A - 4

Karakteristik Operator Positif Pada Ruang Hilbert

Gunawan
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Muhammadiyah Purwokerto
gun.oge@gmail.com

Abstrak-Pada artikel ini akan dibahas mengenai definisi, contoh, sifat- sifat aljabar, dan beberapa karakteristik operator positif pada ruang Hilbert. Untuk menyelidiki karakteristik operator positif diperlukan konsep operator invertibel, operator self adjoint, dan operator normal pada ruang Hilbert. Pada ruang Hilbert terdapat jenis-jenis operator linear terbatas diantaranya operator invertibel, operator normal, dan operator self adjoint. Operator positif memiliki hubungan dengan operator invertibel, operator normal, dan operator self adjoint. Hubungan- hubungan tersebut dapat digambarkan sebagai berikut
Operator Positif $\Leftrightarrow$ Operator Self Adjoint $\Rightarrow$ Operator Normal. Hal tersebut kemudian membawa pemikiran untuk menyelidiki karakteristik operator positif. Pembahasan mengenai karakteristik operator positif pada tulisan ini, lebih ditekankan pada memahami definisi, contoh, sifat- sifat aljabar, dan karakteristik operator positif pada ruang Hilbert. Hasil penelitian yang diperoleh adalah sifat- sifat aljabar operator positif diantaranya sifat penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Selain itu, apabila T operator positif maka T operator self adjoint dan jika T operator self adjoint maka T operator normal. Dengan demikian, apabila T operator positif maka T operator normal.

Kata kunci: Operator Invertibel, Operator Normal , Operator Positif , Operator Self Adjoint , dan Ruang Hilbert.

I. PENDAHULUAN

Di dalam analisis khususnya analisis fungsional, beberapa ruang yang sering dibicarakan adalah ruang linear, ruang bernorma, ruang Banach, ruang Pre-Hilbert, dan ruang Hilbert. Ruang pre-Hilbert merupakan ruang linear X yang dilengkapi dengan fungsi yang memetakan setiap anggota $X \times X$ ke suatu bilangan kompleks dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Fungsi inilah yang kemudian dikenal dengan produk skalar (*inner product*) pada X. Ruang pre-Hilbert yang lengkap disebut ruang Hilbert. Pemetaan dari suatu ruang linear ke ruang linear yang lain atau dari suatu ruang linear ke ruang linear yang sama disebut operator. Diberikan ruang Hilbert X dan Y atas lapangan yang sama, yaitu F. Lapangan F yang dimaksud pada tulisan ini adalah $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Operator $T : X \to Y$ dikatakan *linear* jika untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in F$ berlaku $T(x+y) = T(x)+T(y)$ dan $T(\alpha x) = \alpha T(x)$. Operator linear $T : X \to Y$ dikatakan *terbatas* jika terdapat konstanta $M \geq 0$ sehingga $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ untuk setiap $x \in X$. Himpunan semua operator linear terbatas dari X ke Y ditulis $B(X,Y)$. Lebih lanjut, dalam hal $X = Y$, $B(X,X)$ dituliskan $B(X)$ atau $B(Y)$.

Diberikan ruang Hilbert H atas lapangan F , himpunan semua operator linear terbatas dari H ke H ditulis $B(H)$, dan $T \in B(H)$. Lapangan F yang dimaksudkan di tulisan ini adalah $\mathbb{C}$ (bilangan kompleks). Operator linear kontinu T yang memiliki sifat $\langle T(x), x\rangle \geq 0$ untuk setiap $x \in H$ disebut sebagai operator positif. Selanjutnya, operator positif T dinotasikan $T \geq 0$. Pada ruang Hilbert terdapat jenis-jenis operator linear terbatas diantaranya operator invertibel, operator normal, dan operator self adjoint. Operator positif memiliki hubungan dengan operator invertibel, operator normal, dan operator self adjoint. Hubungan- hubungan tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:

ISBN. 978-602-73403-0-5

Operator Positif $\Leftrightarrow$ Operator Self Adjoint $\Rightarrow$ Operator Normal.

Hal tersebut kemudian membawa pemikiran untuk menyelidiki karakteristik operator T yang memiliki sifat $\langle T(x), x\rangle \geq 0$, untuk setiap $x \in H$. Pembahasan mengenai karakteristik operator positif pada tulisan ini, lebih ditekankan pada memahami definisi, contoh, sifat- sifat aljabar, dan karakteristik operator positif pada ruang Hilbert. Rumusan masalah yang dibuat adalah bagaimana karakteristik atau sifat-sifat operator positif. Dalam penelitian ini hanya dibatasi pada ruang Hilbert. Tujuan penelitian ini adalah untuk memberikan pemahaman dan pengetahuan mengenai sifat- sifat dan karakteristik operator positif pada ruang Hilbert. Pembahasan mengenai operator positif pada ruang Hilbert bermanfaat membantu mengembangkan ilmu matematika dan aplikasinya, khususnya analisis fungsional.

Pembahasan tentang operator positif pada ruang Hilbert diawali dengan pendefinisian operator adjoint, operator self adjoint, dan operator normal kemudian dilanjutkan dengan pembahasan mengenai operator positif pada ruang Hilbert. Dalam pendefinisian operator adjoint diperlukan penjelasan mengenai Teorema Representasi Riesz. Untuk pembahasan tentang konsep ruang Hilbert, operator adjoint, operator self adjoint, dan operator normal diacu dari buku Kreyszig (1978), Weidmann (1980), dan Berberian (1961). Selanjutnya, dalam pembahasan mengenai operator pada ruang Hilbert diperlukan penjelasan mengenai konsep konsep pemetaan linear kontinu pada ruang bernorma diacu dari buku Kreyszig (1978) dan Weidmann (1980). Selanjutnya Berberian (1961) dalam bukunya secara lengkap membahas tentang operator pada ruang Hilbert. Pembahasan mengenai karakteristik operator positif pada ruang Hilbert diacu dari buku Furuta (2002).

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang definisi, contoh, sifat-sifat aljabar, dan karakteristik operator positif pada ruang Hilbert. Untuk menyelidiki karakteristik operator positif pada ruang Hilbert terlebih dahulu akan disampaikan mengenai operator adjoint, operator self adjoint, operator normal, dan operator invertibel.

A. *Operator Adjoint*

Terlebih dahulu akan disampaikan Teorema Representasi Riesz, Teorema ini merupakan eksistensi dari operator adjoint pada ruang Hilbert

Teorema 1. (*Teorema Representasi Riesz*). Diketahui H ruang Hilbert. Jika T sebarang fungsional linear terbatas pada H maka terdapat dengan tunggal $y \in H$ sehingga $T(x) = \langle x, y\rangle, \forall x \in H$.[1]

Bukti: Diketahui T sebarang fungsional linear terbatas. Misalkan $A = N(T) = \{x \in H : T(x) = 0\}$.

Diperoleh A ruang bagian tertutup H. Karena A ruang bagian tertutup dari H, maka $H = A \oplus A^{\perp}$. Selanjutnya,

1) Jika $T = O$ maka diambil $y = \theta$ sehingga teorema terbukti.
2) Jika $T \neq O$ maka $A \neq H$. Karena jika $A = H$ maka untuk sebarang $x \in H$ berakibat $T = O$. Oleh karena itu, $A \neq H$ maka $A^{\perp} \neq \{\theta\}$. Jadi, dapat diambil $z \in A^{\perp} \setminus \{\theta\}$. Karena $A \cap A^{\perp} = \{\theta\}$ maka $T(z) \neq \theta$. Dibentuk $y = \dfrac{\overline{T(z)}.z}{\|z\|^2} \in A^{\perp}$, diperoleh :

$$\langle z, y\rangle = \left\langle z, \frac{\overline{T(z)}.z}{\|z\|^2}\right\rangle = \frac{T(z)}{\|z\|^2}\langle z, z\rangle = T(z).$$

Untuk $y \in A^{\perp}, y \neq \theta$ maka $\langle y, y\rangle = T(y)$. Untuk $x \in H$, x dapat ditulis sebagai

$x = \dfrac{T(x)}{T(y)} y + \left(x - \dfrac{T(x)}{T(y)} y\right)$, dengan $\left(x - \dfrac{T(x)}{T(y)} y\right) \in$ A, sebab

$\left(x - \dfrac{T(x)}{T(y)} y\right) = T(x) - \dfrac{T(x)}{T(y)} T(y) = 0.$

Karena $\left(x - \dfrac{T(x)}{T(y)} y\right)$ orthogonal terhadap y, maka :

$$\left\langle x-\frac{T(x)}{T(y)}y,y\right\rangle=0$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle-\left\langle\frac{T(x)}{T(y)}y,y\right\rangle=0$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle=\frac{T(x)}{T(y)}\langle y,y\rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle=T(x)$$

Diperoleh $T(x)=\langle x,y\rangle,\forall x\in H$. Selanjutnya akan dibuktikan y tunggal. Diambil sebarang $y'\in H$ maka $T(x)=\langle x,y'\rangle,\forall x\in H$. Karena $T(x)=\langle x,y\rangle$ maka untuk setiap $x\in H$ diperoleh:

$$\langle x,y\rangle=\langle x,y'\rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle-\langle x,y'\rangle=0$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y-y'\rangle=0$$

$$\Leftrightarrow y-y'=0\Rightarrow y=y'$$

Jadi, y tunggal. Dengan demikian $T(x)=\langle x,y\rangle,\forall x\in H$. □

Teorema 2. Diketahui H dan K ruang Hilbert. Untuk setiap $T:H\to K$ operator linear kontinu, maka terdapat dengan tunggal operator linear kontinu $T^*:K\to H$ sehingga untuk setiap $x\in H$ dan $y\in K$, berakibat $\langle T(x),y\rangle=\langle x,T^*(y)\rangle$. [1]

Bukti: Diambil sebarang $T\in L_c(H,K)$ dan $y\in K$. Dibentuk fungsional φ_y pada H dengan $\varphi_y(x)=\langle T(x),y\rangle,\forall x\in H$. Fungsional φ_y merupakan fungsional linear kontinu pada H sebab:

1) Untuk setiap $x_1,x_2\in H$ dan skalar α diperoleh:

   $\varphi_y(x_1+x_2)=\langle T(x_1+x_2),y\rangle=\langle T(x_1),y\rangle+\langle T(x_2),y\rangle=\varphi_y(x_1)+\varphi_y(x_2)$ dan

   $\varphi_y(\alpha x_1)=\langle T(\alpha x_1),y\rangle=\alpha\langle T(x_1),y\rangle=\alpha\varphi_y(x_1)$

2) Untuk setiap $x\in H$ diperoleh:

   $|\varphi_y(x)|=|\langle T(x),y\rangle|\le\|T(x)\|\|y\|\le\|T\|\|x\|\|y\|$

Karena untuk setiap $y\in K$, φ_y merupakan pemetaan linear kontinu pada H maka menurut Teorema 1, terdapat dengan tunggal $y'\in H$ sehingga untuk setiap $x\in H$ berlaku $\varphi_y(x)=\langle x,y'\rangle$. Berarti jelas bahwa untuk setiap $y\in K$ menentukan dengan tunggal $y'\in H$. Jadi terdapat operator $T^*:K\to H$ dengan $T^*(y)=y',\forall y\in K$. Oleh karena itu diperoleh :

$$\varphi_y(x)=\langle T(x),y\rangle=\langle x,y'\rangle=\langle x,T^*(y)\rangle$$

Jelas bahwa T^* tunggal. Selanjutnya operator T^* linear dan kontinu, sebab :

1) Untuk setiap $y_1,y_2\in K$, $x\in H$, dan α,β skalar diperoleh:

$$\begin{aligned}\langle x,T^*(\alpha y_1+\beta y_2)\rangle&=\langle T(x),\alpha y_1+\beta y_2\rangle\\&=\langle T(x),\alpha y_1\rangle+\langle T(x),\beta y_2\rangle\\&=\alpha^*\langle T(x),y_1\rangle+\beta^*\langle T(x),y_2\rangle\\&=\alpha^*\langle x,T^*(y_1)\rangle+\beta^*\langle x,T^*(y_2)\rangle=\langle x,\alpha T^*(y_1)\rangle+\langle x,\beta T^*(y_2)\rangle\end{aligned}$$

2) Untuk setiap $x\in H$ diperoleh:

a. Jika $x=\theta$ maka, $0=\left\|T^{*}(\theta)\right\|^{2}=\left\langle T^{*}(\theta),T^{*}(\theta)\right\rangle=\left\langle \theta,TT^{*}(\theta)\right\rangle\leq\|T\|\|\theta\|\left\|T^{*}(\theta)\right\|=0.$

b. Jika $x\neq\theta$ maka,

$$\left\|T^{*}(x)\right\|^{2}=\left\langle T^{*}(x),T^{*}(x)\right\rangle=\left\langle x,TT^{*}(x)\right\rangle\leq\|T\|\|x\|\left\|T^{*}(x)\right\|$$

$$\Leftrightarrow\left\|T^{*}(x)\right\|\leq\|T\|\|x\|.$$

Diambil $M=\|T\|$. Diperoleh $M\geq 0$, sehingga $\left\|T^{*}(x)\right\|\leq M\|x\|$. Jadi, T^{*} terbatas.

Dengan demikian, terbukti bahwa untuk setiap $T\in L_C(H,K)$ terdapat dengan tunggal $T^{*}\in L_C(K,H$` sehingga:

$\left\langle T(x),y\right\rangle=\left\langle x,T^{*}(y)\right\rangle,\forall x\in H$ dan $y\in K.$ □

Setelah disampaikan mengenai Teorema Representasi Riesz, berikut ini akan dibahas mengenai definisi operator adjoint.

Definisi 3. Operator linear kontinu T^{*} seperti yang dijelaskan pada Teorema 2 disebut operator adjoi dari *T*.

B. *Operator Self Adjoint*

Setelah disampaikan mengenai definisi operator adjoint, berikut ini akan dibahas mengenai operator self adjoint.

Definisi 4. Diketahui *H* ruang Hilbert dan $T\in B(H)$. Operator *T* dikatakan *self- adjoint* jika $T^{*}=T$.

Teorema 5. Diketahui *H* ruang Hilbert dan $T\in B(H)$. Pernyataan- pernyataan berikut ekuivalen:

1) *T* self adjoint
2) $\left\langle T(x),y\right\rangle=\left\langle x,T(y)\right\rangle,\forall x,y\in H$
3) $\left\langle T(x),x\right\rangle=\left\langle x,T(x)\right\rangle,\forall x\in H$
4) $\left\langle T(x),x\right\rangle$ bilangan real, $\forall x\in H$.[2]

Bukti:

$1)\Rightarrow 2)$ Diambil sebarang $x,y\in H$. Diperoleh:

$\left\langle T(x),y\right\rangle=\left\langle T^{*}(x),y\right\rangle=\left\langle x,T(y)\right\rangle$. Jadi, $\left\langle T(x),y\right\rangle=\left\langle x,T(y)\right\rangle,\forall x,y\in H$.

$2)\Rightarrow 3)$ Jelas dari yang diketahui.

$3)\Rightarrow 4)$ Diambil sebarang $x\in H$:

$\overline{\left\langle T(x),x\right\rangle}=\left\langle x,T(x)\right\rangle=\left\langle T(x),x\right\rangle$. Diperoleh $\left\langle T(x),x\right\rangle$ bilangan real $\forall x\in H$.

$4)\Rightarrow 1)$ Diambil sebarang $x\in H$:

$\left\langle T(x),x\right\rangle=\overline{\left\langle T(x),x\right\rangle}=\left\langle x,T(x)\right\rangle=\left\langle T^{*}(x),x\right\rangle$.

Jadi, untuk setiap $x\in H$, $T^{*}=T$ (*T self adjoint).*

□

C. *Operator Normal*

Berikut ini akan dibahas mengenai operator normal.

Definisi 6. Diketahui *H* ruang Hilbert dan $T\in B(H)$. Operator *T* dikatakan *normal* jika $T^{*}T=TT^{*}$.

Teorema 7. Diketahui *H* ruang Hilbert dan $T\in B(H)$. Jika *T* self adjoint maka *T* normal.[2]

Bukti: Diketahui $T^{*}=T$. Diambil sebarang $x\in H$.

$\left\langle T^{*}T(x),x\right\rangle=\left\langle TT^{*}(x),x\right\rangle$. Jadi, $T^{*}T=TT^{*}$. Dengan demikian, *T* normal.

□

D. *Operator Invertibel*

Definisi 8. Diketahui X ruang bernorma atas lapangan F dan $T : X \to X$. Operator T *invertibel* atau mempunyai invers jika terdapat operator S pada X sehingga $ST=TS=I$, dengan I operator identitas pada X. Selanjutnya, S dituliskan T^{-1} dan dikenal sebagai invers dari T.

Lemma 9. Diketahui H ruang Hilbert dan $T \in B(H)$. Jika T positif maka T invertibel.[3]

Bukti: Akan ditunjukkan T injektif dan surjektif. Diambil sebarang $x_1, x_2 \in H$ dengan $T(x_1) = T(x_2)$, $\|T(x_1 - x_2)\| = \|T(x_1) - T(x_2)\| = \|\theta\| = 0.$ Diperoleh, $T(x_1 - x_2) = \theta$. Jadi, $x_1 - x_2 = \theta.$ Jadi, $x_1 = x_2$. Dengan demikian, T injektif.

Lemma 10. Diketahui H ruang Hilbert dan $T \in B(H)$. Jika T invertibel maka T^* invertibel.[3]

Bukti: Diketahui T invertibel berarti T iinjektif dan surjektif. Akan ditunjukkan T^* injektif dan surjektif.

1) Diambil sebarang $x_1, x_2 \in H$ dengan $T^*(x_1) = T^*(x_2)$. Perhatikan bahwa,

   $$\|T^*(x_1) - T^*(x_2)\| = \|T^*(x_1 - x_2)\| = 0$$

   $$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

   Jadi, T^* injektif.

2) Karena $T \in B(H)$ maka $T^* \in B(H)$. Diambil sebarang $y \in H$ berarti terdapat $x \in H$ sehingga $T^*(x) = y$. Jadi, $y \in R(T^*)$. Dengan demikian, T^* surjektif.

Berdasarkan 1) dan 2), diperoleh T^* invertibel.

□

E. *Karakteristik Operator Positif Pada Ruang Hilbert*

Selanjutnya akan dibahas mengenai definisi, contoh, sifat-sifat aljabar, dan karakteritik operator positif.

Definisi 11. Diketahui H ruang Hilbert dan $T \in B(H)$. Operator T dikatakan positif jika untuk setiap $x \in H$ berlaku $\langle T(x), x\rangle \geq 0$. Selanjutnya, operator positif T dinotasikan $T \geq 0$.

Contoh 12. Diberikan ruang Hilbert ℓ^2. Didefinisikan operator $T : \ell^2 \to \ell^2$ dengan $T(x_1, x_2, ...) = \left(0, x_2, x_3, ...\right), \forall \left(x_1, x_2, ...\right) \in \ell^2$. Akan ditunjukkan T positif. Diambil sebarang $\left(x_1, x_2, ...\right) \in \ell^2$,

$$\left\langle T(x_1, x_2, ...), (x_1, x_2, ...)\right\rangle = \left\langle (0, x_2, ...), (x_1, x_2, ...)\right\rangle = \sum_{k=2}^{\infty} |x_k|^2 \geq 0.$$

Menurut Definisi 11, T positif. □

Berdasarkan definisi operator positif di atas, dapat diselidiki mengenai sifat-sifat aljabar operator positif pada ruang Hilbert.

Teorema 13. Diketahui H ruang Hilbert. Jika $\alpha \geq 0$ dan $P, Q \in B(H)$ positif maka

1) $\left(P + Q\right)$ operator positif
2) $\left(\alpha P\right)$ operator positif

Bukti: Diambil sebarang $x \in H$.

1) $\left\langle \left(P + Q\right)(x), x\right\rangle = \left\langle P(x) + Q(x), x\right\rangle = \left\langle P(x), x\right\rangle + \left\langle Q(x), x\right\rangle \geq 0$.

   Jadi, $\left(P + Q\right)$ merupakan operator positif.

2) $\left\langle \alpha P(x), x\right\rangle = \alpha \left\langle P(x), x\right\rangle \geq 0$.

   Jadi, $\left(\alpha P\right)$ merupakan operator positif. □

Berikut akan disampaikan mengenai hubungan antara operator self adjoint dan operator positif serta operator positif dan operator normal.

Lemma 14. Diketahui H ruang Hilbert dan $T \in B(H)$.
T positif jika dan hanya jika T self adjoint.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Andaikan T bukan self adjoint berarti ada $x \in H$ sehingga $T(x) \neq T^{*}(x)$. Karena $T, T^{*} \in B(H)$ maka $x \neq \theta$. Jadi, diperoleh :

$$\langle T(x), x \rangle \neq \langle T^{*}(x), x \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle T(x), x \rangle \neq \langle x, T(x) \rangle = \overline{\langle T(x), x \rangle}.$$

Hal ini kontradiksi dengan $T \geq 0$. Pengandaian salah, yang benar adalah $T = T^*$ (*self adjoint*).

$(\Leftarrow)$ Diketahui T self adjoint berarti untuk sebarang $x \in H$,

$\langle T(x), x \rangle = \langle x, T^{*}(x) \rangle = \langle x, T(x) \rangle = \overline{\langle T(x), x \rangle}$. Karena $\langle T(x), x \rangle = \overline{\langle T(x), x \rangle}$ maka $\langle T(x), x \rangle \geq 0$.

Dengan demikian, T positif. □

Lemma 15. Diketahui H ruang Hilbert dan $T \in B(H)$. Jika T positif maka T normal.[4]

Bukti: Karena T positif maka menurut Lemma 14, T self adjoint. Karena T self adjoint maka menurut Teorema 7, T normal. □

III. KESIMPULAN DAN SARAN

A. *Kesimpulan*

Berdasarkan pembahasan di atas, kesimpulan yang dapat diambil adalah jika diberikan H ruang Hilbert atas lapangan F maka operator linear kontinu T dikatakan positif apabila operator T memenuhi sifat $\langle T(x), x \rangle \geq 0$, untuk setiap $x \in H$. Lebih lanjut, apabila $\alpha \geq 0$ dan $P, Q \in B(H)$ positif maka $(P+Q)$ dan (αP) merupakan operator positif. Selain itu, jika T operator positif maka T operator self adjoint dan jika T operator self adjoint maka T operator normal. Dengan demikian, jika T operator positif maka T operator normal.

B. *Saran*

Dalam tulisan ini, penulis hanya membahas mengenai beberapa sifat-sifat operator positif pada ruang Hilbert. Untuk peneliti selanjutnya, diharapkan dapat menentukan sifat lain dari operator positif pada ruang Hilbert, diantaranya menyelidiki dekomposisi polar dari operator positif dan spektrum dari operator positif.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Berberian, S.K.1961. *Introduction to Hilbert Spaces*. New York: Oxford University Press.
[2] Kreyszig, E.1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley and Sons.
[3] Weidmann, J. 1980. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. New York: Springer-Verlag.
[4] Furuta, T. 2002. *Invitation to Linear Operators*. New York: Taylor and Francis.