction*, dall'altro, porta, in particolari condizioni di mercato, a distorsioni francamente inaccettabili che sarebbero facilmente eliminabili con una progettazione più attenta e consapevole (e mantenendo le caratteristiche di economicità e *timeliness* desiderate!).

Concludendo, nella progettazione occorre tenere conto dell'interazione del prodotto con l'utente/operatore ed in particolare si devono controllare: la relazione psicologica manufatto/operatore, il contatto ed il rapporto fisico con l'oggetto e le emissioni dell'oggetto stesso. I tre punti di vista fondamentali sono [1]

Psicologico. La complessità di manovra e gestione del manufatto deve essere correttamente correlata alla preparazione e capacità dell'utente prevedibile (non **previsto**, perché il controllo della destinazione del manufatto è praticamente impossibile!) e si devono rendere

- facilmente comprensibile il funzionamento,
- semplici le procedure di reazione ad eventi anomali (che devono essere anche tali da velocizzare in modo istintivo o automatico gli interventi di contrasto di pericoli o malfunzionamenti).

Fisico-dimensionale. Le parti o zone del prodotto destinate a venire in contatto fisico con l'utente (impugnature, sedili, manopole etc.) devono essere di dimensioni compatibili con funzionalità e benessere; gli sforzi e i movimenti necessari durante la gestione del manufatto non devono eccedere il livello fisiologico per gli utenti prevedibili.

La contemporaneità di impegno fisico e di impegno intellettuale usualmente genera effetti negativi (e, in ogni caso, non ottimali): sotto sforzo fisico si riduce l'attenzione e si allungano i tempi di reazione, viceversa sotto sforzo intellettuale possono manifestarsi carenze fisiche rispetto al normale (insensibilità a suoni e altri stimoli fisici, riduzione delle capacità ergonomiche etc.). Per questa ragione la complessità di manovra non si deve accoppiare a sforzi fisici elevati.

Sensoriale. Gli stimoli sensoriali hanno normalmente effetti sensibili (e fisiologici!) sulle prestazioni intellettuali, sul comportamento psicologico e sul benessere fisico dell'uomo. Questi effetti possono essere usati per comunicare con l'utente del prodotto e per guidarlo, ma devono essere tenuti sotto controllo (qualitativo e/o quantitativo) per evitare problemi anche gravi di sicurezza (per l'utente) e di funzionalità del prodotto stesso. In particolare vanno controllati gli effetti di qualunque emissione del prodotto (segnali programmati o semplicemente emissioni associate al funzionamento), vale a dire:

- Il colore del prodotto (o di parti o componenti), vedi anche UNI 8491-1/2.
Il colore (percepito) è fondamentale nel campo della sicurezza perché associato istintivamente (e quindi molto rapidamente) a situazioni geneticamente memorizzate di pericolo. L'accoppiamento giallo-nero (caratteristico di molti rettili, insetti e vegetali velenosi, come pure giallo e nero singolarmente) deve essere usato per segnalare pericoli molto gravi o mortali; il rosso (che richiama il sangue, ed è un colore eccitante) viene usato per indicare la necessità di fermarsi o di fermare il funzionamento; il blu (associato al cielo e al mare, tranquillizzante) e il verde (associato alla vegetazione e al mare, tranquillizzante) vengono usati per indicazioni e segnali di situazione normale e sicura. Un "drammatico" cambiamento di colore di zone del prodotto, progettato e controllato in occasione di situazioni specifiche, è un efficace strumento diagnostico nei riguardi del più disattento utente (naturalmente

occorre prevedere la possibilità di patologie della percezione del colore, come il daltonismo).

Inoltre, il colore agisce, con effetti sensibili, sull'atteggiamento psicologico delle persone e quindi sull'atteggiamento dell'operatore e sulle modalità d'uso del manufatto. Ad esempio: arancione e rosso sono eccitanti, il giallo induce gioia, verde e blu sono riposanti, viola e indaco inducono tristezza. Generalmente i colori scuri "appesantiscono" l'oggetto mentre i colori chiari lo "alleggeriscono", e questo si riverbera sulla percezione delle caratteristiche fisiche del manufatto e sulla sua maneggevolezza a primo impatto (con possibili problemi funzionali).

- Gli effetti luminosi provenienti dal prodotto.
Le riflessioni di luce che possano disturbare la visione (o generare addirittura accecamenti, pericolosissimi in qualsiasi situazione) o confondere sulla forma e dimensioni (vedi UNI 8491-1/2 e EN 1837) vanno evitate assolutamente.
Inoltre, colore e finitura superficiale dovrebbero essere tali da neutralizzare il più possibile gli effetti negativi (variazioni della percezione della forma dell'oggetto) delle variazioni di luce rispetto alla normalità. Infine, lampi e fluttuazioni cicliche di luce possono avere influenze patologiche sul comportamento di alcune persone (crisi epilettiche, scotomi e fotoemicrania).
- Le vibrazioni trasmesse dal prodotto (compreso il **suono**, vedi EN ISO 11688) al corpo.
Queste possono generare danni fisici immediati (per esposizioni, anche brevi, ad emissioni ad elevato livello energetico) o a lungo termine (per lunghe esposizioni a basso livello energetico).
Esse possono anche generare, o favorire, ottundimento mentale e riduzione della velocità di reazione. Il progettista deve, con adeguati accorgimenti, abbattere o smorzare le vibrazioni per via diretta (agendo sulla soluzione tecnica in modo da evitarne la generazione o riducendone la frequenza a livelli non impattanti) o per via indiretta (con protezioni o smorzatori aggiunti).
La frequenza delle vibrazioni influisce sulla dannosità delle conseguenze fisiche. In relazione al corpo umano standard soggetto a vibrazioni si hanno le seguenti indicazioni [2]: la frequenza di 0.5 Hz sviluppa cinetosi (malessere e nausea), di 3 Hz genera risonanza dell'addome (visceri e organi), di 5 Hz genera risonanza del corpo umano "intero", di 16 Hz genera risonanza delle braccia, di 20 Hz genera risonanza della scatola cranica (con sbalzi del cervello).
La risonanza può generare danni biologici elevati ed irreversibili agli organi interni eventualmente interessati, e sempre provoca fastidio o malessere che impedisce una corretta gestione del manufatto.
- L'odore del prodotto, in corrispondenza alle diverse situazioni di esercizio.
Il senso dell'olfatto è uno degli strumenti più importanti per la valutazione dell'ambiente che ci circonda: odori e profumi sono causa di reazioni istintive (di autoprotezione) alle situazioni ambientali. Il progettista deve controllare che non si

sviluppano odori sgradevoli, in situazioni non rischiose, durante l'uso normale del prodotto (ad esempio per la variazione di temperatura e/o umidità ambientale) e viceversa può utilizzare lo sviluppo governato di odori sgradevoli per mettere in sicurezza l'utente verso certe situazioni. Occorre, naturalmente, tenere conto del fatto che la percezione di un odore si riduce progressivamente durante l'esposizione allo stesso e conseguentemente il segnale comunicato dall'odore si annulla.

- La temperatura del prodotto (e relative emissioni termiche).
Si deve evitare che l'utente possa venire a contatto con parti troppo calde o troppo fredde (**temperatura endogena**) del prodotto in servizio, ma occorre anche tenere conto dell'effetto ambientale sul prodotto (ridurre la **temperatura esogena** con adeguata scelta della forma e della finitura superficiale) e delle collegate sensazioni spiacevoli trasmesse al contatto. In particolare, gli oggetti con superficie metallica trasmettono una sensazione immediata di freddo superiore a quella trasmessa da manufatti con superficie di plastica/legno (i manufatti realizzati con materiali ceramici hanno comportamento intermedio), quando sono più freddi del corpo umano. La situazione, ad esempio, si collega al comfort di sedute o appoggi.
Il fenomeno è legato alle caratteristiche termofisiche dei materiali (coefficiente di trasmissione del calore e calore specifico) e dalle dimensioni e forma del "conduttore termico". Si devono adottare materiali adeguati e/o di protezioni di coibentazione termica (spesso è sufficiente uno spesso strato di vernice polimerica!) per le parti superficiali destinate al contatto umano, dopo un'analisi della situazione con i metodi della Termodinamica (vedi anche EN 563 e EN ISO 13732-3).

Le principali linee guida (da intendersi indicative e non esaustive) per la progettazione di manufatti a misura d'uomo, nel senso di "adatti ad un'efficiente e sicuro funzionamento del sistema manufatto-operatore", sono:

- Nello sviluppo della progettazione valutare continuamente l'attività richiesta all'utente durante il funzionamento del prodotto. Il prodotto deve risultare adeguato all'utente e non viceversa, fino al limite della funzionalità desiderata e tenendo conto delle situazioni ambientali possibili (vedi anche 614-1/2 e EN 1005-1/2/3/4).
- Individuare le dimensioni delle parti che interagiscono con l'operatore/utente in modo che i manufatti siano maneggiabili dal maggior numero possibile di persone, con facilità e senza necessità di addestramento particolare. Usualmente, nei manufatti a "misura unica" (o regolabili per adattarsi all'utente) si cerca di coprire dal percentile 5 al percentile 95 della specifica scala statistica dimensionale della popolazione di riferimento. In particolare, il percentile 95 deve essere usato per i "vuoti" (cioè nel definire ingombri in relazione a limiti superiori: un portello!) e il percentile 5 per i "pieni" (cioè nel definire dimensioni in relazione a limiti inferiori: un appiglio!). Le scale statistiche dimensionali per posizioni, parti e movimenti del corpo sono disponibili su tutti i testi di Ergonomia (vedi anche EN ISO 7250 e EN 547-1/2/3). E' importante ricordare che **non esiste l'uomo medio**: ogni caratteristica ergonomica di un singolo individuo appartiene in termini quantitativi a percentili diversi. Conseguentemente, l'analisi ergonomica va

condotta sulle parti del corpo più direttamente interessate al manufatto cercando le configurazioni ottimali di compromesso (anche con riferimento al sesso e all'età dell'utente target). Per aumentare la maneggiabilità e/o il comfort occorre disegnare oggetti a più “taglie” – cioè sviluppare una serie dimensionale di prodotto - con adeguato *range* in termini di scala statistica dimensionale degli utenti (e possibilmente con ricoprimenti tra “taglie” adiacenti), o adattabili con strutturazione modulare.

- Tenere conto del livello intellettuale e della rapidità di comprensione dei fenomeni (e di risposta) dell'utente previsto, in interazione con il prodotto e con le situazioni ambientali. Ciò comprende anche la valutazione di eventuali condizionamenti culturali, sociali o etnici, che possano ostacolare la corretta valutazione dei fenomeni in termini di sicurezza e bloccare le reazioni di difesa o di adattamento. Impiegare la Murphy's Law nel valutare la comprensibilità delle procedure operative e nel prescrivere gli eventuali periodi di istruzione/addestramento all'uso. In questa fase le tecniche del *Robust Design* possono aiutare il progettista.
- Controllare l'operabilità delle alternative progettuali con prove fisiche su prototipi o pre-serie, impiegando operatori a diversa capacità fisica ed intellettuale e di diverse “dimensioni”.
- Dichiarare esplicitamente e chiaramente nel Manuale di Uso e Manutenzione le limitazioni e le condizioni d'uso in relazione all'operatore/utente e all'ambiente.
- Sviluppare versioni del prodotto per utenti a ridotta capacità fisica o intellettuale, attraverso semplici variazioni delle parti ergonomiche (anche su base modulare), l'aggiunta di protezioni (o di facilitatori) o configurando diversamente la soluzione tecnica.
- Controllare e valutare gli effetti delle emissioni “sensoriali” ed energetiche (elettromagnetiche o meccaniche) del prodotto verso l'utente.

5. “NUOVE” PROBLEMATICHE DI SICUREZZA DEI MATERIALI

Le problematiche relative alla sicurezza intrinseca dei materiali usati nei prodotti (e relativi processi di lavorazione) sono note da molto tempo, a livello più o meno approfondito, ma spesso sono state affrontate in un modo che definire superficiale è una delicata metafora (vedi [1]). L'argomento è molto vasto e si sta ampliando a causa delle scoperte (meglio, della presa di coscienza) degli effetti di composti naturali ed artificiali sulla salute degli individui esposti. La normativa nazionale, europea (Regolamento REACH, di recente approvazione) e internazionale è corposa e può essere facilmente reperita con riferimento al problema/prodotto/materiale specifico.

Il primo passo, a questo scopo, è il riconoscimento dell'esistenza del problema, e dei collegati pericoli per la salute e per la sicurezza, e la sua enucleazione dal limbo delle situazioni ritenute imponderabili o statisticamente improbabili. Questo, si badi bene, comporta il passaggio di queste situazioni dalla categoria dei rischi (**potenziali** fonti di danno, con probabilità più o meno elevate) alla categoria dei danni (**sicuri** e con effetti statisticamente

valutabili su basi epidemiologiche).

Un esempio chiarificatore si può trarre dall'attualità: le centrali nucleari per la produzione di energia sono **rischiose** (in caso di incidenti il danno è potenzialmente elevato e quindi esiste il rischio, ma i rilasci dannosi sono praticamente inesistenti in assenza di incidenti – anche considerando la dismissione del combustibile esausto in discarica controllata) mentre le centrali termoelettriche sono **dannose** (emettono con continuità, e in modo generalmente incontrollato, sostanze sicuramente dannose e/o tossiche in percentuali prevedibili e **non trascurabili**, anche nel funzionamento normale!).

Gli effetti dannosi dei materiali costituenti un manufatto sulle persone esposte, diretti (ustioni, malattie etc.) ed indiretti (effetti teratogeni, cancerogeni etc.), si esplicano in relazione a tre diverse situazioni (appartenenti a diverse fasi della genopersistenza di prodotto) [1]:

Produzione: i danni nascono dall'esposizione a prodotti chimici usati nella fabbricazione dei materiali o costituenti reflui o cascami. L'esposizione può essere continua (per gli operatori), accidentale (per la popolazione) o "incidentale" (causata da malfunzionamenti degli impianti). Il problema è principalmente di salvaguardia ambientale e sicurezza del lavoro, ma si può intervenire progettualmente scegliendo i materiali che non presentano caratteristiche produttive tali da generare pericoli e danni sensibili (esistono!).

Uso: i danni nascono dall'esposizione, sia continua sia accidentale (o incidentale), a materiali costituenti i manufatti, a sostanze rilasciate nell'ambiente dal manufatto (perché contenute nei materiali come solventi o come effetto degradativo dell'attacco ambientale etc.) o a sostanze impiegate durante l'uso o la manutenzione. Un percentuale sempre crescente di persone è allergica a minime quantità di composti chimici e materiali di uso considerato "normale". Inoltre, molti di questi materiali "normali" sono tossici per contatto o assunzione (piombo, nickel, mercurio etc.).

Dismissione: i danni sono legati all'impatto ambientale dei materiali dismessi, come attacco diretto o come inquinamento/danneggiamento dell'*habitat* naturale, sia nella gestione normale sia per incidenti. Come inciso, è bene ricordare che il sistema Terra è perfettamente in grado di retroagire di fronte a squilibri chimici o ambientali in senso lato e di riequilibrarsi in un periodo più o meno lungo; è meno certo il fatto che, durante queste oscillazioni e/o transitori, l'ambiente naturale mantenga condizioni favorevoli alla nostra vita (in senso individuale e/o antropologico).

Per quanto riguarda i danni legati all'uso, la relativa condizione di sicurezza (cioè la limitazione al minimo impatto possibile in relazione alla funzionalità desiderata) è di competenza esclusiva del progettista che deve sviluppare soluzioni e scegliere materiali sicuri da tutti i punti di vista. Mentre è abbastanza facile riconoscere la pericolosità diretta dei materiali (e, ad esempio, si tende ad eliminare il piombo da molti manufatti) o dei rilasci in caso di incidenti (ad esempio la tossicità dei fumi originati dalla combustione accidentale di materie plastiche, legni trattati etc.), può risultare difficile e costoso il controllo, o l'eliminazione, dei rilasci potenzialmente (o immediatamente) tossici da materiali non tossici in sé e per sé durante un uso normale. Questo fatto, purtroppo, può portare a tentazioni negazioniste od omissive: il progettista meno corretto può essere tentato di fare sua l'invettiva

di Federico II di Prussia (indirizzata ai suoi soldati durante una battaglia) “cani, volete vivere in eterno?”.

A proposito di quest’ultimo aspetto, si porta l’esempio dei rilasci di composti organici tossici da parte di materiali usati nel settore dell’arredo (mobili, accessori etc.) e dei “casalinghi” in senso lato [1]. La maggior parte delle materie plastiche (comprese le vernici, neglette ma onnipresenti), usate nella fabbricazione di componenti d’arredo, rilascia in continuità quantità decrescenti asintoticamente di composti organici (per la maggior parte tossici, cancerogeni e teratogeni) sotto forma gassosa nell’ambiente, o in soluzione nell’acqua o in altri fluidi con cui gli oggetti vengano a contatto. Tutti i materiali legnosi compositi (costituiti da fibre, strati o granuli di legno legati da adesivi organici) rilasciano piccole quantità di gas, tossici a breve e/o a lungo termine, per lungo tempo dopo la fabbricazione.

In molti Stati sono state emanate normative di protezione degli utenti che riguardano i prodotti di arredamento. Si sono definite concentrazioni massime accettabili di formaldeide (classico rilascio gassoso della mobilia) negli ambienti di lavoro (0.37 mg/m^3 o 0.3 ppm) e negli ambienti di abitazione (0.12 mg/m^3 o 0.1 ppm). Sono state, inoltre, definite le procedure di controllo e misura dei rilasci da parte dei componenti legnosi (vedi EN 120, EN 312, EN 622, EN 712, EN 1084 etc.) e si sono individuate le classi di pericolosità relativa.

Ad esempio, la Classificazione E1 tedesca (BIBt 100 del 6/94) identifica i pannelli legnosi a basso rilascio di formaldeide, che sono consigliati per applicazioni abitative ad alta intensità di presenza temporale. La normativa europea individua due classi (1, meno tossico, e 2) per pannelli in truciolare, due classi per pannelli in MDF (A, meno tossico, e B) e tre classi per pannelli in compensato (A, meno tossico, B e C) in relazione all’emissione tossica. L’impiego dei materiali migliori (cioè a minor livello di rilascio tossico) è obbligatorio quando l’esposizione dell’utente è continua o prolungata, come accade nelle abitazioni. Si può valutare l’impiego delle classi inferiori nei casi in cui sia **garantita** un’adeguata ventilazione e/o bassa esposizione delle persone.

Un altro esempio di situazione di potenziale pericolo (che, purtroppo, è facilmente sottovalutabile), per il personale addetto o esposto accidentalmente, è riferibile alla tossicità per inalazione/ingestione/contatto dei combustibili, solventi, detersivi e lubrificanti usati per il funzionamento e per la manutenzione dei manufatti (compresi i normali detersivi casalinghi – che rilasciano gas nelle abitazioni - o industriali – che generano rilasci tossici dagli abiti lavati in tintoria!). In queste situazioni, le scelte progettuali devono tenere conto dei pericoli diretti ed indiretti (oltre che degli effetti sull’ambiente) effettivi e/o potenziali, cercando di eliminare o limitare i materiali più tossici (vedi EN 626-1/2 e EN 1093-1→11). Non è più accettabile la supina classificazione di questi pericoli come “rischi professionali” coperti da interventi assistenziali *ex post* (che, peraltro, non sono previsti nell’uso domestico).

Infine si accenna alle situazioni di pericolo (e in alcuni casi, pericolo grave) generate da interazione del prodotto con fluidi in sé e per sé generalmente innocui, in presenza di particolari situazioni ambientali o come sinergia di allergizzanti.

Un classico esempio, riportato in letteratura, riguarda la pericolosità dei bicchieri in cristallo quando vengano lavati nella lavastoviglie. Il fenomeno si sviluppa per una sequenza di atti apparentemente senza rischi:

- a) il forte lavaggio a getto d'acqua pulisce le stoviglie (con risparmio d'acqua) ma danneggia (generando microfratture nello strato esterno) la superficie del bicchiere che diventa permeabile ai fluidi,
- b) diversi solventi organici (acidi deboli o alcol etilico) sono in grado di sciogliere il piombo contenuto nel cristallo (mediamente 32% in peso) e di portarlo in soluzione nel liquido contenuto nel bicchiere,
- c) il piombo genera avvelenamento cumulato (potenzialmente mortale e sicuramente debilitante) e difficilmente individuabile nelle fasi iniziali in assenza di sospetti specifici.

Sono state registrate situazioni epidemiche negli Stati Uniti per il tradizionale consumo di liquori e soda, centellinati come infusi di piombo organico! Problemi simili si sono verificati con le stoviglie in ceramica non adeguatamente trattata (fabbricata nei paesi del Terzo Mondo).

Il progettista può, applicando la Murphy's Law, prevedere e contrastare molti di questi fenomeni: naturalmente deve esserci coscienza dei fenomeni e non supina acquiescenza alle normative, che spesso vengono emesse quando molto danno è già stato fatto (si veda quanto è successo per l'amianto, riconosciuto come pericoloso da ricercatori alla fine degli anni '20 ed usato ugualmente, in piena legalità, per oltre cinquanta anni – e non ancora rimosso da una moltitudine di applicazioni edilizie).

In generale, la scelta di materiali e processi non rischiosi/impattanti/pericolosi a lungo termine è **sempre la più economica** dal punto di vista globale anche se i costi iniziali “apparentemente” sono più elevati e costringono allo sviluppo di una innovazione tecnologica “apparentemente” non necessaria.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Medri G., 2007. *Cenni di Progettazione di Prodotto*, Liguori Ed., Napoli.

[2] Niemann, Winter e Hohn 2006. *Manuale degli organi delle macchine*, Tecniche Nuove ed., Milano.

PROBLEMI METODOLOGICI NELLA MODELLAZIONE MULTIBODY CON CORPI FLESSIBILI

Emiliano Mucchi

*EnDIF – Engineering Department in Ferrara,
Università degli Studi di Ferrara, Italy
E-mail: emiliano.mucchi@unife.it*

Giorgio Dalpiaz

*EnDIF – Engineering Department in Ferrara,
Università degli Studi di Ferrara, Italy
E-mail: giorgio.dalpiaz@unife.it*

Sommario. *L'approccio multibody all'analisi dinamica dei sistemi meccanici è stato diffusamente applicato a sistemi di corpi rigidi soggetti a vincoli cinematici. Quando i sistemi meccanici operano con grandi spostamenti e rotazioni, a velocità ed accelerazioni elevate, risulta però necessario descrivere in modo consistente ed efficace la flessibilità di almeno una parte dei membri, al fine di ottenere un'accurata simulazione del comportamento dinamico del sistema. In questo lavoro si presenta la complessa metodologia da utilizzare per introdurre la flessibilità in un modello multibody inizialmente costituito da soli corpi rigidi, e le problematiche incontrate, facendo riferimento ad un modello multibody della distribuzione desmodromica di un motore Ducati MotoGP.*

Keywords: *modelli multibody, flessibilità, modi di Craig-Bampton, metodologia.*

1. INTRODUZIONE

Per l'analisi dinamica dei sistemi meccanici sono comunemente impiegati modelli multibody costituiti da sistemi di corpi rigidi collegati fra di loro mediante coppie cinematiche ed elementi di contatto di tipo elastico o dissipativo. Nel caso di sistemi meccanici operanti ad elevate velocità ed aventi membri soggetti a forti accelerazioni, un'accurata simulazione del comportamento dinamico generalmente richiede un'adeguata modellazione della flessibilità di almeno una parte dei membri. Tale flessibilità può essere messa in conto mediante l'introduzione di cedevolezza elastiche concentrate: generalmente si valuta la rigidità equivalente dei membri (ad esempio, mediante il metodo degli elementi finiti) e si include tale contributo nel valore della rigidità concentrata degli elementi di contatto posti tra i corpi rigidi. Tale procedura, che modella a parametri concentrati delle cedevolezza distribuite, spesso non risulta né semplice né accurata. Al contrario, il considerare la flessibilità come proprietà intrinseca dei corpi comporta una modellazione più realistica e la possibilità di ottenere simulazioni del comportamento dinamico e vibratorio decisamente più accurate, soprattutto in

relazione a sistemi di elevate prestazioni.

In questo lavoro si descrive la metodologia per introdurre la flessibilità di alcuni membri in un modello multibody inizialmente costituito da soli corpi rigidi e le problematiche che tale metodologia comporta. Si mostrerà come l'introduzione di corpi flessibili non significhi semplicemente sostituire un corpo rigido con il corrispondente flessibile, ma come invece si debbano apportare sostanziali modifiche al modello a corpi rigidi affinché la flessibilità possa essere introdotta. In breve, il mettere in conto la flessibilità implica il considerare ulteriori gradi di libertà che rappresentano le deformazioni di un determinato corpo. Questi gradi di libertà sono introdotti in termini di modi calcolati mediante una separata analisi ad elementi finiti ed introdotti poi nell'analisi multibody globale del sistema. Occorre però sottolineare che per collegare i corpi flessibili con la restante parte del modello a corpi rigidi è necessario utilizzare particolari elementi rigidi di connessione che possono costituire un irrigidimento artificioso per i corpi flessibili ed alterarne le caratteristiche dinamiche. Pertanto una fase di fondamentale importanza nella procedura sarà la validazione del modello di ciascun corpo flessibile dopo l'introduzione di tali elementi di connessione, che viene condotta mediante un'opportuna analisi modale.

Per mostrare la metodologia si farà riferimento ad un modello multibody a corpi rigidi esistente, relativo ad un equipaggio della distribuzione desmodromica di un motore Ducati MotoGP [1]. Il modello è stato sviluppato nell'ambiente di simulazione LMS Virtual.Lab Motion [2], ma la trattazione metodologica presentata è di carattere generale.

Nel campo dell'analisi elastodinamica dei meccanismi della distribuzione di motori a c.i., sono presenti in letteratura molti lavori, basati su approcci diversi in relazione allo scopo dell'analisi, all'accuratezza richiesta ed alla complessità del sistema investigato. Sono stati proposti parecchi modelli a parametri concentrati, che costituiscono generalmente un buon compromesso fra l'accuratezza della risposta e la semplicità della formulazione matematica [3-6]; altri studi presentano modelli continui di alcuni componenti dei meccanismi a camma, ottenendo buoni risultati [7]. Recentemente, altri approcci sono stati proposti, come l'impiego di modelli ad elementi finiti [8], modelli multibody a corpi rigidi [1, 9] e modelli combinati [10-11], mentre la modellazione multibody a corpi flessibili non è tuttora molto diffusa. E' da sottolineare che la modellazione multibody a corpi flessibili presenta alcuni vantaggi rispetto alla modellazione elastodinamica a parametri concentrati. In particolare, permette di descrivere con elevata precisione le proprietà inerziali e la distribuzione delle masse dei corpi; inoltre è possibile valutare, con il metodo della sovrapposizione modale, la distribuzione delle deformazioni e delle tensioni nei corpi flessibili, tenendo conto anche ai fenomeni vibratorii; si hanno così le informazioni necessarie per una successiva analisi a fatica.

In questo lavoro si descriverà dapprima il sistema meccanico in studio e il relativo modello a corpi rigidi; successivamente si mostrerà la metodologia per modificare il modello al fine di introdurre la flessibilità di alcuni membri ed i problemi che si incontrano, esemplificati da alcuni risultati relativi al meccanismo in esame.

2. DAL SISTEMA FISICO AL MODELLO A CORPI RIGIDI

Lo studio riguarda il meccanismo della distribuzione desmodromica di un motore Ducati da competizione a quattro cilindri disposti ad 'L', con quattro valvole per cilindro. Ciascuna

delle due bancate bicilindriche è equipaggiata da due alberi a camme in testa movimentati da un treno di ingranaggi (Figura 1(a)). Ogni albero a camme presenta quattro camme coniugate: un albero movimenta le quattro valvole di aspirazione e l'altro le quattro di scarico.

Questo lavoro riguarda il modello di un singolo 'equipaggio' della distribuzione, cioè del sistema che guida il moto di una singola valvola, rappresentato in Figura 1(b): ciascuno dei profili di una camma coniugata viene a contatto con un bilanciante; a loro volta i bilancianti sono a contatto con i registri fissati all'estremità superiore della valvola. E' possibile distinguere due parti in questo meccanismo, ciascuna delle quali è costituita da uno dei dischi della camma coniugata e dal relativo bilanciante che agisce sulla valvola; una di esse ha la funzione di imprimere alla valvola le accelerazioni positive, cioè rivolte nel verso di apertura, l'altra parte imprime alla valvola le accelerazioni negative, cioè nel verso di chiusura. Nel seguito tali dischi e bilancianti saranno convenzionalmente indicati come camma e bilanciante 'di apertura' e 'di chiusura', rispettivamente.

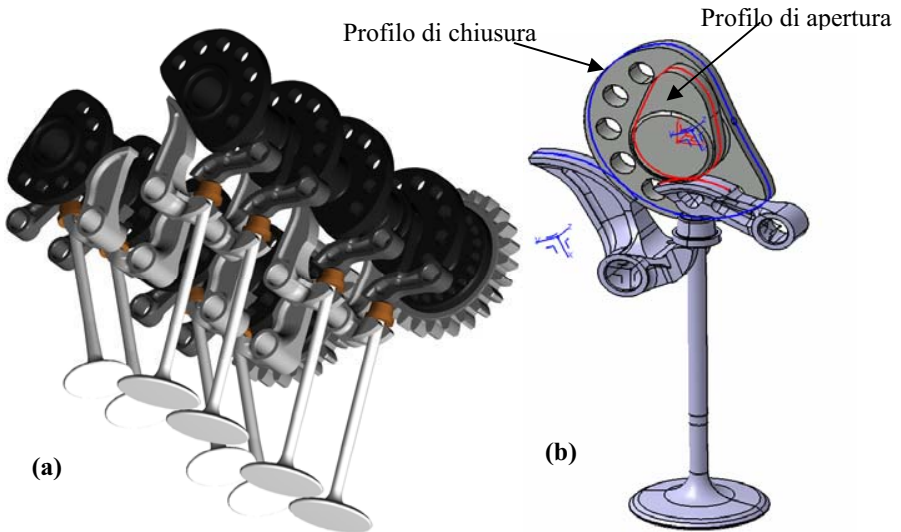


Figura 1. (a) Distribuzione desmodromica relativa ad una delle bancate. (b) Sistema in studio: un singolo 'equipaggio' della distribuzione; si è evidenziato in rosso il profilo della camma di apertura e del relativo bilanciante, in blu il profilo della camma di chiusura e del relativo bilanciante.

Come detto, il modello multibody a corpi rigidi del singolo 'equipaggio' è stato realizzato in ambiente LMS Virtual.Lab Motion [2], un codice di modellazione multibody general-purpose; il modello è composto da 8 corpi rigidi: telaio, camma di apertura, bilanciante di apertura, registro di apertura, camma di chiusura, bilanciante di chiusura, registro di chiusura e valvola. Le due camme sono rese solidali una all'altra mediante un vincolo di incastro ed è a

loro è assegnato un moto a velocità angolare costante, che costituisce il moto di ingresso del sistema.

I corpi rigidi sono fra di loro connessi da opportune coppie cinematiche. Nello specifico sono presenti: coppie rotoidali fra il telaio e le camme e fra il telaio e i bilancieri; una coppia prismatica fra il telaio e la valvola lungo il suo stelo; vincoli di incastro fra il registro di apertura e la valvola e fra il registro di apertura e quello di chiusura. Il contatto tra i profili delle camme di apertura e di chiusura ed i rispettivi bilancieri è descritto per mezzo di specifici elementi di contatto (CAM Contact) disponibili nelle librerie di LMS Virtual.Lab, che generano forze di contatto fra i membri definiti da opportuni coefficienti di rigidità e smorzamento. Il contatto tra registri e bilancieri è stato invece schematizzato con un comando differente da CAM Contact, denominato “sphere to surface”; questo tipo di contatto permette di modellare correttamente le interazioni fra la superficie cilindrica del bilanciante (sphere) e la superficie piana del registro (surface). Infine, un elemento non lineare molla-smorzatore è stato inserito fra la valvola e il telaio per modellare il contatto fra la valvola stessa e la sua sede. Maggiori dettagli sulla modellazione del sistema e sui parametri introdotti nel modello sono riportati in [1].

3. METODOLOGIA PER L'INTRODUZIONE DELLA FLESSIBILITÀ

Per poter generare un adeguato modello con corpi flessibili occorre creare, per ogni corpo che si intende modellare come flessibile, un modello modale descritto da forme modali, smorzamenti modali e frequenze naturali. Ogni corpo viene di conseguenza discretizzato tramite gli elementi finiti e, utilizzando il metodo di Craig-Bampton [3, 4], si ottiene il suddetto modello modale. Per determinare i modi con il metodo di Craig-Bampton occorre descrivere con accuratezza le zone di “interfaccia”, in cui si ha l'interazione tra un corpo e quelli adiacenti, al fine di determinare appropriatamente sia i modi statici (constraint modes) sia quelli normali (normal modes), come verrà mostrato più dettagliatamente in seguito. La metodologia per l'introduzione della flessibilità in un modello multibody a corpi rigidi può essere schematizzata nelle seguenti fasi:

- A) Modifica del modello a corpi rigidi per poter introdurre la flessibilità.
- B) Analisi di Craig-Bampton di ciascun corpo flessibile:
 - 1. Discretizzazione dei corpi che si intendono modellare come flessibili;
 - 2. Inserimento dei nodi di interfaccia;
 - 3. Collegamento dei corpi dummy ai corpi deformabili;
 - 4. Validazione del modello ad elementi finiti del singolo corpo;
 - 5. Calcolo ed elaborazione dei modi di Craig-Bampton.
- C) Soluzione del modello con corpi flessibili.

Nel seguito verranno descritte queste fasi, sottolineando le problematiche che possono essere incontrate nel corso dell'analisi.

3.1. Modifica del modello a corpi rigidi per poter introdurre la flessibilità

Nel modello a corpi rigidi descritto nel paragrafo precedente, l'interazione fra i membri era dovuta a coppie cinematiche elementari (coppie rotoidali, prismatiche) e ad elementi di contatto ("CAM Contact", "Sphere to surface", elemento molla-smorzatore). Si deve precisare che non tutti i tipi di interazione tra due corpi creano le zone di interfaccia necessarie nella modellazione con corpi deformabili; è appunto questo limite che impone la modifica del modello a corpi rigidi. In pratica, è possibile creare automaticamente le zone di interfaccia esclusivamente partendo da incastrati o da coppie cinematiche combacianti (coppie rotoidali e prismatiche, nel caso in studio); in questi casi la zona di interfaccia fra i membri è già definita ed implementata nel software. Nel caso i membri siano collegati da coppie cinematiche non combacianti o da elementi di contatto occorre realizzare sul corpo che si intende modellare come flessibile le appropriate zone di interfaccia. Per ottenere tali interfacce è necessario inserire nel modello a corpi rigidi alcuni corpi chiamati "dummy" (dummy bodies). Per corpo dummy si intende un corpo rigido a massa nulla, che quindi non influenza la dinamica del sistema. I corpi dummy vengono poi collegati ai corpi che si intendono modellare come flessibili tramite incastrati. Questi incastrati creano automaticamente sul corpo deformabile un'interfaccia, che è appunto lo scopo della modifica intrapresa. Conseguenza quindi che il corpo deformabile non risulta sottoposto direttamente a contatto, ma interagisce col corpo dummy tramite un incastrato. Il contatto ora compete a tale corpo dummy, il quale è generato in modo che la propria geometria rispetti quella della zona di contatto del corpo a cui è incastrato. Pertanto nell'analisi multibody con elementi flessibili, le forze di contatto scambiate fra corpo rigido e flessibile in verità sono scambiate fra il corpo rigido e un corpo dummy solidale al corpo flessibile.

Nel caso del meccanismo di distribuzione in esame, vengono modellati come flessibili i due bilancieri e la valvola. La Figura 2 mostra l'applicazione ad entrambi i bilancieri del concetto sopra espresso. I quattro corpi dummy rispettano quindi le caratteristiche geometriche delle zone di contatto dei bilancieri.

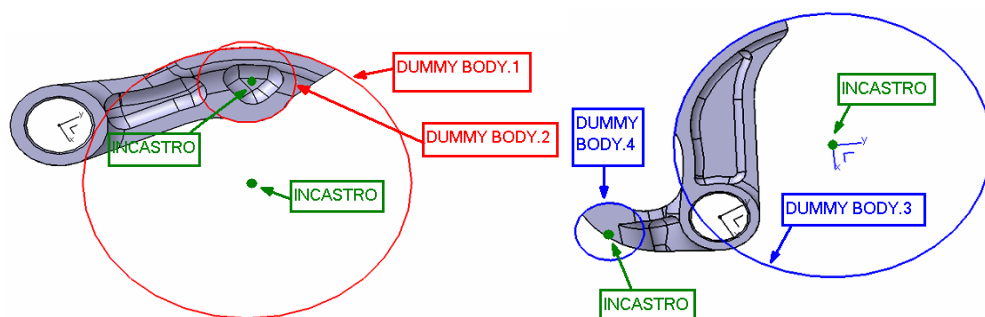


Figura 2. Incastrati e corpi dummy dei bilancieri di apertura (sinistra) e di chiusura (destra).

In Figura 3 viene poi schematizzato il modello dell'intero meccanismo, riportando i corpi ed i vincoli sia per la parte di apertura che per quella di chiusura. I corpi ed i vincoli di color rosso indicano le modifiche effettuate al modello a corpi rigidi (rappresentato dallo schema in nero) per poter intraprendere l'analisi con corpi flessibili. Si consideri ad esempio il meccanismo di apertura: dopo tali modifiche, la camma di apertura agisce direttamente sul corpo dummy nel caso vi sia contatto; questo poi, collegato con un incastro al bilanciere di apertura, gli trasferisce il moto. A sua volta il bilanciere trasmette il suo movimento ad un secondo corpo dummy al quale è vincolato con un altro incastro; infine questo corpo dummy muove, se avviene il contatto, un altro corpo dummy che è rigidamente collegato al registro di apertura, il quale poi aziona la valvola, essendo presente un ulteriore incastro tra registro e valvola. Il modello del meccanismo di chiusura è del tutto analogo. La valvola, inoltre, è collegata al telaio tramite coppia prismatica ed alla sede valvola tramite un elemento di contatto. Non è necessario modificare il modello a corpi rigidi nella zona della coppia prismatica, poiché si tratta di una coppia combaciante, la cui la zona di interfaccia è nota; è invece necessario modificare il modello nella zona di contatto con la sede mediante l'aggiunta di un corpo dummy.

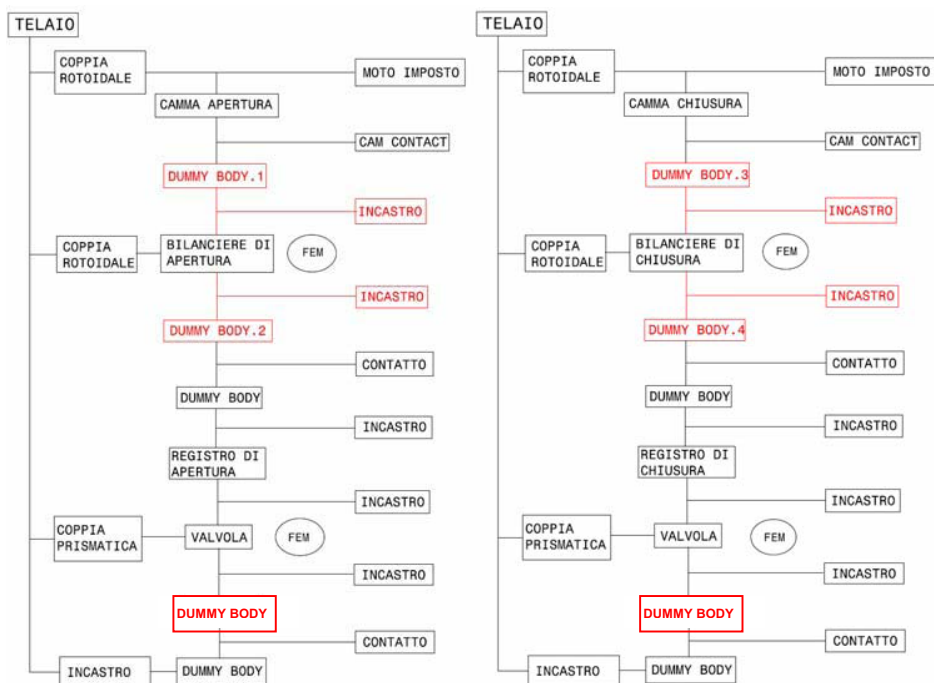


Figura 3. Schema del modello dei meccanismi di apertura (sinistra) e di chiusura (destra).

3.2. Analisi di Craig-Bampton di ciascun corpo flessibile

La modellazione della flessibilità in un modello multibody fa riferimento alla tecnica di sottostrutturazione chiamata Component Mode Synthesis (CMS), a cui il metodo di Craig-Bampton si riferisce [12, 13]. Esistono diverse tecniche di CMS, tutte accomunate da uno stesso principio: la dinamica globale di una struttura può essere derivata dall'accoppiamento (o sintesi) dei modelli modali di ogni singola sottostruttura che compone la struttura globale. La tecnica CMS viene applicata all'analisi multibody flessibile, considerando ogni singolo corpo flessibile come una sottostruttura e calcolandone i modi di Craig-Bampton per descrivere le caratteristiche dinamiche. Questi modi sono poi utilizzati per disaccoppiare l'equazione del moto di ogni singolo corpo flessibile. L'equazione del moto del sistema globale è poi ottenuta assemblando i modelli modali delle singole sottostrutture, nel rispetto delle condizioni di compatibilità e di continuità [14, 15].

In LMS Virtual.Lab Motion l'analisi di Craig-Bampton si effettua creando per ognuno dei corpi flessibili un singolo caso di analisi, che comprende le cinque fasi elencate al punto B nel paragrafo 3 ed illustrate in dettaglio qui nel seguito. Al termine dell'analisi di ogni singolo corpo flessibile (sottosistema) i modi di Craig-Bampton devono essere importati nell'analisi multibody del sistema globale e utilizzati dal solutore per calcolare la dinamica di tale sistema mediante il sopra citato metodo di accoppiamento dei modelli modali [12, 13].

Tabella 1. Caratteristiche della mesh.

Corpo		
Bilanciere di apertura	Tipo di Elemento	TET10 (tetraedrico parabolico)
	Numero di elementi	15624
	Numero di nodi	25804
Bilanciere di chiusura	Tipo di Elemento	TET10 (tetraedrico parabolico)
	Numero di elementi	14931
	Numero di nodi	25653
Valvola	Tipo di Elemento	TET10 (tetraedrico parabolico)
	Numero di elementi	7988
	Numero di nodi	14156

3.2.1 Discretizzazione dei corpi che si intendono modellare come flessibili. La prima fase dell'analisi di Craig-Bampton è la creazione della mesh per i corpi che si intendono modellare come flessibili. A questo scopo può essere impiegato un qualsiasi tipo di elemento, da monodimensionale (elementi asta, trave, ecc.) a tridimensionale (elementi solidi esaedrici, pentaedrici, tetraedrici, ecc.), scelto in base alle forma e tipologia del corpo.

Per il sistema in esame, i tre corpi modellati come flessibili - i due bilancieri e la valvola - sono stati discretizzati con lo stesso tipo di elemento tetraedrico parabolico a dieci nodi. In Tabella 1 viene mostrato per ognuno dei membri discretizzati, le caratteristiche principali della

mesh.

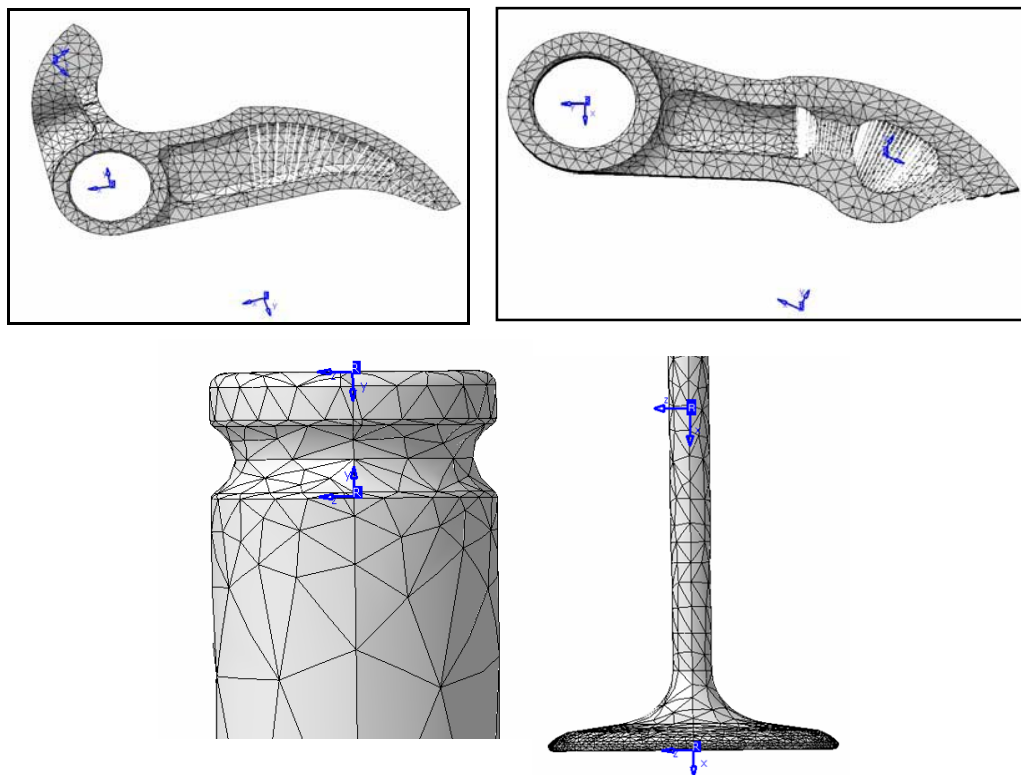


Figura 4. Posizione dei nodi di interfaccia (in blu).

3.2.2 Inserimento dei nodi di interfaccia. I nodi di interfaccia identificano i gradi di libertà in cui sono inserite coppie cinematiche o elementi di contatto fra corpi, e in cui avviene pertanto uno scambio di forze fra corpi adiacenti. Questi nodi sono di fondamentale importanza per l'analisi di Craig-Bampton, perché dal loro posizionamento dipende la successiva correttezza dei modi statici e normali (vedi sottoparagrafo 3.2.5); infatti, proprio in questi nodi verrà applicato uno spostamento unitario per il calcolo dei modi statici e sarà posizionato un incastro per il calcolo dei modi normali.

In Figura 4 sono mostrati i nodi di interfaccia utilizzati nel modello in esame. Essi sono identificati da un sistema di riferimento di colore blu. In ognuno dei bilancieri sono inseriti tre nodi di interfaccia: uno è relativo al collegamento fra il bilanciere e il telaio mediante coppia rotoidale, mentre gli altri due identificano i vincoli di incastro fra il bilanciere e i corpi dummy

(vedi anche Figura 3).

Anche per la valvola sono stati inseriti tre nodi di interfaccia: uno identifica l'incastro col registro di apertura e di chiusura, uno è relativo alla coppia prismatica che rappresenta la guida della valvola, mentre l'ultimo (in basso in figura) corrisponde ad un vincolo di incastro che collega la valvola ad un corpo dummy, impiegato nella modellazione del contatto della valvola con la sua sede mediante un elemento molla-smorzatore.

3.2.3 Collegamento dei corpi dummy ai corpi deformabili. I nodi di interfaccia devono poi essere connessi con i nodi della mesh del corpo flessibile. In genere questo collegamento si effettua con l'inserimento nel modello ad elementi finiti di elementi rigidi fra i nodi di interfaccia e i nodi del corpo flessibile. L'insieme di tutti gli elementi rigidi che fanno capo ad un unico nodo di interfaccia è chiamato "spider". Questi elementi rigidi sono di essenziale importanza poiché le forze di contatto fra il corpo rigido e flessibile vengono scambiate proprio attraverso di essi. In maggior dettaglio, le forze scambiate fra un corpo rigido ed uno flessibile vengono dapprima applicate dal corpo rigido al corpo dummy e poi da questo trasferite al corpo flessibile mediante i nodi di interfaccia - che definiscono il vincolo di incastro fra corpo flessibile e corpo dummy - e mediante gli elementi rigidi. Questi ultimi distribuiscono le forze di contatto ai diversi nodi dell'elemento flessibile. La Figura 5 mostra le discretizzazioni effettuate per i tre corpi flessibili del modello in esame e le connessioni rigide fra i nodi di interfaccia e i nodi della mesh, relativamente ai due bilancieri. In particolare, nel caso delle coppie cinematiche superiori dei bilancieri, ciascun "spider" collega il nodo di interfaccia di un corpo dummy a tutti i nodi del corrispondente profilo, con l'intendimento di distribuire le forze di contatto sulla zona del bilanciere dove avviene effettivamente il contatto. Da quanto fin qui illustrato, risulta quindi che il contatto fra corpo rigido e flessibile viene gestito dai software multibody con metodi abbastanza complessi e non sempre intuitivi, che si avvalgono dell'utilizzo di corpi dummy, nodi di interfaccia, vincoli cinematici di incastro ed elementi rigidi di connessione.

3.2.4 Validazione del modello ad elementi finiti del singolo corpo. Nel sottoparagrafo precedente 3.2.3 si è mostrato come sia necessario introdurre una serie di spider di elementi rigidi per collegare i nodi di interfaccia con i nodi del modello ad elementi finiti. Tali spider non rappresentano il modello di una parte del sistema fisico, ma costituiscono un artificio indispensabile per poter connettere il corpo dummy con il corpo flessibile e poter pertanto trasferire le forze fra i due corpi. E' da notare che l'inserimento di spider di elementi rigidi determina un irrigidimento locale del corpo flessibile con una conseguente modifica delle sue caratteristiche dinamiche. Occorre pertanto verificare che l'introduzione di questi spider non alteri significativamente la dinamica del corpo in esame. E' quindi necessario eseguire una analisi modale del componente prima e dopo l'inserimento di tali spider confrontando le frequenze naturali e le forme modali.

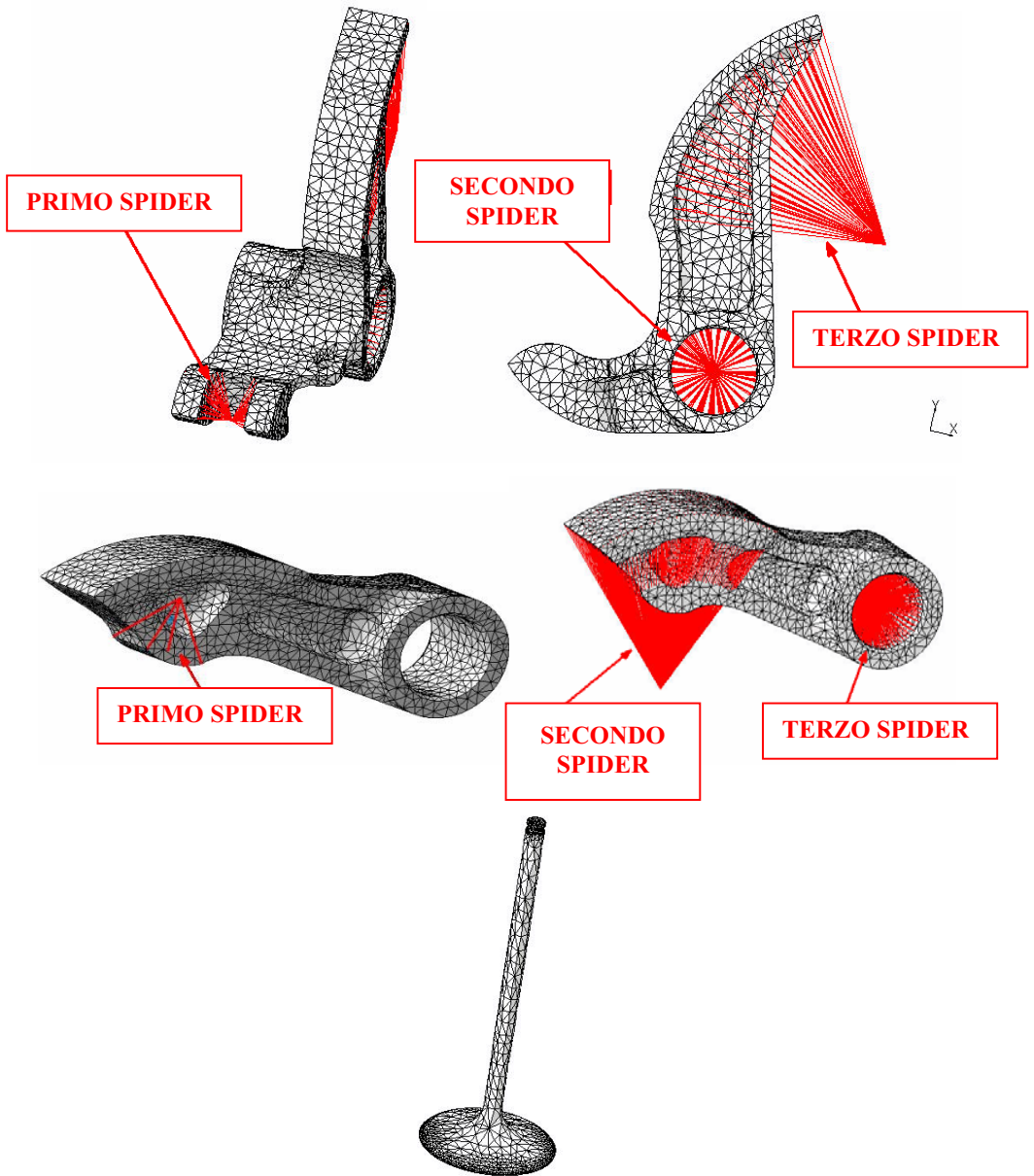


Figura 5. Corpi flessibili e relativi collegamenti rigidi (spider).

Tabella 2. Frequenze naturali per il bilanciere di chiusura, con e senza spider, e differenza percentuale.

# modo	f_n con spider [Hz]	f_n senza spider [Hz]	Differenza %
1	9327	7556	19
2	18067	13840	23
3	19808	15767	20
4	34093	25805	24
5	36749	26870	27
6	40371	29012	28
7	44344	33742	24
8	49904	36368	27
9	61806	36936	40

A titolo di esempio, si mostra l'effetto dell'inserimento degli spider nel bilanciere di chiusura, in termini di frequenze naturali (Tabella 2) e in termini di MAC [14] (Figura 6); in particolare, si può notare che per il primo modo la differenza in frequenza è del 19%, mentre il valore del MAC vale circa 0.95, per il quinto modo invece la differenza fra le frequenze naturali è del 27%, mentre il valore del MAC è circa 0.3.

Spetta poi all'analista valutare di volta in volta quanto le differenze trovate siano rilevanti ed inficino la successiva analisi. Nello specifico caso dei bilancieri in esame, il forte effetto di irrigidimento è dovuto prevalentemente al fatto che la zona di contatto fra i bilancieri e le camme è molto estesa e pertanto è necessario uno spider di elementi rigidi che copra una superficie estremamente ampia. In altri termini, il collegamento rigido tramite "spider" tra un nodo di interfaccia ed un'ampia superficie di contatto evidentemente irrigidisce notevolmente i bilancieri nelle zone di contatto che pertanto manifestano una dinamica abbastanza diversa rispetto al caso senza elementi rigidi. E' in corso lo sviluppo di metodi per ridurre questo problema; in breve, invece di usare, come nel caso di Figura 5, un solo corpo dummy collegato rigidamente a tutta la zona di contatto, saranno utilizzati molti corpi dummy ognuno collegato rigidamente ad una piccola porzione di superficie di contatto. Questa nuova metodologia dovrebbe ridurre l'irrigidimento globale dei bilancieri.

3.2.5 Calcolo ed elaborazione dei modi di Craig-Bampton. Dopo aver realizzato la mesh e dopo aver inserito correttamente i punti di interfaccia si può passare al calcolo dei modi di Craig-Bampton. Per modi di Craig-Bampton si intende l'insieme dei modi statici e dei modi normali; i primi mettono in conto gli effetti delle forze scambiate tra il corpo in esame ed i corpi adiacenti nei suoi nodi di interfaccia, mentre i secondi sono relativi alle vibrazioni naturali. I modi statici si ottengono imponendo successivamente uno spostamento unitario in uno dei punti di interfaccia e mantenendo totalmente vincolati tutti gli altri nodi nella zona di interfaccia; i modi normali sono calcolati vincolando con incastro i nodi nelle zone di interfaccia [12, 13].

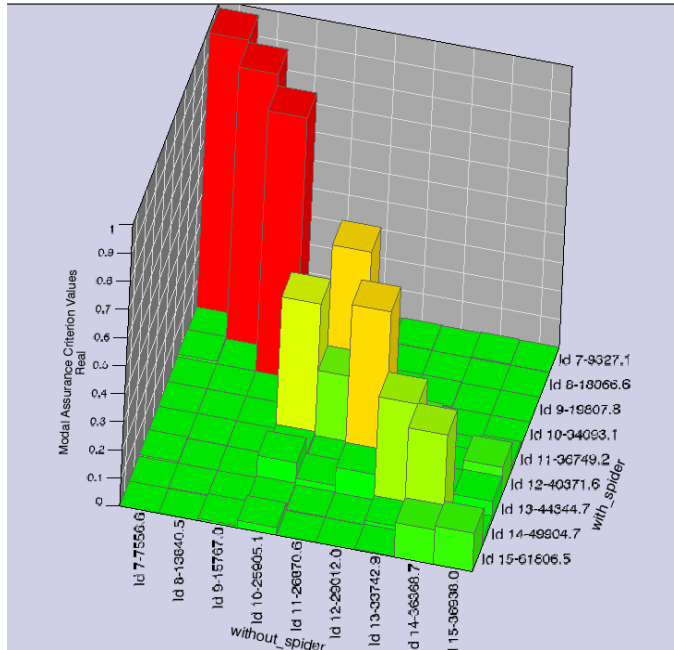


Figura 6. Matrice di MAC fra i modi del bilanciore di chiusura con e senza spider.

L'utilizzo dei modi di Craig-Bampton per valutare la dinamica di sistemi multibody flessibili rappresenta certamente il metodo più diffuso e accurato. Nel seguito si mostra brevemente la formulazione impiegata per valutare i modi statici e modi normali con nodi di interfaccia vincolati.

Con riferimento alla tecnica di sottostrutturazione CMS, menzionata all'inizio del paragrafo 3.2, un componente modellato come flessibile viene considerato una sottostruttura del sistema globale e viene discretizzato agli elementi finiti e rappresentato da elementi e nodi. Questi ultimi vengono suddivisi in nodi di interfaccia, cioè nodi di connessione tra una sottostruttura e quelle adiacenti (nel seguito identificati con il pedice b), e in nodi interni alla sottostruttura (cioè nodi non di interfaccia, nel seguito identificati con pedice i).

Nella tecnica CMS lo spostamento fisico \mathbf{q} del componente è rappresentato in termini delle coordinate modali \mathbf{p} , tramite l'equazione:

$$\mathbf{q} = \mathbf{Bp} \quad (1)$$

dove \mathbf{B} è la matrice di trasformazione costituita dai modi del componente, che mette in relazione le coordinate fisiche \mathbf{q} e quelle modali \mathbf{p} . Nel metodo di Craig-Bampton, per

determinare tale matrice di trasformazione si considerano le interfacce tra le sottostrutture vincolate. Le colonne della matrice di trasformazione è composta dai modi statici e dai modi normali. I modi statici sono definiti come le deformate della sottostruttura ottenute imponendo uno spostamento unitario ad ogni coordinata fisica del contorno e mantenendo vincolate le altre coordinate del contorno, mentre i gradi di libertà interni sono considerati liberi. Questi modi rappresentano una deformazione statica della sottostruttura e per questo vengono denominati come “statici”. Per ottenere i modi statici si utilizza la condensazione statica di Guyan [16]. In breve, il vettore delle coordinate fisiche viene partizionato in due sottoinsiemi detti rispettivamente coordinate *master* e *slave*. Per determinare i modi statici di Craig-Bampton, in considerazione della suddetta condensazione di Guyan, occorre assumere come coordinate *master* quelle relative ai nodi di interfaccia (pedice *b*) e come *slave* quelle interne (pedice *i*). L’equazione del moto di una sottostruttura può quindi essere partizionata come segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bi} \\ \mathbf{M}_{ib} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b \\ \ddot{\mathbf{q}}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

dove sono presenti la matrice massa e la matrice rigidezza, a primo membro, e il vettore delle forze esterne, a secondo membro. Le coordinate interne e di interfaccia sono legate dalla semplice relazione:

$$\mathbf{q}_i = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib}\mathbf{q}_b \quad (\mathbf{f}_i = 0) \quad (3)$$

Inoltre considerando l’equazione (3) si ha che:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_b \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib}\mathbf{q}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib} \end{Bmatrix} \mathbf{q}_b \quad (4)$$

dove \mathbf{I}_{bb} è il vettore unitario. Maggiori dettagli riguardo alla riduzione statica di Guyan possono essere trovati in [15, 16]. In definitiva, la matrice dei modi statici è rappresentata dalla seguente matrice Ψ_c , con $\Psi_{ib} = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib}$:

$$\Psi_c = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} \\ \Psi_{ib} \end{bmatrix}_{N_i \times N_b} \quad (5)$$

dove N_b è il numero di coordinate (o gradi di libertà) dell’interfaccia, N_i è il numero di

coordinate interne ed N rappresenta il numero totale di coordinate ($N = N_i + N_b$).

Per quanto riguarda i modi normali, questi derivano dalla risoluzione di un problema agli autovalori, formulato considerando tutti i gradi di libertà all'interfaccia vincolati con incastro; perciò nell'equazione del moto (1) risulta $\mathbf{q}_b = \mathbf{0}$, di conseguenza:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{M}_{bi} \\ \mathbf{M}_{ib} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{q}}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bi} \\ \mathbf{K}_{ib} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

L'insieme completo degli N_i modi normali ad interfaccia fissa è rappresentato dalla matrice Φ_n e deve essere assemblato in accordo con la partizione dell'espressione (5), cioè:

$$\Phi_n \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{bn} \\ \Phi_{in} \end{bmatrix}_{N \times N_i} \quad (7)$$

Nonostante la matrice Φ_n rappresenta tutti gli N_i modi normali, nella pratica, questi vengono troncati, per semplificare il modello e ridurre i tempi di calcolo.

A questo punto, dopo aver determinato i modi statici e quelli normali, si può assemblare la matrice di trasformazione. Risulta:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} & \mathbf{0}_{bn} \\ \Psi_{ib} & \Phi_{in} \end{bmatrix} \mathbf{p} \quad (8)$$

ossia $\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{p}$, dove $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bb} & \mathbf{0}_{bn} \\ \Psi_{ib} & \Phi_{in} \end{bmatrix}$ è la matrice di trasformazione, composta dai modi di Craig-Bampton. Questa sarà utilizzata per risolvere, in coordinate modali, l'equazione dinamica del moto con corpi flessibili, troncando i modi a frequenza più elevata per semplificare il modello. Il troncamento riguarda solo le ultime righe della matrice \mathbf{B} , pertanto i modi statici riferiti all'interfaccia non vengono mai cancellati.

Nel caso in studio per il calcolo dei suddetti modi si è utilizzato come solutore MSC.Nastran [17], guidato da LMS Virtual.Lab; nello specifico, le fasi di calcolo che il solutore svolge per calcolare i modi di Craig-Bampton sono principalmente le tre seguenti. La prima consiste in un'analisi statica di Guyan (SOL101) per il calcolo dei modi statici. La seconda calcola i modi normali a interfaccia vincolata mediante la soluzione SOL103 (Lanczos) di Nastran. E' da notare che la composizione di queste due tipologie di modi non costituisce ancora i modi di Craig-Bampton. Occorre una terza operazione che consiste nella

loro ortogonalizzazione.

Una volta ottenuti i modi di Craig-Bampton per ogni componente flessibile e importati tali modi nel file di analisi globale è possibile lanciare la soluzione dinamica che fornisce spostamenti, velocità, accelerazioni e forze relative ad ogni componente. Infine, con il metodo della sovrapposizione modale [15] è possibile ottenere lo stato tensionale nei componenti flessibili per una successiva analisi a fatica.

4. CONCLUSIONI

In questo lavoro è stata presentata la metodologia per introdurre la flessibilità di alcuni membri in un modello multibody a corpi rigidi e le problematiche che tale metodologia presenta. Tener conto della flessibilità di alcuni corpi non significa infatti semplicemente sostituire gli stessi con corpi discretizzati ad elementi finiti, ma è necessaria la preparazione di un precedente modello a corpi rigidi perché possa interfacciarsi ai corpi flessibili. In questo contesto è richiesto l'impiego di corpi dummy, nodi di interfaccia, vincoli cinematici e elementi rigidi, che vanno a complicare la procedura.

Particolare attenzione va rivolta all'uso di "spider" di elementi rigidi per il collegamento dei corpi flessibili con la restante parte del modello: questi possono modificare sostanzialmente la dinamica degli stessi corpi flessibili e di conseguenza la risposta globale del sistema. Risulta quindi necessaria una fase di validazione del modello di ogni singolo corpo flessibile, per valutare che l'irrigidimento locale del corpo sia accettabile ai fini dell'analisi. Ad esempio, nel caso del meccanismo di distribuzione desmodromica preso in esame, la variazione delle caratteristiche dinamiche dei bilancieri è risultata rilevante. Il forte effetto di irrigidimento riscontrato è dovuto prevalentemente al fatto che la zona di contatto fra i bilancieri e le camme è molto estesa e pertanto è necessario uno spider di elementi rigidi che copra una superficie estremamente ampia. In altri termini, il collegamento rigido tramite "spider" tra un nodo di interfaccia ed un'ampia superficie di contatto evidentemente irrigidisce notevolmente i bilancieri nelle zone di contatto, che pertanto manifestano una dinamica abbastanza diversa rispetto al caso senza elementi rigidi. E' in corso lo sviluppo di metodi per ridurre questo problema; una strategia perseguita è quella di usare molti corpi dummy ognuno collegato rigidamente ad una piccola porzione di superficie di contatto, invece di un solo corpo dummy collegato rigidamente a tutta la zona di contatto.

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano le Società Ducati Corse (Bologna, Italia) e LMS HQ (Leuven, Belgio) per la collaborazione nella conduzione della ricerca e per l'assistenza nella raccolta dei dati necessari alla modellazione.

Questo lavoro è stato svolto nell'ambito del laboratorio di ricerca e trasferimento tecnologico LAV (Laboratorio di Acustica e Vibrazioni) realizzato con il contributo della Regione Emilia Romagna - Assessorato Attività Produttive, Sviluppo Economico, Piano Telematico, PRRIIT misura 3.4 azione A - Obiettivo 2.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Moreno D., Mucchi E., Dalpiaz G., Rivola A., 2007. "Multibody analysis of the desmodromic valve train of the Ducati MotoGP engine". In Proceedings of the Multibody dynamics ECCOMAS Thematic Conference.
- [2] LMS International, 2004. LMS Virtual.Lab, Rev. 4B, November 2004.
- [3] David J.W., Chen C.Y., Choi T.D., Kelley C.T., Gablonsky J., 1997. "Optimal design of high speed mechanical systems". Technical Report CRSC-TR97-18, North Carolina State University.
- [4] Le I.P.J., Soni A. H., 1975. "A survey of techniques in cam dynamics". In Proceedings of the Fourth Conference on Mechanisms, Paper No.32, Chicago, Illinois, USA.
- [5] Dalpiaz G., Rivola A., 2000. "A non-linear elastodynamic model of a desmodromic valve train". *Mechanism and Machine Theory*, **35**(11), pp. 1551-1562.
- [6] Rivola A., Carlini A., Dalpiaz G., 2002. "Modelling the elastodynamic behaviour of a desmodromic valve train". Proceedings of ISMA 2002, Leuven, Belgium, pp 1417-1426.
- [7] Pisano A.P., Freudenstein F., 1983. "An experimental and analytical investigation of the dynamic response of a high-speed cam-follower system. Part 2: a combined, lumped/distributed dynamic model". *Journal of Mechanisms, Transmission and Automation in Design*, **105**, pp. 699-704.
- [8] Gast G.J., David J.W., 1996. "Pushrod modeling and valvetrain dynamic of high speed IC engines". SAE Paper No. 960352, pp. 135-142.
- [9] McLaughlin S., Haque I., 2002. "Development of a multi-body simulation model of a Winston Cup valvetrain to study valve bounce" Proceedings of IMechE, Part K: Journal of Multi-body Dynamics 216 (3), pp. 237-248.
- [10] Rivola A., Troncossi M., Dalpiaz G., Carlini A., 2007. "Elastodynamic analysis of the desmodromic valve train of a racing motorbike engine by means of a combined lumped/finite element model". *Mechanical systems and Signal processing*, **21**(2), pp. 735-760.
- [11] Isaac Du H.Y., Jia-Shiun Chen, 2000. "Dynamic analysis of a 3D finger follower valve train system coupled with flexible camshafts". SAE paper No. 2000-01-0909, pp. 1-8.
- [12] Craig Jr., Roy R., Bampton Mervyn C. C., 1968. "Coupling of Substructures for Dynamic Analyses". *AIAA Journal*, **6**(7), pp. 1313-1319.
- [13] Craig Jr., Roy R., Ching-Jone Chang, 1976. "Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis". *AIAA Journal*, **14**(11), pp 1633-1635.
- [14] Heylen W., Lammens S., Sas P., 2003. *Modal Analysis Theory and Testing*. Department of Mechanical Engineering, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium.
- [15] LMS international, 2007. Virtual.Lab Online Help, LMS, 6b edition.
- [16] Petyt M., 1990. *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge Univ Press.
- [17] MSC, 2006. MSC.NASTRAN, Version 2006.

I CARROZZI DI FRANCESCO DI GIORGIO ED IL LORO SISTEMA DI GUIDA.

Pier Gabriele Molari

Dipartimento di Ingegneria delle Costruzioni Meccaniche, Nucleari, Aeronautiche e di Metallurgia,

Università di Bologna, Bologna, Italia

E-mail: piergabriele.molari@unibo.it

Sommario. *Passati in rassegna i carri, detti anche carrozzi, descritti da Francesco di Giorgio nei suoi Trattati, se ne descrivono i meccanismi di sterzo con l'aiuto di particolari costruttivi tratti dai disegni del manoscritto LAT VIII,67 (=3048) della 'Biblioteca di San Marco' di Venezia.*

Abstract. *The cars, said carrozzi, described in Francesco di Giorgio Trattati are reported and their steering mechanisms are analyzed and reconstructed with the help of the manuscript LAT VIII,67 (=3048) owned by the 'Biblioteca di San Marco' in Venice.*

Parole chiave: *Francesco di Giorgio, carro, meccanismi di guida.*

Keywords: *Francesco di Giorgio, cars, steering mechanisms.*

1. INTRODUZIONE

Nel 1400 il carro trainato da cavalli o buoi era il mezzo impiegato per il trasporto di cose e di persone. Esistevano poi alcuni trasporti che noi oggi chiameremmo trasporti eccezionali per stupire il pubblico durante gli spettacoli teatrali e per far fronte a necessità estreme come sul campo di battaglia o negli assalti ai castelli [1]. Per quest'ultimo impiego i carri venivano usati per trasportare bastie, armati o bombarde il più vicino possibile al teatro dello scontro o per scavare fossati.

A differenza di quanto oggi si possa pensare per il grande sviluppo dei mezzi agricoli, non vi è traccia di carri eccezionali impiegati nei lavori dei campi a causa dell'abbondanza di mano d'opera a basso costo allora esistente.

Francesco di Giorgio riporta alcuni disegni accompagnati da una breve descrizione di questi carri eccezionali che lui chiama carri o carrozzi che vengono qui presi in esame, mettendo in evidenza il sistema di propulsione e, soprattutto, quello di guida. All papers could be written in Italian or English.

2. IL CARROZZO

Il tradizionale carro trainato da animali Fig.1 poggia su due ruote, folli sul proprio asse, è dotato di una lunga trave centrale, detta timone, posata sul giogo e accoppiata ad esso tramite un cavicchio trasversale. Questo carro può seguire un percorso curvo orientando gli animali.



Figura 1. Fattori: buoi al carro - Museo di Palazzo Pitti, Firenze

Il carro da parata o il carro per trasporti importanti impiega quattro ruote. Il timone è solidale all'asse delle prime due ruote, come nei celebri trionfi dei duchi di Urbino di Piero della Francesca Fig.2, mentre il collegamento rigido fra il perno sul quale ruota l'asse anteriore e l'asse posteriore fa parte del telaio.



Figura 2. Piero della Francesca: I trionfi dei duchi di Urbino (sul retro dei celebri ritratti di Federico III e di Battista Sforza) - Galleria degli Uffizi, Firenze [2].

Questi carri sono pensati in funzione della trazione animale, mentre il carrozzo, di solito piuttosto pesante e poggiate su quattro ruote, viene concepito come diretta derivazione del

trasporto dei grandi blocchi di pietra su rulli. In questo caso l'asse motore è spesso anteriore e l'asse sterzante è posteriore. Si assiste poi all'evoluzione di rendere motrici tutte le ruote indipendentemente l'una dall'altra e di orientare gli assi anteriori e posteriori o di orientare le ruote laterali oppure di ruotare le ruote poste ad un lato e di traslare, nel senso longitudinale del carro, quelle dal lato opposto.

Francesco di Giorgio nel suo trattato [3] elenca sei carrozzi fra loro diversi sia per la 'propulsione' sia per il sistema di guida.

In questo contesto penso sia interessante riportare innanzitutto i motivi che spingono Francesco di Giorgio ad illustrare queste cose:

Dal 'Settimo trattato' Macchine per muovere pesi e trarre acqua, pistrini e mulini.

..benché più e più volte abbi fatto deliberazione di non voler manifestare alcuna mia macchina, peroché avendo io acquistata la notizia di quelle con mia grande spesa di esperienza e grave incomodo, lassando da parte le cose al mio vitto necessarie, ho visto per esperienza che el premio che io ho ricevuto è stato uno effetto di ingratitude; né trovo chi consideri che le esperienze non si possino acquistare vere senza longo tempo e dispendio et impedimento dell'altre cure utili, ma solo quando cercano avere alcuna macchina o ingenioso instrumento, vedendo el disegno e parendoli poi cosa breve, la fatiga sprezzando della invenzione. Ma questo ancora saria piccolo affanno se non seguisse uno maggiore incomodo all'animo e molestia, peroché sempre e massimamente oggidì li ignoranti, facendosi onorati delle fatiche aliene, e si gloriano con parole di sapere e potere molte cose, le quali se la verità si cercasse si truovaria invenzioni d'altri; e questo vizio nelli tempi nostri abbonda in quelli che architetti si chiamano precipuamente, li quali sono quasi tutti omini ignoranti et inesperti, che per le opere loro facilmente si può comprendere. E di questo più volte ho visto la esperienza di molti architetti nominati, li quali a nome nominaria se non fusse ch'io non voglio si creda che per inimicizia della patria io mi mova dire di loro.....[3] vol 2° pag. 492

2.1- Carro con i due assi sterzanti e resi motori tramite tre riduzioni

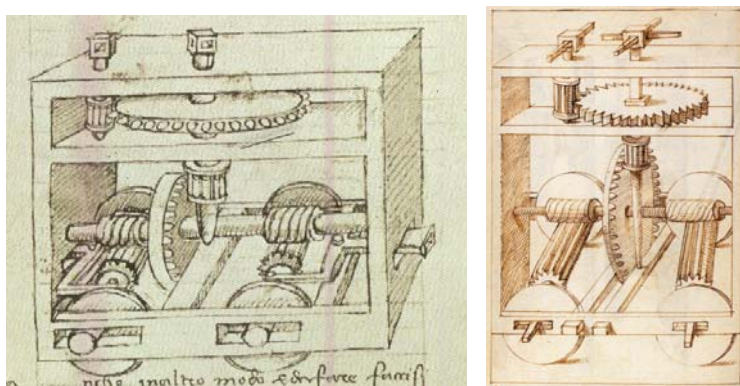


Figura 3. Il primo carrozzo (senso del moto \leftarrow). A sinistra la figura riportata sui trattati [3], a destra il disegno tratto dal manoscritto della Marciana di Venezia [4].

[L46v] *Quando alcuno carro per tirare senza bestie, ma con ingegno fare si può, faccisi l'armadura del carro e in mezzo e a la superficia d'esso una dentata ruota di diametro piè cinque(*), la quale un rullato rocchetto che le manuelle giri. E nel fuso e bilico d'essa rota un altro rullato rocchetto, el qual la dentata ruota ch'è per diritto pigli. E sia di diametro piè quattro(**). E nel fuso d'essa innanti e indrietro due rocchetti che le quattro ruote del carro guidi. E che esse ruote del carro a due bilicati timoni che da ogni banda guidar le possi. E intorno a la circonferenza d'esse grossi anti fitti a uso di ponte di diamanti, acciò che per tutto attaccar si possa, siccome la figura XXVIII.*

(*) considerando il piede, detto francese, allora di uso comune per l'architettura, di 324,84 mm, il diametro è di circa 1624 mm, il diametro della lanterna non viene definito ma, come in altri casi, può essere considerato pari ad un piede quindi circa 300 mm.

(**) circa 1300 mm.

Per il moto, considerando che un uomo può esercitare una forza di circa 10 kg su di una manovella di un metro percorrendo un cammino di circa 0,7 m in un secondo [6], con le riduzioni proposte e assumendo l'impiego contemporaneo di due uomini sulla stessa manovella e considerando un rapporto di riduzione totale di 1:7, 1:3 e 1:30 nella accoppiamento finale si ottiene una coppia sull'asse di $2 \times 100 \text{ N} \times 1 \text{ m} \times 7 \times 3 \times 30 = 126 \text{ KNm}$ pensando che la riduzione finale sia realizzata con una vite ad un principio e ad una ruota con trenta denti. La coppia che ne risulta all'asse delle ruote è estremamente elevata; per confronto basti pensare che la coppia delle nostre vetture di media cilindrata è di circa $5 \text{ KN} \times \text{m}$. La velocità che ne risulta è estremamente bassa pari a circa 4 m/ora, considerando le ruote di circa un metro di diametro.

TABLEAU M, des quantités de travail mécanique que peuvent fournir moyennement l'homme et d'autres animaux en agissant sur des machines.

NATURE DU TRAVAIL.	POIDS dont ou effet moyen usuel.	VITESSE ou élévée parmi par l'.	TRAVAIL par de travail seconde.	DURÉE de travail journalier.	QUANTITÉ de travail journalier.
Un manoeuvre agissant sur une roue à chevilles ou tambour	lit.	actes.	l. m.	heures.	l. m.
le au niveau de l'axe de la roue,	60	0,15	9	8	259.200
2° Vers le bas de la roue ou à 2/3,	12	0,70	8,4	8	251.120
Un manoeuvre marchant et poussant ou tirant horizon- talement,	12	0,60	7,2	8	207.360
Un manoeuvre agissant sur une manivelle,	8	0,75	6	8	172.800
Un manoeuvre exercé pou- ssant et tirant alternativement dans le sens vertical.	5	1,10	5,5	8	128.400
Un cheval attelé à une voi- ture ordinaire et allant au pas,	70	0,30	65	10	2.100.000
Un cheval attelé à un ma- noège et allant au pas,	45	0,30	49,5	8	1.166.400
Un cheval attelé à un ma- noège et allant au trot,	30	2,00	60	4,5	972.000
Un bœuf attelé à un manège et allant au pas,	60	0,60	36	8	1.152.000
Un mulet attelé de même et allant au pas,	50	0,30	27	8	777.600
Un âne attelé de même et allant au pas,	14	0,30	11,6	8	234.000

Figura 4. Da [6] la forza e la velocità dei motori animali.

Per il movimento delle ruote si usa un timone anteriore ed uno posteriore che vengono mossi direttamente da un operatore con un rapporto di leva circa 1:2.

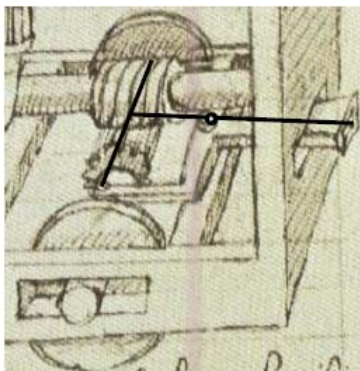


Figura 5. Particolare del sistema di guida del carro ed il semplice meccanismo adottato.

La vite sembra accoppiarsi con gioco alla ruota calettata sull'asse tanto da permettere il movimento degli assi.

2.2- Carro con l'asse posteriore sterzante tramite un quadrilatero articolato e con l'asse anteriore motore tramite due riduzioni.

*Anco in altro modo è da fare. Faccisi l'asse e armadure d'esso, e alla sommità del mezzo una dentata ruota dal bilicato rocchetto delle manuelle cacciata, la quale di diametro più quattro e mezzo sia (***) . E nel suo bilicato stilo sotto d'essa la vite che è nel fuso dell'una e l'altra ruota essa girando mova.*

E nell'altre due ultime rote del carro due manuelle e 'l carro dove vuoi guidar possi, ordenato el fuso di dette rote che fra duplicati legni tirato da timoni e camminar verrà, siccome la figura XXVIII dimostra.

(***) circa 1462 mm.

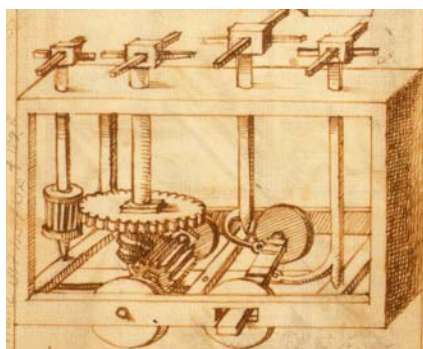
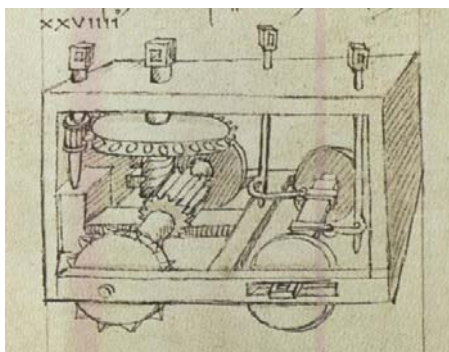


Figura 6. Il secondo carrozso (senso del moto <===). A sinistra la figura riportata sui Trattati [3], a destra il disegno tratto dal manoscritto della Marciana di Venezia [4].

In questo caso si ha una sola riduzione prima dell'accoppiamento vite- ruota elicoidale e quindi si può pensare ad un rapporto $1:7$ seguito da $1:30 = 1:210$.

La rotazione dell'asse è ottenuta tramite un quadrilatero articolato come in figura. Da notare che l'attrito fra l'asse ed il telaio viene ridotto con l'impiego di un rullo.

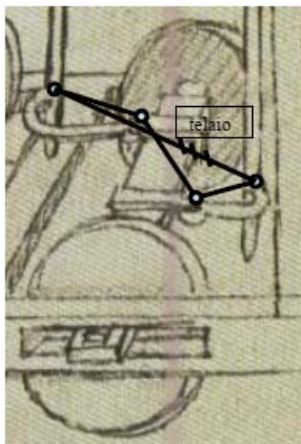


Figura 7. Particolare del sistema di guida del carro ed il meccanismo adottato.

2.3- Carro con l'asse posteriore sterzante tramite un settore dentato mosso da un rocchetto e con l'asse anteriore motore tramite tre riduzioni (le ruote sono dotate di sporgenze a punta)

Anco faccisi la rota nel sopra detto modo, colla sotto posta vite che le ruote del carro move. E a la dentatura d'essa rota la vite per piano col connesso rocchetto, el quale la diritta vite delle manuelle cacciando, la vite per pian la ruta percotendo el carro tirerà. Faccisi el timon delle ruote dirietro a guisa d'una terza dentata ruota, colle rullate guide da ogni banda. E ch'el rocchetto sopra colle manuelle el carro dove vuoi dirizzar possa, siccome la figura XXX manifesta.

La rotazione dell'asse avviene facendo ruotare un settore dentato che scorre su due guide inclinate ottenute lateralmente. Anche in questo caso vengono impiegati rulli per ridurre l'attrito fra l'asse ed il telaio.

La coppia motrice viene fornita attraverso tre riduzioni che possono essere valutate $1:30$, $1:7$ e ancora $1:30$; si arriva quindi ad un rapporto di circa $1:3600$. In questo caso viene infatti impiegato un ingranaggio a vite senza fine all'inizio ed alla fine della catena del moto.

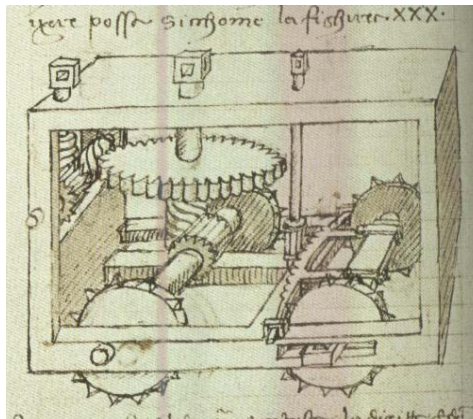


Figura 8. Il terzo carrozino (senso del moto \leftarrow). La figura riportata sui Trattati [3].

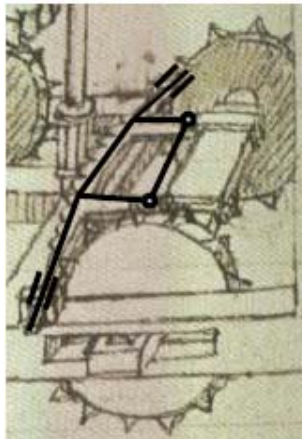


Figura 9. Particolare del sistema di guida del carro ed il meccanismo adottato.

2.4- Carro con l'asse posteriore sterzante tramite un doppio manovellismo di spinta con due manovelle mosse tramite settori dentati. Il carro è dotato di asse anteriore motore tramite due riduzioni.

[T52v] *Faccisi el carro, e in testa la diritta e dentata ruota ch'er rocchetto delle manuelle cacciando giri. E nel fuso d'essa la vite ch'er rocchetto delle ruote del carro muove. I timoni delle ruote di drito colle loro lieve guide bilicati a uso di terza ruota, dentati co' lor rocchetti delle manuelle ch'el carro da ogni banda guidar possi, siccome la figura XXXI dimostra.*

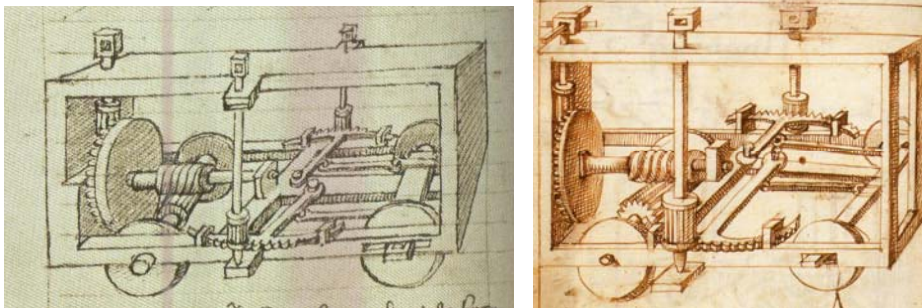


Figura 10. Il quarto carrozzo (senso del moto \leftarrow). A sinistra la figura riportata sui Trattati [3], a destra il disegno tratto dal manoscritto della Marciana di Venezia [4].

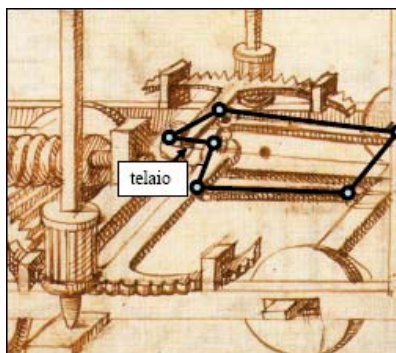


Figura 11. Particolare del sistema di guida del carro ed il meccanismo adottato.

L'asse viene mosso tramite due manovellismi di spinta accoppiati, le manovelle dei quali vengono fatte ruotare tramite il solito settore dentato.

La trasmissione del moto avviene tramite due riduzioni di circa 1:7 e 1:30 quindi circa 1:210 globalmente.

2.5- Carro a quattro ruote motrici con una sola riduzione.

Ogni asse viene fatto ruotare tramite un quadrilatero articolato, la manovella del quale è mossa tramite settore dentato. I movimenti degli assi di destra sono accoppiati a quelli di sinistra

Anco el carro in questo modo è da fare, che le viti e rocchetti che le ruote del carro guida sopra l'asse de' rulli ch'el timone [L47] della terza dentata ruota innanzi e indietro guida. E questo molto nel camminare dell'edifizio si concorda. E per due timoni ch'ennanzi e dietro vanno, per sedici omini o più esso difizio guidando ordenar si può, siccome la figura XXXII dimostra.

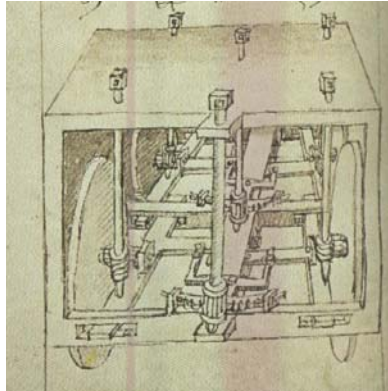


Figura 12. Il quinto carrozzone (senso del moto: uscendo sul fronte del foglio). La figura riportata sui Trattati [3].

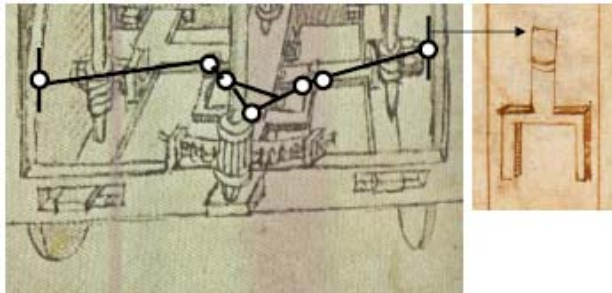


Figura 13. Particolare del sistema di guida del carro ed il meccanismo adottato. A destra un particolare tratto dal foglio 34 r del manoscritto [4].

Dai Trattati non è facile capire l'accoppiamento fra la ruota ed il telaio a meno che non si consideri la bellissima immagine riportata nel manoscritto della Marciana [4] per il carrozzone successivo. In [4] si vede un dettaglio che descrive come l'asse delle ruote (orizzontale) possa ruotare attorno ad un asse verticale. Il movimento è ottenuto tramite un doppio quadrilatero articolato. L'attrito dei bilancieri viene ridotto attraverso l'interposizione dei soliti rulli.

Ogni ruota è motrice e la riduzione è ottenuta con un ingranaggio a vite senza fine e può essere valutata su 1:30. Dato che la boccola inferiore dell'asse della vite si muove rispetto a quella superiore che è fissa al telaio, Francesco di Giorgio per questo accoppiamento ammette un certo gioco che tuttavia cerca di minimizzare allungando l'asse.

2.6- E' l'ingegno più complicato - Carro a due ruote motrici con una sola riduzione. Le ruote del lato di sinistra vengono fatte ruotare tramite un settore dentato, quelle di destra vengono fatte scorrere in senso longitudinale.

Per altro modo anco essi carri faremo. Faccisi rocchetti nel fuso delle rote del carro che le viti delle manuelle guidan sopra dell'assa del timone e l'uno e l'altro bilicati. El timon d'esso sia un dentato rocchetto pur da la vite della manuela cacciato. E nel fuso d'esso un dentato e

breve rocchetto, el qual la scala dell'assa del bilico delle ruote innanzi e indietro mandar possa. Si anco dett'asse tortuosa e dentata colle sue rullate guide dal rocchetto cacciata innanzi e indietro mandar si potrà, siccome la figura XXXIII.

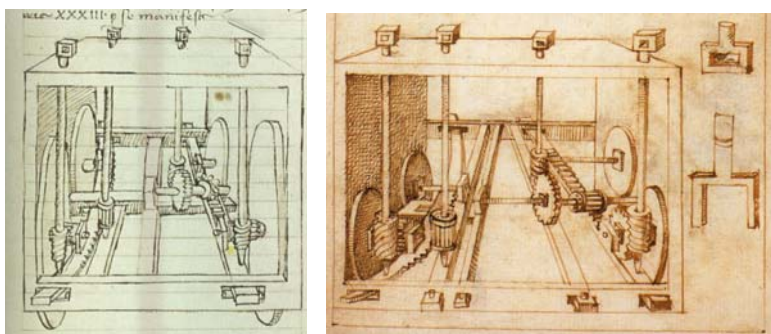


Figura 14. Il sesto ed ultimo carrozzo (senso del moto: uscente sul fronte del foglio). A sinistra la figura riportata sui Trattati [3], a destra il disegno tratto dal manoscritto della Marciana di Venezia [4].

In questo caso le due ruote posteriori sono folli e con asse fisso (nella figura riportata sui trattati le boccole di queste ruote sembrano solidali rispettivamente al settore dentato e alla cremagliera traslante, ciò sembra un errore del copista del Monte Oliveto).

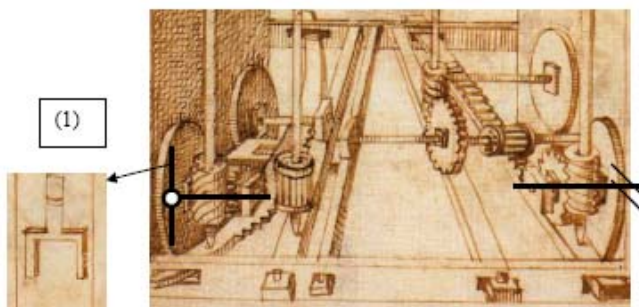


Figura 15. Particolare del sistema di guida del carro ed il meccanismo adottato. A destra e a sinistra particolari tratti dal foglio 34 r del manoscritto [4].

Portando il settore dentato vicino all'asse di rotazione la rotazione della ruota avviene attorno all'asse del portamozzo, come sopra detto, utilizzando la forchetta (1) riportata nel dettaglio di sinistra e posta sulla parete esterna. In questo modo la rotazione del carro avviene proprio attorno a questo asse. Per variare il raggio di rotazione ed evitare gli slittamenti, Francesco di Giorgio pensa di traslare in senso longitudinale l'asse della ruota del lato opposto cambiando così il centro di istantanea rotazione del carro; l'asse della ruota di destra (per chi guarda la figura) viene sostenuto dalla tavola traslante e viene anche appoggiato sul telaio facendolo slittare in una opportuna fessura posta sulla parete esterna.

3. CONCLUSIONE

Dobbiamo molto alla scuola senese ora, come allora nel lontano 1400.

Dobbiamo molto alla lucida mente del Duca Federico III di Urbino ed al braccio di Francesco di Giorgio. Il braccio e la mente: i due soli come nel tappeto rappresentato nella anteporta del libro di Cicerone sulle *Tuscolanae meditationes*.



Figura 16. Il Duca Federico III e Francesco di Giorgio. I due soli : la mente ed il braccio. Disegno che 'illumina' le *Tuscolanae Disputationes* [7][8].

Costoro hanno traghettato il desiderio di costruire, dalle arti, intese come lavoro di bottega, alla dignità dell'arte intesa come arte del quadrivio [8].

Con loro l'arte dell'ingegnere viene esposta al pubblico per essere ammirata e quasi glorificata e viene resa più astratta con un sistematico lavoro di razionalizzazione, cercandone di capire l'essenza.

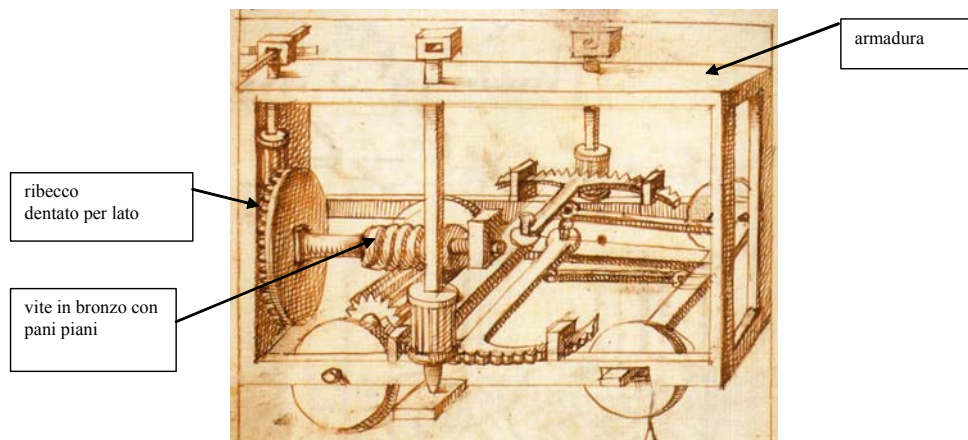
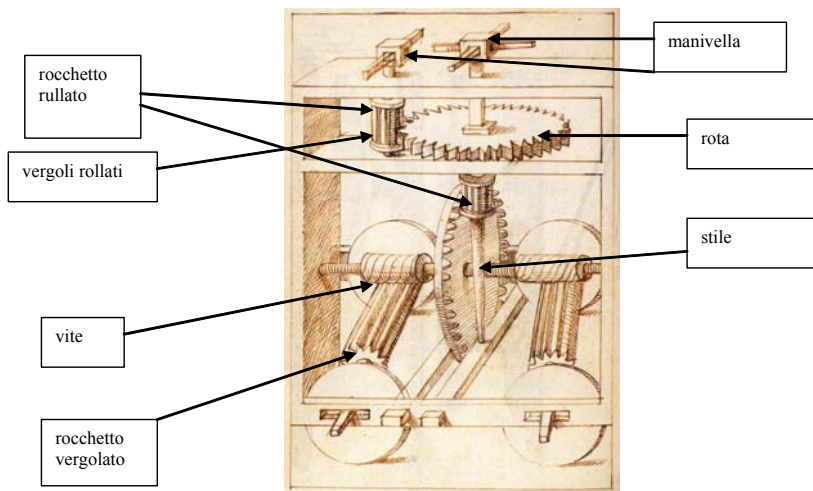
Scompare così la distinzione fra la mente ed il braccio per lasciare il posto alla sintesi propria dell'ingegnere come il termine stesso insegna.

Il fine

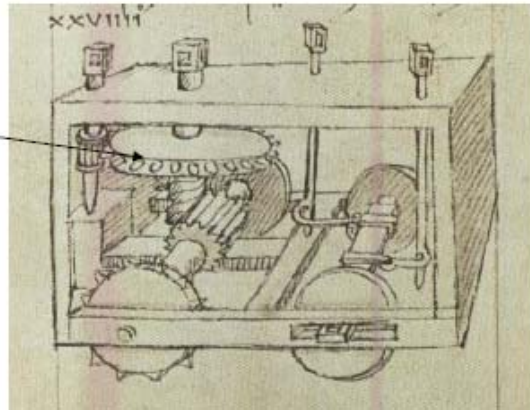


TERMINOLOGIA

[3] M91v, M92 + T52v, T53



ribecco
dentato per fianco



BIBLIOGRAFIA

- [1] Galluzzi P., 1996. Gli ingegneri del Rinascimento da Brunelleschi a Leonardo da Vinci. Giunti ed. Firenze, 7a ristampa 2007.
- [2] Il quattrocento ARTE, 2005. La grande storia dell'arte. Firenze.
- [3] Francesco di Giorgio Martini, 1967. Trattati di Architettura ingegneria e arte militare. Ed. Il Polifilo, vol. 2, Milano.
- [4] “Organa Mechanica”, Manoscritto, Biblioteca Marciana, Venezia Lat. VIII, 87 (=3048) (già appartenuto a Guido Ubaldo dei Marchesi del Monte Santa Maria), riportato in [5].
- [5] Organa Mechanica Commento al Facsimile, (Treviso:Permasteelisa Group, 1999),
a- VINCENZO FONTANA, “Il teatro delle macchine di Guidobaldo Del Monte”,
b- SUSY MARCON “Il codice Marciano Lat. VIII, 87 (=3048) caratteri materiali e antichi possessori”.
- [6] Taffe A, 1857. Application des Principes de Mechanique aux Machines les plus en usage Meline, Cans et Compagnie, Bruxelles.
- [7] Francesco Di Giorgio Martini. “Das Skizzenbuch URB. LAT 1757” (Zurig: Belser Verlag, 1989 – riproduzione in facsimile dell’originale con prefazione di Luigi Michelini Tocci).
- [8] Molari L, Molari P.G, 2006. Il trionfo dell'ingegneria nel fregio del palazzo ducale d'Urbino. ETS, Pisa.

UN PERCORSO DI RICERCA E DIDATTICA NELLA MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE

Edzeario Prati

*Dipartimento di Ingegneria Industriale ,
Università degli Studi di Parma, Italy
E-mail: prati@ied.unipr.it*

Marco Silvestri

*Dipartimento di Ingegneria Industriale ,
Università degli Studi di Parma, Italy
E-mail: silvestri@ied.unipr.it*

Alessandro Tasora

*Dipartimento di Ingegneria Industriale ,
Università degli Studi di Parma, Italy
E-mail: tasora@ied.unipr.it*

Abstract. *L'articolo contiene, accanto ad alcune considerazioni sul ruolo che la meccanica applicata alle macchine ha svolto negli ultimi anni, una breve rassegna di alcune attività di ricerca e didattica svolte presso l'Università di Parma. In particolare, l'attività degli autori si concentra nei settori della tribologia, della simulazione multibody, del controllo del moto, della robotica e dell'automazione, in particolare nei settori alimentare e farmaceutico.*

Keywords: *tribologia, simulazione multibody, GAMP, motion control*

1. INTRODUZIONE

La Meccanica Applicata alle Macchine, intesa come settore scientifico e disciplinare, comprende numerosi metodi e articolati temi di ricerca. Questi trovano una radice comune nell'omonima disciplina di base e si allargano a ventaglio nelle direzioni date da campi di ricerca piuttosto specialistici (ad esempio, la dinamica dei sistemi meccanici, lo studio delle interazioni fluido-struttura, la tribologia, la sintesi dei meccanismi attraverso l'uso dell'algebra duale) o fortemente legati agli sviluppi tecnologici ed alle applicazioni (automazione, azionamenti, robotica, strumenti di misura). Questo percorso, che può essere facilmente immaginato pensando alla sequenza dei corsi nei piani di studio, nasce ai confini delle discipline matematiche (in particolare, naturalmente, della Meccanica Razionale) e si sviluppa secondo una notevole varietà di ramificazioni che, man mano si caratterizzano, dipendono sempre più fortemente dalle tecnologie, dagli strumenti di calcolo e dalle esigenze tecnologiche che il mondo dell'ingegneria nel suo complesso esprime in un dato momento.

Dal punto di vista didattico si tratta di un percorso di naturale specializzazione che, in linea di massima, viene percorso una sola volta: dal semplice al complesso, dal teorico all'applicativo, dall'analitico al numerico.

Dal punto di vista scientifico, invece, quelle stesse strade devono essere ripercorse pazientemente, più e più volte. La capacità di implementare la teoria in specifiche soluzioni prima o poi si accompagna alla necessità, o al desiderio, di ritornare alla disciplina di base per definire modelli che meglio rappresentano nuovi problemi o che più utilmente rispondono a nuovi interrogativi: si tratta di non trascurare quel *respiro dell'intelligenza* [1] che permette di salire e scendere continuamente dal piano dei fatti a quello delle idee, dalle evidenze sperimentali ai modelli teorici.

I problemi che via via si affacciano all'attenzione dell'ingegneria sono legati alle contingenze storiche: nell'immediata attualità, ad esempio, vediamo imporsi i temi della sostenibilità e del risparmio energetico. Nel recente passato hanno trovato grande attenzione le implementazioni delle nanotecnologie; procedendo a ritroso, tra i tanti, si possono ricordare i temi legati alle esigenze di mobilità, alla produzione di manufatti di alta precisione, alla generazione di forza motrice, e così via. Ognuno di questi, nel momento in cui si pone, sollecita a fare un salto di qualità che è possibile solo attraverso una ricomprensione profonda delle basi della disciplina. A sua volta, la teoria si afferma e diventa un caposaldo fondamentale soprattutto in forza dei mutamenti pratici che ha saputo generare.

Questo continuo ritorno ai fondamenti, in qualche misura comune a tutte le scienze, è particolarmente evidente in una materia che, fin dal nome, si dichiara *applicata* alla realtà industriale e presuppone l'esistenza di una meccanica teorica che, una volta calata nello specifico, assuma una nuova fisionomia e richieda una nuova trattazione. È anche facile riconoscere che lo stesso paradigma può essere riconosciuto tanto nell'evoluzione complessiva della comunità scientifica che nel modo di procedere di un gruppo di ricerca o, perfino, di un singolo ricercatore, purché questi si pongano con un atteggiamento autenticamente critico.

In questo contesto, è sembrato utile e aderente al significato di una giornata di studio in memoria del Prof. Funaioli riconsiderare l'attività svolta presso l'Università di Parma e formulare alcune considerazioni sul ruolo che il settore della Meccanica Applicata può svolgere.

Non si ritiene, è bene esplicitarlo, che le attività riportate abbiano un valore esemplare e siano, per se stesse, significative delle tendenze più attuali o degli sviluppi prevedibili. Più semplicemente, esse costituiscono una rappresentazione della riflessione, della volontà di realizzare, delle occasioni concrete che hanno accompagnato il lavoro degli autori a Parma, a partire dalla istituzione della Facoltà di Ingegneria, avvenuta nel 1986 e in particolare degli sviluppi degli ultimi cinque anni.

2. TRIBOLOGIA

L'interesse pratico per i fenomeni di usura, attrito e lubrificazione, che viene comunemente fatto risalire agli studi di Leonardo da Vinci o, almeno, al contributo fondamentale dato da Charles-Augustin de Coulomb [2], è certamente molto più antico del termine *tribologia*, diventato di uso comune alla fine degli anni '60.

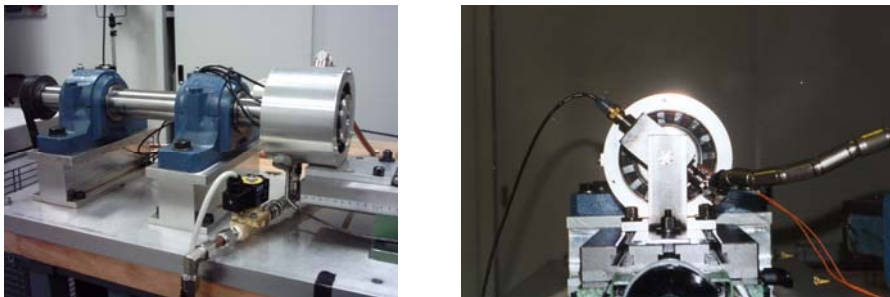


Figura 1. Attrezzatura per lo studio sperimentale di tenute dinamiche.

Nel corso degli ultimi decenni, le motivazioni che hanno guidato queste ricerche si sono evolute, dalla comprensione dei meccanismi fondamentali che assicurano il funzionamento affidabile delle macchine alla più ambiziosa ricerca di soluzioni più efficienti, meno inquinanti e più competitive per costi e prestazioni. Le ricerche condotte a Parma si sono polarizzate su due temi fondamentali: il contenimento dei fluidi lubrificanti in presenza di alberi rotanti e il comportamento dei membri di un meccanismo articolato in presenza di giochi nelle coppie rotoidali. La scelta di questi temi dipende da almeno tre fattori: il fatto che si tratta di componenti meccanici di largo impiego, la possibilità di generalizzare i risultati ottenuti alla maggioranza delle situazioni di moto relativo tra le superfici e l'interesse concreto che le ricerche hanno trovato sia presso le industrie locali (Carco, Valvoil) sia nei grandi gruppi internazionali, con cui sono avviati contatti e collaborazioni (SKF, BOSCH).

Queste ricerche hanno anche una notevole ricaduta sull'attività didattica, coinvolgendo tutti gli anni un buon numero di studenti in attività di laboratorio (vedi Fig. 1), nelle quali hanno modo di esercitarsi con sistemi di controllo, di progettare e assemblare parti meccaniche e di apprendere l'uso degli strumenti di misura e l'interpretazione corretta dei dati e degli errori sperimentali.

Studio delle tenute per alberi rotanti

Il contenimento dei fluidi lubrificanti e la protezione da agenti inquinanti esterni (polvere, impurità) costituiscono due problematiche estremamente comuni nella meccanica delle macchine e in particolare in tutti i casi in cui organi in movimento, tipicamente alberi rotanti, mettono in comunicazione le zone protette tramite carter o coperchi con l'ambiente esterno.

In passato l'interesse nello studio di queste problematiche è stato legato soprattutto alla identificazione delle condizioni che possono portare ad un cedimento degli organi di tenuta e di conseguenza al danneggiamento degli organi meccanici coinvolti.

Recentemente, anche per effetto di norme tecniche e legislative, si può riscontrare un rinnovato interesse per il problema del contenimento degli inquinanti, non solo in caso di rottura del sistema ma anche durante il normale funzionamento, in relazione all'impatto ambientale determinato da eventuali perdite.

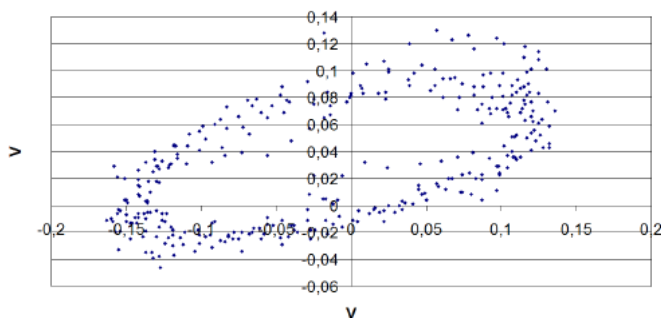


Figura 2. Misura del moto del labbro in prossimità dell'albero.

Tra i documenti più rilevanti a questo riguardo è opportuno ricordare la direttiva 96/61/EC detta IPPC, acronimo del titolo Integrated Pollution Prevention and Control che prevede l'obbligo, a partire dal 30 ottobre 2007, di implementare le *best available techniques*, anziché le *best available techniques not entailing excessive cost* indicate dalle precedenti normative IPC.

Un altro ambito nel quale queste tematiche rivestono particolare rilevanza è quello degli ambienti produttivi che non possono tollerare la fuoriuscita di fluidi contaminanti, come gli impianti farmaceutici ed alimentari, per i quali la scelta degli organi di tenuta è ristretta all'impiego di polimeri siliconici (polidimetilsilossano) o di fluoroelastomeri che permettono la realizzazione di articoli atossici.

Recenti studi [3] condotti presso il Dipartimento di Ingegneria Industriale di Parma hanno permesso di consolidare una approfondita conoscenza del fenomeno del distacco labbro-albero e del legame tra la portata del fluido perduto e la velocità di rotazione dell'albero impiegando anelli di tenuta in polimeri a base nitrilica (NBR).

Gli anelli di tenuta sono normalmente costituiti da un anello in elastomero dotato di un inserto di rinforzo metallico e che presenta, all'interfaccia con l'albero, un labbro su cui agisce una molla elicoidale che ha lo scopo di incrementarne la rigidità, garantendo anche una certa uniformità del valore della pressione di contatto labbro-albero nelle diverse condizioni di esercizio.

Nonostante lo studio di questi componenti abbia una lunga tradizione, a partire dalla individuazione di un possibile principio di funzionamento [4], la complessità dei fenomeni coinvolti non ha finora permesso di sviluppare un modello completo e definitivamente accettato.

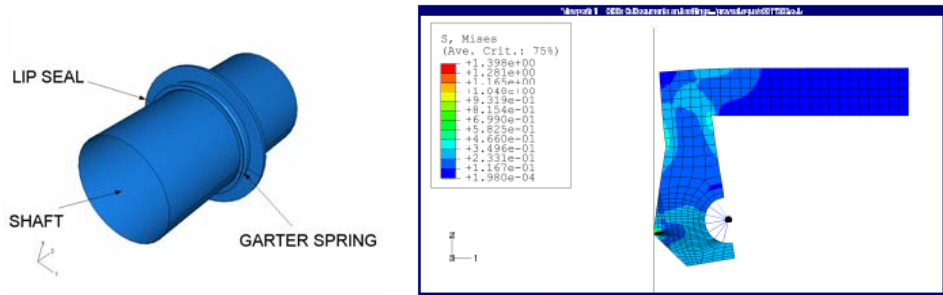


Figura 3. Modello per l'analisi FEM e un esempio di risultati.

Le spiegazioni sviluppate fanno infatti riferimento alle micro-ondulazioni sulla superficie del labbro, all'influenza della temperatura ed ai fenomeni visco-elastoidrodinamici della lubrificazione, ma non rendono ragione in modo esauriente dei risultati sperimentali che evidenziano come la portata di fuga, al variare della velocità dell'albero, presenti un andamento caratterizzato da diverse fasi, nelle quali si nota un iniziale incremento, una successiva riduzione e un ulteriore, più consistente, aumento.

Il complesso delle evidenze sperimentali ha permesso però di identificare con sicurezza i parametri di funzionamento fondamentali per caratterizzare il fenomeno:

- la velocità angolare: la velocità di rotazione dell'albero determina la frequenza della sollecitazione cui è sottoposta la guarnizione;
- ciclo di lavoro: in letteratura è documentata l'influenza del ciclo di lavoro sugli anelli di tenuta, evidenziando un significativo degrado delle prestazioni dopo i primi cicli di prove;
- temperatura: la temperatura influenza il problema in esame per quanto riguarda sia le proprietà viscoelastiche dell'elastomero, sia la viscosità del lubrificante impiegato;
- interferenza iniziale di montaggio: differenza tra il diametro dell'albero e il diametro della circonferenza dello spigolo interno del labbro. Questo parametro, fissato dal costruttore, è determinante per garantire la corretta pressione di contatto e quindi il buon funzionamento della tenuta;
- eccentricità statica: distanza tra il centro della circonferenza dello spigolo interno del labbro e il centro di rotazione dell'albero;
- eccentricità dinamica: distanza tra il centro geometrico dell'albero e il centro di rotazione dell'albero stesso;

La somma degli effetti introdotti dalle due eccentricità determina l'entità e la distribuzione lungo la circonferenza della sollecitazione a cui la guarnizione è sottoposta.

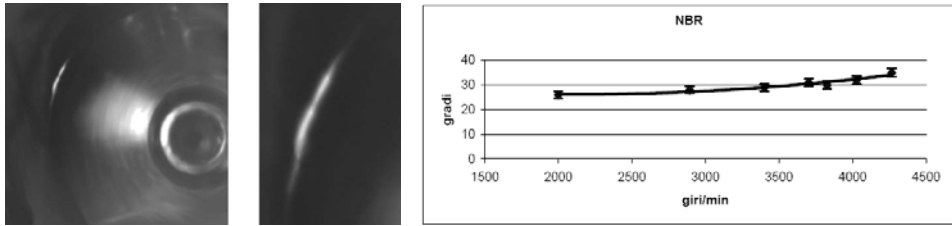


Figura 4. Misura del distacco labbro-albero con telecamera ad alta velocità.

Infatti, l'eccentricità dinamica determina un moto radiale oscillatorio dei punti del labbro in contatto con l'albero, mentre l'eccentricità statica altera la distribuzione della pressione di contatto lungo la circonferenza, determinando una zona preferenziale (dove la pressione è minore) di distacco della tenuta dall'albero.

Allo scopo di raggiungere una sintesi più soddisfacente delle evidenze sperimentali e delle teorie sin qui citate, si è proceduto attraverso indagini sperimentali (Fig. 2) e numeriche (Fig. 3) volte ad approfondire sia l'influenza dei fenomeni vibratorii innescati dalla presenza di una eccentricità dinamica che l'effetto della temperatura nelle condizioni di esercizio reali.

Sono state condotte prove per la determinazione delle funzioni di risposta in frequenza (FRF), in presenza di diversi metodi di eccitazione, finalizzate alla validazione del modello numerico e misure dello spostamento della zona dell'anello di tenuta interessata al distacco dall'albero. Queste ultime sono state ottenute con un banco di prova che riproduce le condizioni di funzionamento reali e suggeriscono una corrispondenza con i valori della portata di fuga.

Il modello numerico, realizzato con la tecnica dell'analisi agli elementi finiti, fornisce risultati compatibili con quelli ottenuti mediante le FRF. Le evidenze sperimentali indicano come una modellizzazione del comportamento viscoelastico delle tenute dinamiche alle alte frequenze sia ben approssimato da un modello iperelastico di tipo Mooney-Rivlin.

Pertanto, la modellazione geometrica realizzata si presenta come un valido inizio per la realizzazione di una simulazione del comportamento del materiale nelle condizioni di temperatura ed in presenza degli spostamenti della guarnizione che si verificano in condizioni reali.

I parametri caratteristici del moto del labbro, nella zona in cui in modo preferenziale avviene il distacco, sono stati misurati anche mediante un trasduttore estensimetrico appositamente realizzato (Fig. 2) e forniscono indicazioni utili alla caratterizzazione del fenomeno studiato, in quanto presentano un buon grado di corrispondenza con le portate di fuga attese.

Ulteriori evidenze sperimentali sono state ottenute attraverso un sistema di misura che utilizza le tecniche della visione industriale (Fig. 4) per studiare il comportamento di anelli di tenuta in elastomero in condizioni controllate di temperatura del lubrificante e mettendo a confronto dispositivi realizzati con diverse tipologie di polimero. I risultati mostrano un legame tra la temperatura del lubrificante e la frequenza della sollecitazione che determina il distacco del labbro dall'albero [5]. Tale legame si ripete al variare dei parametri considerati ed è in accordo con simulazioni numeriche condotte in precedenza [6].

Gli ultimi sviluppi di questa ricerca sono stati orientati allo studio dei parametri che influenzano maggiormente il momento resistente generato sull'albero in movimento. Questi approfondimenti sono stati motivati, anche su richiesta di aziende costruttrici, dalla necessità di contenere i crescenti costi dell'energia. A questo proposito si deve sottolineare che i risultati ottenuti, in particolare in presenza di lubrificante in pressione, evidenziano come il lavoro perduto per effetto dell'attrito non risulti trascurabile. Al contrario, esso determina spesso la necessità di ricorrere ad azionamenti di taglia superiore con ulteriori aumenti di costi, anche indiretti (dimensioni degli organi di trasmissione, taglia dei componenti del circuito di alimentazione, maggiori ingombri).

Comportamento dei meccanismi articolati in presenza di giochi

La presenza di giochi nelle coppie cinematiche di meccanismi articolati, in particolare nei quadrilateri e nei manovellismi di spinta, può essere causa di rapida usura, vibrazioni non desiderate, rumorosità e scarsa precisione nel controllo del moto.

Questa considerazione ha giustificato l'approfondimento della tematica in un ambito teorico e sperimentale al fine di sviluppare un modello numerico applicabile alla simulazione di meccanismi generici, ovvero laddove sia richiesta una valutazione realistica dell'effetto dei giochi nelle coppie rotoidali in termini di dinamica, cinematica ed usura dei materiali.

Tale esigenza ha motivato l'adozione di un metodo che contempla, per ogni coppia con gioco, l'alternanza delle fasi di contatto continuo, distacco, ripresa del contatto con urto ed eventuale rimbalzo.

Al fine di rappresentare la fase di contatto fra le due superfici della coppia, dato che i metodi basati su campi di forza e contatto herziano [7] presentano difficoltà nell'integrazione numerica, i metodi precedentemente proposti in letteratura utilizzano perlopiù un semplice modello che introduce una biella a massa nulla.

Tale procedimento, per quanto di facile implementazione, non si applica facilmente al caso di giochi multipli e di giochi fra superfici non cilindriche. Pertanto il nuovo metodo sviluppato [8] ha introdotto un vincolo geometrico in grado di simulare il contatto fra superfici di curvatura arbitraria, racchiudendo anche il sotto-caso di contatto fra albero e foro circolari.

Inoltre, da un'analisi della letteratura esistente su questo argomento, si è evidenziata la necessità di perfezionare i modelli di urto impulsivo impiegati in precedenza per rappresentare la ripresa di contatto dopo una fase di distacco: particolare attenzione è stata quindi rivolta all'eventuale perdita di contatto fra gli elementi cinematici della coppia, con conseguente urto alla ripresa del contatto.

Tale evento può aver luogo molte volte al secondo, suggerendo l'adozione di uno speciale modello di urto impulsivo che, a fronte di un onere computazionale relativamente modesto, possa rappresentare correttamente sia la componente ortogonale che la componente tangenziale dell'impulso in funzione di un numero limitato di coefficienti.

Nello sviluppo teorico si sono presi in esame alcuni accorgimenti in grado di rendere la simulazione sufficientemente agevole dal punto di vista dell'integrazione delle equazioni di moto, nonché per garantire l'applicabilità dei risultati al caso di giochi in più coppie.

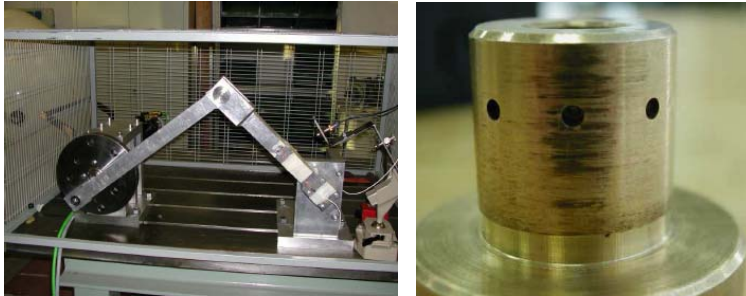


Figura 5. Meccanismo articolato per lo studio dell'effetto dei giochi nelle coppie cinematiche

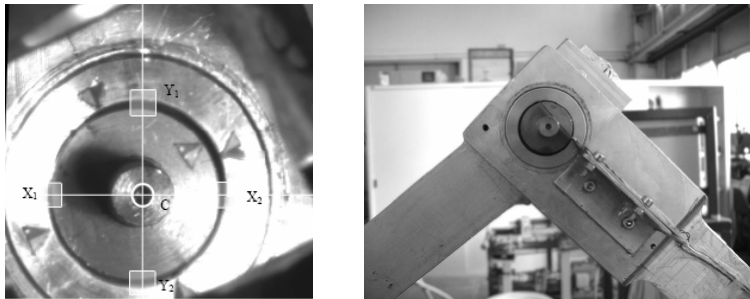


Figura 6. Misure con analisi dell'immagine e con sensori estensimetrici.

Al fine di perfezionare e verificare il modello si è realizzato un banco prova sperimentale costituito da un quadrilatero articolato piano (Fig. 5 e 6), del quale è possibile modificare dimensioni, entità del gioco e velocità angolare della manovella. Dal confronto dei risultati teorici con i risultati sperimentali si è potuta compiere un'analisi critica sul modello impiegato e sulla validità del suo utilizzo per prevedere l'usura e la deformazione degli elementi cinematici della coppia nelle condizioni reali di esercizio [9].

La particolare formulazione della metodologia, orientata alla massima generalità, ne ha permesso l'impiego anche nel caso di meccanismi con più giochi contemporanei, eventualmente anche fra superfici di forma arbitraria (fori ovalizzati, usurati, etc.). In seguito ad eventuali perdite di contatto, il metodo permette di simulare eventi impulsivi dotati di componenti tangenziali alla superfici, dato che i fenomeni d'attrito hanno mostrato un'influenza non trascurabile sul comportamento del meccanismo.

In particolare, la rilevanza degli effetti dovuti all'attrito suggerisce un futuro approfondimento del problema in modo da poter considerare modelli di attrito più sofisticati, come nel caso di lubrificazione mediata o nel caso di attrito non uniforme sulle superfici (ad esempio per effetto di usura non omogenea).

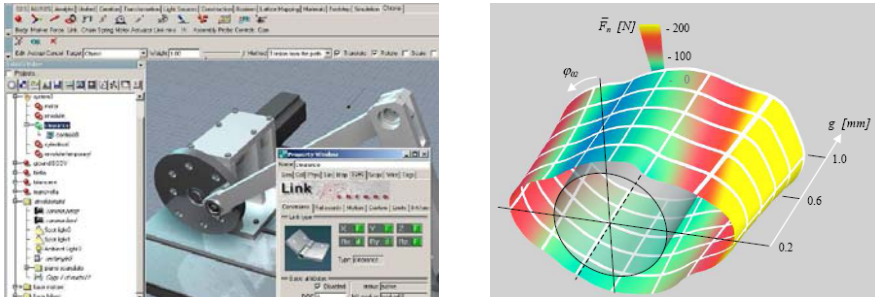


Figura 7. Il software di simulazione sviluppato presso il Dipartimento per lo studio dell'effetto dei giochi



Figura 8. Simulazione multibody di meccanismi

Sulla scorta di tali risultati si è poi pensato di perfezionare il programma di simulazione in modo da consentire la previsione dell'andamento dell'usura delle superfici in contatto, diverso da punto a punto poiché i fenomeni d'urto e di scorrimento sono localizzati in zone preferenziali. A tal fine si è implementata una procedura di calcolo che simula vari cicli di funzionamento, a regime, del meccanismo in esame: essa contemporaneamente valuta l'effetto cumulativo del lavoro d'attrito delle forze di contatto in un numero discreto di settori delle superfici (Fig. 7)

I grafici con le previsioni numeriche dell'usura sono stati confrontati con numerose misure sperimentali, valutando l'asportazione di materiale dalle superfici in vari punti, utilizzando sia un micrometro sia un rugosimetro tridimensionale [10].

3. SIMULAZIONE MULTIBODY

I meccanismi composti da corpi rigidi che interagiscono attraverso contatti tra le superfici sono largamente utilizzati nella pratica meccanica, sia nel caso in cui il numero dei contatti monolateri è ridotto (meccanismi camma-cedente, croci di Malta), sia quando la stessa quantità è nell'ordine delle migliaia (pallettizzatori, alimentatori vibranti, selezionatori, trasmissioni a variazione continua del rapporto).

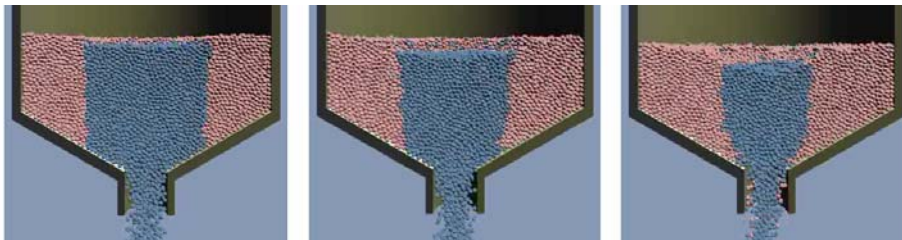


Figura 9. Tre frames successivi della simulazione di un reattore PBR.

Lo studio analitico di questi fenomeni, al crescere della complessità dei meccanismi, si rivela praticamente irrealizzabile, mentre l'analisi dinamica di sistemi multibody, richiede la soluzione delle accelerazioni incognite ad istanti discreti di tempo. Nell'ipotesi in cui tutti i vincoli siano bilateri, come accade ad esempio in caso di coppie rotoidali e prismatiche, è risaputo che il calcolo delle accelerazioni incognite implica la soluzione di un sistema lineare: tale procedimento può avvalersi di procedure note e collaudate quali il metodo di Gauss o la decomposizione di Bunch-Kaufman.

Non altrettanto semplice è il calcolo delle accelerazioni qualora siano presenti vincoli unilateri: le disequazioni corrispondenti ai vincoli unilateri implicano la soluzione, ripetuta migliaia di volte nel corso dell'integrazione numerica, di un problema di complementarità lineare misto (MLCP). Quest'ultimo, possedendo una complessità di classe NP-hard, comporta gravi conseguenze in termini di scarsa efficienza computazionale quando i vincoli unilateri sono numerosi. Per tale ragione, in generale, i codici multibody disponibili in commercio non sono ancora in grado di trattare efficacemente problemi con centinaia o migliaia di vincoli unilateri. Alla luce di queste considerazioni si è imposta la necessità di sviluppare metodi efficienti per la soluzione del problema MLCP associato ai sistemi multibody unilateri.

In particolare si è sviluppata una variante del metodo del simplesso di Dantzig in grado di sfruttare la sparsità delle matrici di massa e delle matrici jacobiane dei sistemi multibody, al fine di poter calcolare le accelerazioni incognite con iterazioni di complessità al più $O(n)$, in luogo della complessità $O(n^3)$ solitamente richiesta nelle iterazioni del metodo originale. Inoltre, grazie ad una decomposizione incrementale della matrice delle basi, si ottiene un ulteriore abbattimento del tempo di calcolo anche in presenza di centinaia di vincoli unilateri.

Il metodo proposto comporta che le matrici vengano memorizzate con un particolare metodo orientato alla massima efficienza computazionale ed alla minore occupazione di memoria. È stato ideato un particolare tipo di decomposizione incrementale, che non altera la simmetria della matrice di stato ogni volta che si aggiorna una base, e che in tal modo ne preserva la sparsità. Il nuovo algoritmo è stato implementato nel software di simulazione multibody CHRONO (Fig. 8), con il quale sono state svolti test che ne dimostrano le doti di efficienza (ovvero elevata velocità di calcolo) e di robustezza, mostrandosi in grado di fornire risultati attendibili anche in presenza di problemi mal condizionati o patologici.

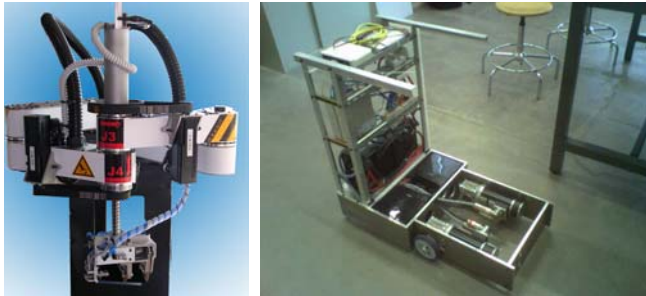


Figura 10. Prototipi di robot parallelo e di veicolo AGV.

I più recenti sviluppi di queste tecniche sono stati finalizzati alla realizzazione, in collaborazione con Argonne National Laboratories [11], di un simulatore per lo studio del meccanismo di *refueling* di un reattore nucleare PBR (Fig. 9). Il problema risulta di particolare complessità per l'elevato numero di reazioni vincolari con contatto monolatero (500.000).

La soluzione adottata è basata su una iterazione a punto fisso proiettata su un insieme convesso, mediante la quale è possibile risolvere direttamente problemi di complementarità su larga scala con un ridotto sovraccarico computazionale. Il metodo è basato su una formulazione a passi finiti che, per ogni passo, risolve un problema CCP (*cone complementarity problem*) che risulta dalla condizione di ottimalità del problema di ottimizzazione del cono vincolato.

È interessante notare che la stessa formulazione è stata recentemente utilizzata per un modello di contatto con attrito quasi statico [12], anch'esso esprimibile mediante un CCP. In sistemi che utilizzino solo vincoli bilateri, tale metodo si riduce a un metodo stazionario di Gauss-Seidel o Gauss-Jacobi con successivo sovrarilassamento [13].

Il metodo è stato implementato nella libreria HyperOctant library del software multibody Chrono::Engine.

4. AUTOMAZIONE

Automazione flessibile

Una delle tendenze principali nel campo dell'automazione negli ultimi decenni è stata quella di incrementare la flessibilità dei sistemi di produzione per mantenere produzioni competitive per famiglie abbastanza ampie di prodotti. Questo risultato è reso possibile dall'adozione di macchine automatiche che prevedono, accanto a stazioni di lavoro specializzate, elementi configurabili ed elementi ridondanti che permettono di far fronte ad oscillazioni della domanda o ad eventuali guasti. In pratica, tale flessibilità è stata resa possibile dalla massiccia introduzione di tecnologie microelettroniche ed informatiche nei sistemi di gestione, pianificazione, fabbricazione, assemblaggio, trasporto e immagazzinamento.

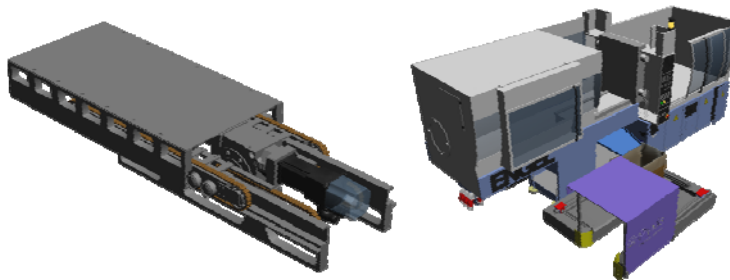


Figura 11. Prototipi per una fabbrica automatica: carrello del magazzino automatico e stazione di caricamento



Figura 12. Studenti in visita agli stabilimenti Boehringer di Bracknell e GlaxoSmithkline di Dartford (UK).

Tra questi, almeno gli ultimi quattro sottosistemi coinvolgono in maniera preponderante le applicazioni proprie della meccanica applicata: si pensi ad esempio alle macchine a controllo numerico, ai magazzini automatici, ed ai dispositivi per cambio utensile e cambio pezzo.

L'attività di ricerca svolta in questo settore, prevalentemente in collaborazione con aziende, è stata rivolta alla progettazione di soluzioni originali per stazioni di lavoro flessibili, anche realizzate mediante cinematiche parallele [14], veicoli AGV (Fig. 10) e magazzini automatici (Fig. 11).

Automazione per l'industria alimentare e farmaceutica

Accanto al corso di Meccatronica, sono attivi a Parma un corso di Meccanica delle Macchine Automatiche e un corso di Meccanica per il Confezionamento dedicati a soluzioni di meccanica funzionale di tipo avanzato e all'analisi di macchine automatiche con particolare riferimento ai settori del confezionamento alimentare e farmaceutico. Durante alcuni anni accademici, inoltre, è stato possibile proporre un corso postlaurea specificamente dedicato alle *Good Automated Manufacturing Practices*, che guidano la progettazione e l'utilizzo delle macchine automatiche nei campi regolati dalla *Food and Drug Administration*. In Fig. 12 sono

mostrati due momenti delle visite degli studenti dell'A.A. 2006/07 agli stabilimenti Bohering di Bracknell e GlaxoSmithKline di Dartford, in Inghilterra.

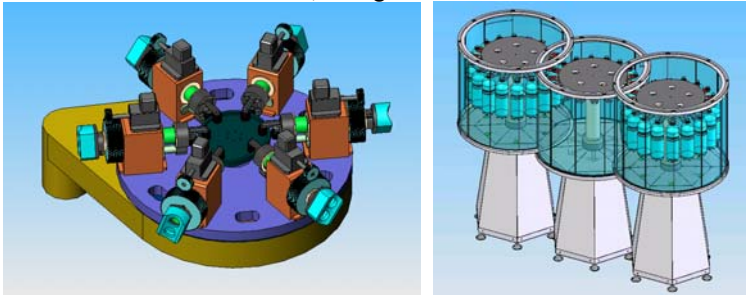


Figura 13. Prototipi di stazione ribaltamento bottiglie e di basamento modulare per riempitrici, sviluppati in collaborazione con Lanfranchi S.p.A. e Sidel.

Anche grazie a queste esperienze e ai contatti internazionali avviati, è allo studio la realizzazione di una officina farmaceutica all'interno del Parco Scientifico e Tecnologico dell'Università di Parma. Tale struttura, oltre ad interessare il Dipartimento di Farmacia e ad avere importanti finalità sociali, come la produzione degli *orphan drug* (i farmaci per malattie rare la cui produzione è abbandonata per ragioni economiche), permetterà agli studenti di ingegneria di svolgere tirocinii ed esercitazioni.

L'attività di ricerca in questo ambito è stata prevalentemente orientata allo studio di nuove soluzioni per le macchine imbottigliatrici (Fig. 13), all'ingegnerizzazione di nuovi procedimenti di sterilizzazione per il riempimento asettico e alla migrazione delle GAMP dall'industria farmaceutica a quella alimentare.

5. MOTION CONTROL

La tradizionale progettazione funzionale dei meccanismi è uno fra i capitoli della meccanica applicata che più hanno risentito dell'introduzione di dispositivi elettronici. Il tema del controllo del moto è diventato sempre di più un complesso campo multidisciplinare, per il quale occorre tenere conto sia delle caratteristiche del motore e dell'azionamento elettrico, che di quelle della trasmissione (in particolare, dei giochi, dell'attrito all'inversione e dell'elasticità delle parti meccaniche). Tutti questi elementi hanno grande influenza sulla prestazione complessiva del sistema, in particolare per quanto riguarda le velocità e le precisioni, e devono essere integrate nella tradizionale progettazione dei meccanismi per la generazione di moto vario, quali i meccanismi camma-cedente e i meccanismi articolati.

L'attività didattica dà notevole spazio a questi problemi: nel corso di Meccanica degli Azionamenti, nel quale gli studenti imparano a scegliere e dimensionare correttamente gli attuatori non solo in considerazione dei parametri fondamentali (coppia, potenza), ma anche delle traiettorie e delle precisioni richieste e del tipo di trasmissioni adottate. Successivamente, il corso di Meccatronica approfondisce gli aspetti legati all'architettura hardware, alla scelta dei sensori e alla programmazione dei PLC.

Sintesi di leggi di moto

Nella pratica industriale, le tecniche di progettazione delle leggi di movimento per meccanismi a camma e per azionamenti servoassistiti hanno raggiunto ottimi livelli di automazione. È infatti disponibile una varietà di software dedicati per far corrispondere ad un set di specifiche funzionali (quali condizioni imposte sulla velocità, sull'accelerazione, sull'alzata o sul jerk) la legge di moto più efficace. Il risultato è normalmente raggiunto con un sapiente uso dei parametri disponibili sui quali si può operare secondo schemi di ragionamento consolidati. Un problema può sorgere quando il tipo di specifiche di progetto non rientra nel novero di quelle codicate dal programma applicativo che si sta utilizzando; in tale caso si passa dalla *progettazione automatica* alla progettazione manuale della legge di moto.

Una risposta a questo problema si è cercata nella definizione di un linguaggio di programmazione che fosse uno strumento flessibile per la descrizione della legge di moto desiderata [15]. Tale linguaggio potrebbe quindi diventare un valido supporto alla creazione e alla manutenzione di strumenti per la progettazione di leggi di azionamento in macchine automatiche, consistenti in programmi che permettono la sintesi di azionamenti a camma, pneumatici e idraulici, di azionamenti tramite sistemi articolati, ecc.

Fatte queste precisazioni, bisogna premettere che il progetto di una legge di movimento può avere natura estremamente varia. Si può, per esempio, partire dalla necessità di compiere una determinata corsa in un certo intervallo di tempo. È classico, nel progetto delle camme, il dover rispettare una serie di *punti di precisione* ove il cedente dovrà transitare in successivi istanti di tempo. La scelta tra le infinite tipologie di legge di moto, che potenzialmente soddisfano i punti di precisione in identico modo, privilegerà quelle i cui effetti dinamici siano più contenuti o meno dannosi: leggi con accelerazione finita, con jerk finito, con basso coefficiente di velocità o con ridotto contenuto armonico saranno le candidate più probabili.

In letteratura si trovano numerosi esempi di buon progetto per leggi di moto. Il progettista che si accinge a progettare manualmente una legge di moto, sceglie, per esempio, una tipologia di funzione per la legge di accelerazione che rispetti alcuni vincoli sul jerk, oppure parte direttamente da quest'ultimo per ottenere la legge di accelerazione da integrare più volte, sistema le relazioni di congruenza nei raccordi tra i diversi tratti e, rispettando gli altri vincoli imposti, ottiene il diagramma delle alzate voluto.

In un'ottica di progetto assistito della legge di moto, bisogna stabilire qual è il ventaglio di possibilità offerto al progettista dal software: in altre parole quali tipi di legge di movimento, quante possibilità di raccordo, quali iniziative (automatiche o semi automatiche) il programma può intraprendere allo scopo di migliorare la legge ottenuta.

Questa scelta, da effettuarsi a priori, si scontra con l'osservazione che, al variare dell'ambito progettuale, si nota un panorama disomogeneo riguardo alla modalità di descrizione delle funzioni che compongono i singoli tratti della legge. Per fare un esempio, mentre nella progettazione di macchine automatiche è invalso l'uso di leggi rappresentabili in termini analitici quali polinomiali, cicloidali, leggi a tratti rettilinee e tratti sinusoidali, nella progettazione di camme automobilistiche è molto diffusa la pratica del tracciamento del diagramma delle alzate tramite una serie di punti di precisione da rispettare.

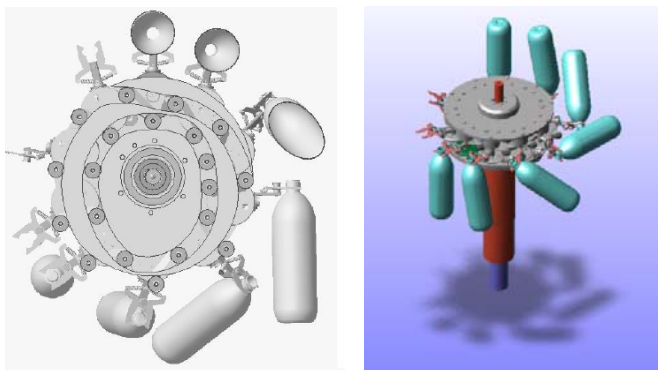


Figura 14. Un esempio di applicazione del linguaggio CamOMiLe.

Queste esigenze, conciliabili con semplicità sul piano teorico, hanno condotto negli anni alla creazione di strumenti automatici per con approcci pratici del tutto diversi e, di conseguenza, con diverse modalità di l'elaborazione delle leggi: nel primo si tratta di sistemare le condizioni di raccordo e le specifiche funzionali per leggi di cui si conoscono, sempre per via analitica, le varie derivate e i vari integrali, nell'altro caso le stesse operazioni devono essere eseguite sui punti a disposizione, esclusivamente per via numerica.

Tentando di riunire i due modi di procedere ora esposti, occorre rinunciare alla rappresentabilità analitica dell'intera legge e assumere che tutte le leggi di moto siano descritte solo da sequenze di punti. In questo modo si ottengono numerosi vantaggi per la compatibilità con altre applicazioni e strumentazioni, ma soprattutto ci si assicura che tutte le elaborazioni siano svolte in modo omogeneo e tutti i comandi abbiano applicabilità generale.

Le difficoltà da superare consistono principalmente nell'esecuzione di numerose operazioni di derivazione e di integrazione, che devono poter essere eseguite in cascata con un elevato numero di iterazioni, invertibili, generalizzate a funzioni discontinue e soprattutto, realizzate con un algoritmo robusto, intendendo con questo il fatto che nel caso di utilizzo in situazioni estreme i risultati, pur essendo affetti da un certo errore percentuale, non devono degenerare in comportamenti caotici. Per soddisfare queste condizioni, si è dovuto scegliere opportunamente il metodo di integrazione e, a partire da questo, sviluppare un originale metodo di derivazione numerica.

Il linguaggio elaborato, chiamato CamOMiLe, si è dimostrato uno strumento potente e flessibile per la progettazione in situazioni non standard. La Fig. 14 mostra un esempio di applicazione particolarmente complessa che richiede il soddisfacimento di numerosi vincoli di posizione e di velocità per assicurare il sincronismo dei movimenti. Inoltre, l'architettura facilmente espandibile dell'applicazione ha permesso di continuare a sviluppare nuove tipologie di comandi, tra i quali una libreria per il calcolo del contenuto armonico delle leggi [16], un set di funzioni dedicate alla progettazione di camme autoconjugate [17] e un solutore genetico.

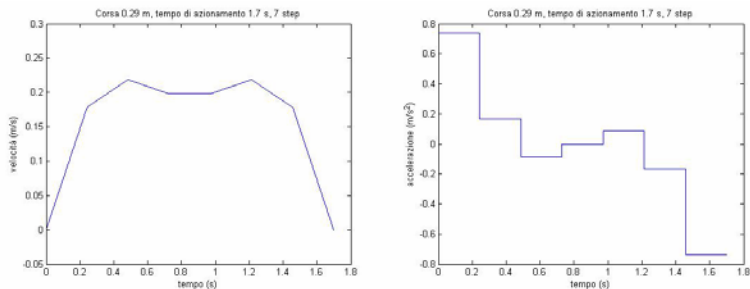


Figura 15. Un esempio delle leggi di moto per vibrazioni residue ridotte.



Figura 16. Banchi di prova per lo studio di leggi di moto con attuatori elettrici e pneumatici.

Gli sviluppi più recenti sono rivolti all'introduzione di traiettorie interpolate per macchine che utilizzano più assi elettrici e all'implementazione di comandi per la gestione di azionamenti ibridi.

Riduzione delle vibrazioni residue

Si può osservare, tra le tendenze più recenti dell'automazione industriale, la continua diffusione di sistemi meccanici leggeri e flessibili, motivata dai vantaggi energetici e dalla migliore trasportabilità. A questa corrisponde una crescente difficoltà nella realizzazione di sistemi di controllo che, pur in presenza di componenti deformabili, garantiscano i livelli di precisione richiesti nella generazione di traiettorie o nel posizionamento esatto di un end-effector. Inoltre, una volta che la posizione finale è stata raggiunta, la vibrazione residua può comprometterne la precisione e introdurre ritardi nell'esecuzione delle operazioni.

L'attività di ricerca condotta a Parma è stata rivolta al controllo cinematico e dinamico del moto point-to-point di un sistema flessibile. Il controllo è basato sull'impiego di speciali leggi di moto (Fig. 15) con una tecnica in catena aperta e rientra quindi nella vasta famiglia delle leggi di moto *pre-shaping*, che costituisce, accanto ai controllori retroazionati, uno dei due possibili approcci per conseguire il risultato desiderato. A differenza di quest'ultimo, però, non richiede la conoscenza istantanea dei parametri effettivi del sistema, ma necessita, invece, di una precisa modellazione del sistema stesso per conseguire il risultato richiesto.

Risulta quindi più semplice ed economico, poiché non prevede l'uso di sensori per la misura delle vibrazioni e di controlli in tempo reale. Inoltre, la flessibilità dei moderni azionamenti per motori consente di realizzare agevolmente leggi di moto di forma anche complessa, rendendo l'approccio particolarmente indicato per applicazioni industriali. In alcuni casi (alte velocità in gioco, conoscenza approssimativa del sistema, presenza di non linearità) si può efficacemente utilizzare una combinazione dei due metodi.

Il metodo è stato testato su sistemi a parametri concentrati (pendoli semplici, doppi e tripli), come quelli riportati in Fig. 16 e a parametri distribuiti (aste flessibili), utilizzando sia attuatori elettrici che pneumatici. Sono stati inoltre introdotti algoritmi che ne rafforzano la robustezza del controllo in presenza di errori o semplificazioni nel modello adottato [18].

6. CONCLUSIONI

Negli ultimi anni, la riflessione sui contenuti della didattica legata alle riforme degli ordinamenti, la volontà e la necessità di legare la ricerca alle esigenze dell'industria, il coinvolgimento, attraverso rapporti internazionali, dei temi della produzione e del risparmio dell'energia, della sostenibilità e della automazione avanzata hanno stimolato un percorso di attività piuttosto articolato. Riassumendolo, è inevitabile domandarsi se questi approfondimenti sono tra loro frammentari o se esista una sintesi che ne riassume l'orizzonte culturale.

Certamente produrre qualche risultato degno di nota impone la specializzazione e l'analisi di dettaglio, senza cui non si potrebbe mai entrare realmente nel merito della disciplina, mentre diffondersi superficialmente su tutti gli argomenti e le applicazioni che la meccanica applicata abbraccia sarebbe solo velleitario.

Eppure, se lo sforzo dell'approfondimento non avesse una ambizione autenticamente culturale, se non fosse, cioè, teso a cogliere l'intero orizzonte della materia con una consapevolezza critica e sistematica, esso avrebbe un valore effimero, destinato a scomparire non appena nuove tecnologie, materiali migliori, calcolatori di nuova generazione modificano un po' il contesto.

Sembra significativo concludere ricordando che una sintesi culturale può essere raggiunta non solo perché, astrattamente, si ricorda che nel particolare è possibile ritrovare l'universale, ma anche perché, concretamente, nel lavoro del collega è possibile scoprire una convergenza con il proprio, quando non si perdano uno spirito, un desiderio e un linguaggio comuni.

REFERENCES

- [1] Guitton, J., 1987. Il lavoro intellettuale, Ed. Paoline s.r.l., Cinisello Balsamo (MI), Italia.
- [2] Coulomb, C. A., 1779. *Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*, Bachelier Libraire, Quai des Augustins, Paris.
- [3] Amabili M. et al., 2000. "Leakage of Radial Lip Seals at Large Dynamic Eccentricities". In Proceedings of 16th International Conference on Fluid Sealing, BHR, September 18-20, Brugge, Belgium, pp. 321-333.

- [4] Jagger E. T., 1957. "Study of the Lubrication of Synthetic Rubber Rotary Shaft Seals" In Proceedings of the Conference on Lubrication and Wear, I.Mech.E., pp. 409-415.
- [5] Silvestri, M., Prati, E., Tasora, A., 2005. "Analisi Quantitativa di Sperimentazioni su Anelli Radiali: Caratteristiche del Distacco al Variare dei Polimeri" In XV AIMETA, Firenze, 11-15 Settembre, su CDROM.
- [6] Silvestri, M., Prati, E., and Tasora, A., 2005. "Numerical and experimental study of dynamic elastomeric seals behaviour under actively controlled temperature conditions." In Proceedings of 18th International Conference on Fluid Sealing, Antwerp, Belgium.
- [7] S.Dubowsky, F.Freudenstein, 1971. "Dynamic analysis of mechanical systems with clearances, Part I: Formation of a dynamic model; Part II: Dynamic response", *Trans.ASME J.Eng.Ind* 93B, 305-316.
- [8] Tasora, A., Prati, E., Silvestri, M., 2003. "Implementazione di un modello per contatto intermittente nelle coppie rotoidali con gioco". In XVI AIMETA, Ferrara, 9-12 settembre, su CD-ROM.
- [9] Tasora, A., Prati, E., Silvestri, M., 2004, "Experimental Investigation of Clearance Effects in a Revolute Joint". In IV Aimeta International Tribology Conference Proceedings, Rome, Italy, September 14-17, ISBN 88-7999-831-5, pp. 235-242
- [10] Tasora, A., Prati, E., Silvestri, M., 2006, "A Compliant Measuring System for Revolute Joints with Clearance". In V AITC-AIT International Tribology Conference Proceedings, Parma, Italy, September 20-22. ISBN 88-902333-0-3, on CDROM
- [11] Anitescu, M., Tasora, A., 2007, "An iterative approach for cone complementarity problems for nonsmooth multibody dynamics", Argonne National Laboratories Report ANL/MCS-P1413-0507, Argonne, USA. Optimization Online, June.
- [12] Pang, J., Kumar, V., and Trinkle, J., 2007, "On a continuous-time quasistatic frictional contact model with local compliance, International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- [13] Murty, K. G., 1988, "Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming, Helderman Verlag, Berlin.
- [14] Tasora, A., Silvestri, M., 2005, "End-Effector for Fast Wire Cutting and Crimping on a 4-DOF Parallel Robot", *IADAT Journal of Advanced Technology on Automation, Control and Instrumentation*, September, ISSN 1698-1073.
- [15] Cuccio, A., Garziera, R., Mauro, S., Silvestri, M., Righettini, P., Riva, R., 1999, "Un linguaggio generale per la descrizione di leggi di moto", In XIV AIMETA, Como, ottobre, su CD-ROM.
- [16] Silvestri, M., Garziera, R., 2004, "A general-purpose tool for harmonic content reduction of preshaped motion laws". In Proceedings of 13th International workshop on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region, Brno, Czech Republic, June 1-6, ISBN 80-7204-341-2 pp. 431-436
- [17] Silvestri, M., Garziera, R., 2007, "Automatic Design of Motion Laws for Self-Conjugate Cams". In XVIII Congresso AIMETA di Meccanica Teorica e Applicata, Brescia, 11-14 Settembre, ISBN 978-88-89720-69-1, su CDROM.
- [18] Garziera R., Manconi E., Silvestri M., 2006, "Input Laws for Dynamic Control: Theory, Experiments and Robustness". In Proceedings of the 2006 SEM Annual Conference and Exposition on Experimental and Applied Mechanics, June, 4-7, 2006, Saint Louis, Missouri USA ISBN 0-912053-95-X

HIGHER ORDER SPECTRAL ANALYSIS: A TOOL FOR FAULT MONITORING AND DIAGNOSTICS

Alessandro Rivola

Department of Mechanical and Aeronautical Engineering,

University of Bologna, Italy

E-mail: alessandro.rivola@unibo.it

Abstract. *This paper concerns the application of signal processing techniques based on the Higher Order Spectra (HOS) to the condition monitoring of mechanical systems. These techniques give more information than the linear spectral analysis and are particularly useful in situations where only a single measurement sensor is available. A simple model is presented and analysed with the aim of showing the effectiveness of the so called “polyspectra” in detecting different kinds of system non-linearities. The HOS analysis is used to interpret the signal structure and the system’s physical characteristics. Particular effort is made in order to give an interpretation of the structure of the HOS estimators. The results show that both the third and the fourth order spectra seem to provide a possibility of using HOS analysis as a tool for the condition monitoring and diagnostics of mechanical systems.*

Keywords: *mechanical vibrations, signal processing, condition monitoring, diagnostics*

1. INTRODUCTION

In the field of machine condition monitoring one of the more established techniques is the vibration analysis, which often produces satisfactory results. In fact, a link exists between the mechanical vibrations and the health condition of the machinery, and vibration transducers can be easily attached to machines so as to make the measurements quick and efficient [1]. In addition, different mechanical phenomena (e.g. unbalance, misalignment, gear meshing and faults, bearing faults, impacts, etc.) produce energy at different frequencies. Therefore, diagnostic information can also be achieved by applying a proper signal processing technique

Faulted machineries can be often classified as non-linear systems; in fact, many machine faults are associated with non-linear phenomena that make the faulted mechanical system non-linear (e.g. rotor with a breathing crack, impact in kinematic pairs, abrupt force variation related to unwanted dry friction, gear tooth impact due to large backlash, etc...). From this point of view, machine faults lead to non-linearities in the machine vibration signature too.

This paper deals with the application of the Higher Order Spectra (HOS) for the detection of non-linearities in mechanical systems. The HOS analysis is an area of signal processing which has a wide variety of practical applications and that has been recently applied to the study of mechanical systems; in particular, HOS have been applied in diverse fields e.g. vibration analysis, underwater acoustics, speech processing, chaos and condition monitoring

[2–9]. The HOS are the natural extension of the ordinary linear spectral analysis. In particular, the HOS can be viewed as the frequency domain equivalent of higher order statistical moments [10]. Therefore, they are used to explore statistical relationships between several spectral components and they are of great importance in the analysis of non-linear vibrations where the generation and interactions of non-linear resonance modes are of major concern. In such cases, HOS are needed to investigate and characterise the non-linear phenomena. An additional feature of HOS is that their computation can be performed from a single signal measurement.

2. THEORETICAL BACKGROUND

The Higher Order Statistics

Given a real valued signal $x(t)$, its N^{th} statistic moment, denoted μ_N , is defined as:

$$\mu_N = E[x^N(t)], \tag{1}$$

where $E[\]$ denotes the expectation operator [10]. The first moment (simply denoted as μ) is the mean of the signal. For the second and higher moments, it is often convenient to calculate moments about the mean so as to obtain the statistic central moments; the N^{th} central moment is given by:

$$\mu_N^c = E[(x(t) - \mu)^N]. \tag{2}$$

The second central moment, which measures the dispersion of the data about the mean, is called variance and is usually denoted as σ^2 . In the case of a Gaussian process – i.e. a stationary signal with a Gaussian probability density function (PDF) [Fig. 1(a)] – the first and second order statistics completely describe the properties of the signal [10].

By extending to the higher order, the third central moment, μ_3^c , measures the asymmetry of the process PDF [Fig. 1(b)]; it is often normalised as $\gamma_1 = \mu_3^c / \sigma^3$ and the normalised version is called “skewness”. For a symmetric PDF distribution (as in the case of a Gaussian process) the skewness is zero.

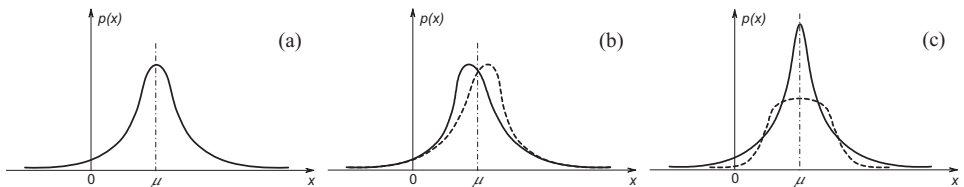


Figure 1. (a) Gaussian PDF; (b) Skewed PDF: $\gamma_1 < 0$ (solid), $\gamma_1 > 0$ (dotted); (c) Leptokurtic and Platykurtic PDFs: $\gamma_2 > 3$ (solid), $\gamma_2 < 3$ (dotted).

The fourth central moment, μ^c_4 , is related to the degree of flatness of the PDF distribution near its centre [Fig. 1(c)]. The normalised version of μ^c_4 is termed “kurtosis” and it is defined as $\gamma_2 = \mu^c_4 / \sigma^4$. The kurtosis value for a Gaussian process is three [10]. “Leptokurtic” and “Platykurtic” are the terms used to describe the PDF of a process with a kurtosis greater and lower than three, respectively.

It may be concluded that if a signal is non-Gaussian then higher order moments are needed to completely describe its properties. Therefore, higher order measures, such as skewness (third order) and kurtosis (fourth order), may provide details about the signal which are unavailable by using only the conventional second order statistics.

The Higher Order Spectra: definitions and properties

For a discrete time series $x(n)$ representing a stationary random process, the power spectrum (i.e. the auto-spectrum), $S_{xx}(f)$, can be defined as [10]:

$$S_{xx}(f) = E[X(f) X^*(f)], \tag{3}$$

where $X(f)$ is the Discrete Fourier Transform (DFT) of $x(n)$, f is the discrete frequency variable, and the symbol $*$ denotes the complex conjugate. The power spectrum can be considered as the decomposition over frequency of the signal power, i.e. of the signal’s second moment. It belongs to the functions of the conventional linear spectral analysis (i.e. the cross-spectrum, the frequency response function, the ordinary coherence function), which uses the lowest order spectra. As such, the linear spectral analysis is able to investigate the statistical relationship between two spectral components only. The power spectrum is therefore of limited value in studying the behaviour of non-linear systems where the generation and interactions of non-linear resonance modes are of major concern [6, 7, 9].

The extension of the linear spectral analysis to higher order is the HOS analysis which deals with the so called polyspectra, that are the spectra of order greater than two. The polyspectrum of order N of a discrete time series $x(n)$ is defined by the DFT as [8]:

$$S_{\frac{x \dots x}{N}}(f_1, \dots, f_{N-1}) = E[X(f_1) \dots X(f_{N-1}) X^*(f_1 + \dots + f_{N-1})]. \tag{4}$$

The power spectrum is obviously the polyspectrum of order two. Equation (4) shows that the polyspectrum of order N is a function of $N-1$ independent frequencies and investigates the statistical relationship between N spectral components; in other words, it is able to measure the extent of joint statistical dependency of various combinations of N spectral components and their statistical degree. As an example, the third-order spectrum (named as “bispectrum”), is of great importance in the study of those non-linear vibrations where the generation of combinational resonance modes or quadratic mode couplings are in question [2, 7].

The techniques used for estimating HOS are similar to those used in power spectral estimation. Herein the direct method is employed, for which the signal time-history is divided

into M segments, an appropriate window is applied to each segment to reduce leakage, the quantity in Eqn. (4) is computed for each segment by using the DFT and, finally, it is averaged across segments in order to reduce the variance of the estimator [8]. The main disadvantage in computing the HOS is the data length needed in order to ensure statistical confidence. In [12] the authors state that the segment size should be the $(N-1)^{\text{th}}$ root of the total length of the data when handling the N -order spectrum. As an example, this means that for the computation of the trispectrum by using a DFT size of 64, the data length should be $64^3=262144$, causing problems due to the fact that the data should be stationary over the measurement period.

In this paper only the polyspectra of order three and four will be employed. Thus, hereinafter, their characteristics and properties will be mainly discussed.

Because of several symmetries, for a discrete time process with no aliasing, it can be shown that it is necessary to compute the polyspectrum only over a limited polyfrequency region, which is known as the polyspectrum “principal domain”. In particular, the bispectrum principal domain is given by:

$$\{f_1, f_2\}: 0 \leq f_1 \leq f_s/2, \quad 0 \leq f_2 \leq f_1, \quad 2f_1 + f_2 \leq f_s, \quad (5)$$

where f_s is the sampling frequency [8, 11]. Similarly, the trispectrum (i.e. the fourth-order spectrum) has 96 regions of symmetry and its principal domain partially fills the positive octant ($f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, f_3 \geq 0$) and the fifth octant ($f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, f_3 \leq 0$) of the trifrequency space [8, 11].

The variance of the polyspectrum estimate of a signal obtained by means of the direct method can be shown to be heavily dependent on the signal power spectrum as well as on the number of averaged segments. In order to remove the effect of the second-order properties of the signal, which can result in a misleading interpretation of the polyspectrum, normalisation techniques can be adopted [2, 8]. One method of normalising the bispectrum employs the bicoherence which is defined by [2] as:

$$b^2(f_1, f_2) = \frac{|S_{xxx}(f_1, f_2)|^2}{E\left[|X(f_1) X(f_2)|^2\right] E\left[|X(f_1 + f_2)|^2\right]}. \quad (6)$$

The bicoherence is bounded between 0 and 1 and quantitatively measures the fraction of the power of the signal due to the quadratic interaction between frequency components [8]. The bicoherence can be extended to the fourth-order case to form the tricoherence (that is also bounded between 0 and 1), which is defined as [8]:

$$t^2(f_1, f_2, f_3) = \frac{|S_{xxxx}(f_1, f_2, f_3)|^2}{E\left[|X(f_1) X(f_2) X(f_3)|^2\right] E\left[|X(f_1 + f_2 + f_3)|^2\right]}. \quad (7)$$

In the case of the computation of the bicoherence and tricoherence for a bandlimited signal,

there are some problems due to small values occurring in the denominator of the estimator, which produce spurious effects. These effects can be reduced by adding a small constant to the denominator prior to calculating the bicoherence and the tricoherence. In addition, some problems due to spectral bias errors can occur in estimating the trispectrum of a narrowband signal. In [8] the authors suggest applying a pre-whitening technique in order to cope with large bias errors. The trispectrum of such a signal has spectral effects which have been removed and so it is not necessary to normalise it to form the tricoherence. However, in order to obtain the advantage of the tricoherence being a bounded measure, it is still possible to compute the tricoherence of a pre-whitened signal.

The N -order polyspectrum can be viewed as the decomposition of the N^{th} statistical moment of a signal over frequency [7–9]. From this point of view, the bispectrum and the bicoherence are related to the skewness of a signal and as such they can detect asymmetric non-linearities. Analogously, the trispectrum and the tricoherence are sensitive to the symmetric non-linearities of a signal due to their relationship with the signal kurtosis. In particular, in the case of a Gaussian signal, the bicoherence and the tricoherence will take zero-value over the whole polyfrequency domain.

It is noteworthy that the bicoherence and tricoherence functions are just the results of the normalisation for the polyspectra. In this sense, they should not be confused with the standard second-order coherence function. The second-order coherence function is also employed to detect deviations from linearity of a system, but its computation requires two measurement sensors; on the contrary, the functions defined by Eqns. (6) and (7) can be computed from a single signal.

3. NON-LINEARITY SIMULATION AND ANALYSIS

By considering a system with a Gaussian input, if the system is linear the output will have Gaussian PDF. On the contrary, a non-linear system will lead to an output which is not Gaussian and as such it cannot be described by either second order statistics or linear spectral analysis.

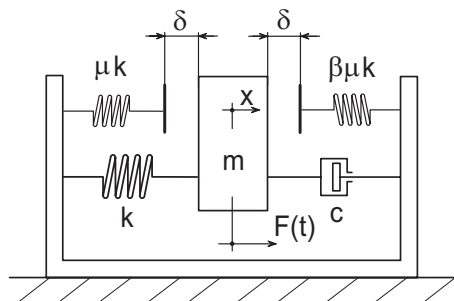


Figure 2. The 1-DOF model.

In order to simulate the behaviour of a non-linear system that, fed on Gaussian input, generates an output signal having skewed or symmetric PDF, a simple analytical single degree of freedom (1-DOF) system can be used [7]. The schematic of the model is shown in Fig. 2: it is a forced oscillator with a pair of elastic stops with clearance δ , where m is the mass, k is the stiffness coefficient, and c is the viscous damping coefficient. The equation of motion of the system is expressed as:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx + h(x) = F(t), \quad (8)$$

where $h(x)$ is a non-linear function of the mass displacement given by:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & -\delta \leq x \leq \delta \\ \beta \mu k(x - \delta), & x > \delta \\ \mu k(x + \delta), & x < -\delta \end{cases} \quad (9)$$

The constant μ and the product $\beta\mu$ (with $0 \leq \beta \leq 1$) are the ratio of the stiffness of an elastic stop to the stiffness coefficient k ; obviously, when the stiffness ratios have the same value (i.e. $\beta=1$) and the clearance δ is zero, the system is linear, it has a linear stiffness $k(1+\mu)$ and its radian frequency is $\omega = \sqrt{k(1+\mu)/m}$.

In the case of the linear system, the results reported in this paper are relative to the following parameters: $m = 1$ kg, $c = 2.75$ Ns/m, $k = 5 \cdot 10^3$ N/m, $\mu = 9$, which give a linear radian frequency of the model equal to 223.6 rad/s (35.6 Hz). The employed excitation $F(t)$ is a random signal with Gaussian PDF.

By changing the parameters μ , β , and δ , the 1-DOF model can simulate several kinds of non-linearities: when $\delta=0$ and $\beta \neq 1$, no backlash is present, the spring restoring force is a bi-linear function of the displacement x , and the system develops into a non-linear one with an asymmetric non-linearity (the restoring force is asymmetric with respect to the null position of the mass); conversely, if $\delta \neq 0$ and $\beta=1$ the backlash occurrence makes the system as non-linear, both the model backlash and the restoring force are symmetric, then the system output will have symmetric PDF.

The simulations were carried out by numerically integrating the Eqn. (8); the simulated data consisted of 32768 samples of the mass acceleration (the sampling frequency was 300Hz). The case of asymmetric non-linearity (with $\delta=0$) has been simulated for three different values of the coefficient β : $\beta=1$, 0.9, and 0.8; whereas the case with the backlash and $\beta=1$, that leads to symmetric non-linearity, has been simulated by increasing the parameter δ from 0.0 to 0.6 ($\delta=0$, 0.02, 0.04, 0.1, and 0.6).

After the simulations, for each case the PDF of the mass acceleration was computed, together with the corresponding normalised higher order moments γ_1 and γ_2 (i.e. the skewness and the kurtosis); then, the power spectrum of the acceleration signal was obtained by using a DFT size of 512. Finally, both the bicoherence and tricoherence were estimated: the

bicoherence was computed with a DFT size of 128, whereas the tricoherence was evaluated with a DFT size of 32 after the application of the pre-whitening technique performed using a spectral estimate based on 512 points.

Table 1. Results of the higher order statistic analysis and HOS analysis of the mass acceleration.

β	δ [mm]	Skewness γ_1	Kurtosis γ_2	Bicoherence maximum	Tricoherence maximum
1.0	0.0	+0.0017	2.9435	0.0270	0.0159
0.9	0.0	+0.0704	2.9618	0.2881	0.0097
0.8	0.0	+0.1440	3.0586	0.6044	0.0106
1.0	0.02	-0.0003	3.7469	0.0238	0.0433
1.0	0.04	+0.0095	4.6795	0.0376	0.1801
1.0	0.1	-0.0019	7.2838	0.0966	0.2816
1.0	0.6	-0.0134	2.9563	0.0256	0.0090

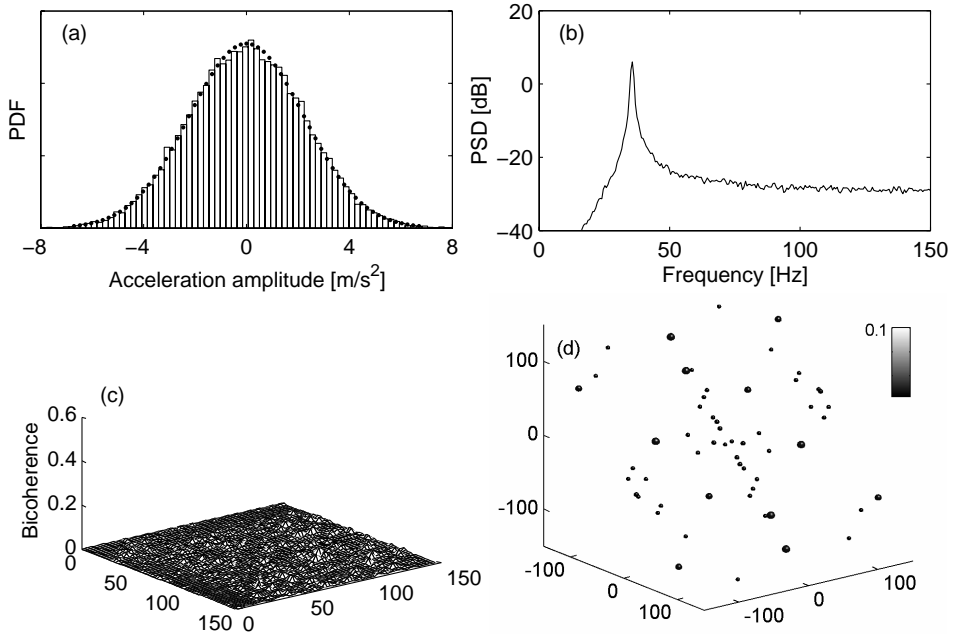


Figure 3. Mass acceleration processing for the linear system ($\delta=0$, and $\beta=1$): (a) PDF; (b) power spectrum; (c) bicoherence; (d) tricoherence.

The results of the higher order statistic analysis are listed in Table 1 together with some results obtained from the HOS analysis. In particular, the last two columns of Table 1 respectively reports the bicoherence and tricoherence maximum evaluated over the principal domain.

As expected, when the system is linear ($\delta=0$ and $\beta=1$) its response to a Gaussian input has Gaussian PDF; in fact, Fig. 3(a) shows that the PDF of the output acceleration is quite symmetric and Gaussian with a skewness value which is practically zero and a kurtosis that is almost three (see the first row of Table 1); the small imperfections are likely due to the errors of the numerical integration. These properties of the system response are confirmed by the HOS analysis: the bicoherence [Fig. 3(c)] is completely flat over the bifrequency plane and the tricoherence [Fig. 3(d)] has very low value and no remarkable structure. It is noteworthy that the tricoherence is displayed by drawing spheres in the trifrequency space; the size of the spheres represents the magnitude of the tricoherence [8]. Finally, Fig. 3(b) illustrates the power spectrum of the mass acceleration which shows the typical feature of a 1-DOF response: the presence of the resonant peak (at about 35 Hz).

Once the parameter β is changed, the asymmetric non-linear behaviour of the system is proved by analysing the PDF shape of the response together the skewness value. Figure 4 shows that the PDF of the mass acceleration deviates from the symmetry as soon as the parameter β differs from one; in addition, the skewness value increases as β decreases, whereas the kurtosis is practically insensitive to the β variation. However, the higher order statistical measures only give an overall information about the system non-linearity. On the other hand, more elements can be obtained from the HOS analysis; in particular, the bicoherence should be able to demonstrate the asymmetric nature of the system non-linearity. In fact, as shown in Fig. 5(b, d), even for the smallest degree of non-linearity ($\beta=0.9$), the bicoherence gives a clear indication of the presence of the non-linearity and proves the existence of a coupling between spectral components. A significant bicoherence peak can be observed at the frequency pair (35, 35) Hz: this indicates a coupling between frequency components at the triplet (35, 35, 70) Hz. The spectral component at 70 Hz can also be seen in the power spectrum of the output acceleration [see Fig. 5(a, c)]: it is the first higher harmonic of the resonant frequency and it is due to the non-linearity of the system. However, only the bicoherence can state the non-linear nature of the system; in fact, the power spectra of Fig. 5(a, c) could be those, for example, of a linear system with two degrees of freedom.

The case of the presence of the backlash has been studied as well. In order to simulate a symmetric non-linearity of the system, the parameter β was kept equal to one. The PDF of the system response (see Fig. 6) confirms that the system has a symmetric non-linear behaviour; however, for $\delta=0.02, 0.04,$ and 0.1 , it departs from the Gaussianity, as also proved by observing the kurtosis increment with the backlash value (see Table 1). For the highest value of the clearance, that is 0.6 mm, the PDF becomes again Gaussian (the kurtosis is almost three and the skewness is practically zero). This is reasonable because, when the backlash reaches high values, the mass does not impact the stops and the system remains linear. Obviously, in this case the system is different from the original one due to the fact that elastic stops do not play any role.

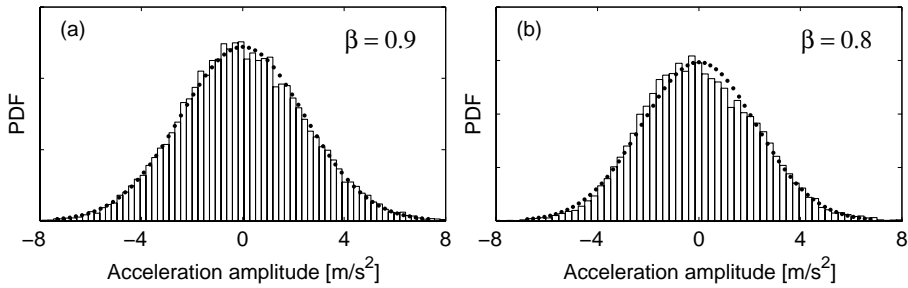


Figure 4. PDF of the mass acceleration in case of asymmetric non-linearity ($\delta \neq 0$ and $\beta < 1$).

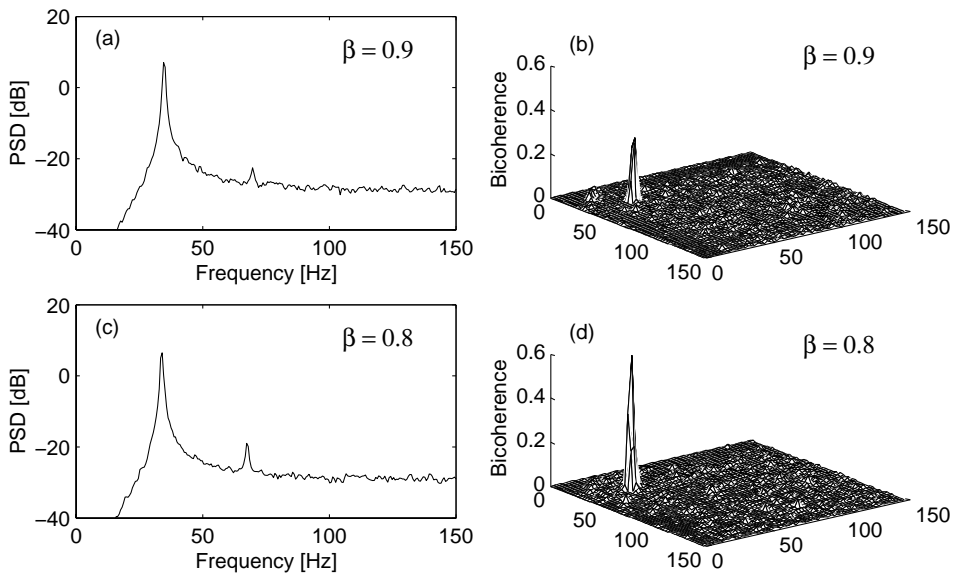


Figure 5. Power spectrum (left) and bicoherence (right) of the mass acceleration in case of asymmetric non-linearity ($\delta \neq 0$ and $\beta < 1$).

The system changes are clearly visible by inspecting the power spectrum of the model response, which is shown in Fig. 7: the resonant frequency decreases with the backlash increment due to the decrement of the average stiffness; in addition, the resonant peak enlarges because the resonant frequency depends on the mass displacement, so as to cause a modulation phenomenon; moreover, wideband component arises at frequencies which are approximately three times the resonant peak. The last phenomenon is related to the intrinsic nature of the system non-linearity. In the case of the highest backlash value [see Fig. 7(d)], the higher

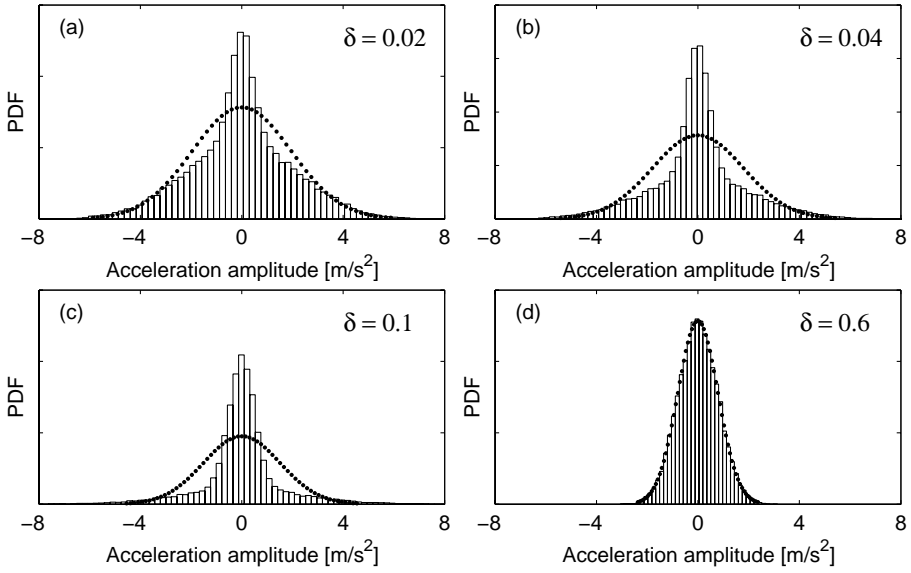


Figure 6. PDF of the mass acceleration in case of symmetric non-linearity ($\delta > 0$ and $\beta = 1$).

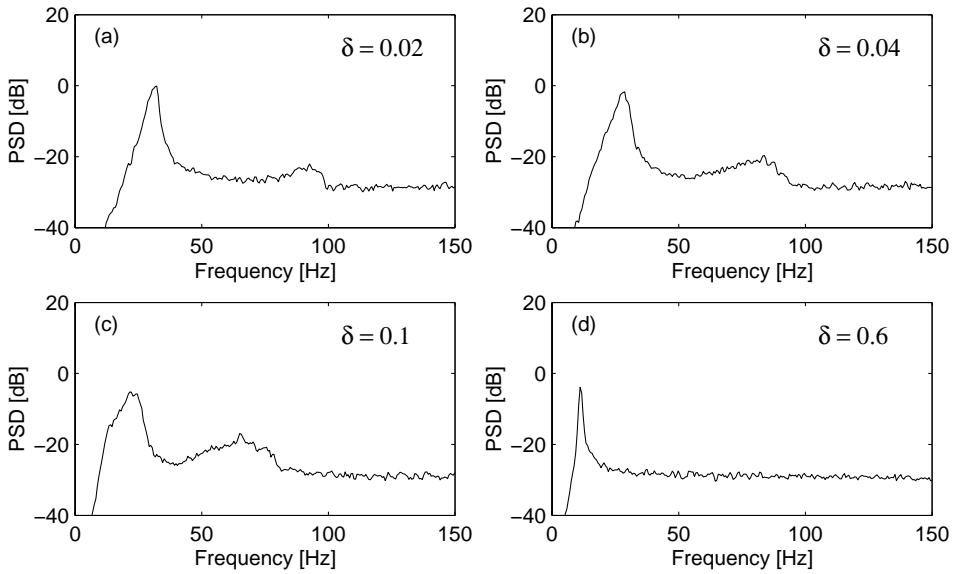


Figure 7. Power spectrum of the mass acceleration in case of symmetric non-linearity ($\delta > 0$ and $\beta = 1$).

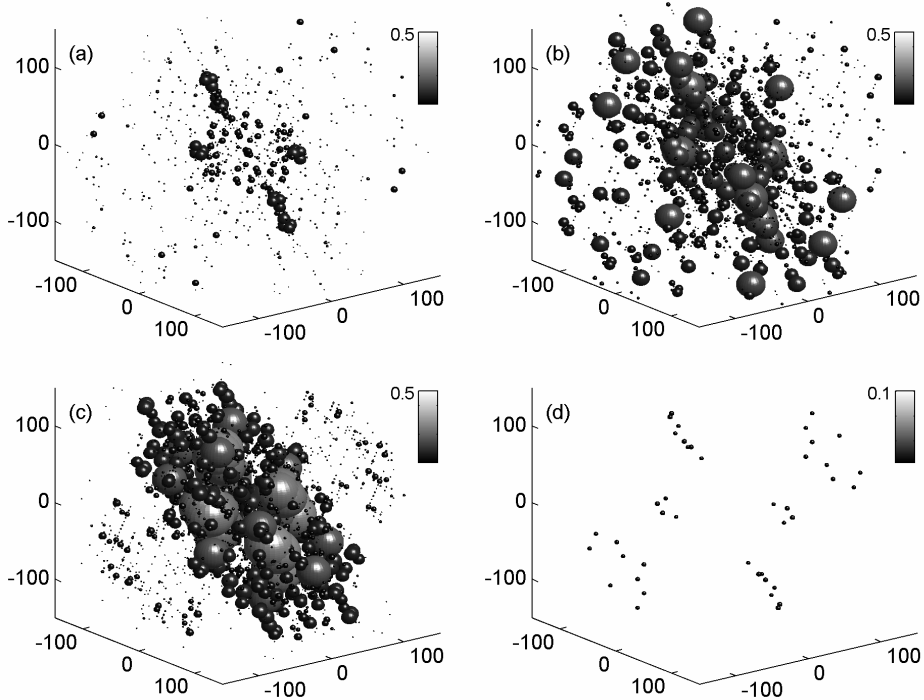


Figure 8. Tricoherence of the mass acceleration in case of symmetric non-linearity ($\delta > 0$ and $\beta = 1$): (a) $\delta = 0.02$; (b) $\delta = 0.04$; (c) $\delta = 0.1$; (d) $\delta = 0.6$.

harmonic band disappears and the power spectrum shows only one peak which is shifted with respect to the resonant frequency of the original system [see Fig. 3(b)], and that corresponds to the linear radian frequency equal to $\sqrt{k/m} = \sqrt{5 \cdot 10^3} = 70.7$ rad/s (11.3 Hz).

Again, by inspecting the power spectrum only, it is not possible to obtain detailed information regarding the non-linearity of the system. Therefore, the HOS analysis is needed and the fourth order polyspectrum should be employed because of the symmetry of the non-linearity. In fact, Table 1 shows that the bicoherence is hardly affected by the increment of the parameter δ , whereas the tricoherence maximum gives a measure of the system non-linearity.

Figure 8 reports the results of the tricoherence estimation. When $\delta = 0$, i.e. the system is linear, the tricoherence has no remarkable structure [Fig. 3(d)]; on the contrary, if the backlash takes place, the conformation of the tricoherence acquires significance and the interaction between spectral components begins to appear even for the smallest value of the backlash ($\delta = 0.02$ mm), as shown in Fig. 8(a). In particular, by calling the resonant frequency of the system as f_r , the biggest spheres are located at the triplet (f_r, f_r, f_r) and the symmetrical reflections of this point. In other words, the non-linearity is concentrated around the resonant

frequency. Since the resonant frequency decreases as the backlash value increases (the rigid stops are scarcely engaged during the mass motion), the biggest spheres approach the origin of the trifrequency space as the backlash increases. The low amplitude of the tricoherence shown in Fig. 8(d), confirms that in the case of high backlash the system develops into a linear one.

4. CONCLUSIONS

In the field of machine condition monitoring it is worth noting that machine faults are often related to non-linear effects, which may lead to non-linearities in the machine vibration signature too.

In this paper a simple 1-DOF model has been used in order to simulate several kinds of non-linearities which can occur in mechanical systems. In particular, asymmetric and symmetric non-linearities have been reproduced and examined by feeding the system on Gaussian input. Since the system distributes the energy between frequencies in a way that reflects the type of non-linearity, the HOS analysis makes it possible to study the structure of the system response and to provide information related to the system's physical characteristics. In particular, it has been shown that the bicoherence and tricoherence estimators are able to detect the interactions of non-linear resonance modes of the system. In addition, these normalised polyspectra give a quantitative measure of the non-linearity degree of the system, and it has been shown that HOS can supply details which second order statistics cannot. The results seem to provide a possibility of using HOS analysis as a tool for the condition monitoring and diagnostics of mechanical systems.

REFERENCES

- [1] Lyon, R. H., 1987. *Machinery Noise and Diagnostics*. Boston: Butterworths.
- [2] Kim, Y. C. and Powers, E. J., 1979. "Digital Bispectral Analysis and its Applications to Nonlinear Wave Interactions". *IEEE Transactions on Plasma Science*, PS-7, pp. 120–131.
- [3] Fackrell, J. W. A., and Mc Laughlin S., 1994. "The Higher Order Statistics of Speech Signals". In *Proceedings of IEE Colloquium on Techniques in Speech Signal Processing, London, UK*, Vol. **138**(7), pp. 1–6.
- [4] Nandi, A., and Tutschku, K., 1994. "Machine Condition Monitoring Based on Higher Order Spectra and Statistics". In *Proceedings of ATHOS 94, the Workshop on Higher Order Statistics in Signal Processing, Edinburgh, UK*.
- [5] Fackrell, J. W. A., White, P. R. , Hammond, J. K., Pinnington, R. J., and Parsons A. T., 1995. "The Interpretation of the Bispectra of Vibration Signals: Part 1: Theory". *Mechanical Systems and Signal Processing*, **9**(3), pp. 257–266.
- [6] Fackrell, J. W. A., White, P. R. , Hammond, J. K., Pinnington, R. J., and Parsons A. T., 1995. "The Interpretation of the Bispectra of Vibration Signals: Part 2: Experimental Results and Applications". *Mechanical Systems and Signal Processing*, **9**(3), pp. 267–274.

- [7] Rivola, A., and White, P. R., 1998. "Bispectral Analysis of the Bilinear Oscillator with Application to the Detection of Fatigue Cracks". *Journal of Sound and Vibration*, **216**(5), pp. 889–910.
- [8] Collis, W. B., White, P. R., and Hammond, J. K., 1998. "Higher Order Spectra: the Bispectrum and Trispectrum". *Mechanical Systems and Signal Processing*, **12**(3), pp. 375–394.
- [9] Rivola, A., 2000. "Comparison Between Second and Higher Order Spectra Analysis in Detecting Structural Damages". In Proceedings of *Seventh International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*, Southampton, UK, **2**, pp. 937–950.
- [10] Bendat, J. S., and Piersol, A. G., 1980. *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*. John Wiley & Sons, New York.
- [11] Chandran, V., and Elgar, S., 1994. "A General Procedure for the Derivation of Principle Domains of Higher Order Spectra". *IEEE Transactions on Signal Processing*, **42**(1), pp. 229–233.
- [12] Dalle Molle, J. W., and Hinich, M. J., 1989. "The Trispectrum". In Proceedings of *Workshop on Higher Order Spectral Analysis*, Vail, CO, pp. 68–72.

PROBLEMI DI CONTATTO TRA ORGANI DI MACCHINA

Antonio Strozzi
*Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Civile
Università di Modena e Reggio Emilia*

Sommario. *In questo articolo si esaminano alcune problematiche relative alla catalogazione dei problemi di contatto in stazionari, progressivi, recessivi, e regressivi. Si evidenziano le proprietà dei vari tipi di contatto, e viene sottolineata la potenzialità pratica di un metodo di normalizzazione rispetto al carico applicabile ad alcune classi di contatti progressivi.*

Parole chiave: *contatti, normalizzazione, parametro di caricamento*

1. INTRODUZIONE

Il meccanismo di caricamento degli organi meccanici è spesso dovuto a fenomeni di contatto tra corpi. L'importanza dei problemi di contatto è sottolineata in [1] con queste parole: *A casual survey of the kinds of engineering applications to which the techniques of solid Mechanics are applied will show that the vast majority of solid bodies are loaded by being pressed against another body. The only alternatives comprise loading of the boundary by fluid pressure or various kinds of body force such as gravitational or magnetic forces, but even in such cases, the reaction force required to maintain equilibrium will almost invariably be provided at a contact interface. When we also recall that contacts between bodies generally constitute stress concentrations and are therefore likely sites for material failure, it is not surprising that Contact Mechanics has occupied a central place in the development of Solid Mechanics over the years and continues to do so today.*

2. VARIE POSSIBILI CLASSIFICAZIONI DEI PROBLEMI DI CONTATTO

I problemi di contatto possono venire classificati in vari modi, a seconda dell'aspetto che viene ritenuto più rappresentativo dai vari studiosi. Per esempio, in [2] il parametro di classificazione è essenzialmente il tipo di equazione integrale che regge

il problema di contatto, conferendo così particolare rilevanza all'aspetto matematico della tecnica di soluzione del problema.

La scuola di Williams, [3], adotta un diverso parametro di classificazione, che consiste nella forza della singolarità della pressione di contatto alle estremità del contatto stesso. Tale scuola si concentra su tecniche che permettono di valutare la forza della singolarità a partire dalla formulazione matematica del problema, senza dover necessariamente risolvere per intero il problema di contatto.

In questo articolo si adotta invece una catalogazione dei problemi di contatto più aderente alle necessità pratiche della Costruzione di Macchine, catalogazione essenzialmente imperniata sulla possibilità o meno di normalizzare i parametri di concentrazione di tensione rispetto al carico applicato. Come appare dal paragrafo successivo, tale catalogazione prevede la distinzione dei contatti in quattro diversi tipi, e cioè contatti stazionari, progressivi, recessivi, e regressivi, si veda [4-5].

3. CLASSIFICAZIONE DEI PROBLEMI DI CONTATTO IN STAZIONARI, PROGRESSIVI, RECESSIVI, E REGRESSIVI

I contatti stazionari sono quelli in cui l'ampiezza della zona di contatto non varia all'aumentare del carico applicato. I contatti progressivi sono quelli in cui la zona di contatto aumenta con il carico di schiacciamento. I contatti recessivi sono contatti senza precarico iniziale, nei quali la zona di contatto diminuisce all'aumentare dello schiacciamento. Infine, i contatti regressivi sono contatti con precarico iniziale, nei quali la zona di contatto diminuisce all'aumentare dello schiacciamento.

Non esistono regole per decidere a quale delle precedenti categorie appartiene uno specifico problema di contatto. Occorre pertanto affidarsi all'intuito ingegneristico ed al buon senso per immaginare in quale modo evolve il contatto all'aumentare del carico.

3.1 Esempi di Contatti Stazionari

Un contatto stazionario avviene tra la superficie inferiore della testa della vite ed il piano di riscontro, Figura 1 (a), dove il segmento $A - B$ rappresenta l'ingombro radiale della zona anulare di contatto. All'aumentare del tiro sul gambo della vite, la zona di contatto rimane inalterata, salvo le piccole espansioni laterali della testa dovute all'effetto Poisson, ignorate nel campo delle piccole deformazioni. Un secondo esempio è quello, nel giunto per tubi di Figura 1 (b), del contatto su superficie conica tra anello tagliato e flange. Anche in questo caso, il segmento $A - B$ denota l'ingombro della zona anulare di contatto lungo i fianchi dell'anello conico tagliato.

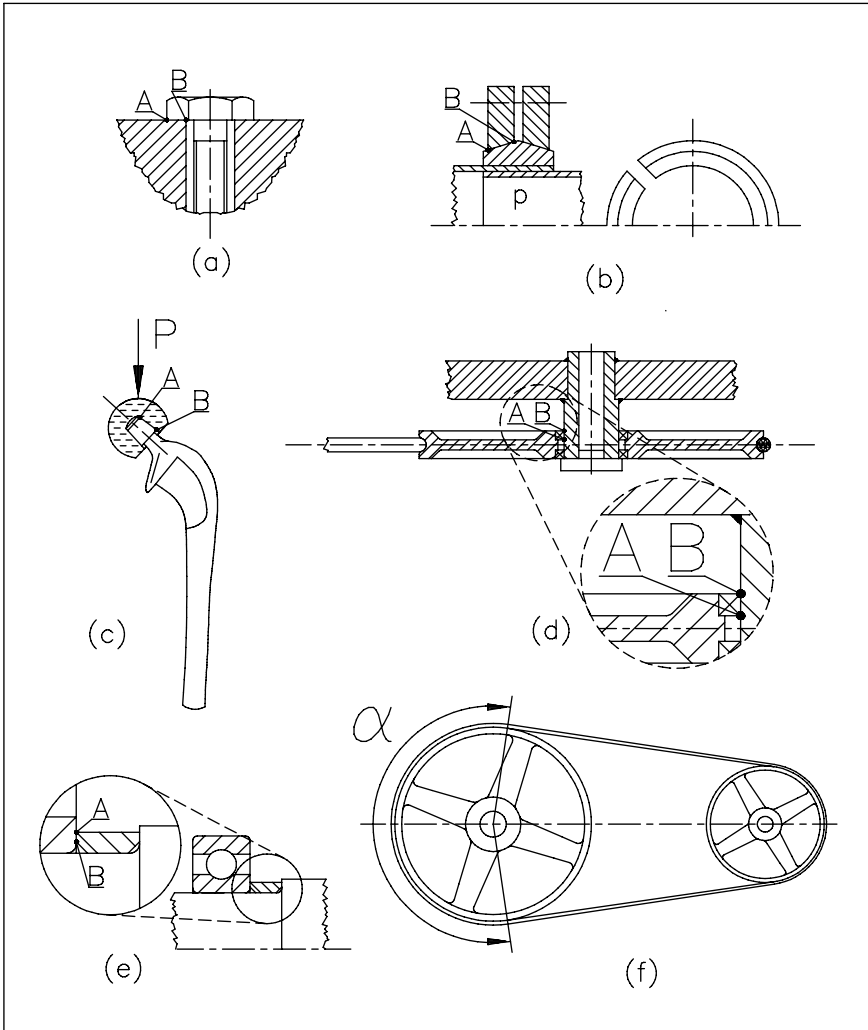


Figura 1. Esempi di contatti stazionari.

All'aumentare del tiro dei bulloni che serrano le flange, la predetta zona di contatto non varia apprezzabilmente.

Similmente, in una protesi d'anca, Figura 1 (c), il contatto tra superficie conica dello stelo e cavità conica della testina rimane stazionario all'aumentare del carico P agente sulla protesi. Il segmento $A - B$ denota l'ingombro della zona di contatto lungo il fianco del tronco di cono all'estremità dello stelo.

Il contatto tra perno della puleggia di rinvio di una seggiovia ed anello interno dei cuscinetti, la cui lunghezza in direzione assiale è rappresentata dal segmento $A - B$, Figura 1 (d), rimane stazionario all'aumentare del tiro della fune. Un altro esempio di contatto stazionario è quello tra un distanziale e l'anello interno del cuscinetto a rotolamento, Figura 1 (e). La lunghezza in direzione radiale di tale contatto è rappresentata dal segmento $A - B$. Infine, il contatto tra la cinghia piana e la corona della puleggia, Figura 1 (f), è stazionario, dato che l'angolo di abbracciamento α non varia all'aumentare del tiro della cinghia.

Nei contatti stazionari l'area di impronta non varia all'aumentare del carico, e quindi risulta facile normalizzare i coefficienti di concentrazione di tensione rispetto al carico applicato. In altre parole, nel caso di contatti stazionari risulta semplice costruire diagrammi di effetto intaglio normalizzati rispetto al carico applicato, di elevata utilità progettuale e di semplice impiego pratico.

3.2 Esempi di Contatti Progressivi

Contatti progressivi classici sono quelli di cilindro o sfera contro piano, incontrati nei cuscinetti a rotolamento e nelle guarnizioni elastomeriche $O-R$, Figura 2 (a). All'aumentare del carico di schiacciamento, la superficie di contatto aumenta, rendendo meno deformabile la zona della struttura nella quale si sviluppa il contatto. Questa proprietà viene sfruttata nei cuscinetti ad X e ad O , che vengono precaricati tra l'altro per ridurre la deformabilità della zona di contatto. Un secondo esempio è quello di due denti di ruote dentate, a contatto tra loro nell'intorno del punto A , dove localmente il contatto equivale a quello tra due rulli ad assi paralleli, Figura 2 (b). In una molla ad elica cilindrica di compressione, e con filo a sezione circolare, quando il carico P è di intensità tale che la molla va a pacco, Figura 2 (c), il contatto tra le spire è simile al contatto tra cilindro e cilindro, e quindi è di tipo progressivo quando il carico P diventa maggiore di quello di messa a pacco. In una catena, Figura 2 (d), le varie maglie si toccano tra loro nell'intorno del punto A .

Se il filo è a sezione circolare, il contatto tra due maglie consecutive è analogo a quello tra due cilindri ad assi incrociati, ed è di tipo progressivo. Un altro esempio è

quello della protesi d'anca, Figura 2.6 (e), dove il contatto tra testina e cotile è progressivo.

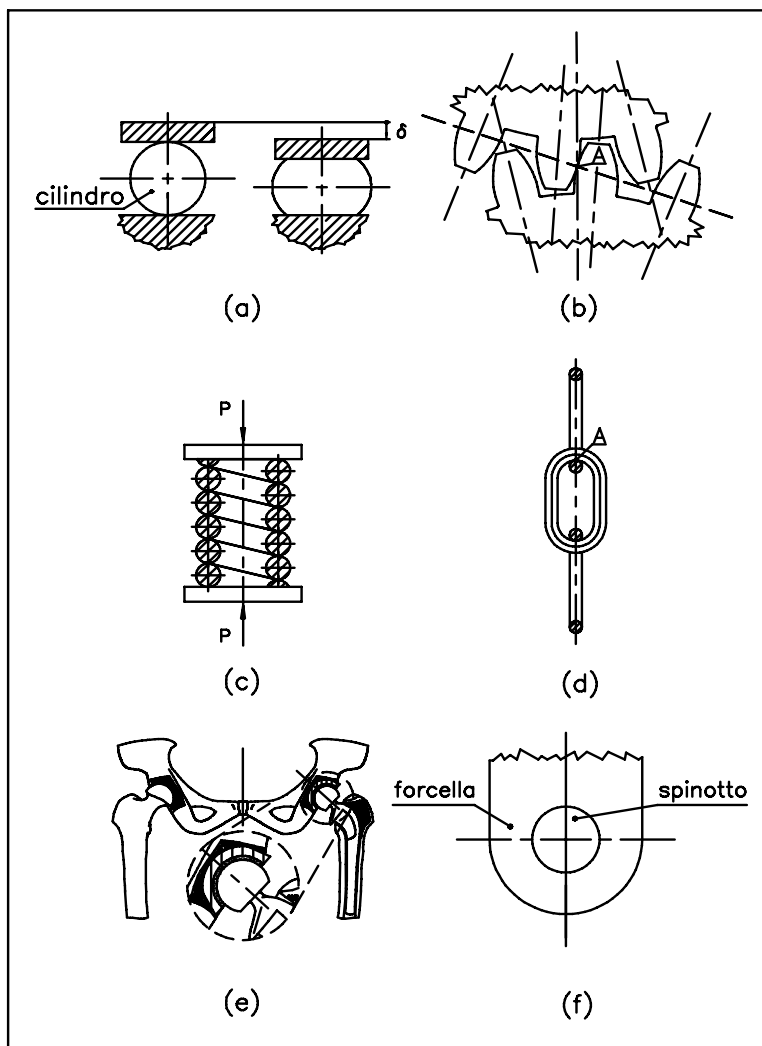


Figura 2. Esempi di contatti progressivi.

Un contatto problematico, progressivo, recessivo, o regressivo a seconda di piccolissime differenze nella geometria, è quello in un collegamento a forcella e spinotto, Figura 2 (f), od al contatto tra mozzi del pistone e spinotto automobilistico. Nel seguito ci si riferisce al collegamento a forcella e spinotto di Figura 3, più dettagliata della Figura 2 (f). Considerando per il momento il contatto del collegamento a forcella e spinotto come un problema piano, se l'accoppiamento è inizialmente con gioco, Figura 3 (a) e (b), il contatto aumenta col carico F , ed è quindi progressivo. Se invece l'accoppiamento tra spinotto e foro della forcella è di precisione, Figura 3 (c) e (d), per carico F nullo il contatto si estende all'intero bordo del foro ma, già per piccoli valori del carico F , l'arco di contatto si contrae su circa metà circonferenza, per non variare ulteriormente all'aumentare del carico, come sancito dalla teoria. Tale contatto è quindi recessivo. Se infine il perno è inizialmente forzato nel foro, Figura 3 (e) ed (f), il distacco tra le due superfici a contatto avviene a partire da un valore di soglia del carico F . Tale contatto, tipico degli accoppiamenti con precarico, si definisce regressivo. Il problema del contatto forcella-spinotto può quindi variare tra il progressivo (in presenza di gioco iniziale), il recessivo (in presenza di accoppiamento di precisione), ed il regressivo (in presenza di forzamento iniziale).

Nei contatti progressivi l'area di impronta aumenta all'aumentare del carico. Il

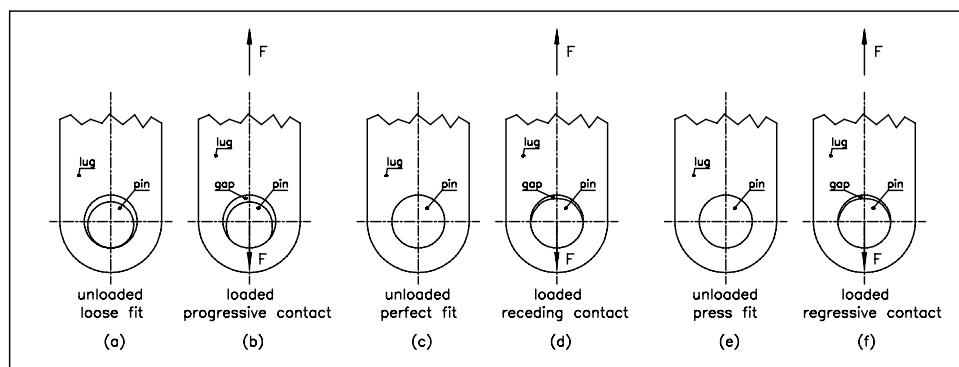


Figura 3. Collegamento a forcella e spinotto.

problema è nonlineare, e risulta quindi difficile normalizzare i coefficienti di concentrazione di tensione rispetto al carico applicato. In altre parole, nel caso di contatti progressivi è problematico costruire diagrammi di effetto intaglio, dato che ogni diagramma varrebbe soltanto per un valore particolare del carico applicato.

È possibile normalizzare i diagrammi di effetto intaglio quando il problema è puramente Hertziano, per esempio cilindro o sfera contro piano, dato che in questi casi è nota la soluzione analitica del problema di contatto. Se però non è disponibile una soluzione teorica, per esempio nel caso di cilindro cavo contro piano, tale normalizzazione non risulta più possibile. È stato però recentemente presentato da Ciavarella et al., [6], un parametro in grado di normalizzare gli effetti del carico e del gioco iniziale per contatti progressivi tipo "pin in plate" e "ball in socket". Tale parametro verrà presentato nel paragrafo 4.

3.3 Esempi di Contatti Recessivi e Regressivi

Contatti recessivi vengono incontrati raramente in meccanica, e sono altamente indesiderati, dato che la riduzione delle zona di contatto col carico è responsabile di pressioni di contatto rapidamente crescenti, e quindi potenzialmente pericolose.

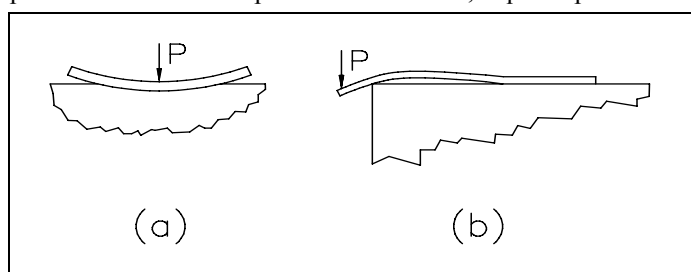


Figura 4. Esempi accademici di contatti regressivi.

all'aumentare del carico. Il primo esempio è quello di una trave flessibile su suolo elastico, caricata trasversalmente in mezzeria, Figura 4 (a). Per certi proporzionamenti, le estremità della trave possono sollevarsi dal suolo, riducendo la zona di contatto. Il secondo esempio è quello di una trave flessibile pesante, caricata trasversalmente d'estremità, che sporge da un quarto di piano rigido, Figura 4 (b). La trave si solleva dall'appoggio per un tratto finito.

Passando ad esempi più applicativi di contatti recessivi, si considera il collegamento poligonale tipo brugola di Figura 5 (a), dove il maschio poligonale trasmette coppia torcente alla femmina, tramite le pressioni di contatto esercitate lungo il profilo esagonale di contatto. Un giunto di questo tipo viene impiegato per collegare punte a coclea per la perforazione del terreno nella introduzione di palafitte in cemento armato. Se il maschio entra di sigillo nella femmina, per coppia torcente nulla il contatto tra maschio e femmina si estende sull'intero profilo esagonale ma, una volta che si

Si considerano dapprima due esempi accademici di contatti recessivi, per meglio comprendere il meccanismo che produce una diminuzione della ampiezza della zona di contatto

applica momento torcente, il contatto tra maschio e femmina si restringe su zone localizzate, e cioè su circa metà di ogni lato dell'esagono. Un problema analogo avviene nel contatto tra dado e chiave esagonale, quando la chiave esercita una coppia torcente sul dado. Un altro esempio applicativo di contatto regressivo è quello di un collegamento a linguetta, Figura 5 (b). Nel trasmettere coppia torcente, la linguetta si deforma e ruota lievemente, concentrando il contatto su zone ristrette, per esempio nell'intorno del punto A.

Un contatto problematico di tipo recessivo è quello di una spina elastica inserita in una cavità circolare, Figura 5 (c). In questo caso non è presente un carico esterno applicato alla spina, ma il suo caricamento è dovuto all'interferenza iniziale. Per convincersi che questo contatto è classificabile come recessivo, occorre considerare mentalmente una serie di spine elastiche le quali differiscono soltanto nell'interferenza iniziale col foro. Se non vi è interferenza iniziale tra spina e cavità circolare, il contatto tra spina e cavità si estende su tutto il perimetro della spina. Appena però è presente una certa interferenza, il contatto tra spina e cavità si riduce molto, come si verifica introducendo un foglio di carta in un tubo portadisegni. La teorica assicura che tale arco di contatto non varia all'aumentare dell'interferenza iniziale tra spina e cavità, a parità della geometria nominale della spina. Il contatto è quindi definibile come recessivo, anche se si deve ragionare in termini di aumento di interferenza iniziale e non di carico.

Si considera in Figura 5 (d) una flangia rettangolare. Se le viti di fissaggio non esercitano precarico, il contatto è recessivo, dato che la flangia si distacca dalla parete già per un carico piccolissimo. Se invece le viti esercitano precarico, il contatto è regressivo, dato che la flangia si distacca dalla parete solo quando il carico raggiunge un valore di soglia. In un accoppiamento filettato, Figura 5 (e), per carichi nulli entrambi i fianchi dei filetti della vite sono a contatto con quelli della madrevite. All'aumentare del carico P , un solo fianco di ogni filetto della vite va a contatto con un solo fianco del filetto della madrevite, e quindi la superficie di contatto si restringe, dimostrando il carattere recessivo del contatto.

Un ulteriore esempio di contatto recessivo è rappresentato dal terminale di una molla ad elica cilindrica di compressione, con terminale spianato, Figura 5 (f). Per carichi nulli di schiacciamento, la molla tocca il piano di riscontro nominalmente lungo l'intera superficie spianata. Appena però si esercita una compressione sulla molla, le zone di contatto tra terminale e piano si riducono, e si concentrano su due zone ristrette in corrispondenza dell'unghia del terminale e in una zona approssimativamente diametralmente opposta. Il meccanismo di sollevamento del terminale spianato della molla dal piano di riscontro è analogo a quello di Figura 4 (a).

Si riconsidera in Figura 5 (g) il collegamento a forcella e spinotto secondo una rappresentazione trasversale. Se lo spinotto si inflette molto, il contatto tra spinotto e ramo di forcella si concentra nell'intorno del punto B , un aspetto che tradisce il carattere recessivo del contatto. La Figura 3 ha già messo in luce che risulta davvero complesso

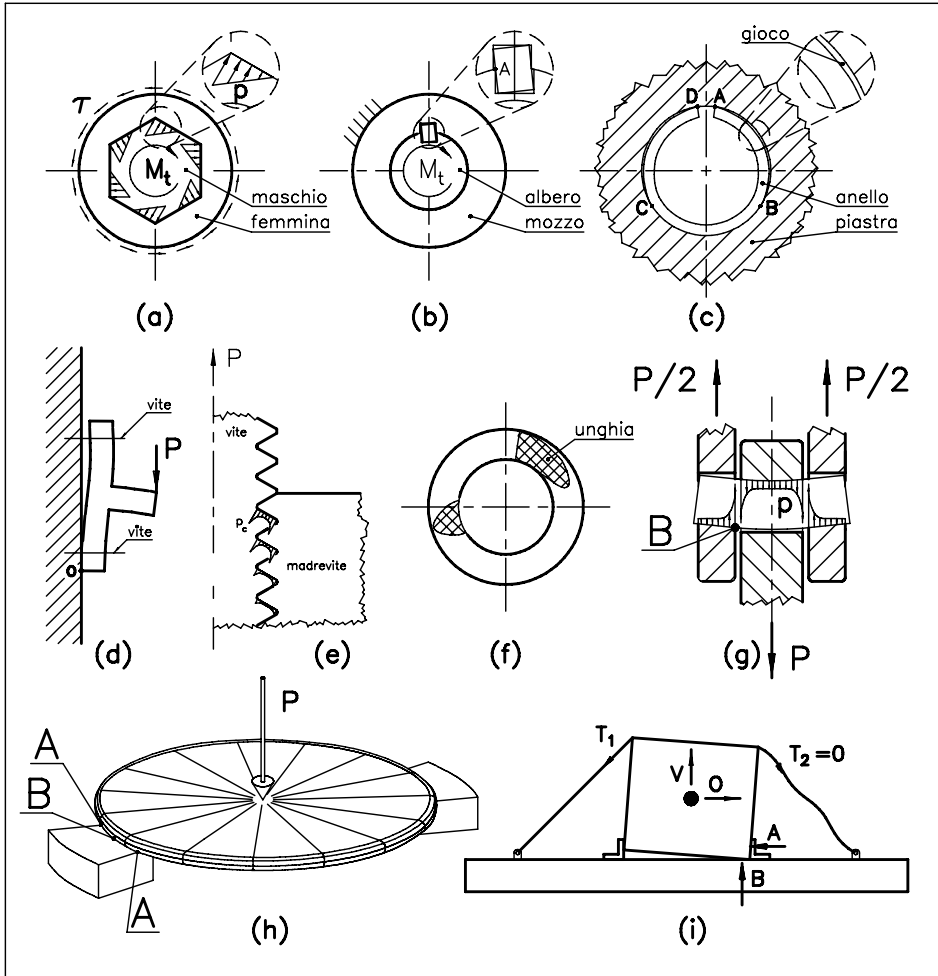


Figura 5. Esempi di contatti recessivi e regressivi.

catalogare il contatto a forcella e spinotto. Aspetti simili valgono per lo spinotto automobilistico.

Si considera in Figura 5 (h) una piastra circolare appoggiata monolateralmente su due appoggi diametralmente opposti. Quando la piastra viene caricata da una forza trasversale centrale P , la piastra si solleva dagli appoggi nella zona centrale degli appoggi stessi, punto B , mentre il contatto tra piastra ed appoggi si restringe sugli spigoli degli appoggi, punti A . Tale contatto è quindi recessivo. Un problema pratico di questo tipo si incontra nelle mole da taglio in resina e telature di rinforzo. Risulta utile misurare il modulo di Young medio di questo materiale composito, per sviluppare calcoli sulla deformabilità radiale della mola rotante. Per effettuare questa misura, la mola viene appoggiata su tre supporti angolarmente equidistanti, e viene caricata al centro con una forza trasversale. La misura della freccia centrale della mola è collegabile al modulo di Young medio della mola vista come piastra circolare su ristretti appoggi monolateri.

Infine, la Figura 5 (i) considera il contatto tra cassone e pianale di un camion, che descrive impieghi nel trasporto di materiale pericoloso, dove si vogliono esaminare i carichi sui tiranti nel caso di brusca frenata. Se i tiranti non sono precaricati, tale contatto è recessivo, dato che il cassone, tendendo a ribaltarsi, si solleva dal pianale già per piccoli carichi inerziali di frenata. Se invece i tiranti sono precaricati, tale contatto è regressivo, dato che il cassone si solleva dal pianale solo per carichi inerziali superiori ad un valore di soglia.

Per i contatti recessivi, il risultato di validità generale utile da un punto di vista applicativo è che, in elasticità lineare ed in piccole deformazioni, la zona di contatto si contrae con discontinuità nell'intorno di carico nullo, per poi stabilizzarsi su di una impronta che non varia più all'aumentare del carico. Per esempio, nel caso del terminale spianato della molla ad elica cilindrica di compressione, il contatto tra terminale e piano di appoggio si contrae per un carico piccolissimo, e poi non varia più all'aumentare del carico. Questo risultato è importante da un punto di vista pratico, dato che l'ampiezza dell'impronta può essere calcolata una sola volta, per un carico qualunque.

Si noti tuttavia che questo risultato non vale per contatti regressivi, e cioè in presenza di precarichi. Infatti, nella flangia rettangolare di Figura 5 (d) nella quale le viti di fissaggio della flangia sono precaricate, il distacco della flangia dalla parete non avviene a partire da un carico P piccolissimo, ma a partire da un carico che dipende dal precarico delle viti di fissaggio.

Si è visto che, nei contatti recessivi, l'area di impronta non varia all'aumentare del carico, e quindi risulta possibile normalizzare i coefficienti di concentrazione di tensione rispetto al carico applicato. Anche nel caso di contatti recessivi è quindi possibile costruire diagrammi di effetto intaglio normalizzati rispetto al carico

applicato, di elevata utilità progettuale e di semplice impiego pratico. Nel caso di contatti regressivi, invece, non risulta praticamente possibile compilare tali diagrammi.

3.4 Problemi Complessi

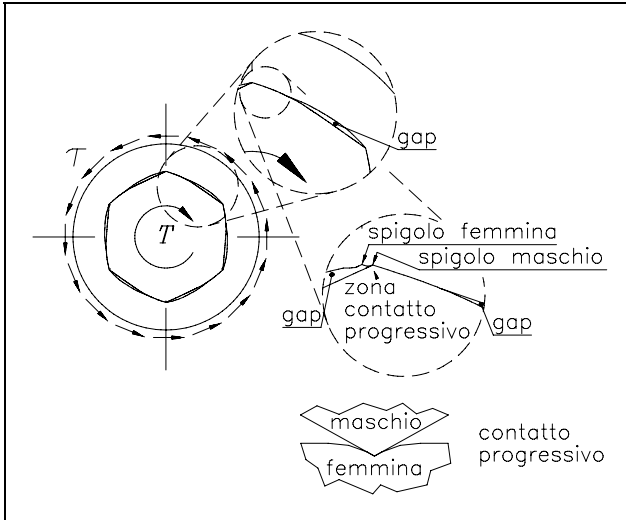


Figura 6. Un contatto problematico.

Si ritorna sul contatto poligonale di Figura 5 (a), classificato come recessivo nel paragrafo 3.3. La Figura 6 mostra che, in seguito alla lieve rotazione relativa tra maschio e femmina in seguito all'applicazione di una coppia torcente, lo spigolo del profilo poligonale della femmina non è più radialmente allineato con lo spigolo del maschio. Di conseguenza, il parziale distacco dei fianchi del poligono, che definisce un contatto recessivo, si unisce ad un problema di

indentazione di uno spigolo del maschio nei riguardi di una porzione di lato rettilineo della femmina, definendo in tale vicinanza un contatto progressivo.

Si ritiene che l'aspetto recessivo del contatto sia dominante, ma comunque appare da questo esempio che i problemi di contatto possono nascondere problematiche sottigliezze.

4. IL COEFFICIENTE DI NORMALIZZAZIONE DEI CONTATTI PROGRESSIVI TIPO "PIN IN PLATE" O "BALL IN SOCKET"

Si è visto che è possibile compilare diagrammi di concentrazione di tensione normalizzati rispetto al carico nei casi di contatti stazionari e recessivi, mentre per contatti progressivi e regressivi una normalizzazione rispetto ai carichi risulta molto problematica.

È stato recentemente mostrato da Ciavarella et al., [6], che, nei contatti progressivi tipo "pin in plate" o "ball in socket", è possibile definire un coefficiente di normalizzazione rispetto al carico ed al gioco iniziale, il quale a sua volta permette di compilare diagrammi di effetto intaglio normalizzati rispetto al carico. Si esamina separatamente nel seguito il problema piano ed il problema assialsimmetrico.

Nel caso di contatto progressivo piano tipo "pin in plate", in Ciavarella et al., [6], si è introdotto il parametro $\Phi = P/(EC)$, dove P è il carico per unità di spessore, E è il modulo di Young, e C il gioco (diametrale) iniziale. Si è mostrato che, se in due contatti del tipo "pin in plate" che differiscono per carico imposto, modulo di Young e gioco iniziale, il parametro Φ è lo stesso per i due casi, allora l'ampiezza angolare dell'arco di contatto e la pressione massima di contatto rapportata ad un valore nominale sono le stesse per i due casi. Ci si riferisce per esempio ad un collegamento a spinotto e forcella, dove la geometria della forcella è rettangolare ad estremità arrotondata definita dai raggi interno r_i ed esterno r_e . Se due collegamenti a forcella e spinotto possiedono lo stesso rapporto tra r_i e r_e , ma un collegamento è di dimensioni 1.5 volte l'altro; se inoltre i due collegamenti sono dello stesso metallo, ma un collegamento è soggetto ad un carico doppio rispetto all'altro e presenta un gioco diametrale iniziale doppio rispetto all'altro, allora il parametro Φ è uguale nei due casi. Di conseguenza la pressione massima di contatto rapportata alla pressione media definita come carico rapportato all'area diametrale del foro della forcella, e l'ampiezza angolare dell'arco di contatto sono le stesse per i due casi.

Da un punto di vista pratico, i diagrammi di effetto intaglio possono venire compilati nel modo seguente. Si considera un collegamento a forcella e spinotto definito da un particolare rapporto dei raggi r_i e r_e , da un particolare valore del gioco diametrale iniziale, e da un particolare modulo di Young. Si assoggetta poi il collegamento ad una rampa di carico, calcolando per ogni valore del carico la pressione massima normalizzata e l'ampiezza angolare dell'arco di contatto. Si riporta lungo l'asse x il parametro Φ calcolato per il gioco iniziale ed il modulo di Young fissati e per il particolare valore del carico, e lungo l'asse y la pressione massima normalizzata e l'ampiezza angolare dell'arco di contatto. Tale diagramma vale solo per quel particolare rapporto dei raggi r_i e r_e , ma vale per qualunque valore del carico (variabile fatta effettivamente variare), gioco iniziale e modulo di Young (variabili non fatte variare), dato che l'effetto di queste tre variabili viene riassunto dal parametro Φ . In conclusione, per i problemi piani di contatto progressivo tipo "pin in plate", si riesce a costruire diagrammi che tengono conto dell'effetto del carico (ed anche del gioco e del modulo di Young).

Come lavoro futuro, si ritiene di poter diagrammare, tramite l'impiego del parametro Φ , il fattore di effetto intaglio per gli accoppiamenti cilindrici forcilla-spinotto e piede di biella-spinotto, completando così le analisi meccaniche sul collegamento a forcilla e spinotto di [7], e sul piede di biella di [8], nelle quali gli effetti del carico e del gioco vengono esplorati soltanto per particolari configurazioni.

Tabella 1. Esempio di utilità del parametro di caricamento Φ .

	Case 1	Case 2
head radius	15.875 mm	17.763 mm
layer inner radius	16.125 mm	18.0 mm
layer outer radius	18.125 mm	20.23 mm
layer inner to outer radii ratio	0.8897	0.8897
initial radial clearance	0.25 mm	0.237 mm
Elastomeric layer thickness	2 mm	2.23 mm
Young's modulus	8.506 MPa	5.0 MPa
Poisson's ratio	0.49942	0.49942
applied load	8044 N	5000 N
loading parameter Φ	234.6	234.6
Normalised peak contact pressure	2.05	2.05
Normalised maximum interface shear stress	0.182	0.182
contact angle	1.27 rad	1.27 rad
angle defining the position of the maximum interface shear stress	0.80 rad	0.80 rad

Nei casi assialsimmetrici di contatti progressivi tipo "ball in socket", il parametro Φ diventa $P/(ECR)$, dove P è il carico totale, e R un raggio di riferimento, per esempio il raggio della sfera. Tale approccio normalizzante risulta utile nello studio di problemi di contatto in protesi d'anca. Nello studio effettuato in [9] sulle protesi d'anca di tipo sofficce, l'utilità del parametro Φ appare evidente, dato che si riesce a riassumere gli effetti meccanici del gioco iniziale, carico, modulo di Young e dimensioni della protesi tramite una unica variabile. La Tabella 1, estratta da [9], confronta due geometrie di protesi che differiscono nel raggio della testa, nei raggi interno ed esterno dello strato

elastomerico, nel gioco iniziale, nel modulo di Young e nel carico applicato. Tali geometrie sono però uguali per quel che riguarda il rapporto tra raggio interno ed esterno dello strato elastomerico e, soprattutto, il parametro di caricamento Φ . Appare dalla Tabella I che la pressione massima di contatto opportunamente normalizzata, la tensione tagliante massima all'interfaccia tra strato elastomerico e supporto metallico, opportunamente normalizzata, l'ampiezza angolare dell'arco di contatto e la posizione angolare dove cade il massimo di tensione tangenziale di interfaccia, rimangono invariate per le due geometrie.

5. CONCLUSIONI

Una catalogazione dei problemi di contatto aderente alle necessità pratiche della Costruzione di Macchine prevede la distinzione dei contatti in quattro diversi tipi, e cioè contatti stazionari, progressivi, recessivi, e regressivi. Nei contatti stazionari e recessivi la risposta meccanica rispetto al carico è lineare, e quindi risulta possibile compilare diagrammi di concentrazione di tensione normalizzati rispetto al carico. Nei contatti di tipo progressivo o regressivo, invece, il comportamento nonlineare non permette in genere di costruire diagrammi di concentrazione di tensione normalizzati rispetto al carico. È stato tuttavia recentemente mostrato che, nei contatti progressivi tipo "pin in plate" o "ball in socket", è possibile definire un coefficiente di normalizzazione rispetto al carico ed al gioco iniziale, il quale a sua volta permette di compilare diagrammi di effetto intaglio normalizzati rispetto al carico. Il metodo di costruzione di tali diagrammi e l'utilità del coefficiente di normalizzazione sono stati evidenziati tramite un esempio estratto dal campo delle protesi d'anca.

BIBLIOGRAFIA

[1] Barber, J.R., and Ciavarella, M., 2000. "Contact mechanics". *Int. J. Solids and Structures*, **37**, pp. 29-43.

[2] Gladwell, G.M.L., 1980. *Contact problems in the classical theory of elasticity*. Sijthoff & Noordhoff, The Netherlands.

[3] Williams, M.L., 1952. "Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending". Proc. First U.S. Natl. Congress on Appl. Mech., pp. 325-329.

[4] Johnson, K.L., 1985. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press.

- [5] Hills, D.A., Nowell, D., and Sackfield, A., 1993. *Mechanics of Elastic Contacts*. Butterworth-Heinemann, Oxford.
- [6] Ciavarella, M., Baldini, A., Barber, J.R., and Strozzi, A., 2006. "Reduced dependence on loading parameters in almost conforming contacts". *Int. J. Mech. Sci.*, **48**, pp. 917-925.
- [7] Strozzi, A., Baldini, A., and Nascimbeni, M., 2006. "Maximum equivalent stress in a pin-loaded lug subject to inclined loading". *J. Strain Analysis*, **41**, pp. 297-309.
- [8] Strozzi, A., and De Bona, F., 2005. "Hoop stresses in the con-rod small end". *Proc. IMechE part D*, **219**, pp. 1331-1345.
- [9] Ciavarella, M., Strozzi, A., Baldini, A., and Giacomini, M., 2007. "Normalization of load and clearance effects in ball-in-socket-like replacements". *Proc. IMechE part H*, **221**, pp. 601-611.

Indice degli Autori

Andrisano A.O.	1
Castagnetti D.	69
Catania G.	25
Cocconcelli M.	53
Dalpiaz G.	155
Dragoni E.	69
Franci R.	89
Freddi A.	109
Innocenti C.	129
Medri G.	141
Molari P.G.	171
Mucchi E.	155
Parenti Castelli V.	89
Prati E.	185
Rivola A.	203
Rubini R.	53
Sancisi N.	89
Silvestri M.	185
Sorrentino S.	25
Spaggiari S.	69
Strozzi A.	217
Tasora A.	185