

*SOLUCIONES SUBCRÍTICAS EN EL PROBLEMA DE
PRESCRIBIR CURVATURA MEDIA EN LA BOLA*

ÁLVARO ALFREDO ORTIZ LUGO

*UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2010*

*SOLUCIONES SUBCRÍTICAS EN EL PROBLEMA DE
PRESCRIBIR CURVATURA MEDIA EN LA BOLA*

ÁLVARO ALFREDO ORTIZ LUGO

*Trabajo de Grado Presentado Como Requisito Parcial
Para Optar al Título de Magister en Matemáticas*

*Director
Gonzalo García Camacho. Ph.D.*

*UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI*

2010

Nota de aceptación

.

.

.

Santiago de Cali, Junio de 2010.

Dedicado a:

*Fabio Maya, Francisco Soto, Gonzalo García, Nihóburo Hong y Álvaro Ortiz
Rodríguez.*

Mis maestros.

He deals the cards as a meditation. And those he plays never suspect. He doesn't play for the money he wins. He doesn't play for respect. He deals the cards to find the answer. The sacred geometry of chance. The hidden law of probable outcome. The numbers lead a dance...

The Shape of My heart, Sting (1993)

Agradecimientos

Alcanzar una meta no es más que terminar un camino. De ésta lo más importante y lo que siempre llevamos en nuestras mentes y corazones, es como fue el recorrido que llevamos antes de llegar, las personas que estuvieron a tu lado y las cosas que se aprendieron mientras se avanzaba. Por esto quiero agradecer a las personas que fueron parte de ese camino que termina con la culminación de este trabajo.

Comenzando con mi director de tesis, amigo y compañero en este trabajo, Gonzalo García Camacho, tanto por su paciencia y su apoyo cuando los momentos fueron difíciles, como por las enseñanzas en la matemática y de la vida misma que me llevo de él.

A mis compañeros de maestría con los cuales aprendimos los unos de los otros diferentes cosas, tanto en lo laboral como en lo académico y cuya camaradería siempre hacia más agradable los días.

A mis amigos, Diana Gasca, Javier Morcillo y Julián Sánchez que siempre han estado allí, bajo cualquier viento, marea o distancia. A Xiang Hong y a Lucy Ortiz que se hicieron un lugar especial durante este tiempo. A Ángela María Martínez y a mi familia, que fueron un apoyo incondicional ante todas las cosas, y finalmente al posgrado de matemáticas tanto por su apoyo con la asistencia de docencia como con el programa formativo que me ofreció. A todos ustedes.

GRACIAS.

Índice general

1. Introducción	8
2. Preliminares	11
2.1. Geometría	11
2.1.1. Variedades	11
2.1.2. Campos Vectoriales	12
2.1.3. Métricas Riemannianas	14
2.1.4. Conexión	15
2.1.5. Geodésicas	18
2.1.6. Curvatura	20
2.1.7. Transformaciones conformes	24
2.1.8. La segunda forma	27
2.2. Análisis Funcional	34
2.2.1. Espacios de Sobolev	34
2.2.2. El Teorema de Encaje de Sobolev	37
2.2.3. Teorema de la divergencia	38
2.3. Cálculo de variaciones	39
2.3.1. La primera variación y ecuación de Euler-Lagrange	39
3. Estimativos a Priori	44
3.1. Extensión de la proyección estereográfica a la bola	44
3.2. Soluciones en el caso $h = 1$	52
3.3. Relaciones sobre la Bola	54
3.4. Transformación conforme	61
3.5. Estimativos sobre J_p	64
4. Resultado principal	80
4.1. El esquema variacional	80
4.2. La demostración del teorema (3.1.6)	83

Capítulo 1

Introducción

Consideremos la bola unitaria (B^n, g_0) , donde $n \geq 3$ y g_0 es la métrica euclidiana. La bola unitaria B^n con la métrica euclidiana tiene curvatura escalar nula en el interior de la bola y curvatura media constante $h_0 = 1$ sobre la frontera, ∂B^n , de B^n ; un problema clásico de la geometría diferencial es la caracterización de las parejas de funciones R y h , con R definida sobre la bola, h definida sobre su frontera, tal que exista una métrica g , conforme a la métrica g_0 , con curvatura escalar prescrita R sobre la bola, y curvatura media prescrita h sobre ∂B^n .

Dadas las funciones R y h , la existencia de tal métrica g es equivalente a la existencia de una función suave u que satisface las siguientes ecuaciones diferenciales parciales elípticas en el exponente crítico de Sobolev.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_g u + \frac{(n-2)}{4(n-1)} R u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0 & \text{en } B^n, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{(n-2)}{2} u = h \frac{(n-2)}{2} u^{n/(n-2)} & \text{sobre } \partial B^n, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Este problema ha recibido bastante atención en la literatura y varios autores han encontrado condiciones suficientes sobre las funciones R y h para la existencia de g ver ([2] [4] [6] [7] [10]) sin embargo, existen todavía grandes diferencias entre éstas y las condiciones necesarias.

Un problema abierto ha sido pensar si la condición de tipo Kazdan-Warner que ya es necesaria, es una condición suficiente. En el caso de h rotacionalmente simétrica, la condición Kazdan Warner es:

$$h'(r) \text{ cambia de signo y } h > 0 \text{ en algún punto.}$$

En el trabajo [12] se encontró que si R es nula y la función $h : \partial B^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función

radial que satisface la condición siguiente:

$$(i) \ h(x) > 0 \text{ y } \frac{\partial h}{\partial r} \leq 0 \text{ si } |x| < 1$$

$$(ii) \ h(x) \leq 0 \text{ si } |x| \geq 1$$

Donde $\frac{\partial h}{\partial r}$ es la derivada radial de la función f , entonces nuestro sistema de ecuaciones diferenciales no tiene solución. En particular muestra que para h rotacionalmente simétrica y monótona nuestro problema no tiene solución.

En este trabajo nos proponemos investigar si el hecho que $\frac{\partial h}{\partial r}$ cambie de signo donde h es positiva es también condición suficiente para resolver la existencia de la métrica g . Para tal fin realizaremos estimativos a priori apoyándonos en las ideas mostradas en [3] sobre un problema similar en la esfera. Más exactamente el propósito de este trabajo es demostrar la existencia de soluciones subcríticas del problema:

Proposición 1.0.1. *Sea $n \geq 3$ y $h = h(r)$ una función suave definida sobre ∂B^n con simetría respecto al eje x_n . Supongamos que h tiene por lo menos dos máximos locales positivos y satisface una condición de suavidad cerca de todo punto crítico τ_0 de la forma:*

$h(r) = h(\tau_0) + a|\tau - \tau_0|^\alpha + o(1)$ con $a \neq 0$ y $n - 3 < \alpha < n - 1$. Si $h'(r)$ cambia de signo en las regiones donde $h > 0$ entonces la ecuación:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_g u = 0 & \text{en } B^n, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{(n-2)}{2}u = h \frac{(n-2)}{2}u^p & \text{sobre } \partial B^n, \end{array} \right. \quad (1.2)$$

donde $1 < p < \frac{n}{n-2}$ tiene solución.

En este resultado agregamos a la condición tipo Kazdan-Warner una condición de suavidad, básicamente usamos que en cada punto crítico de h las derivadas de h se hacen cero hasta las de orden $(n - 3)$ y algunas derivadas de orden superior ($< (n - 1)$) son distintas de cero. De esta manera podemos probar que la condición Kazdan-Warner es también suficiente.

La cantidad de maquinaria que es necesaria para encarar la prueba del resultado que queremos llegar no es en extremo alta; en general la demostración podría hacerse de una manera corta; si se obviara el hecho de introducir todos los conceptos, y suponer que el lector posee ya muchos de estos presupuestos, sin embargo, es la idea de que la lectura de este trabajo esté al alcance de todos, y por tanto presentaremos aquí una demostración del resultado clara y con una definición de conceptos auto contenida; dando

las definiciones pertinentes y demostrando la mayor cantidad de resultados intermedios que se hacen indispensables en el momento de entender la esencia de la prueba.

Sin embargo aunque la fácil lectura para todos es una idea personal, no es la intención escribir un curso básico de geometría Riemanniana y aunque esta parte será más detallada que la que incluye los prerequisites de análisis funcional y cálculo variacional; será imperativo suponer algunos resultados y obviar algunos detalles. En el capítulo 2 llevaremos a cabo una recopilación de los preeliminares necesarios en geometría diferencial, análisis variacional y ecuaciones diferenciales apoyado en la presentación hecha en [1], [5], [8], [13], [15].

En el capítulo 3 realizaremos la extensión de la proyección estereográfica, la cual resulta vital para poder construir nuestra prueba y realizaremos estimativos a priori sobre los funcionales definidos por el problema en intención de crear un esquema variacional para probar nuestro resultado.

En el capítulo 4 abordaremos la demostración del resultado, consolidando el esquema variacional que se construyó en el capítulo anterior y usando éste para la prueba tipo paso de montaña que nos dará la prueba del resultado.

Capítulo 2

Preeliminarios

2.1. Geometría

2.1.1. Variedades

Una variedad M de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff en el que cada punto de M , tiene un entorno homeomórfico a \mathbb{R}^n , además es localmente compacto y localmente conexo.

Definición 2.1.1 (Variedad diferenciable). *Una variedad diferenciable de dimensión n es un conjunto M y una familia de funciones inyectivas $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M\}$ definidas en subconjuntos abiertos U_α de \mathbb{R}^n tal que:*

1. $\bigcup_{\alpha \in A} \phi_\alpha(U_\alpha) = M$
2. Para α, β con $\phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ los conjuntos $\phi_\alpha^{-1}(W)$ y $\phi_\beta^{-1}(W)$ son abiertos en \mathbb{R}^n y la función cambio de coordenadas $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha : \phi_\alpha^{-1}(W) \rightarrow \phi_\beta^{-1}(W)$ es diferenciable.

La familia de parametrizaciones $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ será llamada un atlas de la variedad y $\{\phi_\alpha, U_\alpha\}$ será denominada una carta.

Es importante notar que el atlas induce una estructura diferenciable sobre el conjunto M y a la vez una topología natural sobre M como variedad. Basta definir a un $A \subset M$ como conjunto abierto en M si sólo si $\phi_\alpha^{-1}(A \cap \phi_\alpha(U_\alpha))$ es un abierto en \mathbb{R}^n y las parametrizaciones ϕ_α son continuas.

Definición 2.1.2 (Variedad compacta). *Se dice que una variedad M es compacta si el conjunto M como espacio topológico es compacto.*

Ejemplos de Variedades diferenciables:

1. $M = \mathbb{R}^n$ con $\phi = id$ es el ejemplo trivial de variedad diferenciable.

2. La esfera $M = S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ es una variedad diferenciable de dimensión n , con las cartas definidas así:

para cada índice en $A = \{(1, +), \dots, (n+1, +), (1, -), \dots, (n+1, -)\}$ definimos

$$\phi_i^\pm \text{ del conjunto } D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$$

como

$$\phi_i^\pm(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - (x)^2}, x_i, \dots, x_n).$$

No es difícil ver que este conjunto como espacio topológico es compacto, así que S^n es una variedad compacta n -dimensional.

3. Haz Tangente: sea M una variedad n -dimensional y $\{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}$ su atlas. Definimos $TM = \{(p, u); p \in M, u \in T_p M\}$, provereemos al conjunto TM con la familia de parametrizaciones $\varphi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ dada por:

$$\varphi_\alpha(u, (a_1, \dots, a_n)) = (\phi_\alpha(u), a_1 \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_n})$$

no es difícil ver que TM con el atlas dado es una variedad $2n$ -dimensional, esta variedad es llamado el Haz Tangente.

2.1.2. Campos Vectoriales

Definición 2.1.3. *Un Campo Vectorial X en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada $p \in M$ un vector $X(p) \in T_p M$; en términos de funciones, X es una función de M en el Haz Tangente TM , el campo X se dice diferenciable si la función $X : M \rightarrow TM$ es diferenciable.*

Consideremos una parametrización $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ podemos escribir

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (a)$$

donde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en U y $\{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\}$ la base asociada a ϕ .

Es claro que X es diferenciable si y sólo si los a_i son diferenciables para alguna (y por ende para cualquier) parametrización.

Es conveniente usar la expresión (a) y pensar un Campo Vectorial como una función $X : D \rightarrow F$ del conjunto D de las funciones en M de la siguiente forma:

$$(Xf)_{(p)} = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

dado por abuso la notación escribimos f por $f \circ \phi$ en la parte derecha de la igualdad.

Esta expresión (Xf) no depende de la parametrización ϕ y en este contexto es fácil ver que X es diferenciable si y sólo si $X : D \rightarrow D$ o sea que $Xf \in D$ para toda $f \in D$.

Es importante ver que cuando $X : D \rightarrow D$ satisface las propiedades de Leibniz esto es:

1. $[X(\alpha f + \beta g)]_{(p)} = X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p f + \beta X_p g = \alpha(Xf)_{(p)} + \beta(Xg)_{(p)}$
2. $[X(f.g)]_{(p)} = (X_p f)g_{(p)} + f_{(p)}(X_p g) = [(Xf)_{(p)}]g_{(p)} + f_{(p)}[(Xg)_{(p)}]$.

Ejemplo 2.1.4. *Los campos Vectoriales que trabajaremos principalmente están dados por los campos en \mathbb{R}^n :*

$$X = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n$$

que a cada p le asignan el vector base e_i $i = 1, \dots, n$ que son ortonormales entre sí para $i = 1, \dots, n$ y que forman una base de $T_p(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Una observación que resulta muy útil es que si tomamos dos Campos Vectoriales X y Y en una Variedad M , entonces el operador que se obtiene al conmutar la composición de los operadores asociados con X y Y (es decir al tener $f \rightarrow XYf - YXf$) es un operador que proviene de un Campo Vectorial, este Campo vectorial será llamado el Bracket de X y Y y se denotará por $[X, Y]$.

Definición 2.1.5 (Bracket). *Sean X y Y dos campos vectoriales llamaremos el bracket de estos al campo dado por $[X, Y] = XY - YX$, este campo es diferenciable y está completamente determinada por X y Y .*

Proposición 2.1.6. *Si X, Y y Z son campos vectoriales diferenciables en M . si a, b son reales y f, g funciones diferenciables entonces:*

- a $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticonmutatividad)
- b $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linealidad)
- c $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidad Jacobi)
- d $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

Demostración. (a) y (b) son triviales para demostrar(c) Observemos que:

$$[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

mientras que de otro lado,

$$\begin{aligned}
& [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] \\
& = XYZ - XZY - YZX + ZYX + YZX - YXZ - ZXY + XZY
\end{aligned}$$

Usando la propiedad (a) a la segunda expresión y sumando con la primera se obtiene el resultado ■

Definición 2.1.7. Sea M una variedad diferenciable, denotaremos por $\mathfrak{N}(M)$ al conjunto de todos los Campos vectoriales que pertenecen a $C^\infty(M)$.

De ahora en adelante y cuando no se preste a confusiones denotaremos $x^i \partial_i$ al Campo $X \in \mathfrak{N}(M)$, claramente en notación tensorial.

2.1.3. Métricas Riemannianas

Definición 2.1.8. Sea M una variedad, diremos que g es una métrica Riemanniana si g es una función que asigna a cada $p \in M$ un producto interno $g(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ con la propiedad de que para todo par de campos vectoriales diferenciables X, Y la función $h(p) = g(p)(x(p), y(p))$ definida en M es una función diferenciable.

Definición 2.1.9. Sea g un producto interno o métrica riemanniana en M , diremos que una base $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ en $T_p M$ es ortonormal con respecto a g si $g(p)(\partial_i, \partial_j) = \delta_{ij}$.

De lo anterior es claro que para cualquier vector V en la base $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$

$$V = g(v, \partial_1)\partial_1 + \dots + g(v, \partial_n)\partial_n\}$$

Proposición 2.1.10. si g es una métrica riemanniana en una variedad M con $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ base de $T_p M$, entonces la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ cuyas entradas son $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ es una matriz invertible.

Demostración. Si no fuese invertible tendríamos un $w = (w_1, \dots, w_n)$ tal que $Aw = 0$ por tanto para todo $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$0 = g_{i1}w_1 + \dots + g_{in}w_n = g(v_1, \partial_i)w_1 + \dots + g(v_n, \partial_i)w_n = g(\overline{W}, \partial_i)$$

donde $\overline{W} = w_1\partial_1 + \dots + w_n\partial_n$ ya que $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ base de $T_p M$. Así $g(\overline{W}, v) = 0$ para todo $v \in T_p M$ lo cual es contradicción si $v = \overline{W}$ ■

Denotaremos a la matriz inversa de A como la matriz con entradas g^{ij} , y a partir de ahora si tenemos una variedad diferenciable M y una métrica Riemanniana g al par (M, g) lo llamaremos una variedad Riemanniana.

Veamos algunos ejemplos que envuelven métricas y variedades Riemannianas.

Ejemplo 2.1.11. *El espacio hiperbólico n -dimensional.*

$$M = (\mathbb{R}^n)^+ = \{x \in \mathbb{R}^n / x_n > 0\}$$

con la métrica $g = \frac{1}{x_n^2} g_0$.

Note que $g_x(e_1, e_1) = \frac{1}{x_1^2}$ luego $\|e_1\|$ se hace mayor cuando más nos aproximamos al borde de $B_n(0, 2)$ y que se acerca a g_0 cuando $\alpha \rightarrow 0$.

Ejemplo 2.1.12. *Sea $F : M \rightarrow N$ una inmersión esto es que f diferenciable y $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es inyectiva para todo $p \in M$. Si N tiene estructura riemanniana, F induce una estructura riemanniana en M , se define $f^* g$ (métrica pullback de g por f) mediante*

$$f^* g(X, Y)_{(p)} = g_{f(p)}(dF_p(X_p), dF_p(Y_p)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{K}(M) \text{ y } p \in M$$

así si $M = S^n$ y $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es la inclusión, como i es un encaje tiene sentido $g = i^* g_0$ (métrica canónica en S^n) y así dado $p \in S^n$ y $v, w \in T_p S^n = \langle p \rangle^\perp$ entonces $g_p(v, w) = g_0(v, w)$ y dada $X, Y \in \mathfrak{K}(M)$ $g(X, Y) = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$.

En los últimos ejemplos pudimos ver que definíamos una métrica g para la cual $g = f^* g_0$ dando g_0 es el producto interno usual y f una función, en general esto puede suceder y estar bien definido para productos distintos de g_0 , esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 2.1.13 (Métrica Conforme). *Sea (M, g) una Variedad Riemanniana, se dice que la métrica \tilde{g} es conforme a la métrica g si $\tilde{g} = fg$ para alguna función suave y positiva f de M en \mathbb{R} , la propiedad de estas métricas es que preservan ángulos, así que si $p \in M$ y v_p y w_p son dos vectores no nulos de $T_p M$*

$$\frac{g(v_p, w_p)}{[g(v_p, v_p)]^{1/2} [g(w_p, w_p)]^{1/2}} = \frac{\tilde{g}(v_p, w_p)}{[\tilde{g}(v_p, v_p)]^{1/2} [\tilde{g}(w_p, w_p)]^{1/2}}$$

2.1.4. Conexión

La idea de una Conexión en una variedad riemanniana es la de poder definir la derivada de un campo vectorial en la dirección de un vector determinado. Para campos vectoriales en \mathbb{R}^n lo podemos hacer de manera natural, definiendo para un campo $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y un vector v en $\mathbb{R}^n = T_p \mathbb{R}^n$:

$$\nabla_v X(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (X(p + tv) - X(p)) = DX(p).v$$

La dificultad en una variedad M es que en general si tomamos un vector $v \in T_p M$ y una curva $\alpha(t)$ en M tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$ entonces la diferencia $X(\alpha(t)) - X(p)$ no tiene sentido porque $X(\alpha(t))$ by $X(p)$ están definidos en espacios vectoriales distintos

y por lo tanto su resta no está definida; en \mathbb{R}^n esto es posible ya que todos los $T_p\mathbb{R}^n$ pueden identificarse.

Así entonces la labor de la conexión será proporcionar una forma de derivar en la variedad.

Si pensamos en que exigirle a una derivada direccional de Campos vectoriales, lo mínimo que debemos pedir es que tal operación sea lineal y la regla de Leibniz se tenga, tomando esto en cuenta se define:

Definición 2.1.14 (Conexión Afín). Una conexión Afín D en una variedad diferenciable M es una función

$$D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se denota por $(X, Y) \rightarrow D_X Y$ y satisface las siguientes propiedades:

1. $D_{fX} + g_Y Z = f D_X Z + g D_Y Z$
2. $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$ si $f, g \in C^\infty(M)$
3. $D_X(fY) = f D_X Y + X(f)Y$.

Definición 2.1.15. Sea (M, g) una variedad Riemanniana, diremos que una conexión $D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ en M es simétrica si:

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y]$$

y compatible con la métrica si:

$$Zg(X, Y) = g(D_Z X, Y) + g(X, D_Z Y).$$

Note que para calcular el Bracket no es necesario una métrica Riemanniana, así que la simetría liga la estructura diferencial de la variedad con la conexión, mientras que la compatibilidad la liga con la métrica Riemanniana.

Teorema 2.1.16 (Levi Civita). Sea (M, g) una métrica Riemanniana, entonces existe una única conexión simétrica y compatible con la métrica.

Demostración. Sea ∇ la conexión en M compatible con la métrica y simétrica; y sea $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ por compatibilidad:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (1)$$

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \quad (2)$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \quad (3)$$

Así si sumamos (1) y (2) y sustraemos (3):

$$\begin{aligned} & Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, D_Z Y) \end{aligned}$$

luego por simetría

$$\begin{aligned} & g(\nabla_X Y, Z) + g(Z, \nabla_Y X) \\ &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y) + g(X, \nabla_Z Y - \nabla_Y Z) \\ &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]) \quad (a) \end{aligned}$$

pero $g(Z, \nabla_Y X) = g(Z, [Y, X] + \nabla_X Y) = g(Z, [Y, X]) + g(Z, \nabla_X Y)$ así si reemplazamos en (a) obtenemos

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}(Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]) - g(Z, [Y, X])) *$$

La expresión (*) muestra que ∇ está determinada únicamente por la métrica g , entonces de existir ∇ , esta sería única.

Para probar la existencia definamos ∇ por (*), no es difícil probar que cumple con las condiciones de la conexión. ■

Definición 2.1.17. Dada una variedad Riemanniana (M, g) , definimos la conexión Levi Civita ∇ como la única conexión compatible con la métrica y simétrica.

Ahora si $\phi : U \rightarrow M$ es una parametrización para todo $p \in \phi(U) \subset M$ consideremos $\nabla_{\partial_i} \partial_j(\phi_u)$, note que si conocemos estos Campos para todo i, j , entonces podemos calcular $\nabla_x Y(\phi_u)$ para cualquier campo X y Y , esto se debe a la linealidad y demás propiedades de la conexión ∇ y al hecho de que X y Y se puedan escribir como combinación de los ∂_i , por esta razón las funciones $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j(\phi(u)) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(u) \partial_k(\phi(u))$$

determinan la conexión $\nabla_X Y$ en cualquier punto $\phi(u)$.

Proposición 2.1.18. Sea (M, g) variedad Riemanniana n -dimensional y $\phi : U \rightarrow M$ una parametrización si para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ y las funciones g^{ij} como las componentes de la matriz inversa de la matriz $A = \{g_{ij}\}$ entonces los símbolos de Christoffel de la conexión Levi Civita satisfacen que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, más aun:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_{ir} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jr} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \right) g^{rk}.$$

Demostración. La simetría se deduce del hecho de que $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_j}\partial_i$ ya que la conexión es simetría y $[\partial_i, \partial_j] = 0$.

Ahora si reemplazo X por ∂_i y Y por ∂_j y Z por ∂_l en :

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}(Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([Z, X], Y)) + g(X, [Z, Y]) - g(Z, [Y, X])$$

obtenemos $\sum_{s=1}^n \Gamma_{ij}^s g_{sl} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{il}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}$ para cada $l \in \{1, \dots, n\}$, así multiplicando a ambos lados por g^{lk} , obtenemos n ecuaciones, al sumar estos n ecuaciones obtenemos

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) g^{lk}$$

■

Ejemplo 2.1.19. Sea $M = \mathbb{R}^n$ observe que los $\Gamma_{ij}^k = 0$ y la curvatura ∇ nos coincide con la derivada usual.

Ejemplo 2.1.20. Sean $M = \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ y sea $g = \frac{1}{y^2} g_0$, así:

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}, g_{12} = 0$$

entonces los símbolos de Christoffel son:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}.$$

2.1.5. Geodésicas

El concepto de geodésica es un concepto fundamental en geometría Riemanniana, las geodésicas son curvas especiales que minimizan la longitud de arco para puntos “suficientemente cerca”; este concepto para una superficie en \mathbb{R}^3 fue caracterizado por Bernoulli y Euler como las curvas $c(s)$ (donde s es la longitud de arco) para las cuales la aceleración $c''(s)$ en \mathbb{R}^3 es perpendicular a la superficie, (Así, la aceleración c desde el punto de vista de la superficie es 0), aunque esta caracterización es lo único que necesitamos para nuestro trabajo, hagamos una visión un poco más general.

Definición 2.1.21 (campo paralelo a una curva). Un campo Y a lo largo en una curva γ se dice paralelo a lo largo de γ si $\nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0$.

Proposición 2.1.22. Sea $Y : [a, b] \rightarrow M$ una curva en la variedad (M, g) y sea $p \in M$ y $v \in T_p M$ entonces existe un único campo vectorial Y a lo largo de γ tal que es paralelo a lo largo de γ y satisface $Y(a) = v$.

Demostración. Usemos la notación tensorial, sea $Y = y^i \partial_i$, si $\nabla_{\dot{\gamma}} Y = (\dot{Y}_i + \Gamma_{jk}^i y^j \dot{\gamma}_k) \partial_i$, la condición de que Y sea paralelo a lo largo de γ son las n ecuaciones lineales de primer orden:

$$\dot{Y}_i = -\Gamma_{jk}^i y^j \dot{\gamma}_k$$

y como tenemos la condición inicial $Y_i(a) = v_i$ entonces el teorema de existencia unicidad de Ecuaciones diferenciales ordinaria nos da la prueba ■

Definición 2.1.23. Una curva γ es geodésica si su tangente $\dot{\gamma}$ es paralelo a través de γ , o sea si $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$.

Proposición 2.1.24. Sea (M, g) una variedad Riemanniana, sea $p \in M$ y sea $v \in T_p M$ entonces existe $\epsilon > 0$ y una geodésica $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = v$.

Demostración. ya que

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = (\ddot{\gamma}_i + \Gamma_{jk}^i \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_k) \partial_i$$

La condición de γ geodésica nos lleva a un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\ddot{\gamma}_i = -\Gamma_{jk}^i(\gamma) \dot{\gamma}_j \dot{\gamma}_k$$

con la condición inicial: $\gamma_i(0) = p_i$ y $\dot{\gamma}_i(0) = v_i$, una vez más el teorema de existencia y unicidad nos garantiza el resultado. Denotaremos a esta geodésica $\gamma_{p,v}$ ■

Note que si $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow M$ es una geodésica $\frac{d}{dt} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 2g(\frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \dot{\gamma}) = 0$ y esto implica que $\|\dot{\gamma}\|_g$ es constante y por tanto la escogeremos $\|\dot{\gamma}\|_g = c \neq 0$ para excluir geodésicas reducidas a puntos, y diremos que las geodésicas son proporcionales a la longitud de arco (que es cuando $c=1$).

Note además que si $\gamma(t)$ satisface * entonces $\gamma(\lambda t)$ también lo hace para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y así $\gamma_{p,v}(t) = \gamma_{p,\lambda v}(\frac{t}{\lambda})$ para $\lambda > 0$ y $t \in [0, \epsilon)$ en particular $\gamma_{p,\lambda v}$ está definida en el intervalo $[0, \frac{\epsilon}{\lambda})$.

Gracias a esto podemos incrementar la velocidad de la geodésica reduciendo su intervalo de definición. De esta manera podemos introducir el concepto de mapeo exponencial:

Definición 2.1.25. Sea $p \in M$ y $U = \{(p, v), p \in M \text{ y } v \in T_p M \mid |v| < \epsilon\} \subset TM$ y $\gamma_{p,v}(t)$ la única geodésica para la cual $\gamma_{p,v}(0) = p$ y $\dot{\gamma}_{p,v}(0) = v$ para cada $p \in M$ y $v \in T_p M$ con $|v| < \epsilon$, el mapeo exponencial $exp : U \rightarrow M$ se define como:

$$exp(p, v) = \gamma_{p,v}(1) = \gamma_{p, \frac{v}{|v|}}(|v|)$$

Es claro que exp es diferenciable, en general usaremos la restricción de la exp a un sólo conjunto del espacio tangente $T_p M$ (p fijo):

$$exp_p : B_\epsilon(0) C_{T_p M} \rightarrow M$$

por $exp_p(v) = exp(p, v)$, es fácil ver que $exp_p(0) = p$.

Proposición 2.1.26. Dado $p \in M$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \rightarrow M$ es un difeomorfismo de $B_\epsilon(0)$ en un abierto de M .

Demostración. Calculemos $d(\exp_p)_0$, tomemos la curva $\alpha(t) = vt$ así :

$$d(\exp_p)_0(v) = \frac{d}{dt}(\exp_p(tv))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma_{p,tv}(1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\gamma_{p,v}(t)|_{t=0} = v$$

Con lo que $d(\exp_p)_0$ es la identidad en T_pM y del teorema de la función inversa concluimos que \exp_p es un difeomorfismo en una vecindad de 0 ■

Definición 2.1.27. Dada $\exp_p : B_R(0) \subset T_pM \rightarrow M$, el número

$$i_p = \sup\{R > 0 / \exp_p \text{ es no singular en } B_R(0)\}$$

se denomina radio de inyectividad, este radio es en general distinto para cada $p \in M$.

Definición 2.1.28. Una variedad M es completa (geodésicamente) si para todo $p \in M$, el mapeo exponencial, \exp_p está definido para todo $v \in T_pM$, esto significa que la geodésica $\gamma_{p,v}(t)$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$

Definición 2.1.29. Para cualquier $p \in M$ existe una vecindad w de p y un número $\delta > 0$ tal que para cada $q \in w$ \exp_q es un difeomorfismo de $B_\delta(0) \subset T_qM$ y $\exp_p(B_\delta(0)) \subset w$, w es entonces una vecindad normal.

Definición 2.1.30 (Curvatura Geodésica). Sea C una curva regular orientada en una variedad M , y sea $\alpha(s)$ su parametrización por longitud de arco. El valor de la derivada covariante $[D\alpha'(s)/ds] = K_g$ de $\alpha'(s)$ en p es llamado curvatura geodésica de C en p

Nótese que usualmente las geodésicas son curvas con curvatura geodésica cero.

2.1.6. Curvatura

La noción de curvatura en una variedad riemanniana fue introducida por Riemann de la siguiente forma:

Sea $p \in (M, g)$ y sea $\sigma \subset T_pM$ un espacio dos dimensional del espacio tangente T_pM de M en p . Consideremos el conjunto de geodésicas que empieza en p y son tangentes a σ , los segmentos de tales geodésicas en una vecindad normal $U \subset M$ determinan una subvariedad de dimensión dos $S \subset M$ (S es la imagen de \exp restringida a $\sigma \cap \exp_p(U)$) S tiene la métrica inducida de la inclusión, y como Gauss demostró que la curvatura de una superficie puede ser expresada en términos de su métrica, entonces Riemann pudo hablar de la curvatura de S en p , indicada por $k(p, \sigma)$ esta fue llamada la curvatura seccional de M en p con respecto a σ el conocimiento de $k(p, \sigma)$ para todo σ determina la curvatura R , la cual es una medida intuitiva de la cantidad que una variedad riemanniana se desvía de ser Euclidiana.

Definición 2.1.31. Sea (M, g) una variedad riemanniana, $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, el tensor de curvatura se define como:

$$R(X, Y, Z, W) = g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W) \\ g([\nabla_X, \nabla_Y] Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W)$$

Nótese que en esta definición, si tomáramos los campos $\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l$ ya que $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Obtenemos $g([\nabla_i, \nabla_j], \partial_k, \partial_l)$ y podemos pensar que la curvatura mide la no conmutatividad de la no conexión.

Denotemos $R_{ijkl} = R(\partial_k, \partial_l, \partial_j, \partial_i)$ los componentes del tensor de curvatura, así si $X = x_i \partial_i, Y = y_j \partial_j, Z = z_k \partial_k, w = w_l \partial_l$ entonces $R(x, y, z, w) = x_i y_j z_k w_l R_{ijkl}$.

Proposición 2.1.32 (Identidad de Bianchi). El tensor de curvatura cumple que:

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$$

Proposición 2.1.33. El tensor de Curvatura Cumple

1. $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$
2. $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$
3. $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$

Las dos proposiciones anteriores se encuentran demostradas en [?], en términos de componentes se pueden escribir de la siguiente manera:

$$R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kij s} = 0$$

$$R_{ijks} = -R_{jik s}, R_{ijks} = -R_{ijsk}, R_{ijks} = R_{ksij}$$

Definición 2.1.34 (Curvatura Seccional). Dado un punto p y una subvariedad N 2-dimensional que contiene a p y $\sigma = T_p N \subset T_p M$ la curvatura seccional de σ en p está definida como:

$$k(\sigma, p) = \frac{R(x, y, xy)}{|x|^2 |y|^2 - (g(x, y))^2}$$

donde x y y son dos vectores linealmente dependientes de $T_p N$.

Nótese que la curvatura seccional se define para cualquier par de vectores linealmente independientes en $T_p N$. Esto ya que la curvatura seccional es invariante bajo las transformaciones $\{x, y\} \rightarrow \{y, x\}, \{x, y\} \rightarrow \{\lambda x, y\}, \{x, y\} \rightarrow \{x + \lambda y, y\}$ por lo cual la curvatura seccional es un invariante geométrico de N .

Proposición 2.1.35. *El tensor de curvatura que da completamente definido por la curvatura seccional:*

Demostración.

Esto es claro ya que si u, v ortonomales y $k(u, v) = R(u, v, u, v)$ entonces

$$6R(u, v, w, z) = [k(u+z, v+w) - k(u+z, v) - k(u+z, w) - k(u, v+w) - k(z, v+w) - k(v+z, u) + k(u, w) + k(v, z)] - [k(u+w, v+z) - k(u+w, v) - k(u+w, z) - k(u, v+z) - k(u+w, v) + k(v, w) + k(u, z)] \blacksquare$$

Definición 2.1.36 (Tensor de Ricci). *La primera contracción del tensor de curvatura con respecto a la métrica g es llamado el tensor de Ricci y se denota $Ric(X, Y)$.*

Así: $Ric(X, Y) = \sum_i g(R(X, Y_i)X, Y_i)$ donde $\{Y_i\}$ es un conjunto de campos ortonormales.

Definición 2.1.37 (Curvatura Escalar). *Definimos la curvatura Escalar R como la contracción del tensor de Ricci con respecto a la métrica g . Así localmente si $\{x_i\}$ es un conjunto de Campos vectoriales, entonces:*

$$R = \sum_i Ric(X_i, X_i) = \sum_{ij} R(X_i, X_j, X_i, X_j) = \sum_{ij} g(R(X_i, X_j)X_i, X_j) \blacksquare$$

Ahora si tomamos $X_i = \partial_i$, las componentes del tensor de Ricci y la curvatura escalar son: $R_{ik} = R_{ijn}^j = R_{ijks}g^{sj}$ para el tensor de Ricci, y de la misma manera $R = R_{ik}g^{ik}$ para la curvatura escalar.

Ejemplo 2.1.38. *Calculemos el Tensor de Curvatura, el Tensor de Ricci y la curvatura escalar de la esfera S^n .*

Sea $v_1, v_2, v_3, v_4 \in TpS^n$ y $x_i^\perp(q) = X_i - g(X_i(q), q)q$ con $X_i(p) = v_i$.

Calculemos $\nabla_{X_j} X_i = (dX_j(q)(X_i(q)))^T$

Sea $\alpha(t)$ una curva en S^n tal que $\alpha(0) = q$ y $\alpha'(0) = X_i(q)$

$$(dX_j(q)(X_i(q)))^T = \frac{d}{dt}(X_j(\alpha(t)))|_{t=0} = -g(q, X_i(q))X_j(q)$$

ahora $[X_i, X_j](p) = 0$ ya que:

$$[X_i, X_j](p) = \nabla_{X_i} X_j(p) - \nabla_{X_j} X_i(p) = -g(p, v_i)v_j + g(p, v_j)v_i = 0$$

(ya que $g(p, v_i) = 0$ en S^n) ahora en p tenemos :

$$\nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_3 = \nabla_{X_2} - g(q, X_3)X_1 = -g(q, X_3)\nabla_{X_2} X_1 - X_2(g(q, X_3))X_1$$

$$\nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3 = \nabla_{X_1} (-g(q, X_3)X_2) = -g(q, X_3)\nabla_{X_1} X_2 - X_1(g(q, X_3))X_2$$

lo cual es igual a:

$$\nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_3(p) = -X_2(g(p, v_3))v_1 \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3(p) = -X_1(g(p, v_3))v_2$$

Calculemos $X_1(g(p, v_3))$ si $B(t)$ es una curva en S^n tal que $B(0) = p$ y $B'(0) = v_1$ entonces:

$$X_1(g(p, X_3)) = \frac{d}{dt}g(B(t), X_3(B(t)))|_{t=0} = g(\beta'(t), X^3(B(t)))|_{t=0} = g(v_1, v_3)$$

análogamente $X_2(g(p, X_3)) = g(v_2, v_3)$ y:

$$\begin{aligned} R(X_1, X_2, X_3, X_4) &= g(\nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_3(p) - \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_3(p), X_4(p)) \\ &= g(-g(v_2, v_3)v_1 + g(v_1, v_3)v_2, v_4) = g(v_2, v_3)g(v_2, v_4) - g(v_2, v_3)g(v_1, v_4) \end{aligned}$$

ahora el tensor de ricci

$$\begin{aligned} Ricci(v, w) &= \sum_{i=1}^n R(\partial_i, v, \partial_i, w) = \sum_{i=1}^n g(\partial_i, \partial_i)g(v, w) - g(w, \partial_i)g(v, \partial_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g(v, w) - \sum_{i=1}^n g(w_i, v_i) = ng(v, w) - g(v, w) = (n-1)g(v, w) \end{aligned}$$

La curvatura escalar entonces

$$R = \sum_i Ricci(\partial_i, \partial_i) = \sum_i (n-1) = n(n-1)$$

Ejemplo 2.1.39. El tensor de curvatura en \mathbb{R}^n :

Si $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ y $X, Y \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= (XY z_1, \dots, XY z_n) - \nabla_Y \nabla_X Z = (-YX z_1, \dots, -YX z_n) \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]} Z = -([X, Y] z_1, \dots, [X, Y] z_n) \end{aligned}$$

Así

$$R(X, Y)Z = ([X, Y] z_1, \dots, [X, Y] z_n) - ([X, Y] z_1, \dots, [X, Y] z_n) = 0$$

y

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) = 0$$

2.1.7. Transformaciones conformes

A continuación pasaremos a estudiar como se comportan algunos elementos como los símbolos de Cristoffel, el tensor de curvatura y Ricci bajo transformaciones de la métrica de la forma $\tilde{g} = e^{2f}g$.

Proposición 2.1.40. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y $\tilde{g} = e^{2f}g$ una métrica conforme a g entonces los símbolos de Cristoffel $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ de la conexión $\tilde{\nabla}$ se relacionan con los Γ_{ij}^k de la conexión ∇ de la siguiente manera:*

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + (f_i g_{jl} + f_j g_{il} - f_l g_{ij})g^{lk}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2}[\partial_i(\tilde{g}_{jl}) + \partial_j(\tilde{g}_{il}) - \partial_l(\tilde{g}_{ij})]\tilde{g}^{lk} \\ &= \frac{1}{2}[\partial_i(g_{lj}e^{2f}) + \partial_j(e^{2f}g_{il}) - \partial_l(e^{2f}g_{ij})]e^{-2f}g^{lk} \\ &= \frac{1}{2}[2f_i e^{2f}g_{jl} + 2f_j e^{2f}g_{il} - 2f_l g_{ij} + e^{2f}\partial_i(g_{jl}) + e^{2f}\partial_j(g_{il}) - e^{2f}\partial_l(g_{ij})]e^{-2f}g^{lk} \\ &= \frac{1}{2}[2f_i g_{jl} + 2f_j g_{il} - 2f_l g_{ij}]g^{lk} + \frac{1}{2}[\partial_i(g_{jl} + \partial_j(g_{il}) - \partial_l(g_{ij}))]g^{lk} \\ &= \Gamma_{ij}^k + [f_i g_{jl} + f_j g_{il} - f_l g_{ij}]g^{lk} \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 2.1.41. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y $\tilde{g} = e^{2f}g$ una métrica conforme a g , la relación entre los tensores de Ricci R_{ik} y \tilde{R}_{ik} es:*

$$\tilde{R}_{ik} = R_{ik} - (n-2)f_{ik} + (n-2)f_i f_k - (\Delta f + (n-2)|\nabla f|^2)g_{ik}$$

Demostración. Recordemos que:

$$R_{ik} = R_{ijkl}g^{jl} = (\partial_j \Gamma_{ik}^j - \partial_i \Gamma_{jk}^j + \Gamma_{ik}^u \Gamma_{ju}^j - \Gamma_{jk}^u \Gamma_{iu}^j)$$

y que denotado $\delta_\alpha^\beta = g_{\alpha x} \cdot g^{x\beta}$ los símbolos de Christoffel entonces:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \Gamma_{ij}^k + (f_i g_{jl} + f_j g_{il} - f_l g_{ij})g^{lk} \\ &= \Gamma_{ij}^k + (f_i \delta_j^k + f_j \delta_i^k - \delta_{ij}(\nabla f)_k) \end{aligned}$$

Asumiremos los cálculos en coordenados geodésicas alrededor de p para su simplicidad. Así $g_{ik}(x) = \delta_{ik}(p)$ y $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.

Entonces

$$\tilde{R}_{ik} = \partial_j(\tilde{\Gamma}_{ik}^j) - \partial_i(\tilde{\Gamma}_{jk}^j) + \tilde{\Gamma}_{ik}^u \tilde{\Gamma}_{ju}^j - \tilde{\Gamma}_{jk}^u \tilde{\Gamma}_{iu}^j.$$

$$\tilde{R}_{ik} = (\partial_j(\Gamma_{ik}^j + (f_i\delta_k^j + f_k\delta_i^j - \delta_{ik}(\nabla f)_j)) - \partial_i(\Gamma_{jk}^j + (f_j\delta_k^j + f_k\delta_j^j - \delta_{jk}(\nabla f)_j))) + (\Gamma_{ik}^u + (f_i\delta_k^u + f_k\delta_i^u - \delta_{ik}(\nabla f)_u))(\Gamma_{iu}^j + (f_i\delta_u^j + f_u\delta_i^j - \delta_{iu}(\nabla f)_j)) - (\Gamma_{jk}^u + (f_j\delta_k^u + f_k\delta_j^u - \delta_{jk}(\nabla f)_u))(\Gamma_{iu}^j + (f_i\delta_u^j + f_u\delta_i^j - \delta_{iu}(\nabla f)_j))$$

Así:

$$R_{ik} = (\partial_j(\Gamma_{jk}^j) - \partial_i(\Gamma_{jk}^j) + \Gamma_{ik}^u\Gamma_{ju}^j - \Gamma_{jk}^u\Gamma_{iu}^j) + \partial_j(f_i\delta_k^j + f_k\delta_i^j - \delta_{ik}(\nabla f)_j) - \partial_i(f_j\delta_k^j + f_k\delta_j^j - \delta_{jk}(\nabla f)_j) + \Gamma_{ik}^u(f_j\delta_u^j + f_u\delta_j^j - \delta_{ju}(\nabla f)_j) + \Gamma_{ju}^j(f_i\delta_k^u + f_k\delta_i^u - \delta_{ik}(\nabla f)_u) + (f_i\delta_k^u + f_k\delta_i^u - \delta_{ik}(\nabla f)_u)(f_j\delta_u^j + f_u\delta_j^j - \delta_{ju}(\nabla f)_j) - \Gamma_{jk}^u(f_i\delta_u^j + f_u\delta_i^j - \delta_{iu}(\nabla f)_j) - \Gamma_{iu}^j(f_j\delta_k^u + f_k\delta_j^u - \delta_{jk}(\nabla f)_u) - (f_j\delta_k^u + f_k\delta_j^u - \delta_{jk}(\nabla f)_u)(f_i\delta_u^j + f_u\delta_i^j - \delta_{iu}(\nabla f)_j)$$

Ahora ya que $\Gamma_{jk}^i = 0$ por estar en coordenadas geodésicas:

$$\tilde{R}_{ik} = R_{ik} + \partial_j(f_i\delta_k^j + f_k\delta_i^j - \delta_{ik}(\nabla f)_j) - \partial_i(f_j + \delta_k^j + f_k\delta_j^j - \delta_{jk}(\nabla f)_j) + (f_i\delta_k^u + f_k\delta_i^u - \delta_{ik}(\nabla f)_u)(f_j\delta_u^j + f_u\delta_j^j - \delta_{ju}(\nabla f)_j) - (f_j\delta_u^k + f_k\delta_j^u - \delta_{jk}(\nabla f)_u)(f_i\delta_u^j + f_u\delta_i^j - \delta_{iu}(\nabla f)_j)$$

Veamos esto línea por línea, analicemos la primera línea:

$$R_{ik} + \partial_j(f_i\delta_k^j) + \partial_j(f_k\delta_i^j) - \delta_{ik}\partial_j((\nabla f)_j) - \partial_i(f_j\delta_k^j) - \partial_i(nf_k) + \partial_i(\delta_{jk}(\nabla f)_j)$$

Cambiamos por la k la j del primer término, i por la j del segundo, en el tercero tomo en cuenta que $\partial_j((\nabla f)_j) = \Delta f$ ya que $\Delta f = \partial_j((\nabla f)_j) + \Gamma_{jk}^j(\nabla f)_j$ pero $\Gamma_{jk}^j = 0$. En el cuarto cambio por k la j , en el sexto término tomo en cuenta que $\delta_{jk}(\nabla f)_j = f_k$ Así

$$R_{ik} + f_{ik} + f_{ik} - \delta_{ij}\partial_j((\nabla f)_j) - f_{ik} - nf_{ik} + \partial_i(f_k)$$

y esto es igual a $R_{ik} - (n-2)f_{ik} - \delta_{ik}(\Delta f)$

Analizamos la segunda línea

$$(f_i\delta_u^k + f_k\delta_i^u - \delta_{ik}(\nabla f)_u)(f_j\delta_u^j + f_u\delta_j^j - \delta_{ju}(\nabla f)_j)$$

Cambia por u las j del segundo factor y recuerdo de $\delta_j^j = n$ así tengo:

$$f_i f_u \delta_u^k + f_k f_u \delta_i^u - \delta_{ik}(\nabla f)_u f_u + n f_i f_u \delta_k^u + n f_u f_k \delta_i^u - n \delta_{ik} f_u (\nabla f)_u - f_i f_u \delta_u^k - f_u f_k \delta_i^u + \delta_{ik} f_u (\nabla f)_u$$

Cambiando u por i o k según convenga obtengo:

$$f_i f_k + f_i f_k - \delta_{ik}(\nabla f)_u f_u + n f_i f_k + n f_i f_k - n \delta_{ik} f_u (\nabla f)_u - f_i f_k - f_i f_k + \delta_{ik} f_u (\nabla f)_u$$

tomo en cuenta que $f_u = (\nabla f)_j \delta_{uj}$ y obtengo:

$$2n f_i f_k - n \delta_{ik}(\nabla f)_u (\nabla f)_j \delta_{uj}$$

$$= 2nf_i f_k - n\delta_{ik}|\nabla f|^2$$

ya que

$$(\nabla f)_u(\nabla f)\delta_{uj} = |\nabla f|^2.$$

Analizando la tercera línea:

$$(-f_j\delta_u^k - f_k\delta_j^u + \delta_{jk}(\nabla f)_u)(f_i\delta_u^j + f_u\delta_i^j - \delta_{iu}(\nabla f)_j)$$

multiplicamos:

$$-f_j f_i \delta_u^k \delta_u^j - f_k f_i \delta_j^u \delta_u^j + f_i (\nabla f)_u \delta_{jk} \delta_u^j - f_j f_u \delta_u^k \delta_i^j - f_k f_u \delta_j^u \delta_i^j + \delta_{jk} (\nabla f)_u f_u \delta_i^j + f_j (\nabla f)_j \delta_u^k \delta_{iu} + f_k \delta_{iu} (\nabla f)_j \delta_j^u - \delta_{jk} \delta_{iu} (\nabla f)_u (\nabla f)_j.$$

Teniendo en cuenta que $\delta_j^u \delta_u^j = \delta_j^j = n$ y luego reemplazo por u las j donde sea conveniente:

$$-f_u f_i \delta_u^k - n f_k f_i + f_i (\nabla f)_u \delta_{uk} - f_j f_u \delta_u^k \delta_i^u - f_k f_u \delta_i^u + \delta_{uk} (\nabla f)_u f_u \delta_i^u + f_u (\nabla f)_u \delta_u^k \delta_{iu} + f_k \delta_{iu} (\nabla f)_u - \delta_{uk} \delta_{iu} (\nabla f)_u (\nabla f)_u$$

Cambio la j faltante por i y las u por i o k tenemos:

$$-f_i f_k - n f_k f_i + f_i f_k - f_i f_k - f_i f_k + \delta_{uk} (\nabla f)_u f_u \delta_i^u + \delta_{iu} (\nabla f)_u f_u \delta_u^k + f_i f_k - f_i f_k \\ = -n f_i f_k - 2f_i f_k + \delta_{uk} \delta_i^u (\nabla f)_u (\nabla f)_j \delta_{uj} + \delta_u^k \delta_{iu} (\nabla f)_u (\nabla f)_j \delta_{uj} \text{ (ya que } f_u = (\nabla f)_j \delta_{uj} \text{)}$$

Ahora ya que $(\nabla f)_u (\nabla f)_j \delta_{uj} = |\nabla f|^2$ obtenemos:

$$-n f_i f_k - 2f_i f_k + \delta_{uk} \delta_i^u |\nabla f|^2 + \delta_u^k |\nabla f|^2 \delta_{ik}$$

Cambiando u por i o por k según sea conveniente:

$$-n f_i f_k - 2f_i f_k + 2|\nabla f|^2 \delta_{ik}.$$

Ahora sumo las tres líneas y

$$R_{ik} = R_{ik} - (n-2)f_{ik} - \Delta f \delta_{ik} + (n-2)f_i f_k - (n-2)|\nabla f|^2 \delta_{ik} \\ = R_{ik} - (n-2)f_{ik} + (n-2)f_i f_k - (\Delta f + (n-2)|\nabla f|^2)g_{ik}.$$

Obteniendo así el resultado deseado ■

Proposición 2.1.42. Sean (M, g) una variedad Riemanniana y $\tilde{g} = e^{2f}g$ una métrica conforme a g con f suave sobre M . Entonces la curvatura escalar \tilde{R} respecto a la métrica \tilde{g} se relaciona con la curvatura R correspondiente a la métrica g de la siguiente forma:

$$\tilde{R} = e^{-2f} \left[R - 2(n-1)\Delta_g f - (n-1)(n-2)|\nabla f|_g^2 \right]. \quad (2.1)$$

Demostración. Como el cálculo del tensor de Ricci lo realizamos en coordenadas geodésicas. Este cálculo también lo realizaremos utilizando el argumento de que en el punto x , $g_{pq}(x) = \delta_{pq}(x)$ y $\Gamma_{pq}^k(x) = 0$ para $p, q, k = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= \tilde{g}^{pq} \tilde{R}_{pq} = e^{-2f} \delta^{pq} [R_{pq} - (n-2)f_{pq} + (n-2)f_p f_q - (\Delta f + (n-2)|\nabla f|^2) \delta_{pq}] \\
&= e^{-2f} [R - (n-2)f_{pq} \delta^{pq} + (n-2)f_p f_q \delta^{pq} - \delta^{pq} \delta_{pq} \Delta f - \delta^{pq} \delta_{pq} (n-2)|\nabla f|^2] \\
&= e^{-2f} [R - (n-2)f_{pq} \delta^{pq} + (n-2)f_p f^p - n\Delta f - n(n-2)|\nabla f|^2] \\
&= e^{-2f} [R - (n-2)\Delta f + (n-2)|\nabla f|^2 - n\Delta f - n(n-2)|\nabla f|^2] \\
&= e^{-2f} [R - 2(n-1)\Delta f - (n-1)(n-2)|\nabla f|^2].
\end{aligned}$$

■

2.1.8. La segunda forma

A continuación trabajaremos la idea de la segunda forma fundamental de una hipervariiedad M de dimensión n , inmersa en una variedad \bar{M} , $n+1$ dimensional y a partir de ahí observar como se comporta la relación conforme en nuestras ecuaciones.

Definición 2.1.43. *Un Mapeo diferenciable $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ se dice una inmersión si $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \bar{M}$ es inyectiva para todo $p \in M$, notemos que la métrica g induce de forma natural una métrica g' en M , tómesese $v_1, v_2 \in T_p M$ y $g'(v_1, v_2) = g(d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2))$. Con esta métrica g' podemos pensar en φ como una inmersión isométrica de M en \bar{M} .*

Observe que gracias a que φ es inmersión, entonces para cada $p \in M$ existe una vecindad $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \bar{M}$ es una subvariedad de \bar{M} , (f parametrización de $f(U)$) de esta manera podemos identificar U con $f(U)$ y cada $v \in T_p M$ con $d\varphi_p(v) \in T_{\varphi(p)} \bar{M}$.

Esta identificación es importante pues hace posible que podamos hacer extensiones locales de Campos vectoriales (definidos en U) en M a Campos vectoriales (definidos en U) en \bar{M} . Si U es suficientemente pequeño, esto es siempre posible usando el difeomorfismo f .

Para cada $p \in M$ el producto interno en $T_p M$ parte $T_p M$ en la suma directa

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$$

donde $(T_p M)^\perp$ es el complemento ortogonal de $(T_p M)$ en $T_p \bar{M}$.

Así si $v \in T_p M$ $p \in M$ entonces $v = v^T + v^N$ con $v^T \in T_p M$ y $v^N \in (T_p M)^\perp$.

Definición 2.1.44. *Sean $X, Y \in \mathfrak{N}(m)$ y $\bar{\nabla}$ la conexión en \bar{M} , son \bar{X} y \bar{Y} son las extensiones locales a \bar{M} de X, Y definimos la conexión ∇ en M de la siguiente manera:*

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$$

Probar que efectivamente esta es la conexión Riemanniana inducida por la métrica es sencillo, las propiedades de la conexión y la simetría son triviales, todo lo que resta es ver la compatibilidad en la métrica:

Demostración. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{N}(m)$ así:

$Xg'(Y, Z) = Xg(d\varphi_p(Y), d\varphi_p(Z)) = g(\overline{\nabla}_X d\varphi_p(Y), d\varphi_p(Z)) + g(\overline{\nabla}_X d\varphi_p(Z), d\varphi_p(Y))$ (ya que g compatible con $\overline{\nabla}$) ahora:

$$\begin{aligned} g(\overline{\nabla}_X d\varphi_p(Z), d\varphi_p(Z)) &= g((\overline{\nabla}_X d\varphi_p(Y))^T + (\overline{\nabla}_X d\varphi_p(Y))^N, d\varphi_p(Z))_p \\ &= g((\overline{\nabla}_X d\varphi_p(Y))^T, d\varphi_p(Z))_p = g(\nabla_X d\varphi_p(Y), d\varphi_p(Z))_p \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} Xg'(Y, Z)_p &= g(\nabla_X d\varphi_p(Y), d\varphi_p(Z))_p + g(\nabla_X d\varphi_p(Z), d\varphi_p(Y))_p \\ &= g(d\varphi_p(\nabla_X Y), d\varphi_p(Z))_p + g(d\varphi_p(\nabla_X Z), d\varphi_p(Y))_p \\ &= g'(\nabla_X Y, Z) + g'(\nabla_X Z, Y) \end{aligned}$$

■

Nota: $(\nabla_X d\varphi_p(Y) = d\varphi_p(\nabla_X Y))$ se da por la identificación inyectiva de $T_p M$ con un subconjunto de $T_{\varphi(p)} \overline{M}$ a través de $d\varphi_p$.

Para definir la segunda forma fundamental de una inmersión $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$ es conveniente introducir la siguiente definición:

Definición 2.1.45. Sean X, Y son Campos Vectoriales locales en M el mapeo

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y$$

es un campo vectorial normal M en \overline{M} .

Nótese que $B(X, Y)$ no depende de la extensiones \overline{X} y \overline{Y} , esto es claro ya que si \overline{X}_1 es otra extensión de X tenemos:

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1} \overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X} - \overline{X}_1} Y$$

que es cero en M pues $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$ en M . Para Y es análogo.

Así $B(X, Y)$ está bien definida. En lo que sigue llamaremos $\mathfrak{N}(M)^\perp$ al conjunto de los campos vectoriales diferenciables en \overline{M} (localmente) y que son normales a M .

Proposición 2.1.46. Si $X, Y \in \mathfrak{N}(M)$, el mapeo $B : \mathfrak{N}(M) \times \mathfrak{N}(M) \rightarrow \mathfrak{N}(M)^\perp$ dado por $B(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ es bilineal y simétrico.

Definición 2.1.47. Sea $p \in M$ y $\eta \in (T_p M)^\perp$ el mapeo $H_\eta : (T_p M) \times (T_p M) \rightarrow \mathbb{R}$ $\|\eta\| = 1$ dado por

$$H_\eta(X, Y)_p = g(B(X, Y), \eta)_p \quad X, Y \in T_p M$$

es una forma bilineal simétrica.

Definición 2.1.48. La segunda forma fundamental $II_\eta : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ respecto al vector $\eta(p)$ se define como la forma cuadrática

$$II_\eta(X)_{(p)} = g(B(X, X)/\eta)_{(p)}.$$

El operador autoadjunto asociado a esta forma cuadrática es llamado el Operador De Forma $S_\eta(X)_{(p)} : T_pM \rightarrow T_pM$ dado por la relación:

$$g(S_\eta(x), Y)_p = g(B(X, Y), \eta)_p.$$

Proposición 2.1.49. Sea $p \in M, x \in T_pM$ y $N \in (T_pM)^\perp$ la extensión local exterior a M de η ($\|N\| = 1$) entonces:

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_X N)^T$$

Demostración. Sea $x, y \in T_pM$ y sean X, Y extensión local de x, y respectivamente y que son tangentes a M , entonces $g(N, Y) = 0$ y así:

$$g(S_n(X), y) = g(B(X, Y), N)_p = g(\bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N)_p = g(\bar{\nabla}_X Y, N)_p$$

ahora $Xg(N, Y) = 0 = g(\bar{\nabla}_X Y, N) + g(\bar{\nabla}_X N, Y)$ y así:

$$g(S_n(x), y)_p = -g(\bar{\nabla}_X N, Y)_p = g(-\bar{\nabla}_X N, Y)_p$$

ahora ya que:

$$g(N, N) = 1 \rightarrow Xg(N, N) = 0 = g(\bar{\nabla}_X N, N) + g(\bar{\nabla}_X N, N)$$

lo cual implica:

$$g(\bar{\nabla}_X N, N) = 0 \text{ y } \bar{\nabla}_X N = (\nabla_X N)^T.$$

así:

$$g(S_n(X), y) = g(-(\nabla_X N)^T, y)$$

■

Nótese que de esta forma encontramos una definición cómoda para trabajar la segunda forma:

$$h(X, Y) = -g(\bar{\nabla}_X N, Y)$$

y en coordenadas sería:

$$-\bar{\nabla}_{\partial_i} N_j = h_{ij}.$$

La curvatura media en $x \in \partial M$ está definida por

$$h(x) = \frac{g^{ij} h_{ij}}{n-1}(x).$$

Proposición 2.1.50. Sean (M, g) una variedad Riemanniana con frontera y $\tilde{g} = e^{2f}g$ una métrica conforme a g con f suave sobre M . La ley de transformación para la segunda forma fundamental está dada por

$$\tilde{h}_{ij} = e^f h_{ij} + \frac{\partial}{\partial \eta} (e^f) g_{ij}, \quad \text{para todo } i, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.2)$$

donde $\frac{\partial}{\partial \eta}$ es la derivada normal con respecto al vector normal exterior y a la métrica g .

Demostración. Sea $x \in \partial M$, $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_{n-1}\}$ su marco asociado y η el vector normal exterior con respecto a la métrica g que se puede expresar como $\eta = c^u \partial_u$ con $1 \leq u \leq n$.

El vector normal exterior $\tilde{\eta}$ con respecto a la métrica \tilde{g} está dado por $\tilde{\eta} = e^{-f}\eta$,

$$\tilde{g}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) = e^{2f} g(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) = g(e^f \tilde{\eta}, e^f \tilde{\eta}) = g(\eta, \eta) = 1.$$

Por otro lado, utilizando la ecuación $-\bar{\nabla}_{\partial_i} N_j = h_{ij}$. y denotando por $\tilde{\nabla}$ la conexión correspondiente a la métrica \tilde{g} , obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\partial_i} \eta &= \tilde{\nabla}_{\partial_i} c^u \partial_u = \partial_i(c^u) \partial_u + c^u \tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_u = \partial_i(c^u) \partial_u + c^u \tilde{\Gamma}_{iu}^l \partial_l \\ &= \partial_i(c^u) \partial_u + c^u \Gamma_{iu}^l \partial_l + c^u (f_i \delta_{uk} + f_u \delta_{ki} - f_k \delta_{iu}) \delta^{kl} \partial_l \\ &= \partial_i(c^u) \partial_u + c^u \nabla_{\partial_i} \partial_u + c^u (f_i \delta_u^l + f_u \delta_i^l - f_k \delta_{iu} \delta^{kl}) \partial_l \\ &= \nabla_{\partial_i} \eta + f_i c^u \partial_u + c^u f_u \partial_i - f^l \partial_l c^u \delta_{iu} \\ &= \nabla_{\partial_i} \eta + f_i \eta + c^u f_u \partial_i - f^l \partial_l c^u g_{iu} \\ &= \nabla_{\partial_i} \eta + f_i \eta + c^u f_u \partial_i - f^l \partial_l c^u g(\partial_i, \partial_u) \\ &= \nabla_{\partial_i} \eta + f_i \eta + c^u f_u \partial_i - f^l \partial_l g(\partial_i, c^u \partial_u) \\ &= \nabla_{\partial_i} \eta + f_i \eta + \frac{\partial f}{\partial \eta} \partial_i - \nabla f g(\partial_i, \eta), \end{aligned}$$

pues,

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = g(\nabla f, \eta) = g(f^p \partial_p, c^u \partial_u) = c^u f^p g_{pu} = c^u f_u.$$

Ahora, si $1 \leq i, j \leq n - 1$,

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_{ij} &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \tilde{\eta}, \partial_j) = e^{2f} g(\tilde{\nabla}_{\partial_i}(e^{-f} \eta), \partial_j) \\
&= e^{2f} g(\partial_i(e^{-f} \eta), \partial_j) + e^f g(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \eta, \partial_j) \\
&= e^{2f} g(-f_i e^{-f} \eta, \partial_j) + e^f g(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \eta, \partial_j) \\
&= -e^f f_i g(\eta, \partial_j) + e^f g(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \eta, \partial_j) \\
&= e^f g(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \eta, \partial_j) \quad (\text{dado que } g(\eta, \partial_i) = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n - 1) \\
&= e^f g\left(\nabla_{\partial_i} \eta + f_i \eta + \frac{\partial f}{\partial \eta} \partial_i - \nabla f g(\partial_i, \eta), \partial_j\right) \\
&= e^f g(\nabla_{\partial_i} \eta, \partial_j) + e^f f_i g(\eta, \partial_j) + e^f \frac{\partial f}{\partial \eta} g(\partial_i, \partial_j) - e^f g(\partial_i, \eta) g(\nabla f, \partial_j) \\
&= e^f h_{ij} + e^f \frac{\partial f}{\partial \eta} g_{ij} = e^f \left(h_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \eta} g_{ij} \right).
\end{aligned}$$

■

Proposición 2.1.51. Sean (M, g) una variedad Riemanniana con frontera y $\tilde{g} = e^{2f} g$ una métrica conforme a g . La curvatura media \tilde{h} respecto a la métrica \tilde{g} está dada por

$$\tilde{h} = e^{-f} \left(h + \frac{\partial f}{\partial \eta} \right). \quad (2.3)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\tilde{h} &= \frac{1}{(n-1)} \tilde{g}^{ij} \tilde{h}_{ij} = \frac{e^{-2f} g^{ij}}{(n-1)} \left(e^f h_{ij} + e^f \frac{\partial f}{\partial \eta} g_{ij} \right) = e^{-f} \frac{g^{ij} h_{ij}}{(n-1)} + e^{-f} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{g^{ij} g_{ij}}{(n-1)} \\
&= e^{-f} \left(h + \frac{\partial f}{\partial \eta} \right).
\end{aligned}$$

■

Las fórmulas (2.1) y (2.3) calculadas en la sección anterior se simplifican considerablemente si hacemos la sustitución

$$e^{2f} = u^{4/(n-2)},$$

donde u es una función suave y positiva sobre \overline{M} , ya que la función f se puede expresar de la siguiente forma:

$$f = \frac{2}{(n-2)} \ln(u).$$

Entonces

$$f_p = \frac{2}{(n-2)} \frac{u_p}{u}.$$

Luego, la norma del gradiente cumple:

$$|\nabla f|_g^2 = \left(\frac{2}{n-2}\right)^2 \frac{1}{u^2} |\nabla u|_g^2.$$

Por otro lado,

$$f_{pq} = \frac{2}{(n-2)} \left[\frac{u_{pq}}{u} - \frac{u_p u_q}{u^2} \right].$$

De manera que el laplaciano se puede escribir como:

$$\Delta_g f = \frac{2}{(n-2)} \left(\frac{\Delta_g u}{u} - \frac{|\nabla u|_g^2}{u^2} \right).$$

Proposición 2.1.52. Sean (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión $n \geq 3$ y $\tilde{g} = u^{4/(n-2)}g$ una métrica conforme a g . Entonces la curvatura escalar \tilde{R} y la curvatura media \tilde{h} poseen la siguiente forma:

$$\tilde{R} = -\frac{4(n-1)}{(n-2)} \frac{Lu}{u^{(n+2)/(n-2)}} \quad y \quad \tilde{h} = \frac{2}{(n-2)} \frac{Bu}{u^{n/(n-2)}}, \quad (2.4)$$

donde L es el operador laplaciano conforme definido como $L = \Delta_g - \frac{(n-2)}{4(n-1)}R$ sobre M y B es el operador frontera, $B = \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{(n-2)}{2}h$ sobre ∂M y $\frac{\partial}{\partial \eta}$ es la derivada normal exterior.

Demostración.

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= u^{-4/(n-2)} \left[R - 2(n-1) \frac{2}{(n-2)} \left(\frac{\Delta_g u}{u} - \frac{|\nabla u|_g^2}{u^2} \right) - (n-1)(n-2) \left(\frac{2}{n-2} \right)^2 \frac{|\nabla u|_g^2}{u^2} \right] \\ &= u^{-4/(n-2)} \left[R - \frac{4(n-1)}{(n-2)} \left(\frac{\Delta_g u}{u} - \frac{|\nabla u|_g^2}{u^2} \right) - \frac{4(n-1)}{(n-2)} \frac{|\nabla u|_g^2}{u^2} \right] \\ &= u^{-4/(n-2)} \left[R - \frac{4(n-1)}{(n-2)} \frac{\Delta_g u}{u} \right] \\ &= u^{-(n+2)/(n-2)} \left[Ru - \frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_g u \right]. \end{aligned}$$

Sea $L = \Delta_g - \frac{(n-2)}{4(n-1)}R$ entonces

$$\tilde{R} = -\frac{4(n-1)}{(n-2)} \frac{Lu}{u^{(n+2)/(n-2)}}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\tilde{h} &= u^{-2/(n-2)} \left[h + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{2}{(n-2)} \ln(u) \right) \right] = u^{-2/(n-2)} \left[h + \frac{2}{(n-2)} \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right] \\ &= u^{-n/(n-2)} \left[hu + \frac{2}{(n-2)} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right].\end{aligned}$$

Sea $B = \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{(n-2)}{2}h$ entonces

$$\tilde{h} = \frac{2}{(n-2)} \frac{Bu}{u^{n/(n-2)}}.$$

■

Dada entonces una métrica g con curvatura escalar R y curvatura media h en una variedad M podemos encontrar una métrica \tilde{g} con curvatura escalar prescrita \tilde{R} y curvatura media \tilde{h} a partir de las ecuaciones que nos sugiere (2.4) o sea:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_g u + \frac{(n-2)}{4(n-1)} \tilde{R} u^{\frac{n+2}{n-2}} = \frac{(n-2)}{4(n-1)} R u & \text{en } M, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + h \frac{(n-2)}{2} u = \tilde{h} \frac{(n-2)}{2} u^{n/(n-2)} & \text{sobre } \partial M, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Ahora consideremos cuando $M = B^n$ la bola unitaria con la métrica euclidiana g_0 que tiene curvatura escalar $R = 0$ sobre la bola y $h = 1$ sobre la frontera ∂B^n nuestras ecuaciones cambian a:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_g u + \frac{(n-2)}{4(n-1)} \tilde{R} u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0 & \text{en } B^n, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{(n-2)}{2} u = \tilde{h} \frac{(n-2)}{2} u^{n/(n-2)} & \text{sobre } \partial B^n, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Para nuestro trabajo veremos que si $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \eta}$ cambie de signo cuando $\tilde{R} = 0$ y \tilde{h} sea positiva es suficiente para garantizar la existencia de una solución u y por tanto de la métrica \tilde{g} .

2.2. Análisis Funcional

2.2.1. Espacios de Sobolev

El problema con los espacios usuales de funciones como $C^\infty(M)$ y otros espacios de Banach o Hilbert y la técnica de ecuaciones diferenciales, es garantizar el hecho de que las soluciones que encontramos para nuestros problemas existan en tales espacios. Lo que necesitábamos era tener otros espacios, que contuvieran menos funciones suaves, o por lo menos funciones con menos propiedades de suavidad. En la práctica los espacios de Sobolev son diseñados para tener algunas propiedades de suavidad pero no todas.

Recordemos que el soporte de una función se define como la adherencia de los puntos pertenecientes al espacio tal que la función no se hace cero allí, esto es $\text{sop}(f) = \text{Adh}\{x \in M / f(x) \neq 0\}$, con esto en mente definamos entonces la noción función de prueba:

Definición 2.2.1. Sea $C_0^\infty(M)$ el espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en M . Llamaremos a una función $\phi \in C_0^\infty(M)$ una función de prueba.

Lema 2.2.2. Sea M variedad n -dimensional y $\Omega \subset M$ un abierto $1 \leq i \leq n$ para toda $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ tomemos que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx = 0$$

Demostración. Sean $\varphi(x) = 0$ para $x \in M/\Omega$ así podemos trabajar con $\varphi \in C_0^1(M)$, sea $\text{sop}(\varphi) \subset [-a, a]^n$ para $n \in \mathbb{R}$ sin pérdida de generalidad asumamos que $i = n$ así, para un punto fijo $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, a) - \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, -a) = 0$$

(estos puntos están fuera de M/Ω) y así $\int_M \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_n} dx = 0$.

Ahora ya que si $\varphi \in C^1(M)$ y $\varphi \in C_0^1(M)$ entonces $f\varphi \in C_0^1(M)$ tenemos:

$$\int_M \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \varphi(x) dx = - \int_M f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx$$

iterando para $f \in C^2(\Omega)$ y $\varphi \in C_0^2(\Omega)$:

$$\int_M \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \varphi(x) dx = - \int_M \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx = \int_M f(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i^2} dx$$

y sumando sobre i :

$$\int_M \Delta f(x) \varphi(x) dx = - \int_M \nabla f(x) \nabla \varphi(x) = \int_M f(x) \Delta \varphi(x) dx \quad (*)$$

■

Lema 2.2.3. Si $\Delta u = f$ entonces $\frac{1}{\text{vol}(M)} \int_M f = 0$.

Demostración. Si $\Delta u = f$ así $\int_M \Delta u dx = \int_M f dx$ pero $\int \Delta u = - \int \nabla u \cdot \nabla(1)$ considerando como función de prueba $\varphi = 1$ así $-\int \nabla u \cdot \nabla(1) = 0$ y $\int_M f dx = 0$ ■

Es interesante ver que si f cumple ciertas condiciones entonces el recíproco también se cumple, esto lo veremos luego.

Definición 2.2.4. A partir de ahora denotaremos

$$L^1_{loc}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : f \in L^1(\Omega)\}$$

para cada $\Omega \subseteq M$ ($\Omega \subseteq M$ significa que Ω está acotada y su adherencia está contenida en M).

Definición 2.2.5. Sea $f \in L^1_{loc}(M)$ una función $v \in L^1_{loc}(M)$ es llamada una derivada débil de f en la dirección x_i ($x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$) si

$$\int_M v(x)\varphi(x)dx = - \int_M f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx$$

se tiene para todo $\varphi \in C^1_0(\Omega)$ o función prueba.

Escribiremos $v = D_i f$ y en caso de que f tenga derivada débil para todo $i = 1, \dots, n$ escribiremos

$$Df = (D_1 f, \dots, D_n f).$$

Obviamente si $f \in C^1(M)$, las derivadas débiles son las usuales, sean $D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Es importante ver que hay funciones que tienen derivadas débiles y no son $C^1(\Omega)$, y a su vez no toda función en $L^1_{loc}(M)$ es una derivada débil o tiene derivadas débiles

Definición 2.2.6. Sea $f \in L^1_{loc}(M)$ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) $|\alpha| = k > 0$

$$D_\alpha \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \varphi$$

para $\varphi \in C^k(M)$.

Definición 2.2.7. Una función $v \in L^1_{loc}(M)$ es llamada la α -ésima derivada débil de f ($v = D_\alpha f$) si:

$$\int_M \varphi \cdot v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_M f \cdot D_\alpha \varphi dx \quad \forall \varphi \in C^k_0(M).$$

Definición 2.2.8. Para $k \in \mathbb{N}$ $1 \leq p \leq \infty$, definamos el espacio de sobolev $W^{k,p}(M)$ por $W^{k,p}(M) = \{f \in L^p(M) : D_\alpha f \text{ existe y esta en } L^p(M) \text{ para todo } |\alpha| \leq k\}$

Definimos la norma $\|f\|_{W^{\alpha,p}(M)} = \left(\sum_{\alpha=1}^k \int_M |D_\alpha f|^p\right)^{1/p}$ para $(1 \leq p < \infty)$.

Para mayor simplicidad de ahora en adelante usaremos para $W^{k,p}(M)$ la norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(M)} = \left(\sum_{j=0}^k \int_M |\nabla^j u|^p\right)^{1/p}$$

donde $\nabla^j u = g^{kj} \nabla_k u$.

Teorema 2.2.9. *Sea $1 \leq p < \infty, k \in \mathbb{N}$ el espacio $W^{k,p}(M)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Primero observemos que $\|u\|_{W^{k,p}(M)}$ es una norma, claramente

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(M)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(M)}$$

$\|u\|_{W^{k,p}(M)} = 0$ si y sólo si $u = 0$

esto es claro ya que si $\|u\|_{W^{k,p}(M)} = 0 \rightarrow \sum_{j=0}^k \int_M |(\nabla^j u)|^p = 0$ y así $g^{rj} \nabla_r u = 0$ pero

si $\nabla_k u = 0$ para todo r entonces $u = k$ constante c. t. p., pero ya que la medida de Lebesgue es invariante bajo translaciones entonces $\int |u|^p = \int_M |u - k|^p = 0$ y esto es $u = 0$ c.t.p. Ahora tomemos $u, v \in W^{k,p}(M)$ si $1 \leq p < \infty$ la desigualdad de Minkowski implica:

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{k,p}(M)} &= \left(\sum_{j=0}^k \int_M \|(\nabla^j u) + (\nabla^j v)\|^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{j=0}^k \int_M \|\nabla^j u\|^p + \|\nabla^j v\|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^k \int_M \|\nabla^j u\|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=0}^k \int_M \|\nabla^j v\|^p\right)^{1/p} \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(M)} + \|v\|_{W^{k,p}(M)}. \end{aligned}$$

Resta probar que $W^{k,p}(M)$ es completo, asúmase que $(u_m)_{M \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $W^{k,p}(M)$ así para $\|\alpha\| \leq k, \{(\nabla u_m)_\alpha\}_{M \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(M)$, consecuencia de la norma, como $L^p(M)$ es completo existe una función $u_\alpha \in L^p(M)$ tal que

$$(\nabla u_m)_\alpha \rightarrow u_\alpha \text{ con } L^p(M)$$

en especial para $\alpha = 0$ pero esto es $u_m \rightarrow u_0 = u$ en $L^p(M)$.

Ahora decimos que $u \in W^{k,p}(M)$, osea que $(\nabla u) = u_\alpha$ para probar esto tomamos $\phi \in C_0^\infty(M)$ y:

$$\begin{aligned} \int_M u(\nabla\phi)_\alpha dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M u_n(\nabla\phi)_\alpha dx \\ \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_M (\nabla u_m)\phi dx &= (-1)^{|\alpha|} \int_M u_m\phi dx \end{aligned}$$

Como tenemos que $(\nabla u_m)_\alpha \rightarrow (\nabla u)_\alpha$ es $L^p(M)$ para todo $|\alpha| \leq k$ y podemos ver que $u_m \rightarrow u$ en $W^{k,p}(M)$ como necesitábamos. ■

Definición 2.2.10. *El espacio $H_k(M) = W_k^2(M)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Solo es cuestión de notar que si tomamos el producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_M (\nabla^j f)(\nabla^j g) \text{ para } W_k^2(M)$$

La norma $\|f\|_{W_k^2(M)} = (\int_M (|\nabla^j f|^2))^{1/2}$ cumple que:

$$\|f\|_{W_k^2(M)} = (\langle f, f \rangle)^{1/2}.$$

■

Llamaremos de ahora en adelante a $W_{k,0}^p(M) \in W_k^p(M)$ el subespacio de $W_k^p(M)$ con soporte compacto. Este espacio es de Banach también y de la misma manera:

$$W_{k,0}^2(M) = H_{k,0}(M).$$

2.2.2. El Teorema de Encaje de Sobolev

A continuación serán presentadas algunas definiciones que harán más clara la idea del teorema de encaje de Sobolev, este es un resultado clásico del análisis que juega un papel clave en nuestro trabajo.

Definición 2.2.11. *Sea X, Y espacios de Banach, decimos que x está continuamente encajado en Y si existe una constante C tal que $\|p\|_Y \leq C \|p\|_X$ para todo $p \in C$.*

Decimos que X está encajado compactamente en Y , o equivalentemente si cada sucesión acotada en X tiene una sucesión que converge en Y .

Definición 2.2.12. *Sean X, Y espacio de Banach y A un operador lineal, decimos que A es compacto, si manda conjuntos acotados en conjuntos precompactos, o sea que para cada $\Omega \subset X$ acotado tenemos que $\overline{A(\Omega)} \subset Y$ es compacto.*

Teorema 2.2.13. *Un operador A de X en Y es compacto si y sólo si es secuencialmente compacto. O sea si y sólo si cada una sucesión acotada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene que $A(x_n)$ tiene una sucesión convergente.*

Demostración. La prueba de este teorema se tiene del hecho que cada conjunto precompacto puede ser caracterizado por sucesiones, así un conjunto S es un espacio lineal normado es precompacto si y sólo si cada sucesión en S tiene una sucesión convergente

■

Llegado este punto podemos enunciarlo:

Teorema 2.2.14 (Teorema de Encaje de Sobolev). (Ver [8] pág. 20)

Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta n -dimensional con $n \geq 3$.

a) Si $q \leq \frac{2n}{n-2}$ entonces $H_1^2(M)$ está continuamente encajado en $L^q(M)$.

Si $r \leq \frac{2(n-1)}{(n-2)}$ entonces $H_1^2(M)$ está continuamente encajado en $L^r(\partial M)$.

b) Suponga las desigualdades estrictas en literal anterior. Las inclusiones

$$H_1^2(M) \hookrightarrow L^q(M) \quad y \quad H_1^2(M) \hookrightarrow L^r(\partial M)$$

son compactas.

2.2.3. Teorema de la divergencia

Teorema 2.2.15 (Teorema de la divergencia).

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un dominio compacto con frontera ∂M suave. Supongamos que W es un campo vectorial diferenciable, definido en M y que η es el campo vectorial normal hacia afuera en la frontera ∂M . Entonces:

$$\int_M \operatorname{div}(W) \, dv = \int_{\partial M} g(W, \eta) \, d\sigma.$$

Sean f y h funciones definidas en M , suficientemente suaves de modo que las operaciones de diferenciación e integración aplicadas a ellas sean siempre válidas. Sea $W = h\nabla f$. Por la propiedad de la divergencia tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(W) &= \operatorname{div}(h\nabla f) \\ &= h \operatorname{div}(\nabla f) + g(\nabla f, \nabla h) \\ &= h\Delta_g f + g(\nabla f, \nabla h), \end{aligned}$$

por tanto del teorema de la Divergencia se tiene que

$$\int_M (h\Delta_g f + g(\nabla f, \nabla h)) \, dv = \int_{\partial M} h g(\nabla f, \eta) \, d\sigma,$$

puesto que $g(\nabla f, \eta) = \frac{\partial f}{\partial \eta}$, tenemos

$$\int_M (h\Delta_g f + g(\nabla f, \nabla h)) \, dv = \int_{\partial M} h \frac{\partial f}{\partial \eta} \, d\sigma, \quad (2.7)$$

llamada la primera identidad de Green.

2.3. Cálculo de variaciones

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial de la forma:

$$(1) \quad A[u] = 0$$

en esta formula $A[\cdot]$ representa, un operador diferencial (lineal o no) y u es desconocido.

El cálculo de variaciones identifica una rama de estos problemas que pueden ser resueltos por análisis funcional y algunas de sus técnicas, esta clase son los problemas variacionales de la forma de la ecuación (1) donde el operador $A[\cdot]$ es la derivada de un funcional de energía apropiado $I[\cdot]$.

Así $A[\cdot] = I'[\cdot]$ y el problema (1) sería equivalente a:

$$I'[u] = 0.$$

Así podemos reconocer las soluciones de (1) como puntos críticos de $I[\cdot]$, en algunas circunstancias esto es más fácil de hallar, y así una solución de $I'[u] = 0$ se presume solución del problema original.

2.3.1. La primera variación y ecuación de Euler-Lagrange

Definición 2.3.1. *Suponga un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ acotado, sin frontera y una función suave:*

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

Llamaremos L el lagrangiano y escribimos:

$$L = L(p, z, x) = L(p_1, \dots, p_n, z, x_1, \dots, x_n)$$

dado p sustituye $D_w(x)$, z sustituye $w(x)$.

Definamos también:

$$\begin{cases} D_p L = (L_{p_1}, \dots, L_{p_n}) \\ D_z L = L_z \\ D_x L = (L_{x_1}, \dots, L_{x_n}) \end{cases}$$

Ahora para las ideas que llevábamos anteriormente, seremos más precisos y buscaremos $I[\cdot]$ que tenga la forma explícita:

$$I[w] = \int_U L(Dw(x), w(x), x) dx$$

para funciones $w : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Supongamos ahora que una función u es un minimizante de $I[\cdot]$, demostraremos que u sería automáticamente solución de un tipo especial de ecuación diferencial parcial.

Para confirmar esto tomemos $v \in C_0^\infty(M)$ y considere:

$$i(t) = I[u + tv] \quad (t \in \mathbb{R})$$

como u es minimizante entonces $i(\cdot)$ tiene un mínimo en $t = 0$ y $i'(0) = 0$.

Calculando esto explícitamente (llamado la primera variación) si

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_U L(Du + tDv, u + tv, x) dx. \\ \rightarrow i'(t) &= \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du + tDv, u + tv, x) \cdot v_{x_i} + L_z(Du + tDv, u + tv, x) \cdot v dx. \end{aligned}$$

sea $t = 0$, entonces:

$$0 = i'(0) = \int_U \sum_{i=1}^n L_{p_i}(Du, u, x) v_{x_i} + L_z(Du, u, x) v dx.$$

ahora ya que v tiene soporte compacto, integro por partes y tenemos:

$$0 = \int_U \left[- \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du, u, x)_{x_i} + L_z(Du, u, x)) \right] v dx$$

como esto se tiene para cualquier función de prueba v , se concluye que u resuelve la ecuación diferencial:

$$- \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du, u, x)_{x_i} + L_z(Du, u, x)) = 0 \text{ en } U.$$

esta es la ecuación de Euler-Lagrange asociada con el funcional de energía $I[\cdot]$.

Ejemplo 2.3.2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, defina su antiderivada $F(z) = \int_0^z f(y) dy$, entonces la ecuación de Euler-Lagrange asociada con

$$I(w) = \int_U \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - F(w) dx$$

es la ecuación de poisson $-\Delta u = f(u)$.

Note que todo esto se puede extender a una variedad M n -dimensional.

Definición 2.3.3. Decimos que una sucesión $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ contenida en M converge débilmente a $u \in X$, $u_k \rightarrow u$ si $g(u_k, y) \rightarrow g(u, y)$ para toda $y \in M$.

Nótese que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a X en el sentido usual (o fuerte) es también débilmente convergente, esto gracias a que:

$$\|g(x_n, y) - g(x, y)\| = \|g(x_n - x, y)\| \leq \|x_n - x\| \|y\|$$

(por desigualdad de Schwarz).

Teorema 2.3.4. Una sucesión débilmente convergente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio normado M tiene un único límite x , es acotada y:

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

Demostración. $g(x_n - x, x_n - x) \geq 0$ pero $g(x_n - x, x_n - x) = g(x_n, x_n) - 2g(x_n, x) + g(x, x)$, ahora como $g(x_n, x) \rightarrow g(x, x)$ cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene que

$$0 \leq \liminf \|x_n\|^2 - \liminf 2g(x_n, x) + g(x, x)$$

$$0 \leq \liminf \|x_n\|^2 - \|x\|^2$$

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

■

Extendamos algunos teoremas útiles del análisis a su forma en la topología débil.

Definición 2.3.5. Un subconjunto M se dice secuencialmente compacto en forma débil, si cada sucesión en M contiene una subsucesión que converge débilmente a un punto en M .

Teorema 2.3.6. En un espacio de Hilbert, un conjunto acotado es secuencialmente compacto en forma débil.

Teorema 2.3.7. Cada sucesión acotada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio de Hilbert tiene una subsucesión débilmente convergente.

Una de las condiciones más comunes para garantizar que un funcional $F[\cdot]$ alcanza su mínimo es la noción de semicontinuidad interior débil, para entender mejor esto hagamos la siguiente introducción:

Definición 2.3.8. Sea $m = \inf F[u]$ (donde A es un conjunto adecuado según nuestro funcional) y sea $u_k \in A$ tal que $F[u_k] \rightarrow m$ cuando $k \rightarrow \infty$, llamaremos en las $\{u_k\}$ una sucesión minimizante.

Ahora nos gustaría que alguna sucesión $\{u_k\}$ fuera convergente a un mínimo en el conjunto, para esto se necesita una idea de compacidad, sin embargo los espacios $W_1^p(M)$ son de dimensión infinita y puedo garantizar muy poco de lo que necesito. Allí es donde entra la topología débil y en $L^p(M)$ $1 < p < \infty$ existe una sucesión $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y una función $u \in W_1^p(M)$ tal que:

$$\begin{cases} u_{k_j} \rightarrow u \text{ débilmente en } L^p(M) \\ \nabla u_{k_j} \rightarrow \nabla u \text{ débilmente en } L^p(M; \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

o de manera abreviada $u_{k_j} \rightarrow u$ débilmente en $W_1^p(M)$

Sin embargo en la topología débil el funcional integral $F[\cdot]$ no es continuo con respecto a la convergencia débil y no puedo garantizar que

$$F[u] = \lim_{j \rightarrow \infty} F[u_{k_j}] \quad (*)$$

ya que aunque $\nabla u_{k_j} \rightarrow \nabla u$, no implica $\nabla u_{k_j} \rightarrow \nabla u$ c.t.p y por consecuencia no puedo garantizar que u sea un mínimo. Sin embargo realmente no necesitamos enteramente la condición (*) si no sólo:

$$F[u] \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F[u_{k_j}]$$

y por tanto gracias a que $F[u_k] \rightarrow m$ cuando $k \rightarrow \infty$ tendríamos que $F[u] \leq m$ pero ya que $m = \inf_{u \in A} F[u]$ tendríamos.

$m \leq F[u]$ y u sería un mínimo. Con la idea clara ahora definamos:

Definición 2.3.9. Diremos que un funcional $F[\cdot]$ es (secuencialmente) semicontinuo inferiormente de manera débil en $W_1^p(M)$ si se tiene que

$$F[u] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F[u_k]$$

cuando $u_k \rightarrow u$ débilmente en $W_1^p(M)$.

Definición 2.3.10. Sean S_1 y S_2 espacios normados sobre \mathbb{R} . el operador $I : S_1 \mapsto S_2$ es llamado lipschitz continuo si y solo si existe una constante $c > 0$ tal que:

$$\|Iv - Iu\| \leq c \|v - u\|$$

para todo $u, v \in S_1$.

Teorema 2.3.11. Sean S una variedad suave de Hilbert, $J \in C^1(S, \mathbb{R})$ un funcional diferenciable. Lipschitz continua que satisface la condición:

Toda sucesión $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S con $J(u_n)$ acotada en \mathbb{R} y $J'(u_n)|_{T_{u_n}S} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ tiene una subsucesión convergente.

Sean Σ_1 y Σ_2 abiertos, disjuntos de S . suponga que:

1. Existe $\alpha > 0$ tal que:

$$J(u) \leq \alpha, \forall u \in \partial\Sigma_i, i = 1, 2.$$

2. Existen $\psi_i \in \Sigma_i$ tal que:

$$J(\psi_i) > \alpha, i = 1, 2.$$

Entonces J tiene un valor crítico $c \leq \alpha$ que puede ser caracterizado como:

$$c = \sup_{\gamma \in \Gamma} \min_{u \in \gamma} J(u)$$

Donde $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], S) : \gamma(0) = \psi_1, \gamma(1) = \psi_2\}$. Es decir, existe $u \in S$ tal que:

$$J'(u) = 0 \text{ y } J(u) = c$$

Este conocido resultado del análisis variacional es llamado **Teorema de paso de montaña** y lo podemos encontrar en [16].

Capítulo 3

Estimativos a Priori

3.1. Extensión de la proyección estereográfica a la bola

Consideremos la esfera $S^{n-1}(0)$ y obtengamos la proyección estereográfica sobre \mathbb{R}^{n-1} desde el polo norte. sobre el plano $y = -1$.

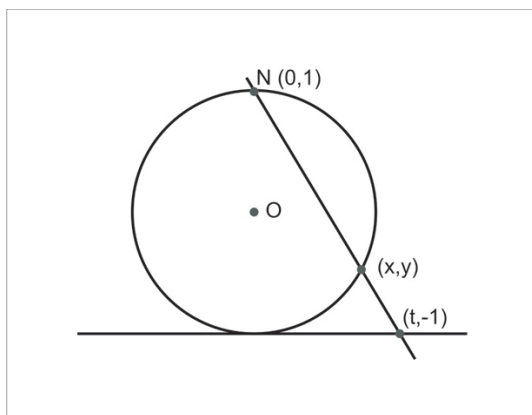


Figura 1.1: Proyección estereográfica desde el norte

Así :

$$(x, y - 1) = \lambda(t, -2)$$

$$x = \lambda t, y - 1 = -2\lambda$$

$$x = \lambda t, y = 1 - 2\lambda$$

Con lo que:

$$1 = x^2 + y^2 = \lambda^2 |t|^2 + (1 - 2\lambda)^2$$

y

$$1 = \lambda^2 |t|^2 + 1 - 4\lambda + 4\lambda^2$$

y obtengo:

$$\lambda = \frac{4}{|t|^2 + 4}$$

Ahora teniendo en cuenta que $t = \frac{x}{\lambda}$ y $\lambda = \frac{y-1}{-2}$ tengo que $t = \frac{2x}{1-y}$ y puedo definir la función $\phi : S^{n-1} - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ dada por:

$$\phi(x, y) \rightarrow \left(\frac{2x}{1-y}, -1 \right)$$

Para $x \in S^{n-2}, y \in (-1, 1)$.

Por otro lado considerando el hecho de que $x = \lambda t$, $y = 1 - 2\lambda$ y que $\lambda = \frac{4}{|t|^2 + 4}$ obtenemos la inversa de la función anterior. $\phi^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S^{n-1} - N$ dada por:

$$\phi^{-1}(t) \rightarrow \left(\frac{4t}{|t|^2 + 4}, \frac{|t|^2 - 4}{|t|^2 + 4} \right)$$

Para $t \in \mathbb{R}^{n-1}$

A continuacion quisiéramos extender esta idea para lograr algo similar sobre la bola. Consideremos entonces la bola B^n .

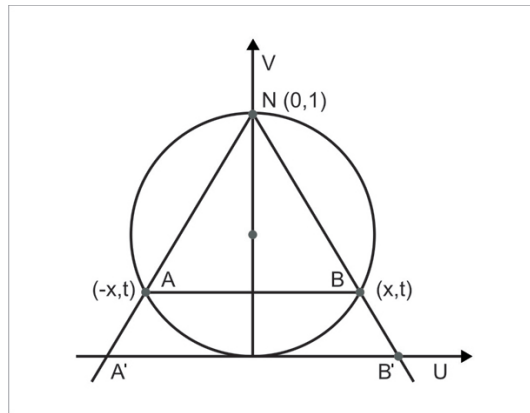


Figura 1.2: extensión de la proyección estereográfica desde el norte

Consideremos el segmento sobre B^n dado por los puntos $A(x, t)$ y $B(x, -t)$ llamamos a este AB . La proyección estereográfica nos envía estos puntos en:

$$(x, t) \rightarrow \left(\frac{2x}{1-t}, -1 \right), (-x, t) \rightarrow \left(\frac{-2x}{1-t}, -1 \right)$$

Quisiéramos saber donde se va un punto del interior de AB , si pensamos en una transformación conforme con dominio en la bola y que podamos concebir como extensión de la proyección estereográfica, conservaremos en esta la imagen de A llamada A' y de B llamada B' fijas.

Considerando que la transformación conforme envía rectas en circunferencias, sabemos que la imagen de AB es una porción de una circunferencia formada por los puntos A' , B' y el polo norte N . Hallemos la ecuación de dicha circunferencia.

Calculamos el centro como la intersección de las medianas del triángulo $A'B'N$, la mediana del eje que pasa por el norte es claramente $u = 0$. Calculamos entonces la mediana del segmento $B'N$. El punto medio de este segmento esta dado por:

$$PM(B', N) = \left(\frac{x}{1-t}, 0 \right)$$

Ahora ya que la recta determinada por la mediana es perpendicular a la recta que para por B' y N o por BN calculamos estas, la pendiente de BN llamada $M1$ es:

$$M1 = \frac{t-1}{x}$$

y la pendiente de la mediana es:

$$M2 = \frac{-x}{t-1}$$

Así la ecuación de la recta de nuestra mediana es:

$$v - 0 = \frac{-x}{t-1} \left(u - \frac{x}{1-t} \right)$$

Interceptando con la mediana $u = 0$ tenemos:

$$v_0 = \frac{-x^2}{(1-t)^2}$$

Y el el centro de la circunferencia $A'B'N$ es el punto $(0, v_0) = \left(0, \frac{-x^2}{(1-t)^2} \right)$ y el radio es $r = d((0, 1), (0, v_0)) = \sqrt{0^2 + (1 - v_0)^2} = (1 - v_0)$.

Con todo esto llegamos a la ecuación de la circunferencia que necesitábamos:

$$u^2 + (v - v_0)^2 = (1 - v_0)^2$$

Ahora consideremos un punto (y, t) sobre AB , la imagen de este punto en nuestra transformación estará dada por la intersección de la recta formada por (y, t) y el $(0, 1)$ y la circunferencia imagen de AB , esto teniendo en cuenta que nuestra transformación es conforme y preservara el mismo ángulo que tenía el punto para su imagen y por tanto estando sobre la misma recta. Ahora dicha recta es:

$$v - 1 = \frac{t - 1}{y}u$$

Interceptando:

$$\begin{cases} u^2 + (v - v_0)^2 = (1 - v_0)^2 \\ v - 1 = \frac{t-1}{y}u. \end{cases} \quad (3.1)$$

Obtengo:

$$\begin{aligned} u^2 + \left(\frac{t-1}{y}u + 1 - v_0 \right)^2 &= (1 - v_0)^2 \\ u^2 + \left(\frac{t-1}{y}u + r \right)^2 &= r^2 \\ u^2 + \left(\frac{t-1}{y} \right)^2 u^2 + 2\frac{t-1}{y}ur + r^2 &= r^2 \\ u^2 \left(\left(\frac{t-1}{y} \right)^2 + 1 \right) + 2 \left(\frac{t-1}{y} \right) ur &= 0 \end{aligned}$$

Ahora si $u \neq 0$:

$$u = \frac{-2r\frac{t-1}{y}}{\left(\frac{t-1}{y}\right)^2 + 1} \quad , \quad v = \frac{-2r\left(\frac{t-1}{y}\right)^2}{\left(\frac{t-1}{y}\right)^2 + 1}$$

Observe que:

$$r = 1 - v_0 = 1 + \frac{x^2}{(1-t)^2} = \frac{(1-t)^2}{+} x^2 (1-t)^2 = \frac{1 - 2t + t^2 + x^2}{(1-t)^2} = 2 \left(\frac{1-t}{(1-t)^2} \right) = \frac{2}{1-t}$$

Con lo cual:

$$u = \frac{\frac{-4}{(1-t)} \frac{t-1}{y}}{\left(\frac{t-1}{y}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{4}{y}}{\frac{(t-1)^2 + y^2}{y^2}} = \frac{4y}{(t-1)^2 + y^2}$$

y

$$v = \left(\frac{t-1}{y} \right) \frac{4y}{(t-1)^2 + y^2} + 1 = \frac{4t - 4(t-1)^2 + y^2}{(t-1)^2 + y^2} = \frac{(t-1)^2 + y^2 - 4}{(t-1)^2 + y^2}$$

De esta manera podemos llegar a la siguiente definición:

Definición 3.1.1. Sea B^n la bola n dimensional y $\mathbb{R}_{-1}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \leq -1\}$ definimos la función $\phi : B^n \longrightarrow \mathbb{R}_{-1}^n$ como la aplicación:

$$(y, s) \longrightarrow \left(\frac{4y}{\|y\|^2 + (s-1)^2}, \frac{\|y\|^2 + (s+1)^2 - 4}{\|y\|^2 + (s-1)^2} \right)$$

y la función $\phi^{-1} : \mathbb{R}_{-1}^n \longrightarrow B^n$ dada por:

$$(x, t) \longrightarrow \left(\frac{4x}{\|x\|^2 + (t-1)^2}, \frac{\|x\|^2 + (t+1)^2 - 4}{\|x\|^2 + (t-1)^2} \right)$$

Es fácil ver que si $z \in B^n$, $z = (y, s)$ con $s \in (-1, 1)$ y $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$ y N es el polo norte de la bola, nuestra función ϕ corresponde a la inversión:

$$\phi(z) = \frac{4(z - N)}{|z - N|^2} + N$$

Esta inversión es tal que $\phi(N) = \infty$, $\phi(S) = S$, $\phi(0) = 3S$.

Lema 3.1.2. Tal como fue mencionado en (3.1.1) la función ϕ es su propia inversa.

Demostración.

$$\phi(\phi(z)) = 4 \frac{\phi(z) - N}{|\phi(z) - N|^2} + N = 4 \frac{4 \frac{z-N}{|z-N|^2}}{4 \frac{|z-N|^2}{|z-N|^4}} + N = \frac{z-N}{\frac{|z-N|^2}{|z-N|^4}} + N = z - N + N = z$$

■

Proposición 3.1.3. Sea $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ y $t < -1$ sig₀ es la métrica en B^n inducida por \mathbb{R}^n entonces el pullback de la métrica g_0 asociada a ϕ es la métrica:

$$\phi^*(g_0) = \frac{16\delta_{ij}}{(\|x\|^2 + (t-1)^2)^2}$$

Demostración.

Si $i = 1 \dots n-1$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} &= \left(\frac{4(\|x\|^2 + (t-1)^2)e_i - 8xx_i}{(\|x\|^2 + (t-1)^2)^2}, \frac{2x_i(\|x\|^2 + (t-1)^2) - 2x_i(\|x\|^2 + (t+1)^2 - 4)}{(\|x\|^2 + (t-1)^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{(\|x\|^2 + (t-1)^2)^2} (4(\|x\|^2 + (t-1)^2)e_i - 8xx_i, 8x_i(t-1)) \end{aligned}$$

Ahora

$$\phi^*(g_0) = \phi(g_0)(e_i, e_j) = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle$$

$$\frac{1}{(\|x\|^2 + (t-1)^2)^2} (16(\|x\|^2 + (t-1)^2)\delta_{ij} + 64\|x\|^2x_ix_j - 64(\|x\|^2 + (t-1)^2)x_ix_j + 64x_ix_j(t-1)^2)$$

$$= \frac{16\delta_{ij}}{(\|x\|^2 + (t-1)^2)^2}$$

Si $i = n$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{(\|x\|^2 + (t-1)^2)^2} (-8y(t-1), 4\|x\|^2 - 4(t-1)^2)$$

$$\left\langle \frac{\partial\phi}{\partial x_i}, \frac{\partial\phi}{\partial t} \right\rangle = -32(\|x\|^2 + (t-1)^2)^2x_i(t-1) + 64\|x\|^2x_i(t-1) - 32\|x\|^2x_i(t-1) + 32x_i(t-1)^3 = 0$$

Comprobando la conformidad de la métrica y el resultado propuesto. ■

Definición 3.1.4. Sea g_0 la métrica sobre B^n , tomando la distancia de un punto desde el polo sur tenemos que $\|z\|^2 = \|x\|^2 + (t+1)^2$, consideremos la dilatación $T : \mathbb{R}_{-1}^n \rightarrow \mathbb{R}_{-1}^n$ dada por:

$$T(x, t) = (\beta x, \beta(t+1) - 1)$$

Para $\beta \geq 0$: Esta es tal que dilata los vectores desde nuestro origen de coordenadas en $(0, -1)$.

Proposición 3.1.5. La dilatación T cumple que $T^*(\delta_{ij}) = \beta^2\delta_{ij}$.

Demostración. Sea $\alpha(l)$ una curva tal que $\alpha(0) = (x, t)$ y $\alpha'(0) = e_i$ donde $\{e_i\}_{i=1\dots n}$ es una base coordenada de \mathbb{R}_{-1}^n , hallemos $dT(e_i)$:

si $i = 1\dots n-1$ tengo:

$$\alpha(l) = (x_1, \dots, x_i + l, \dots, x_{n-1}, t)$$

y

$$dT(e_i) = \frac{\partial T(\alpha(l))}{\partial l} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \beta(\alpha(l))}{\partial l} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{\partial(\beta x_1, \dots, \beta(x_i + l), \dots, \beta x_{n-1}, \beta(t+1) - 1)}{\partial l} \Big|_{t=0} = \beta e_i$$

si $i = n$:

$$\alpha(l) = (x_1, \dots, x_{n-1}, t + l)$$

y

$$dT(e_i) = \frac{\partial(\beta x_1, \dots, \beta x_{n-1}, \beta(t+l+1) - 1)}{\partial l} \Big|_{t=0} = \beta e_n$$

en conclusión para $i= 1\dots n$ tengo que $dT(e_i) = \beta e_i$ y :

$$T^*(\delta_{ij}) = \langle dT(e_i), dT(e_j) \rangle = \langle \beta e_i, \beta e_j \rangle = \beta^2 \delta_{ij}.$$

■

A continuación propondremos el resultado principal de este trabajo y para el cual llevaremos a cabo ciertas definiciones y estimativos a lo largo de este Capítulo.

Proposición 3.1.6. *Sea $n \geq 3$ y $h = h(r)$ una función suave definida sobre ∂B^n con simetría con respecto al eje x_n . Supongamos que h tiene al menos dos máximos locales positivos y satisface una condición de suavidad cerca de todo punto crítico τ_0 de la forma $h(r) = h(\tau_0) + a|\tau - \tau_0|^\alpha + o(1)$ con $a \neq 0$ y $n - 3 < \alpha < n - 1$. Si $h'(r)$ cambia de signo en las regiones donde $h > 0$ entonces la ecuación:*

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0 & \text{en } B^n, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{n-2}{2} u = h \frac{n-2}{2} u^p & \text{en } \partial B^n \end{cases} \quad (3.2)$$

donde $1 < p < \frac{n}{n-2}$, tiene solución.

Para probar este resultado sentemos algunas cosas:

Sea $\gamma_n = \frac{n-2}{2}$, $\tau = \frac{n}{n-2}$ así la ecuación (3.2) se transforma en:

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0 & \text{en } B^n, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma_n u = h \gamma_n u^p & \text{en } \partial B^n \end{cases} \quad (3.3)$$

para $1 < p < \tau$.

Ahora si multiplicamos por u e integramos por partes:

$$\begin{aligned} -u \Delta u = 0 &\longrightarrow \int_{B^n} -u \Delta u \, dv = 0 \longrightarrow \int_{B^n} |\nabla u|^2 \, dv - \int_{\partial B^n} u \frac{\partial u}{\partial \eta} \, d\sigma = 0 \\ &\longrightarrow \int_{B^n} |\nabla u|^2 \, dv - \int_{\partial B^n} (\gamma_n h u^{\frac{n}{n-2}} - \gamma_n u) u \, d\sigma = 0 \\ &\longrightarrow \int_{B^n} |\nabla u|^2 \, dv + \int_{\partial B^n} \gamma_n u^2 \, d\sigma = \int_{\partial B^n} \gamma_n h u^{\frac{n}{n-2}+1} \, d\sigma \end{aligned}$$

Definamos los siguientes funcionales:

$$J_p(u) = \int_{\partial B^n} \gamma_n h u^{p+1} d\sigma$$

$$E(u) = \int_{B^n} |\nabla u|^2 dv + \int_{\partial B^n} \gamma_n u^2 d\sigma$$

Sea $\|u\| = \sqrt{E(u)}$ la norma de $H_1^2(B^n)$ y consideremos:

$$S = \{u \in H_1^2(B^n) : E(u) = E(1) = \gamma_n |S^{n-1}|, u \geq 0\}$$

Donde $|S^{n-1}|$ es el volumen de S^{n-1} .

Lema 3.1.7. *Un múltiplo escalar de un punto crítico de J_p en S es solución de (3.3)*

Demostración.

$$J'_p(u)v = (p+1) \int_{\partial B^n} \gamma_n h u^p v d\sigma$$

$$E'(u)v = 2 \int_{B^n} \nabla u \nabla v dv + 2\gamma_n \int_{\partial B^n} u v d\sigma$$

$$= -2 \int_{B^n} v \Delta u dv + 2 \int_{\partial B^n} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma + 2\gamma_n \int_{\partial B^n} u v d\sigma.$$

Usando multiplicadores de lagrange $J'_p(u)v = kE'(u)v$ encontramos:

$$(p+1) \int_{\partial B^n} \gamma_n h u^p v d\sigma = 2k \left(- \int_{B^n} v \Delta u dv + \int_{\partial B^n} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma + \gamma_n \int_{\partial B^n} u v d\sigma \right)$$

Entonces u es solución débil del problema y:

$$0 = -2k \int_{B^n} v \Delta u dv + 2k \int_{\partial B^n} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma + 2k\gamma_n \int_{\partial B^n} u v d\sigma - (p+1) \int_{\partial B^n} \gamma_n h u^p v d\sigma$$

Esto es $2k\Delta u = 0$ en B^n ($k \neq 0$) lo cual implica $\Delta u = 0$ en B^n y:

$$2k \left(\int_{\partial B^n} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma + \gamma_n \int_{\partial B^n} u v d\sigma \right) - (p+1) \int_{\partial B^n} \gamma_n h u^p v d\sigma = 0$$

osea:

$$2k \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma_n u \right) = (p+1)\gamma_n h u^p$$

y tenemos

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0 & \text{en } B^n, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma_n u = h\gamma_n u^p \left(\frac{1}{\frac{2k}{p+1}} \right) & \text{en } \partial B^n \end{cases} \quad (3.4)$$

Si $u = \left(\frac{2k}{p+1}\right)^{\frac{1}{p-1}} w$ obtengo:

$$\begin{cases} \Delta_g w = 0 & \text{en } B^n, \\ \left(\frac{2k}{p+1}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \gamma_n w \left(\frac{2k}{p+1}\right)^{\frac{1}{p-1}} = h \gamma_n w^p \left(\frac{2k}{p+1}\right)^{\frac{p}{p-1}-1} & \text{en } \partial B^n \end{cases} \quad (3.5)$$

osea:

$$\begin{cases} \Delta_g w = 0 & \text{en } B^n, \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} + \gamma_n w = h \gamma_n w^p & \text{en } \partial B^n \end{cases} \quad (3.6)$$

Donde w es múltiplo de la función u como se quería demostrar. ■

3.2. Soluciones en el caso $h = 1$

Tomemos el sistema de coordenadas sobre R^n tal que el polo sur de la bola B^n sea el origen de coordenadas. Sea g la métrica usual sobre B^n , la dilatación $T : R_{-1}^n \rightarrow R_{-1}^n$ tal que $T(x, t) = (\beta x, \beta(t+1) - 1)$ y $\phi : (B^n, g) \rightarrow (R_{-1}^n, \delta_{ij})$ la inversión sobre la bola desde el polo norte. a continuación encontraremos una familia de soluciones positivas u para el problema:

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0 & \text{en } B^n, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma_n u = \gamma_n u^p & \text{en } \partial B^n \end{cases} \quad (3.7)$$

Como se puede ver, estas son soluciones para el problema de prescribir curvatura escalar cero y curvatura media $h = 1$ en la bola. Introduzcamos el siguiente teorema que nos será útil en la construcción de las soluciones.

Teorema 3.2.1. *Sea $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ y (M_3, g_3) variedades diferenciables y β, ψ funciones suaves tal que $\beta : (M_1, g_1) \rightarrow (M_2, g_2)$ y $\psi : (M_2, g_2) \rightarrow (M_3, g_3)$ donde ambas son aplicaciones biyectivas con diferencial biyectivo, entonces:*

$$(\psi \circ \beta)^*(g_3) = \beta^*(\psi^*(g_3)).$$

Demostración. Sean $v, w \in T_{p_1} M_1$, entonces:

$$\begin{aligned} (\psi \circ \beta)^*(g_3)(v, w) &= g_3(d(\psi \circ \beta)_{p_1}(v), d(\psi \circ \beta)_{p_1}(w)) \\ &= g_3(d(\psi)_{\beta p_1}(d\beta_{p_1}(v)), d(\psi)_{\beta p_1}(d\beta_{p_1}(w))) \end{aligned}$$

$$= \psi^*(g_3)(d\beta_{p_1}(v), d\beta_{p_1}(w)) = \beta^*(\psi^*(g_3))(v, w)$$

■

Usando el teorema anterior calculemos $(\phi \circ T)^*(g)$, esto es:

$$(\phi \circ T)^*(g) = T^*(\phi^*(g)) = \phi^*(g)_{T(z')} \langle dT(e_i), dT(e_j) \rangle$$

Ahora $dT(e_i) = \beta e_i$, para $\alpha(l) = T(x, t) + le_i$ para $z' = (x, t) \in R_{-1}^n$ y:

$$\phi^*(g)_{T(z')} \langle \beta e_i, \beta e_j \rangle = \frac{16\beta^2 \delta_{ij}}{(\|\beta x\|^2 + (\beta(t+1) - 2)^2)^2}$$

Puesto que las metricas $(\phi \circ T)^*(g)$ y $\phi^*(g)$ son conformes, existe una función suave positiva u tal que:

$$u^{\frac{4}{n-2}} \frac{16\delta_{ij}}{(\|x\|^2 + (t-1)^2)^2} = \frac{16\beta^2 \delta_{ij}}{(\|\beta x\|^2 + (\beta(t+1) - 2)^2)^2}$$

y

$$u^{\frac{2}{n-2}} = \frac{\beta(\|x\|^2 + (t-1)^2)}{(\|\beta x\|^2 + (\beta(t+1) - 2)^2)}$$

Esta es una familia infinita de soluciones para el problema (3.7), a continuación observemos algunas relaciones que nos simplificarán un poco estas soluciones.

3.3. Relaciones sobre la Bola

Lema 3.3.1. Sea $\phi : B^n \rightarrow \mathbb{R}_{-1}^n$ la inversión sobre la bola desde el polo norte, y sea $\phi(z) = z'$, con $\|\cdot\|$ la distancia tomadas desde el polo sur, entonces se cumple que:

$$\|z'\|^2 = \frac{4\|z\|^2}{\|z\|^2 - 4s}$$

Demostración.

Considere en los trazos realizados para la construcción de la extensión de la proyección para un punto $z = (y, s)$ cualquiera dentro de la esfera tenemos:

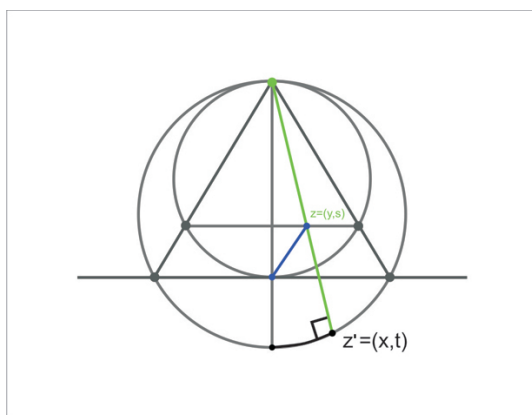


Figura 1.3: Relaciones entre z y z'

Consideremos:

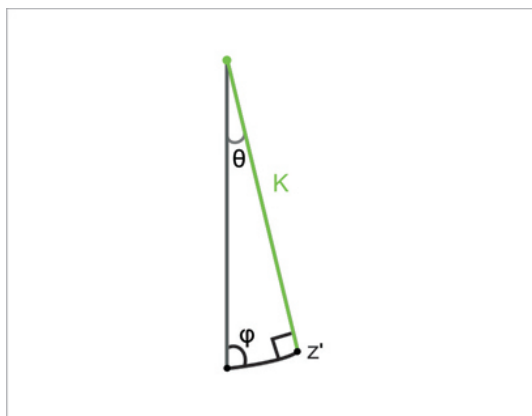


Figura 1.4: relaciones entre z y z'

De este primer triángulo obtengo que $k = 2r \cos \theta = 2r \sin \varphi$ y como r es el radio de la circunferencia $A'B'N$ entonces $k = 2\left(\frac{2}{1-s}\right) \sin \varphi = \frac{4 \sin \varphi}{1-s}$ por otro lado del triángulo:

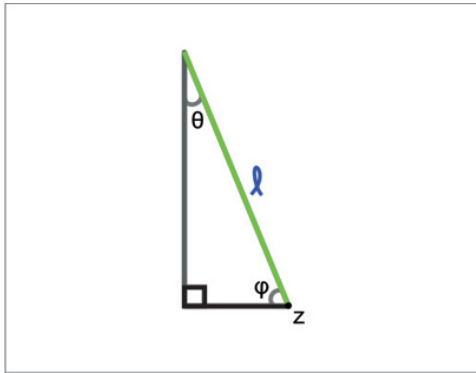


Figura 1.5: relaciones entre z y z'

Obtengo $l = \frac{1-s}{\text{sen}\varphi}$, ahora sí tomamos el triángulo:

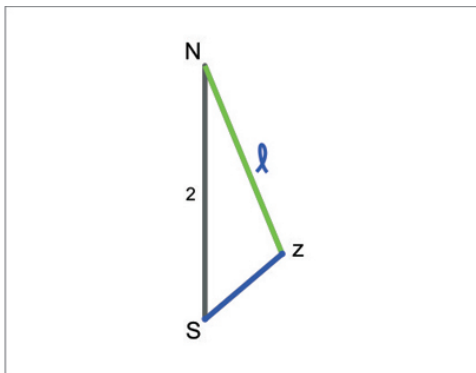


Figura 1.6: relaciones entre z y z'

tenemos que $\|z\|^2 = 4 + l^2 - 4l\cos\theta = 4 + l^2 - 4l\sin\varphi$, finalmente considerando:

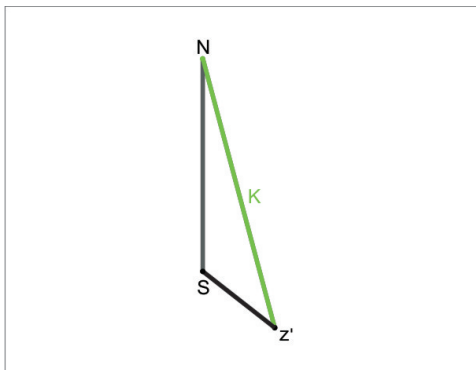


Figura 1.7: relaciones entre z y z'

Obtengo que $\|z\|^2 = 4 + k^2 - 4k\cos\theta = 4 + k^2 - 4k\sin\varphi$ así:

$$\|z\|^2 = 4 + \left(\frac{1-s}{\sin\varphi}\right)^2 - 4 + \left(\frac{1-s}{\sin\varphi}\right)\sin\varphi = \left(\frac{1-s}{\sin\varphi}\right)^2 + 4s$$

y

$$\|z'\|^2 = 4 + \left(\frac{\sin\varphi}{1-s}\right)^2 - 16\left(\frac{\sin^2\varphi}{1-s}\right) = 4 + 16\left(\frac{\sin^2\varphi}{(1-s)^2}\right)$$

Combinando estos resultados llego a que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin^2\varphi}{(1-s)^2}\right) &= \frac{1}{\|z\|^2 - 4s} \\ \|z'\|^2 &= 4 + \frac{16s}{\|z\|^2 - 4s} = \frac{4\|z\|^2}{\|z\|^2 - 4s} \end{aligned}$$

Esto completaría nuestra demostración, sin embargo hagamos una confirmación algebraica también, consideremos $|\cdot|$ la distancia al cero, y $\|\cdot\|$ la distancia tomada desde el polo sur, ya que $\phi(z) = 4\frac{z-N}{|z-N|^2} + N$ tengo que:

$$|\phi(z) - S|^2 = \left|4\frac{z-N}{|z-N|^2} + 2N\right|^2$$

$$\|z'\|^2 = \frac{1}{|z-N|^4}(16|z-N|^2 + 16(z-N)N|z-N|^2 + 4|z-N|^4) = \frac{|4N + 2(z-N)|^2}{|z-N|^2}$$

$$\|z'\|^2 = 4\frac{|z+N|^2}{|z-N|^2} = 4\frac{|z-S|^2}{|z+S|^2} = \frac{4\|z\|^2}{|z-S+2S|^2} = \frac{4\|z\|^2}{|z-S|^2 + 4S(z-S) + 4}$$

Así:

$$\|z'\|^2 = \frac{4\|z\|^2}{\|z\|^2 - 4Sz}$$

Pero ya que $z = (y, s)$ entonces $z.S = -s$ y .

$$\|z'\|^2 = \frac{4\|z\|^2}{\|z\|^2 - 4s}$$

■

Ahora volviendo a nuestra solución. Si $z' = (x, t) \in \mathbb{R}_{-1}^n$ y $z = (y, s) \in B^n$ tengo:

$$u^{\frac{2}{n-2}} = \frac{\beta(\|x\|^2 + (t-1)^2)}{(\|\beta x\|^2 + (\beta(t+1) - 2)^2)}$$

Como $\|z'\|^2 = \|x\|^2 + (t+1)^2$ entonces tengo que:

$$u^{\frac{2}{n-2}} = \frac{\beta^2(\|z'\|^2 - 4t)}{(\beta^2\|z'\|^2 + 4 - 4\beta(t+1))}$$

Ahora tomando en cuenta que $\|z'\|^2 = \frac{4\|z\|^2}{\|z\|^2 - 4s}$ y que $t = \frac{\|y\|^2 + (s+1)^2 - 4}{\|y\|^2 + (s-1)^2} = \frac{\|z\|^2 - 4}{\|z\|^2 - 4s}$ y reemplazando:

$$u^{\frac{2}{n-2}} = \frac{\beta \left(\frac{4\|z\|^2}{\|z\|^2 - 4s} - 4 \frac{\|z\|^2 - 4}{\|z\|^2 - 4s} \right)}{\left(\beta^2 \frac{4\|z\|^2}{\|z\|^2 - 4s} + 4 - 4\beta \frac{\|z\|^2 - 4}{\|z\|^2 - 4s} \right)}$$

y

$$\begin{aligned} u^{\frac{2}{n-2}} &= \frac{16\beta}{\beta^2(4\|z\|^2) - 4\beta(\|z\|^2 - 4 + \|z\|^2 - 4s) + 4(\|z\|^2 - 4s)} \\ &= \frac{4\beta}{(\beta - 1)^2\|z\|^2 + 4s(\beta - 1) + 4\beta} \end{aligned}$$

con lo que:

$$u(z) = \left(\frac{4\beta}{(\beta - 1)^2\|z\|^2 + 4s(\beta - 1) + 4\beta} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

Ahora para ciertos cálculos en nuestro trabajo nos veremos realizando estimativos sobre la frontera de la bola, osea en $\partial B^n = S^{n-1}$, de esta manera seria util una version más sencilla de nuestra solución sobre S^{n-1} . Consideremos para esto que cortamos con el plano $t = -1$, Así :

$$-1 = \frac{\|y\|^2 + (s+1)^2 - 4}{\|y\|^2 + (s-1)^2} = \frac{\|z\|^2 - 4}{\|z\|^2 - 4s}$$

y

$$-\|z\|^2 + 4s = \|z\|^2 - 4 \longrightarrow 4s = 2\|z\|^2 - 4 \longrightarrow s = \frac{\|z\|^2 - 2}{2}$$

si incorporamos esta condición en u , tenemos la solución sobre S^{n-1} :

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{4\beta}{(\beta^2 - 2\beta + 1)\|z\|^2 + 2(\|z\|^2 - 2)(\beta - 1) + 4\beta} \right)^{\frac{n-2}{2}} = \left(\frac{4\beta}{(\beta^2 - 1)\|z\|^2 + 4} \right)^{\frac{n-2}{2}} \\ &\longrightarrow u = \left(\frac{\beta}{\frac{(\beta^2 - 1)\|z\|^2}{4} + 1} \right)^{\frac{n-2}{2}} = \left(\frac{\beta}{\frac{(\beta^2 - 1)\|x\|^2}{4} + 1} \right)^{\frac{n-2}{2}} \end{aligned}$$

En ocasiones parametrizaremos B^n y su frontera S^{n-1} de la siguiente manera, si $z \in B^n$, $z = (\rho, r, \theta)$ con $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq r \leq \pi$ y $\theta \in B^{n-1}$, mientras que si $x \in S^{n-1}$, $x = (r, \theta)$ con $0 \leq r \leq \pi$ y $\theta \in S^{n-1}$.

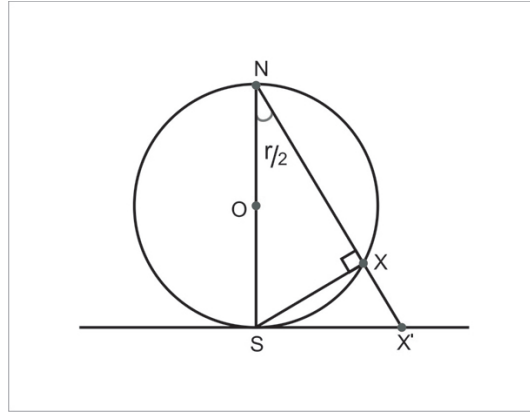


Figura 1.8: relaciones de x y x' en S^{n-1}

De este triángulo obtenemos que $\frac{\|x\|}{2} = \text{sen} \frac{r}{2}$ lo cual en nuestra solución sobre la esfera representa que :

$$u(x) = \left(\frac{\beta}{(\beta^2 - 1)\text{sen}^2 \frac{r}{2} + 1} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

Tomando $1 \leq \beta \leq \infty$, si $\lambda = \frac{1}{\beta}$ tengo que $0 \leq \lambda \leq 1$ y :

$$u(x) = \left(\frac{\lambda}{(1 - \lambda^2)\text{sen}^2 \frac{r}{2} + 1} \right)^{\frac{n-2}{2}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2}} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

o

$$u(x) = \left(\frac{\lambda}{(1 - \lambda^2)\frac{x_n}{2} + \lambda^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}$$

Donde x_n es la n -ésima coordenada de x .

Aprovechando que estamos trabajando sobre S^{n-1} introduzcamos un resultado que nos será útil para ver que las soluciones que hemos hallado pertenecen al espacio S en el que queremos que estén.

Proposición 3.3.2. *El volumen de S^{n-1} se puede expresar de la siguiente manera:*

$$|S^{n-1}| = |S^{n-2}| \int_0^\pi \sin^{n-2} u_n du_n$$

Demostración.

Sea $U = (0, 2\pi) \times (0, \pi) \times (0, \pi) \times \dots \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ y $\varphi : U \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de S^{n-1} dada por.

$$\varphi(u_1, \dots, u_{n-1}) = (\mu(u_1, \dots, u_{n-2}) \sin u_{n-1}, \cos u_{n-1})$$

Donde μ es una parametrización de S^{n-2} , así:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial u_i} \sin u_{n-1}, 0 \right)$$

Para $i = 1 \dots n - 2$ y:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}} = (\mu(u) \cos u_{n-1}, -\sin u_{n-1})$$

y

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right\rangle = \sin^2 u_{n-1} g_{ij}$$

para $i, j = 1 \dots n - 2$

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}} \right\rangle = \sin u_{n-1} \cos u_{n-1} \left\langle \frac{\partial u}{\partial u_i}, \mu(0) \right\rangle = 0$$

ya que $\frac{\partial u}{\partial u_i} \in T_{\mu(u)} S^{n-1}$ y $\mu(u) \in S^{n-1}$, además:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}} \right\rangle = 1$$

Así la matriz de la métrica $[G_{ij}]$ es:

$$[G_{ij}] = \begin{pmatrix} \sin^2 u_{n-1} [g_{ij}] & & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia:

$$\det [G_{ij}] = (\sin^2 u_{n-1})^{n-2} \det g_{ij}$$

Así el volumen de $|S^{n-1}|$ es:

$$|S^{n-1}| = \int_{U \times [0, \pi]} \sqrt{\det [G_{ij}]} dv = \int_U \sqrt{\det [g_{ij}]} dv \int_0^\pi \sin^{n-2} u_n du_n = |S^{n-2}| \int_0^\pi \sin^{n-2} u_n du_n$$

■

Ahora sea \tilde{q} un punto sobre S^{n-1} nuestra familia de soluciones u es simétrica con respecto al eje definido por e_n y \tilde{q} . Denotemos por $u_{\tilde{q}, \lambda} = u_q$ a las soluciones con centro de masa q dado por:

$$q = q(u) = \frac{\int_{B^n} z u^{2\tau}(z) dv}{\int_{B^n} u^{2\tau}(z) dv}$$

Observe que el punto q está completamente determinado por \tilde{q} y λ y que se encuentra en el eje definido por e_n y \tilde{q} . Ahora para el resto de nuestro trabajo y a no ser que se diga lo contrario, supondremos que \tilde{q} es el origen de coordenadas.

Proposición 3.3.3. *La familia de soluciones u_q pertenece a S*

Demostración.

En efecto ya que u_q cumple (3.7) osea:

$$\begin{cases} \Delta_g u_q = 0 & \text{en } B^n, \\ \frac{\partial u_q}{\partial \eta} + \gamma_n u_q = \gamma_n u_q^p & \text{en } \partial B^n \end{cases} \quad (3.8)$$

Ahora si multiplicamos por u e integramos por partes :

$$\begin{aligned} -u_q \Delta u_q &\longrightarrow \int_{B^n} -u_q \Delta u_q = 0 \longrightarrow \int_{B^n} |\nabla u_q|^2 dv - \int_{S^{n-1}} \frac{\partial u_q}{\partial \eta} u_q d\sigma = 0 \\ &\longrightarrow \int_{B^n} |\nabla u_q|^2 dv - \int_{S^{n-1}} (\gamma_n u_q^p - \gamma_n u_q) u_q d\sigma = 0 \\ &\longrightarrow \int_{B^n} |\nabla u_q|^2 dv + \int_{S^{n-1}} \gamma_n u_q^2 d\sigma = \int_{S^{n-1}} \gamma_n u_q^{p+1} d\sigma \end{aligned}$$

y en consecuencia:

$$E(u_q) = \int_{S^{n-1}} \gamma_n u_q^{p+1} d\sigma$$

Así que para ver que $u_q \in S$ resta ver que $\int_{S^{n-1}} \gamma_n u_q^{p+1} d\sigma = |S^{n-1}|$, consideremos las coordenadas esféricas $d\sigma = \sin^{n-2} r \sin^{n-1} \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-2}$ y consideremos u_q restringida a S^{n-1} de esta manera tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} u_q^{p+1} d\sigma &= \int_{S^{n-1}} u_q^{\frac{2(n-1)}{n-2}} d\sigma = \int_{S^{n-1}} \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2}} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right)^{\frac{2(n-1)}{n-2}} d\sigma \\ &= \int_{S^{n-1}} \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2}} \right)^{n-1} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta_{n-2} \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta_{n-3} d\theta_{n-3} \dots \int_0^\pi \frac{\lambda^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \\ &= |S^{n-2}| \int_0^\pi \frac{\lambda^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \end{aligned}$$

Ahora si $r = 2 \tan^{-1}(\lambda \tan \frac{u}{2})$ tengo que:

$$dr = 2 \left(\frac{1}{1 + \lambda^2 \tan^2 \frac{u}{2}} \right) \lambda \sec \frac{u}{2} \frac{1}{2} du = \frac{\lambda \sec^2 \frac{u}{2}}{1 + \lambda^2 \tan^2 \frac{u}{2}} du$$

Usando las identidades trigonométricas sobre el triángulo con angulo $\frac{r}{2} = \tan^{-1}(\lambda \tan \frac{r}{2})$ tenemos que:

$$\cos \frac{r}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 \tan^2 \frac{u}{2}}}$$

y

$$\sin \frac{r}{2} = \frac{\lambda \tan \frac{u}{2}}{\sqrt{1 + \lambda^2 \tan^2 \frac{u}{2}}}$$

y ya que $\sin r = 2 \sin \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2}$ entonces:

$$\sin r = \frac{2\lambda \tan \frac{u}{2}}{1 + \lambda^2 \tan^2 \frac{u}{2}}$$

Así:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\lambda^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr &= \int_0^\pi \lambda^{n-1} \frac{\left(\frac{2\lambda \tan \frac{u}{2}}{1 + \lambda^2 \tan^2 \frac{u}{2}}\right)^{n-2}}{\left(\frac{\lambda^2(1 + \tan^2 \frac{u}{2})}{1 + \lambda^2 \tan^2 \frac{u}{2}}\right)^{n-1}} \frac{\lambda \sec^2 \frac{u}{2}}{1 + \lambda^2 \tan^2 \frac{u}{2}} du \\ &= \int_0^\pi \frac{\lambda^{2n-3} \left(\frac{2\lambda \sec^2 \frac{u}{2}}{1 + \lambda^2 \tan^2 \frac{u}{2}}\right)^{n-2}}{\lambda^{2n-4} \left(\frac{\lambda^2 \sec^2 \frac{u}{2}}{1 + \lambda^2 \tan^2 \frac{u}{2}}\right)^{n-1}} \frac{2\lambda \sec^2 \frac{u}{2}}{1 + \lambda^2 \tan^2 \frac{u}{2}} du = \int_0^\pi \frac{\lambda^{2n-3}}{\lambda^{2n-3}} \left(\frac{\tan \frac{u}{2}}{\sec \frac{u}{2}}\right)^{n-2} du \end{aligned}$$

y

$$E(u_q) = \gamma_n \int_{S^{n-1}} u_q^{p+1} d\sigma = |S^{n-2}| \int_0^\pi \sin^{n-2} u du = \gamma_n |S^{n-1}|$$

■

3.4. Transformación conforme

Definición 3.4.1. Sea $h_\lambda : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ la dilatación sobre S^{n-1} dada por :

$$h_\lambda(x) = h_\lambda(r, \theta) = \left(2 \tan^{-1} \left(\lambda \tan \frac{r}{2}\right), \theta\right)$$

Sea $\varphi : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (B^n, S^{n-1})$ la extensión de h_λ a la bola con frontera dada por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} h_\lambda\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{para } x \text{ en } B^n, S^{n-1} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Esta extensión es claramente continua y conforme por ser una dilatación. Consideremos ahora $T_\varphi : H_1^2(B^n) \rightarrow H_1^2(B^n)$ dada por:

$$T_\varphi(u(x)) = u(\varphi(x)) \cdot [\det(d\varphi(x))]^{\frac{n-2}{2(n-1)}}$$

Teorema 3.4.2. Sea $\varphi : B^n \longrightarrow B^n$ una transformación conforme sobre la bola y $T_\varphi u$ la acción de φ sobre u , entonces:

$$\varphi^* (u^{4/n-2} g_0) = (T_\varphi u)^{4/n-2} g_0$$

Demostración. Sean $v, w \in T_p B^n$. Entonces:

$$\begin{aligned} \varphi^* (u^{4/n-2} g_0) (v, w) &= u^{4/n-2} g_0 (d\varphi(v), d\varphi(w)) \\ &= (u \circ \varphi)^{4/n-2} [\det(d\varphi(x))]^{\frac{2}{(n-1)}} g_0(v, w) = (T_\varphi u)^{4/n-2} g_0(v, w) \end{aligned}$$

■

Corolario 3.4.3. Si u es solución de (3.7) entonces $T_\varphi u$ también es solución.

En efecto, el teorema anterior nos permite concluir que si $u^{4/n-2} g_0$ es una métrica con curvatura escalar cero y curvatura media $h = 1$ entonces $(T_\varphi u)^{4/n-2} g_0$ tendrá las mismas curvaturas por que tendríamos una relación isométrica con g_0 .

Lema 3.4.4. La transformación T_φ deja invariante el funcional J_p . Osea:

$$J_p(u) = J_p(T_\varphi(u))$$

Demostración. Veamos que $J_\tau(T_\varphi(u(x))) = J_\tau(u(x))$ para $u \in H_1^2(B^n)$:

$$\begin{aligned} J_\tau(T_\varphi(u(x))) &= \gamma_n \int_{S^{n-1}} h(r) (T_\varphi(u(x)))^{\tau+1} d\sigma \\ &= \gamma_n \int_{S^{n-1}} h(r) [u(\varphi(x))]^{\frac{2(n-1)}{n-2}} [\det(d\varphi(x))] d\sigma = \gamma_n \int_{S^{n-1}} h(r) u(y)^{\tau+1} dy = J_\tau(u). \end{aligned}$$

■

Lema 3.4.5. La transformación T_φ deja invariante el funcional $E(\cdot)$. Osea:

$$E(u) = E(T_\varphi(u))$$

Demostración. Si $u > 0$ y h es la curvatura media de ∂B^n con respecto a $u^{4/n-2} g_0$, entonces $h \circ \varphi$ es la curvatura media de ∂B^n con respecto a $(T_\varphi u)^{4/n-2} g_0$. Por un lado:

$$\begin{aligned} -u\Delta u &\longrightarrow \int_{B^n} -u\Delta u = 0 \longrightarrow \int_{B^n} |\nabla u|^2 dv - \int_{S^{n-1}} \frac{\partial u}{\partial \eta} u d\sigma = 0 \\ &\longrightarrow \int_{B^n} |\nabla u|^2 dv - \int_{S^{n-1}} (h\gamma_n u^p - \gamma_n u) u d\sigma = 0 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \int_{B^n} |\nabla u|^2 dv + \int_{S^{n-1}} \gamma_n u^2 d\sigma = \int_{S^{n-1}} \gamma_n h u^{p+1} d\sigma$$

y en consecuencia:

$$E(u) = \int_{S^{n-1}} \gamma_n h u^{p+1} d\sigma = J_p(u)$$

Por otro lado

$$E(T_\varphi u) = \int_{S^{n-1}} \gamma_n (h \circ \varphi)(T_\varphi u)^{p+1} d\sigma = J_p(T_\varphi u)$$

Ahora puesto que $J_p(u) = J_p(T_\varphi u)$ esto implica la demostración de nuestro resultado.

■

Definición 3.4.6. Sea $\Sigma = \left\{ u \in S : |q(u)| \leq \rho_0, \|v\| = \min_{t,q} \|u - tu_q\| \leq \rho_0, t \in \mathbb{R} \right\}$ el conjunto de soluciones que tienen centro de masa q cerca al polo sur O . Denotamos también por $\overset{\circ}{\Sigma}$ el interior de Σ .

Notese que en este conjunto u tiene el centro de masa en la misma vecindad que u_q que es solución de nuestro problema (3.7). La función de este conjunto es usarlo para aproximar las soluciones de nuestro problema (3.3).

Lema 3.4.7. Sea $u \in \Sigma$ y $v = u - t_0 u_q$ y T_φ como anteriormente definida. Entonces:

$$\int_{S^{n-1}} T_\varphi v dv = 0 \quad y \quad \int_{S^{n-1}} x_i T_\varphi v dv = 0.$$

Donde x_i representan las funciones coordenadas.

Este resultado lo obtenemos del artículo [3].

Lema 3.4.8. Sea $u \in \Sigma$ y $v = u - t_0 u_q$ y $T_\varphi : H_1^2(B^n) \longrightarrow H_1^2(B^n)$ como anteriormente definida. Tenemos entonces que:

$$\langle T_\varphi v, K \rangle_{H_1^2(B^n)} = 0 \quad y \quad \langle T_\varphi v, x_i \rangle_{H_1^2(B^n)} = 0$$

Donde x_i representan las funciones coordenadas y K cualquier función constante.

Demostración. Lo primero es observar que K y x_i son funciones propias de nuestro problema de valores propios:

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0 & \text{en } B^n, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda u & \text{en } \partial B^n \end{cases} \quad (3.10)$$

con $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ respectivamente.

En el caso de las funciones K esto se puede ver de manera trivial, para el caso de las funciones x_i consideremos un vector $x \in S^{n-1}$ de esta forma $\|x\| = 1$, podemos considerar $\eta = \frac{x}{\|x\|}$ y $f(x) = x_i$ entonces:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \eta} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t\eta) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tx) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x_i + tx_i - x_i}{t} = x_i$$

Ahora del lema (3.4.7) tengo que $\int_{S^{n-1}} T_\varphi v \, dv = 0$ y como $\nabla K = 0$

$$\langle T_\varphi v, K \rangle_{H_1^2(B^n)} = \int_{B^n} \nabla T_\varphi v \nabla K \, dv + \gamma_n K \int_{S^{n-1}} T_\varphi v \, d\sigma = 0$$

Por otro lado:

$$\begin{cases} \Delta_g x_i = 0 & \text{en } B^n, \\ \frac{\partial x_i}{\partial \eta} = \lambda x_i & \text{en } S^{n-1} \end{cases} \quad (3.11)$$

Multiplicando por $T_\varphi v$ e integrando por partes tengo que:

$$0 = - \int_{B^n} \nabla x_i \nabla T_\varphi v \, dv + \int_{S^{n-1}} x_i T_\varphi v \, d\sigma$$

Ahora gracias a que por lema (3.4.7) tengo que $\int_{S^{n-1}} x_i T_\varphi v \, dv = 0$ entonces:

$$\int_{B^n} \nabla x_i \nabla T_\varphi v \, dv = 0$$

y por tanto:

$$\langle T_\varphi v, x_i \rangle_{H_1^2(B^n)} = \int_{B^n} \nabla T_\varphi v \nabla x_i \, dv + \gamma_n \int_{S^{n-1}} x_i T_\varphi v \, d\sigma = 0$$

■

3.5. Estimativos sobre J_p

Presentaremos los estimativos cerca al polo sur (O, θ) donde supondremos un máximo local positivo. Los estimativos cerca otro maximo local positivos seran similares, las hipótesis del teorema implican que:

$h(r) = h(0) - ar^\alpha$ para algún $a > 0$, $n - 3 < \alpha < n - 1$ en una vecindad pequeña del origen de coordenadas O .

Proposición 3.5.1. *Para todo $\delta_1 > 0$ existe $P_1 \leq \tau$ tal que $P_1 \leq P \leq \tau$ y:*

$$\sup_{\mathring{\Sigma}} J_p(u) > h(0)|S^{n-1}| - \delta_1$$

Demostración. Veamos que $J_\tau(u_{\lambda,O}) \rightarrow h(0)|S^{n-1}|$ cuando $\lambda \rightarrow 0$ en efecto:

$$\begin{aligned}
J_\tau(u_{\lambda,O}) &= \int_{S^{n-1}} h(r)u_{\lambda,O}^{\tau+1} d\sigma = \int_{S^{n-1}} h(r) \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2}} \right)^{n-1} d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta_{n-2} \int_0^\pi \operatorname{sen} \theta_{n-3} d\theta_{n-3} \dots \int_0^\pi \frac{\lambda^{n-1} h(r) \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \\
&= |S^{n-2}| \int_0^\pi \frac{\lambda^{n-1} h(r) \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \\
&= |S^{n-2}| \left\{ \int_0^{\tau_0} \frac{\lambda^{n-1} h(r) \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr + \int_{\tau_0}^\pi \frac{\lambda^{n-1} h(r) \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \right\} \\
&= |S^{n-2}| \left\{ \int_0^{\tau_0} \frac{\lambda^{n-1} (h(0) - ar^\alpha) \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr + \int_{\tau_0}^\pi \frac{\lambda^{n-1} h(r) \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \right\}
\end{aligned}$$

Ahora sumando y restando la cantidad:

$$\int_{\tau_0}^\pi \frac{\lambda^{n-1} h(0) \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
&= |S^{n-2}| \int_0^\pi \frac{\lambda^{n-1} h(0) \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr + \int_0^{\tau_0} \frac{-ar^\alpha \lambda^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \\
&\quad + \int_{\tau_0}^\pi \frac{\lambda^{n-1} h(r) \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \\
&= h(0)|S^{n-1}| + |S^{n-2}| \left\{ \int_0^{\tau_0} \frac{-ar^\alpha \lambda^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr + \int_{\tau_0}^\pi \frac{\lambda^{n-1} (h(r) - h(0)) \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \right\}
\end{aligned}$$

sean:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left| \int_0^{\tau_0} \frac{r^\alpha \lambda^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \right| \\
I_2 &= \left| \int_{\tau_0}^\pi \frac{\lambda^{n-1} (h(r) - h(0)) \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \right|
\end{aligned}$$

Mostraremos entonces que $I_1 \rightarrow 0$ e $I_2 \rightarrow 0$ cuando $\lambda \rightarrow 0$ esto ya que:

$$I_1 = \left| \int_0^{\tau_0} \frac{r^\alpha \lambda^{n-1} (2 \operatorname{sen} \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2})^{n-2}}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \right| = \left| \int_0^{\tau_0} \frac{r^\alpha \lambda 2^{n-2} (\operatorname{sen} \frac{r}{2})^{n-2} (\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2})^{n-2}}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda 2^{n-2} \left| \int_0^{\tau_0} \frac{r^\alpha (\text{sen} \frac{r}{2})^{n-2} (\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2})^{\frac{n-2}{2}}}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \right| \leq \lambda 2^{n-2} \left| \int_0^{\tau_0} \frac{r^\alpha (\text{sen} \frac{r}{2})^{n-2}}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2})^{n/2}} dr \right| \\
&\leq \lambda 2^{n-2} \left| \int_0^{\tau_0} \frac{r^\alpha (\text{sen} \frac{r}{2})^{n-2}}{(\text{sen}^2 \frac{r}{2})^{n/2}} dr \right| \leq \lambda 2^{n-2} \left| \int_0^{\tau_0} \frac{r^\alpha (\text{sen} \frac{r}{2})^{n-2}}{(\text{sen}^2 \frac{r}{2})^n} dr \right| \leq \lambda 2^{n-2} \left| \int_0^{\tau_0} \frac{r^\alpha}{(\text{sen}^2 \frac{r}{2})^2} dr \right| \\
&= \lambda 2^n \int_0^{\tau_0} \frac{(r/2)^\alpha r^{\alpha-2}}{(\text{sen}^2 \frac{r}{2})^2} dr \leq \lambda 2^n \int_0^{\tau_0} \frac{r^{\alpha-2}}{(\cos \frac{r}{2})^2} dr \leq \lambda 2^n \frac{1}{(\cos \frac{\tau_0}{2})^2} \int_0^{\tau_0} r^{\alpha-2} dr = c_1 \lambda \frac{r_0^{\alpha-1}}{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left| \int_{\tau_0}^{\pi} \frac{\lambda^{n-1} (h(r) - h(0)) (2 \text{sen} \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2})^{n-2}}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \right| \\
&= \left| \int_{\tau_0}^{\pi} \frac{\lambda 2^{n-2} (h(r) - h(0)) (\text{sen} \frac{r}{2})^{n-2} (\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2})^{\frac{n-2}{2}}}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \right| \\
&\leq \lambda 2^{n-2} \left| \int_{\tau_0}^{\pi} \frac{(h(r) - h(0)) (\text{sen} \frac{r}{2})^{n-2} (\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2})^{\frac{n-2}{2}}}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \right| \\
&\leq \lambda 2^{n-2} \left| \int_{\tau_0}^{\pi} \frac{(h(r) - h(0)) (\text{sen} \frac{r}{2})^{n-2}}{(\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2})^{n/2}} dr \right| \leq \lambda 2^{n-2} \left| \int_{\tau_0}^{\pi} \frac{(h(r) - h(0)) (\text{sen} \frac{r}{2})^{n-2}}{(\text{sen}^2 \frac{r}{2})^{n/2}} dr \right| \\
&\leq \lambda 2^{n-2} \int_{\tau_0}^{\pi} \frac{|h(r) - h(0)|}{(\text{sen}^2 \frac{r}{2})} dr \leq \lambda 2^{n-2} \frac{1}{(\text{sen}^2 \frac{\tau_0}{2})} \int_{\tau_0}^{\pi} |h(r) - h(0)| dr \leq C_2 \lambda (\pi - \tau_0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto cuando $\lambda \rightarrow 0$ tengo que $I_1 \rightarrow 0$ e $I_2 \rightarrow 0$ y $J_\tau(u_{\lambda,O}) \rightarrow h(0)|S^{n-1}|$ y dado que $\delta_1 > 0$ por lo anterior, escogemos λ_0 tal que $u_{\lambda,O} \in \overset{\circ}{\Sigma}$ y:

$$J_\tau(u_{\lambda,O}) > h(0)|S^{n-1}| - \frac{\delta_1}{2}$$

Ya que J_p es continua con respecto a p , para $u_{\lambda_0,O}$ fija entonces existe P_1 tal que para todo $P \geq P_1$:

$$J_\tau(u_{\lambda,O}) > h(0)|S^{n-1}| - \delta_1$$

además como:

$$\sup_{\overset{\circ}{\Sigma}} J_p(u) > J_p(u_{\lambda,O})$$

Tenemos:

$$\sup_{\overset{\circ}{\Sigma}} J_p(u) > h(0)|S^{n-1}| - \delta_1$$

■

A continuación un lema que nos será útil para la siguiente demostración:

Lema 3.5.2. *Sea $S^{n-1}(e_n)$ la esfera unitaria centrada en el norte, $\tilde{q} \in S^{n-1}(e_n)$ y $f(x) = \frac{|x+\tilde{q}|^\alpha}{|x|^\alpha+|\tilde{q}|^\alpha}$ donde $\tilde{q} \neq 0$ y $x \in S^{n-1}$ entonces:*

$$\frac{|x+\tilde{q}|^\alpha}{|x|^\alpha+|\tilde{q}|^\alpha} \geq c$$

Para $c \in \mathbb{R}$

Demostración. f tiene un mínimo ya que es una función continua definida sobre un compacto, además $c \neq 0$ pues $-\tilde{q} \notin S^{n-1}$: Nótese que esto garantiza la existencia de un c tal que:

$$|x+\tilde{q}|^\alpha \geq (|x|^\alpha+|\tilde{q}|^\alpha)c$$

■

Lema 3.5.3. *Sea $\epsilon > 0$ y $\bar{B}_\epsilon(0) = \{x \in S^{n-1}(e_n) | |x| \leq \epsilon\}$. Para $n-3 < \alpha < n-1$, p suficientemente cercano a τ y para λ y $|\tilde{q}|$ suficientemente pequeños tenemos que:*

$$J_p(u_{\lambda,\tilde{q}}) \leq (h(0) - C_1|\tilde{q}|^\alpha)|S^{n-1}|(1 + O_p(1)) - C_1\lambda^{\alpha+\delta_p}$$

Donde $\delta_p > \tau - p$ y $O_p(1) \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow \tau$.

Demostración. en la bola $B_{2\epsilon}(0) \subset S^{n-1}$. considere la integral:

$$J_p(u_{\lambda,\tilde{q}}) = \int_{S^{n-1}} h(x)u_{\lambda,\tilde{q}}^{p+1} d\sigma = \int_{S^{n-1}-B_\epsilon(\tilde{q})} h(x)u_{\lambda,\tilde{q}}^{p+1} d\sigma + \int_{B_\epsilon(\tilde{q})} h(x)u_{\lambda,\tilde{q}}^{p+1} d\sigma$$

si $\tilde{q} \in B_\epsilon(0)$. Como h es acotado y estamos cerca al máximo positivo 0, haciendo una translación de coordenadas en la primera integral tenemos que:

$$\int_{S^{n-1}-B_\epsilon(\tilde{q})} h(x)u_{\lambda,\tilde{q}}^{p+1} d\sigma \leq \int_{S^{n-1}-B_\epsilon(0)} h(x+\tilde{q})u_{\lambda,\tilde{q}}^{p+1} d\sigma \leq C_1 \int_{S^{n-1}-B_\epsilon(0)} \left\{ \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2}} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right\}^{p+1} d\sigma$$

Ahora considere $\delta_p = \tau - p$ entonces $\delta_p = \frac{n}{n-2} - p$ y $p+1 = \frac{n}{n-2} - \delta_p + 1$ y por lo tanto $\left(\frac{n-2}{2}\right)(p+1) = (n-1) - \frac{n-2}{2}\delta_p$ y:

$$\int_{S^{n-1}-B_\epsilon(\tilde{q})} h(x)u_{\lambda,\tilde{q}}^{p+1} d\sigma \leq C_1 \int_{S^{n-1}-B_\epsilon(0)} \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2}} \right)^{(n-1) - \frac{n-2}{2}\delta_p} d\sigma$$

$$\begin{aligned}
&= C_1 \int_{S^{n-1}-B_\epsilon(0)} \left(\frac{\lambda}{(\lambda^2-1)\cos^2\frac{r}{2}+1} \right)^{(n-1)-\frac{n-2}{2}\delta_p} d\sigma \leq C_1 \int_{S^{n-1}-B_\epsilon(0)} \left(\frac{\lambda}{1-\cos^2\frac{r}{2}} \right)^{(n-1)-\frac{n-2}{2}\delta_p} d\sigma \\
&= C_1 \int_{S^{n-1}-B_\epsilon(0)} \left(\frac{\lambda}{\operatorname{sen}^2\frac{r}{2}} \right)^{(n-1)-\frac{n-2}{2}\delta_p} d\sigma \leq C_2(\epsilon)\lambda^{(n-1)-\frac{n-2}{2}\delta_p}
\end{aligned}$$

En el último paso tómesese en cuenta que $0 < \operatorname{sen}^2\frac{r}{2} \leq 1$ puesto que en $S^{n-1} - B_\epsilon(0)$ la distancia geodésica r nunca es cero. Para la segunda desigualdad usamos el lema (3.5.2) y así existe c tal que:

$$|x + \tilde{q}|^\alpha \geq (|x|^\alpha + |\tilde{q}|^\alpha)c$$

Luego:

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\epsilon(\tilde{q})} h(x)u_{\lambda,\tilde{q}}^{p+1} d\sigma \leq \int_{B_\epsilon(0)} h(x + \tilde{q})u_{\lambda,\tilde{q}}^{p+1} d\sigma \\
&\leq \int_{B_\epsilon(\tilde{q})} [h(0) - a|x + \tilde{q}|^\alpha] u_{\lambda,\tilde{q}}^{p+1} d\sigma \leq \int_{B_\epsilon(0)} [h(0) - C_3|x|^\alpha - C_3|\tilde{q}|^\alpha] u_{\lambda,\tilde{q}}^{p+1} d\sigma \\
&\leq \int_{B_\epsilon(0)} h(0)u_{\lambda,\tilde{q}}^{p+1} d\sigma + \int_{B_\epsilon(0)} [-C_3|x|^\alpha - C_3|\tilde{q}|^\alpha] u_{\lambda,\tilde{q}}^{p+1} d\sigma \\
&\leq h(0)|S^{n-1}| [1 + O_p(1)] - C_3|\tilde{q}|^\alpha |S^{n-1}| [1 + O_p(1)] - C\lambda^{\alpha+\delta_p}
\end{aligned}$$

Para la última desigualdad consideremos $d\sigma = \sin^{n-2} r \sin^{n-1} \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-2}$ las coordenadas esféricas generalizadas y ya que $u_{\lambda,\tilde{q}}$ esta restringida a $B_\epsilon(0) \subset S^{n-1}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\epsilon(0)} |x|^\alpha u_{\lambda,\tilde{q}}^{p+1} d\sigma = \int_{B_\epsilon(0)} (2\operatorname{sen}\frac{r}{2})^\alpha \frac{\lambda^{(n-1)-(\frac{n-2}{2})\delta_p}}{((\lambda^2-1)\cos^2\frac{r}{2}+1)^{(n-1)-(\frac{n-2}{2})\delta_p}} d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta_{n-2} \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta_{n-3} d\theta_{n-3} \dots \int_0^\epsilon \frac{(2\operatorname{sen}\frac{r}{2})^\alpha \lambda^{(n-1)-(\frac{n-2}{2})\delta_p} \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2\cos^2\frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{r}{2})^{(n-1)-(\frac{n-2}{2})\delta_p}} dr \\
&= |S^{n-2}| \int_0^\epsilon \frac{(2\operatorname{sen}\frac{r}{2})^\alpha \lambda^{(n-1)-(\frac{n-2}{2})\delta_p} \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2\cos^2\frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{r}{2})^{(n-1)-(\frac{n-2}{2})\delta_p}} dr \geq |S^{n-2}| \int_0^\epsilon \frac{(2\operatorname{sen}\frac{r}{2})^\alpha \lambda^{(n-1)-(\frac{n-2}{2})\delta_p} \operatorname{sen}^{n-2} r}{(\lambda^2\cos^2\frac{r}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{r}{2})^{n-1}} dr
\end{aligned}$$

Ahora si $r = 2 \tan^{-1}(\lambda \tan \frac{u}{2})$ y uso los cálculos en (3.3.3) tenemos que:

$$\int_{B_\epsilon(0)} |x|^\alpha u_{\lambda,\tilde{q}}^{p+1} d\sigma \geq |S^{n-2}| \int_0^{\epsilon'} \operatorname{sen}^{n-2} u 2^\alpha \lambda^{-(\frac{n-2}{2})\delta_p} \left(\frac{\lambda \tan \frac{u}{2}}{\sqrt{1 + \lambda^2 \tan^2 \frac{u}{2}}} \right)^\alpha du$$

$$\begin{aligned}
&\geq |S^{n-2}|2^\alpha \lambda^{\alpha - (\frac{n-2}{2})\delta_p} \int_0^{\epsilon'} \text{sen}^{n-2} u \left(\frac{\text{sen}^2 \frac{u}{2}}{\cos^2 \frac{u}{2} + \lambda^2 \text{sen}^2 \frac{u}{2}} \right)^{\frac{\alpha}{2}} du \\
&\geq |S^{n-2}|2^\alpha \lambda^{\alpha + \delta_p} \int_0^{\epsilon'} \text{sen}^{n-2} u \text{sen}^\alpha \frac{u}{2} du \geq c(\epsilon) \lambda^{\alpha + \delta_p}
\end{aligned}$$

Gracias a estas dos desigualdades tengo que:

$$J_p(u_{\lambda, \tilde{q}}) \leq C_2 \lambda^{(n-1) - \frac{n-2}{2}\delta_p} + (h(0) - C_3 |\tilde{q}|^\alpha) |S^{n-1}| [1 + O_p(1)] - C_4 \lambda^{\alpha + \delta_p}$$

además dado que $\alpha < n - 1$ y $\delta_p \rightarrow 0$ y λ suficientemente pequeño entonces:

$$C_2 \lambda^{(n-1) - \frac{n-2}{2}\delta_p} - C_4 \lambda^{\alpha + \delta_p} = \lambda^{\alpha + \delta_p} (C_2 \lambda^{(n-1-\alpha) - \frac{n}{2}\delta_p} - C_4) \leq -C_5 \lambda^{\alpha + \delta_p}$$

y así:

$$J_p(u_{\lambda, \tilde{q}}) \leq (h(0) - C_1 |\tilde{q}|^\alpha) |S^{n-1}| (1 + O_p(1)) - C_1 \lambda^{\alpha + \delta_p}$$

■

Lema 3.5.4. Si $u \in \Sigma$ y $v = u - t_0 u_q$ como fue definida en (3.4.6) entonces u_q y v son ortogonales y cumplen que:

$$\int_{S^{n-1}} u_q^\tau v d\sigma = 0$$

Demostración. Usaremos el hecho de que $E(u - t u_q)$ alcanza un mínimo en $v = u - t_0 u_q$ osea cuando $t = t_0$, esto gracias a la definición del conjunto Σ . Ahora:

$$E(u - t u_q) = \int_{B^n} (|\nabla u|^2 - 2t \nabla u \nabla u_q + t^2 |\nabla u_q|^2) dv + \int_{S^{n-1}} \gamma_n u^2 - 2t \gamma_n u u_q + \gamma_n t^2 u_q^2 d\sigma$$

entonces:

$$\begin{aligned}
0 &= E'(u - t u_q)|_{t=t_0} = \int_{B^n} -2 \nabla u \nabla u_q + 2 t_0 |\nabla u_q|^2 dv + \int_{S^{n-1}} (-2 \gamma_n u u_q + 2 \gamma_n t_0 u_q^2) d\sigma \\
&= \int_{B^n} \nabla u \nabla u_q dv + \int_{S^{n-1}} \gamma_n u u_q d\sigma - t_0 \left(\int_{B^n} |\nabla u_q|^2 dv + \gamma_n \int_{S^{n-1}} u_q^2 d\sigma \right)
\end{aligned}$$

con lo que:

$$0 = \langle u, u_q \rangle - t_0 \langle u_q, u_q \rangle = \langle u - t_0 u_q, u_q \rangle$$

que prueba que u_q y v son ortogonales en $H_1^2(B^n)$. Ahora consideremos v como función de prueba de la ecuación (3.7)

$$-v\Delta u_q = 0$$

$$\int_{B^n} -v\Delta u_q dv = 0$$

Integrando por partes:

$$\int_{B^n} \nabla u \nabla u_q dv - \int_{S^{n-1}} \frac{\partial u_q}{\partial \eta} v d\sigma = 0$$

$$\int_{B^n} \nabla u \nabla u_q dv - \int_{S^{n-1}} (\gamma_n u_q^\tau - \gamma_n u_q) v d\sigma = 0$$

$$\int_{B^n} \nabla u \nabla u_q dv + \int_{S^{n-1}} \gamma_n u_q v d\sigma = \int_{S^{n-1}} \gamma_n u_q^\tau v d\sigma$$

y en consecuencia:

$$0 = \langle u_q, v \rangle_{H_1^2(B^n)} = \int_{S^{n-1}} \gamma_n u_q^\tau v d\sigma$$

probando lo que queríamos demostrar.

■

Lema 3.5.5. *Sea $u = v - t_0 u_q \in \partial\Sigma$ con q fijo, podemos expandir $\int_{S^{n-1}} (v + t_0 u_q)^{\tau+1} d\sigma$ de la siguiente forma:*

$$t_0^{\tau+1} \int_{S^{n-1}} u_q^{\tau+1} d\sigma + (\tau + 1)t_0^\tau \int_{S^{n-1}} u_q^\tau v d\sigma + O(\|v\|^2)$$

o

$$t_0^{\tau+1} \int_{S^{n-1}} u_q^{\tau+1} d\sigma + (\tau + 1) \int_{S^{n-1}} u_q^\tau v d\sigma + \frac{\tau(\tau + 1)}{2} \int_{S^{n-1}} u_q^{\tau-1} v^2 d\sigma + O(\|v\|^2)$$

Lema 3.5.6. *(Sobre el centro de masa)*

1. Sean q , λ y \tilde{q} como anteriormente definidos. Entonces para q suficientemente pequeño:

$$|q|^2 \leq C (|\tilde{q}|^2 + \lambda^4)$$

2. Sean ρ_0 y v definidos en (3.4.6). Entonces para ρ_0 suficientemente pequeño:

$$\rho_0 \leq |q| + C\|v\|$$

Demostración.

1. Veamos que para λ suficientemente pequeño

$$|q - \tilde{q}| \leq C\lambda^2.$$

Antes de hacer cálculos sobre el centro de masa, recordemos que el centro de masa sobre la esfera B^n y su frontera S^{n-1} es el mismo. Por otro lado si tenemos una métrica $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ entonces:

$$\tilde{g}_{ij} = u^{\frac{4}{n-2}}g_{ij} \quad \text{y} \quad [\tilde{G}_{ij}] = u^{\frac{4}{n-2}}[G_{ij}]$$

$$\det[\tilde{G}_{ij}] = u^{\frac{4n}{n-2}} \det[G_{ij}] \quad \text{y} \quad \sqrt{\det[\tilde{G}_{ij}]} = u^{\frac{2n}{n-2}} \sqrt{\det[G_{ij}]}$$

De esta manera tenemos que $d\tilde{v} = u^{\frac{2n}{n-2}}dv$ en B^n y análogamente demostramos para el diferencial en S^{n-1} que $d\tilde{\sigma} = u^{\frac{2(n-1)}{n-2}}d\sigma$

Entonces ya que $d\tilde{v} = u^{2\tau}dv$ tengo que:

$$\int_{B^n} x d\tilde{v} = \int_{B^n} x u^{2\tau} dv \quad \text{y} \quad \int_{B^n} d\tilde{v} = \int_{B^n} u^{2\tau} dv.$$

Y así para el centro de masa q tengo que:

$$q = \frac{\int_{B^n} x u^{2\tau} dv}{\int_{B^n} u^{2\tau} dv} = \frac{\int_{B^n} x d\tilde{v}}{\int_{B^n} d\tilde{v}} = \frac{\int_{S^{n-1}} x d\tilde{\sigma}}{\int_{S^{n-1}} d\tilde{\sigma}} = \frac{\int_{S^{n-1}} x u^{\tau+1} d\sigma}{\int_{S^{n-1}} u^{\tau+1} d\sigma}$$

Recordemos que $\tilde{q} = O$, además realizando un cálculo directo podemos ver que $|q_i| = 0$ para $i = 1 \dots n-1$. Veamos que $|q_n| \leq C\lambda^2$ para algún $C > 0$. Puesto que:

$$\begin{aligned} |q_n| &= \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} x_n u_q^{\tau+1} d\sigma = C \int_0^\pi (1 - \cos r) \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2}} \right)^{n-1} \text{sen}^{n-2} r \, dr \\ &= C \int_0^\pi \frac{1 - \cos^2 r}{1 + \cos r} \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2}} \right)^{n-1} \text{sen}^{n-2} r \, dr \\ &= C \int_0^\pi \frac{\text{sen}^n r}{1 + \cos r} \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2}} \right)^{n-1} dr \leq C \int_0^\pi \frac{\text{sen}^{n-1} r}{1 + \cos r} \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2}} \right)^{n-1} dr \\ &\leq C \lambda^{n-1} \int_0^\pi \frac{\text{sen}^{\frac{n}{2}} \frac{r}{2} \cos^{\frac{n}{2}} \frac{r}{2}}{\cos^2 \frac{r}{2}} \left(\frac{1}{\lambda^2 \cos^2 \frac{r}{2} + \text{sen}^2 \frac{r}{2}} \right)^{n-1} dr \end{aligned}$$

$$\leq C\lambda^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin^{n-1} \frac{r}{2} \cos^{n-1} \frac{r}{2}}{\cos^2 \frac{r}{2} \cos^{n-1} \frac{r}{2} \cos^{n-1} \frac{r}{2}} \frac{1}{(\lambda^2 + \tan^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr \leq C\lambda^{n-1} \int_0^\pi \frac{\tan^{n-1} \frac{r}{2}}{(\lambda^2 + \tan^2 \frac{r}{2})^{n-1}} dr$$

Sea ahora $u = \tan \frac{r}{2}$, entonces $\frac{2}{1+u^2} du = dr$ y:

$$\begin{aligned} |q_n| &\leq C\lambda^{n-1} \int_0^\infty \frac{2u^n}{(\lambda^2 + u^2)^{n-1}} \frac{1}{1+u^2} du \leq C\lambda^{n-1} \int_0^\infty \frac{2u^n}{(\lambda^2 + u^2)^{n-1}} du \\ &= C\lambda^{n-1} \int_0^\infty \frac{2u^{n-1}u}{(\lambda^2 + u^2)^{n-1}} du = C\lambda^{n-1} \int_0^\infty \frac{2(u^2)^{n-1/2}u}{(\lambda^2 + u^2)^{n-1}} du \leq C\lambda^{n-1} \int_0^\infty \frac{2u}{(\lambda^2 + u^2)^{\frac{n-1}{2}}} du \\ &\leq C\lambda^{n-1} \frac{2}{3-n} (\lambda^2 + u^2)^{-\frac{n+3}{2}} \Big|_0^\infty \leq C\lambda^2 \end{aligned}$$

De otra parte, como:

$$|q|^2 \leq |q - \tilde{q}|^2 + |\tilde{q}|^2 + 2|q - \tilde{q}||\tilde{q}|$$

y

$$2|q - \tilde{q}||\tilde{q}| \leq |\tilde{q}|^2 + |q - \tilde{q}|^2$$

tenemos que:

$$|q|^2 \leq 2|q - \tilde{q}|^2 + 2|\tilde{q}|^2 \leq C(|\tilde{q}|^2 + \lambda^4)$$

Como se quería demostrar.

2. Consideremos $u = v + tu_q \in \partial\Sigma$ donde

$$\Sigma = \left\{ u \in S : |q(u)| \leq \rho_0 \cdot \|v\| = \min_{t,q} \|u - tu_q\| \leq \rho_0, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Como estamos en $\partial\Sigma$ tenemos que $\|v\| = \rho_0$ o $|q(u)| = \rho_0$. Si $\|v\| = \rho_0$ automáticamente tenemos el resultado, por otro lado si $|q(u)| = \rho_0$ entonces:

$$|q(u)| = \rho_0 = \left| \frac{\int_{B^n} x(v + tu_q)^{\tau+1} dv}{\int_{S^{n-1}} (v + tu_q)^{\tau+1} dv} \right|$$

Como $\|v\| \leq \rho_0$ y ρ_0 pequeño, podemos expandir $\int_{S^{n-1}} x(v + tu_q)^{\tau+1} dv$ como:

$$t^{\tau+1} \int_{S^{n-1}} x u_q^{\tau+1} dv + (\tau+1)t^\tau \int_{S^{n-1}} x v u_q^\tau dv + O(\|v\|^2)$$

y a $\int_{S^{n-1}} (v + tu_q)^{\tau+1} dv$ como :

$$t^{\tau+1} \int_{S^{n-1}} u_q^{\tau+1} dv + (\tau + 1)t^\tau \int_{S^{n-1}} vu_q^\tau dv + O(\|v\|^2)$$

Ahora:

$$\rho_0 - |q| \leq \left| \frac{\int_{S^{n-1}} x(v + tu_q)^{\tau+1} dv}{\int_{S^{n-1}} (v + tu_q)^{\tau+1} dv} - \frac{\int_{S^{n-1}} xu_q^{\tau+1} dv}{\int_{S^{n-1}} u_q^{\tau+1} dv} \right|$$

Usando las expansiones y restando:

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{(\tau + 1)t^\tau \left(\int_{S^{n-1}} u_q^{\tau+1} dv \int_{S^{n-1}} xvu_q^\tau dv - \int_{S^{n-1}} xu_q^{\tau+1} dv \int_{S^{n-1}} vu_q^\tau dv \right) + O(\|v\|^2)}{\int_{S^{n-1}} u_q^{\tau+1} dv \int_{S^{n-1}} (v + tu_q)^{\tau+1} dv} \right| \\ &\leq \frac{(\tau + 1)t^\tau \left(|S^{n-1}| \left| \int_{S^{n-1}} xvu_q^\tau dv \right| + \left| \int_{S^{n-1}} xu_q^{\tau+1} dv \right| \left| \int_{S^{n-1}} vu_q^\tau dv \right| \right) + O(\|v\|^2)}{|S^{n-1}| \left(t^{\tau+1} \int_{S^{n-1}} u_q^{\tau+1} dv + (\tau + 1)t^\tau \int_{S^{n-1}} vu_q^\tau dv \right)} \end{aligned}$$

Ahora ya que $\int_{S^{n-1}} u_q^{\tau+1} dv = |S^{n-1}|$ y $\int_{S^{n-1}} vu_q^\tau dv = 0$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \rho_0 - |q| &\leq \frac{(\tau + 1)t^\tau |S^{n-1}| \int_{S^{n-1}} |xvu_q^\tau| dv + O(\|v\|^2)}{t^{\tau+1}|B^n|^2} \leq \frac{(\tau + 1)t^\tau |S^{n-1}|}{t^{\tau+1}|S^{n-1}|^2} \int_{S^{n-1}} |x| |vu_q^\tau| dv + O(\|v\|^2) \\ &= \frac{(\tau + 1)}{t|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} |v(\varphi(x))u_q^\tau(\varphi(x)) \det [d(\varphi(x))]| dv + O(\|v\|^2) \\ &= \frac{(\tau + 1)}{t|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \left| \frac{(T_\varphi u_q)^\tau}{\det [d(\varphi(x))]^{\frac{n-2}{2(n-1)\tau}}} \frac{T_\varphi v}{\det [d(\varphi(x))]^{\frac{n-2}{2(n-1)}}} \right| \det [d(\varphi(x))] dv + O(\|v\|^2) \\ &= \frac{(\tau + 1)}{t|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} |(T_\varphi u_q)^\tau T_\varphi v| dv \leq \frac{(\tau + 1)}{t|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} |T_\varphi v| dv \leq \frac{(\tau + 1)}{t|B^n|} \left(\int_{B^n} (T_\varphi v)^2 dv \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{(\tau + 1)}{t|S^{n-1}|} \left(\int_{B^n} |\nabla T_\varphi v|^2 dv + \int_{S^{n-1}} (T_\varphi v)^2 d\sigma \right)^{1/2} + O(\|v\|^2) \leq \frac{(\tau + 1)}{t|S^{n-1}|} \|v\| + O(\|v\|^2) \leq C\|v\| \end{aligned}$$

ya que t esa cercano a uno y $\|v\|$ es pequeño. Esto demuestra el resultado al que queríamos llegar.

■

Ahora demostramos sobre la frontera de Σ , J_p esta acotado lejos de $h(0)|S^{n-1}|$.

Proposición 3.5.7. *Existen constantes positivas ρ_0, p_0, δ_0 tal que para todo $P \geq p_0$ y $u \in \partial\Sigma$ se cumple que:*

$$J_p(u) \leq h(0)|S^{n-1}| - \delta_0$$

Demostración. Hagamos una perturbación de $h(x)$, sea:

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{en } B_{2\rho_0}(0), \\ m & \text{en } S^{n-1}|B_{2\rho_0}(0) \end{cases} \quad (3.12)$$

Donde $m = h|\partial B_{2\rho_0}(0)$. Ahora definamos :

$$\bar{J}_p(u) = \int_{S^{n-1}} \bar{h}(x)u^{p+1}d\sigma$$

Los estimativos seran divididos en dos pasos, en el paso uno usamos la desigualdad.

$$|J_p(u) - \bar{J}_\tau(u)| \leq |\bar{J}_p(u) - \bar{J}_\tau(u)| + |J_p(u) - \bar{J}_p(u)|$$

para mostrar que la diferencia entre $J_p(u)$ y $\bar{J}_\tau(u)$ es pequeña. en el paso 2 se estimara $\bar{J}_\tau(u)$

Paso 1. Primero veamos que:

$$\bar{J}_p(u) \leq \bar{J}_\tau(u)(1 + o_p(1)) \quad (\alpha)$$

Donde $o_p(1) \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow \tau$.

En efecto, por desigualdad de holder:

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \bar{h}(x)u^{p+1}d\sigma &\leq \left(\int_{S^{n-1}} (\bar{h}(x)u^{p+1})^{\frac{\tau+1}{p+1}}d\sigma \right)^{\frac{p+1}{\tau+1}} \left(\int_{S^{n-1}} d\sigma \right)^{\frac{\tau-p}{\tau+1}} \\ &= \left(\int_{S^{n-1}} \bar{h}(x)^{\frac{\tau+1}{p+1}}u^{\tau+1}d\sigma \right) |S^{n-1}|^{\frac{\tau-p}{\tau+1}} = \left(\int_{S^{n-1}} \bar{h}^{\frac{\tau-p}{p+1}}u^{\tau+1}d\sigma \right) |S^{n-1}|^{\frac{\tau-p}{\tau+1}} \\ &\left(\int_{S^{n-1}} \bar{h}u^{\tau+1}d\sigma \right)^{\frac{p+1}{\tau+1}} h(0)^{\frac{\tau-p}{p+1}} |S^{n-1}|^{\frac{\tau-p}{\tau+1}} = \left(\int_{S^{n-1}} \bar{h}u^{\tau+1}d\sigma \right)^{\frac{p+1}{\tau+1}} (h(0)|S^{n-1}|)^{\frac{\tau-p}{\tau+1}} \end{aligned}$$

Cuando $p \rightarrow \tau$ tenemos el resultado.

Ahora estimemos la diferencia entre $J_p(u)$ y $\bar{J}_p(u)$.

$$\begin{aligned}
|J_p(u) - \bar{J}_p(u)| &= \int_{S^{n-1}|B_{2\rho_0(0)}} |h(x) - m|u^{p+1} d\sigma(\beta) \\
&\leq C_1 \int_{S^{n-1}|B_{2\rho_0(0)}} u^{p+1} d\sigma \leq C_2 \int_{S^{n-1}|B_{2\rho_0(0)}} (t_0 u_q)^{p+1} d\sigma + C_2 \int_{S^{n-1}|B_{2\rho_0(0)}} v^{p+1} d\sigma \\
&\leq C_3 \lambda^{(n-1) - \frac{n-2}{2}\delta_p} + C_3 \|v\|^{p+1}
\end{aligned}$$

La ultima desigualdad puesto que:

1.

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}|B_{2\rho_0(0)}} (t_0 u_q)^{p+1} d\sigma &\leq C_1 \int_{S^{n-1}|B_{2\rho_0(0)}} \left(\frac{\lambda}{1 + (\lambda^2 - 1)\cos^2 \frac{r}{2}} \right)^{(n-1) - \frac{n-2}{2}\delta_p} \\
&\leq C_1 \int_{S^{n-1}|B_{2\rho_0(0)}} \left(\frac{\lambda}{1 - \cos^2 \frac{r}{2}} \right)^{(n-1) - \frac{n-2}{2}\delta_p} d\sigma \\
&\leq C_1 \int_{S^{n-1}|B_{2\rho_0(0)}} \left(\frac{\lambda}{\text{sen}^2 \frac{r}{2}} \right)^{(n-1) - \frac{n-2}{2}\delta_p} d\sigma \leq C_2 \lambda^{(n-1) - \frac{n-2}{2}\delta_p}
\end{aligned}$$

2. Usando la desigualdad de la traza de Sobolev de Beckner-Escobar tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{S^{n-1}|B_{2\rho_0(0)}} v^{p+1} d\sigma \right)^{\frac{1}{p+1}} &\leq \left(\int_{S^{n-1}} v^{p+1} d\sigma \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leq C \left(\int_{B^n} |\nabla v|^2 dv + \int_{\partial B^n} \gamma_n v^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq C \|v\|.
\end{aligned}$$

Asi puesto que $\lambda^{(n-1) - \frac{n-2}{2}\delta_p}$ y $\|v\|^{p+1}$ son pequeños. Luego por (α) y (β) , la diferencia entre $J_p(u)$ y $\bar{J}_p(u)$ es pequeña.

Paso 2.

Sea $u = v + t_0 u_q \in \partial\Sigma$. De (3.5.4) tenemos que v y u_q son ortogonales respecto al producto interno asociado a $E(\cdot)$. es decir,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B^n} (\nabla(u - t_0 u_q)) \cdot \nabla u_q dv + \gamma_n \int_{S^{n-1}} (u - t_0 u_q) u_q d\sigma \\
0 &= \int_{B^n} \nabla u \nabla u_q - t_0 |\nabla u_q|^2 dv + \gamma_n \int_{S^{n-1}} u u_q - t_0 u_q^2 d\sigma
\end{aligned}$$

y tengo que:

$$t_0 E(u_q) = \int_{B^n} \nabla u \nabla u_q dv + \gamma_n \int_{S^{n-1}} uu_q d\sigma$$

Ahora ya que:

$$\begin{aligned} \|v\| &= E(u - t_0 u_q) = \int_{B^n} |\nabla(u - t_0 u_q)|^2 dv + \gamma_n \int_{S^{n-1}} (u - t_0 u_q)^2 d\sigma \\ &= \int_{B^n} |\nabla u|^2 - 2t_0 \nabla u \nabla u_q + t_0^2 |\nabla u_q|^2 dv + \gamma_n \int_{S^{n-1}} u^2 - 2t_0 uu_q + t_0^2 u_q^2 d\sigma \\ &= E(u) + t_0^2 E(u_q) - 2t_0 \left(\int_{B^n} \nabla u \nabla u_q dv + \gamma_n \int_{S^{n-1}} uu_q d\sigma \right) \end{aligned}$$

$$E(u) + t_0^2 E(u_q) - 2t_0^2 E(u_q) = E(u) - t_0^2 E(u_q)$$

y como $E(u) = E(u_q) = \gamma_n |S^{n-1}|$ entonces.

$$\|v\|^2 = (1 - t_0^2) \gamma_n |S^{n-1}|$$

y

$$t_0^2 = 1 - \frac{\|v\|^2}{\gamma_n |S^{n-1}|}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \bar{J}_p(u) &= \int_{S^{n-1}} \bar{h}(x) u^{p+1} d\sigma \\ &\leq t_0^{\tau+1} \int_{S^{n-1}} \bar{h}(x) u_q^{\tau+1} d\sigma + (\tau+1) \int_{S^{n-1}} \bar{h}(x) u_q^\tau v d\sigma + \frac{\tau(\tau+1)}{2} \int_{S^{n-1}} \bar{h}(x) u_q^{\tau-1} v^2 d\sigma + O(\|v\|^2) \end{aligned}$$

$$I_1 + (\tau+1)I_2 + \frac{\tau(\tau+1)}{2}I_3 + o(\|v\|^2) \quad (3.13)$$

Estimando I_1 considerando el valor de t_0 hallado y el lema (3.5.3) tengo que:

$$I_1 \leq \left(1 - \frac{\|v\|^2}{\gamma_n |S^{n-1}|}\right)^{\frac{\tau+1}{2}} (h(0) - C_1 |\tilde{q}^\alpha| |S^{n-1}| - C_1 \lambda^\alpha) \quad (3.14)$$

$$\leq \left(1 - \frac{\tau+1}{2} \frac{\|v\|^2}{\gamma_n |S^{n-1}|}\right) h(0) |S^{n-1}| \left(1 - \frac{C_1}{h(0)} |\tilde{q}^\alpha| - \frac{C_1}{h(0) |S^{n-1}|} \lambda^\alpha\right) + o(\|v\|^2)$$

$$\leq \left(1 - \frac{\tau + 1}{2} \frac{\|v\|^2}{\gamma_n |S^{n-1}|}\right) h(0) |S^{n-1}| (1 - k_1 |\tilde{q}|^\alpha - k_1 \lambda^\alpha) + o(\|v\|^2)$$

Para alguna constante k_1 .

Ahora para I_2 usamos la ortogonalidad entre v y u_q^τ (ver lema (3.5.4)) y el hecho de que $T_\varphi u_q$ es acotada tenemos:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{S^{n-1}} \bar{h}(x) u_q^\tau v d\sigma = \int_{S^{n-1}} \bar{h}(x) u_q^\tau v d\sigma - m \int_{S^{n-1}} u_q^\tau v d\sigma \quad (3.15) \\ &= \int_{B_{2\rho}(0)} (\bar{h}(x) - m) u_q^\tau v d\sigma = \int_{B_{2\rho}(0)} (\bar{h}(0) - m - ar^\alpha) u_q^\tau(\varphi(x)) v(\varphi(x)) [det(d\varphi(x))] d\sigma \\ &= \int_{B_{2\rho}(0)} (a2^\alpha \rho_0^\alpha - ar^\alpha) \frac{(T_\varphi u_q)^\tau}{[det(d\varphi(x))]^{\frac{n-2}{2(n-1)}\tau}} \frac{(T_\varphi v)}{[det(d\varphi(x))]^{\frac{n-2}{2(n-1)}\tau}} [det(d\varphi(x))] d\sigma \\ &\leq \int_{B_{2\rho}(0)} (|a2^\alpha \rho_0|^\alpha - |ar|^\alpha) \frac{|T_\varphi u_q|^\tau}{[det(d\varphi(x))]^{\frac{n-2}{2(n-1)}\tau+1}} |T_\varphi v| [det(d\varphi(x))] d\sigma \\ &\leq \int_{B_{2\rho}(0)} (|a2^\alpha \rho_0|^\alpha - |ar|^\alpha) |T_\varphi u_q|^\tau |T_\varphi v| d\sigma \\ &\leq C \rho_0^\alpha \int_{B_{2\rho_0}(0)} |T_\varphi v| d\sigma \leq C \rho_0^\alpha \left(\int_{B_{2\rho_0}(0)} (T_\varphi v)^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \rho_0^\alpha \left(\int_{B_{2\rho_0}(0)} |\nabla T_\varphi v|^2 + (T_\varphi v)^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \rho_0^\alpha \left(\int_{B^n} |\nabla T_\varphi v|^2 + \int_{S^{n-1}} (T_\varphi v)^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \rho_0^\alpha \|v\| \end{aligned}$$

Ahora usando lema (3.5.6), tenemos que:

$$\rho_0^\alpha \|v\| \leq (|q| + C\|v\|)^\alpha \|v\| \leq 2^\alpha (|q|^\alpha + C\|v\|^\alpha) \|v\|$$

$$\leq 2^\alpha C (|\tilde{q}|^2 + \lambda^4)^{\alpha/2} \|v\| + 2^\alpha C \|v\|^{\alpha+1} \leq C (|\tilde{q}|^\alpha + \lambda^{2\alpha}) \|v\| + O(\|v\|) \leq C_4 \|v\| (|\tilde{q}|^\alpha + \lambda^\alpha)$$

Para estimar I_3 consideremos que para una variedad M n -dimensional con frontera los valores propios del laplaciano cumplen la desigualdad $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$, donde el primer valor propio distinto de cero esta caracterizado variacionalmente por:

$$\lambda_2 = \inf \left\{ \frac{\int_{B^n} |\nabla u|^2 dv}{\int_{S^{n-1}} u^2 d\sigma} : f \in H_1^2(B^n) - 0 \right\}$$

Nuestro primer valor propio diferente de cero es $\lambda = 1$ y como $T_\varphi v$ es ortogonal a las constantes y a las funciones coordenadas (vease (3.4.8)) entonces para algun $c > 0$:

$$1 + c \leq \frac{\int_{B^n} |\nabla T_\varphi v|^2 dv}{\int_{S^{n-1}} (T_\varphi v)^2 d\sigma}.$$

Sumando γ_n a ambos lados tenemos que:

$$1 + c + \gamma_n \leq \frac{E(T_\varphi v)}{\int_{S^{n-1}} (T_\varphi v)^2 d\sigma}.$$

Ahora por (3.4.5) tengo que $E(T_\varphi v) = E(v)$ y:

$$\|v\|^2 = \|T_\varphi v\|^2 \geq (\gamma_n + 1 + c) \int_{S^{n-1}} (T_\varphi v)^2 d\sigma$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} u_q^{\tau-1} v^2 d\sigma &= \int_{S^{n-1}} u_q^{\tau-1} (\varphi(x)) v^2 (\varphi(x)) \det(d\varphi(x)) d\sigma \\ &= \int_{S^{n-1}} \frac{(T_\varphi u_q)^{\tau-1}}{\det(d\varphi(x))^{\frac{n-2}{2(n-1)}(\tau-1)}} \frac{(T_\varphi v)^2}{\det(d\varphi(x))^{\frac{n-2}{2(n-1)}}} \det(d\varphi(x)) d\sigma \\ &= \int_{S^{n-1}} (T_\varphi v)^2 d\sigma \end{aligned}$$

En consecuencia.

$$I_3 \leq h(0) \int_{S^{n-1}} u_q^{\tau-1} v^2 d\sigma = h(0) \int_{S^{n-1}} (T_\varphi v)^2 d\sigma \leq \frac{h(0)}{\gamma_n + 1 + c} \|v\|^2. \quad (3.16)$$

Veamos ahora que existe $\beta > 0$ tal que:

$$\bar{J}_\tau(u) \leq h(0) |S^{n-1}| [1 - \beta(|\tilde{q}|^\alpha + \lambda^\alpha + \|v\|^2)] \quad (3.17)$$

En efecto reemplazando en (3.14), (3.15) y (3.16) en (3.13) tenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{J}_\tau(u) &\leq \left(1 - \frac{\tau + 1}{2} \frac{\|v\|^2}{\gamma_n |S^{n-1}|}\right) h(0) |S^{n-1}| (1 - k_1 |\tilde{q}|^\alpha - k_1 \lambda^\alpha) + (\tau + 1) C_4 (|\tilde{q}|^\alpha + \lambda^\alpha) \|v\| \\ &\quad + \frac{\tau(\tau + 1)}{2} \frac{h(0)}{\gamma_n + 1 + c} \|v\|^2 + o(\|v\|^2) \\ &= h(0) |S^{n-1}| \left[1 - k_1 |\tilde{q}|^\alpha - k_1 \lambda^\alpha - \frac{\tau + 1}{2\gamma_n |S^{n-1}|} \|v\|^2 + \frac{\tau + 1}{2\gamma_n |S^{n-1}|} \|v\|^2 k_1 |\tilde{q}|^\alpha + \frac{\tau + 1}{2\gamma_n |S^{n-1}|} \|v\|^2 k_1 \lambda^\alpha\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +h(0)|S^{n-1}| \left[\frac{\tau+1}{2\gamma_n|S^{n-1}|} C_4 \|v\| (|\tilde{q}|^\alpha + \lambda^\alpha) + \frac{\tau(\tau+1)}{2(\gamma_n+1+c)|S^{n-1}|} \|v\|^2 \right] + o(\|v\|^2) \\
& = h(0)|S^{n-1}| \left[1 - (|\tilde{q}|^\alpha + \lambda^\alpha) \left(k_1 - \frac{\tau+1}{2\gamma_n|S^{n-1}|} \|v\|^2 k_1 - \frac{\tau+1}{h(0)|S^{n-1}|} \|v\| k_3 \right) \right] \\
& \quad - h(0)|S^{n-1}| \|v\|^2 \left[\frac{\tau+1}{2\gamma_n|S^{n-1}|} \|v\|^2 - \frac{\tau(\tau+1)}{2(\gamma_n+1+c)|S^{n-1}|} \right] + o(\|v\|^2)
\end{aligned}$$

ahora puesto que $(\gamma_n+1+c) > \gamma_n\tau$ tengo que $\frac{\tau+1}{2\gamma_n|S^{n-1}|} > \frac{\tau(\tau+1)}{2(\gamma_n+1+c)|S^{n-1}|}$ y como $\|v\|$ es pequeño entonces $k_1 - \frac{\tau+1}{2\gamma_n|S^{n-1}|} \|v\|^2 k_1 - \frac{\tau+1}{h(0)|S^{n-1}|} \|v\| k_3 \approx k_1$ y:

$$\bar{J}_\tau(u) \leq h(0)|S^{n-1}| [1 - (|\tilde{q}|^\alpha + \lambda^\alpha) k_1] - h(0)|S^{n-1}| \|v\|^2 C_5$$

y existe $\beta > 0$ tal que:

$$\bar{J}_\tau(u) \leq h(0)|S^{n-1}| [1 - \beta(|\tilde{q}|^\alpha + \lambda^\alpha + \|v\|^2)]$$

Esto completa la prueba de la proposición.

■

Capítulo 4

Resultado principal

4.1. El esquema variacional

En este capítulo mostramos la solución de la ecuación (3.7) para cada $p < \tau$.

Puesto que $S = \{u \in H_1^2(B^n) : \|u\|^2 = \int_{B^n} |\nabla u|^2 dv + \int_{S^{n-1}} \gamma_n u^2 d\sigma = \gamma_n |S^{n-1}|, u \geq 0\}$, veamos que S es un conjunto cerrado. En efecto sea (u_i) una sucesión en S donde $u_i \rightarrow u$ fuertemente en $H_1^2(B^n)$ entonces.

$$o(1) = \|u_i - u\|^2 = \|u_i\|^2 - 2\langle u_i, u \rangle_{H_1^2(B^n)} + \|u\|^2 = \|u_i\|^2 - \|u\|^2 + o(1).$$

Así $\|u_i\| = \|u\|$ y por lo tanto $u \in S$.

Lema 4.1.1. *El funcional $J_p(u) = \int_{S^{n-1}} hu^{p+1} d\sigma$ es Lipschitz continuo.*

Demostración. Consideremos $u, v \in S$ por el teorema del valor medio tengo que existe $w \in H_1^2(B^n)$ tal que $|u^{p+1} - v^{p+1}| \leq (p+1)w^p|u - v|$, notese ademas que ya que $w = tu + (1-t)v$ para $t(x) \in [0, 1]$ entonces $\|w\| \leq t(x)\|u\| + (1-t(x))\|v\|$, y $\|w\| \leq \gamma_n |S^{n-1}|$

$$\begin{aligned} |J_p(u) - J_p(v)| &= \left| \int_{S^{n-1}} hu^{p+1} d\sigma - \int_{S^{n-1}} hv^{p+1} d\sigma \right| \\ &\leq c_1 \int_{S^{n-1}} |u^{p+1} - v^{p+1}| d\sigma \leq c_2 \int_{S^{n-1}} |w^p| |u - v| d\sigma \\ &\leq c_2 \left(\int_{S^{n-1}} |u - v|^{\frac{p+1}{p}} d\sigma \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{S^{n-1}} |w^p|^{p+1} d\sigma \right)^{\frac{1}{p+1}} \\ &\leq c_2 \|u - v\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(S^{n-1})} \|w^p\|_{L^{p+1}(S^{n-1})} \\ &\leq c_2 \|u - v\|_{H_2^1(B^n)} \|w^p\|_{H_2^1(B^n)} \end{aligned}$$

$$\leq C \|u - v\|_{H_1^1(B^n)}$$

La penultima desigualdad ya que $1 < p < \frac{2n}{n-2}$, $p+1 < \frac{2(n-1)}{n-2}$ y $\frac{p+1}{p} < \frac{2(n-1)}{n-2}$ el Teorema de Encaje de Sobolev me garantiza los respectivos encajes. Así J_p es Lipschitz continuo.

■

Para el siguiente resultado es conveniente introducir el siguiente lema

Lema 4.1.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y sea g que satisface:*

1. $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, y
2. existen constantes $r, s \geq 1$ y $a_1, a_2 \geq 0$ tal que:

$$|g(x, u)| \leq a_1 + a_2 |u|^{r/s}$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$

Entonces la aplicación $u \rightarrow g(x, u)$ es continua de $L^r(\Omega) \rightarrow L^s(\Omega)$

Este resultado lo podemos encontrar en [15](pag 249). y como consecuencia directa tenemos que la aplicación $u \rightarrow u^p$ es continua de $L^{\frac{p+1}{p}}(S^{n-1}) \rightarrow L^{p+1}(S^{n-1})$

Lema 4.1.3. *Si $1 < p < \tau$ entonces J'_p es compacto.*

Demostración.

Sea $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $S \subset H_1^2(B^n)$. por la definición de S , $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es acotada, entonces por el Teorema de Encaje de Sobolev (2.2.14), existen una subsucesión de $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$, denotada de igual forma, y $u \in H_1^2(B^n)$ tal que:

$$u_i \rightarrow u \quad \text{debilmente en } H_1^2(B^n)$$

$$u_i \rightarrow u \quad \text{fuertemente en } L^{p+1}(S^{n-1}),$$

ya que $1 < p < \frac{n}{n-2}$ y $p+1 < \frac{2(n-1)}{n-2}$.

Luego, para todo $v \in H_1^2(B^n)$

$$\begin{aligned} \|J'_p(u_i) - J'_p(u)\| &= \sup_{\|v\| \leq 1} |J'_p(u_i)v - J'_p(u)v| \\ &= \sup_{\|v\| \leq 1} \left| \int_{S^{n-1}} h u_i^p v d\sigma - \int_{S^{n-1}} h u^p v d\sigma \right| \\ &\leq c_1 \sup_{\|v\| \leq 1} \int_{S^{n-1}} |u_i^p - u^p| |v| d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_1 \sup_{\|v\| \leq 1} \left(\int_{S^{n-1}} |v|^{p+1} d\sigma \right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\int_{S^{n-1}} |u_i^p - u^p|^{\frac{p+1}{p}} d\sigma \right)^{\frac{p}{p+1}} \\
&\leq c_1 \|u_i^p - u^p\|_{L^{\frac{p+1}{p}}(S^{n-1})} = o(1)
\end{aligned}$$

La ultima desigualdad pues $u_i \rightarrow u$ fuertemente en $L^{p+1}(S^{n-1})$, y por el lema anterior $u_i^p \rightarrow u^p$ fuertemente en $L^{\frac{p+1}{p}}(S^{n-1})$. Asi $J'_p(u_i)$ converge a $J'_p(u)$ y J'_p es compacto.

■

Lema 4.1.4. Si $1 < p < \tau$ y $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $S \subset H_1^2(B^n)$ tal que:

$$J'_p(u_i)|_{T_{u_i}(S)} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } i \rightarrow \infty \quad (4.1)$$

Entonces $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en S .

Demostración.

Por la definición de S , $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es acotada en $S \subset H_1^2(B^n)$. Por el Teorema de Encaje de Sobolev (2.2.14), entonces existe una subsucesión de $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$, denotada de igual forma, y $u \in H_1^2(B^n)$ tal que:

$$u_i \rightarrow u \quad \text{débilmente en } H_1^2(B^n)$$

$$u_i \rightarrow u \quad \text{fuertemente en } L^r(S^{n-1}), 1 \leq r < \frac{2(n-1)}{n-2}.$$

Por la hipotesis (4.1) y el hecho de que el operador J'_p es compacto tenemos que $J'_p(u)v = 0$ para $v \in T_u(S)$. entonces J'_p tiene un punto critico en u y para todo $v \in H_1^2(B^n)$ existe $\lambda \neq 0$ tal que $J'_p(u)v = \lambda E'(u)v$.

Considere ahora $v_i = u_i - u$, como $v_i \in H_1^2(B^n)$ entonces:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{S^{n-1}} h u_i^p v_i d\sigma - \int_{B^n} 2\lambda \nabla u_i \nabla v_i - \int_{S^{n-1}} \lambda \gamma_n u_i v_i dv \\
&= \int_{S^{n-1}} h(v_i + u)^p v_i d\sigma - \left(\int_{B^n} 2\lambda \nabla(v_i + u) \nabla v_i + \lambda \int_{S^{n-1}} \gamma_n (v_i + u) v_i dv \right) \\
&= \int_{S^{n-1}} h(v_i + u)^p v_i d\sigma - 2\lambda \left(\int_{B^n} |\nabla v_i|^2 + \nabla u \nabla v_i + \int_{S^{n-1}} \gamma_n v_i^2 + \gamma_n u v_i dv \right) \\
&= \int_{S^{n-1}} h(v_i + u)^p v_i d\sigma - 2\lambda \|v_i\|_{H_1^2(B^n)}^2 - 2\lambda \langle u, v_i \rangle_{H_1^2(B^n)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{S^{n-1}} h(v_i + u)^p v_i d\sigma - 2\lambda \|v_i\|_{H_1^2(B^n)}^2 - 2\lambda \langle u, u_i \rangle_{H_1^2(B^n)} + 2\lambda \langle u, u \rangle_{H_1^2(B^n)} \\
&= \int_{S^{n-1}} h(v_i + u)^p v_i d\sigma - 2\lambda \|v_i\|_{H_1^2(B^n)}^2 + o(1),
\end{aligned}$$

La última igualdad pues $u_i \rightarrow u$ débilmente en $H_1^2(B^n)$.

Dado que h es acotada en B^n , tenemos que:

$$\lambda \|v_i\|_{H_1^2(B^n)}^2 = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} h(v_i + u)^p v_i d\sigma + o(1) \leq C \int_{S^{n-1}} (v_i + u)^p v_i d\sigma + o(1)$$

Por otra parte, $w_i = u_i^p$ pertenece a $L^q(B^n)$ con $q = \frac{p+1}{p}$. Esto pues:

$$\int_{S^{n-1}} |w_i|^q dv = \int_{S^{n-1}} |u_i|^{p+1} dv < \infty$$

además, puesto que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p+1} = 1$

$$\|w_i v_i\|_{L^1(S^{n-1})} \leq \|w_i\|_{L^q(S^{n-1})} \|v_i\|_{L^{p+1}(S^{n-1})} = \|u_i\|_{L^{p+1}(S^{n-1})}^p \|v_i\|_{L^{p+1}(S^{n-1})}.$$

Por lo anterior y el Teorema de Encaje de Sobolev se tiene que:

$$\|w_i v_i\|_{L^1(S^{n-1})} = o(1).$$

Esto implica que:

$$\lambda \|v_i\|_{H_1^2(B^n)} \leq o(1).$$

Como $\lambda \neq 0$ tenemos que:

$$\|v_i\|_{H_1^2(B^n)} \leq o(1).$$

Así, $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en $S \subset H_1^2(B^n)$.

■

4.2. La demostración del teorema (3.1.6)

Por hipótesis, h tiene al menos dos máximos locales positivos, sean r_1 y r_2 , los máximos locales positivos más pequeños de h . Por las proposiciones (3.5.1) y (3.5.7), existen dos conjuntos abiertos disjuntos $\mathring{\Sigma}_1, \mathring{\Sigma}_2 \subset S$, $\psi_i \in \mathring{\Sigma}_i$, $p_0 < \tau$ y $\delta > 0$ tal que para todo $p \geq p_0$:

$$J(\psi_i) > h(r_i) |S^{n-1}| - \frac{\delta}{2}, \quad i = 1, 2;$$

y

$$J(u) \leq h(r_i)|S^{n-1}| - \delta, \forall u \in \partial\Sigma, \quad i = 1, 2; \quad (4.2)$$

Sea γ un camino en S que une a ψ_1 y ψ_2 . Se define la familia de caminos:

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], S) : \gamma(0) = \psi_1, \gamma(1) = \psi_2\}$$

Ahora definimos

$$c_p = \sup_{\gamma \in \Gamma} \min_{u \in \gamma} J_p(u).$$

Por el teorema (2.3.11), existe un punto crítico u_p de J_p en S tal que:

$$J_p(u_p) = c_p$$

Ademas debido a (4.2) y la definición de c_p , tenemos que:

$$J_p(u_p) \leq \min_i h(r_i)|S^{n-1}| - \delta.$$

Puesto que hemos mostrado la existencia de un punto crítico u_p de J_p en S , por el lema (3.1.7), tenemos que existe una solución de la ecuación (3.7) ■

Conclusiones

Podemos concluir.

1. Que la ecuacion :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_g u = 0 & \text{en } B^n, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{(n-2)}{2}u = \frac{(n-2)}{2}u^p & \text{sobre } \partial B^n, \end{array} \right.$$

Tiene infinitas soluciones, determinadas por la función creada a partir de la extensión de la proyección estereográfica.

2. El teorema de paso de montaña nos permitió probar la existencia de un punto crítico en el funcional J_p en el conjunto S . Este resultado es lo que nos permite probar lo propuesto en este trabajo.
3. Que para $n \geq 3$ y $h(r)$ una función suave definida sobre ∂B^n con simetría sobre el eje x_n , que tiene al menos dos máximos locales positivos, satisface una condición de suavidad cerca de todo punto crítico τ_0 de la forma:

$h(r) = h(\tau_0) + a|\tau - \tau_0|^\alpha + o(1)$ con $n - 3 < \alpha < n - 1$ y $a > 0$ y $h'(r)$ cambia de signo en las regiones donde $h > 0$ entonces la ecuación:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_g u = 0 & \text{en } B^n, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{(n-2)}{2}u = h \frac{(n-2)}{2}u^p & \text{sobre } \partial B^n, \end{array} \right.$$

donde $1 < p < \frac{n}{n-2}$ tiene solución. Esto soluciona el problema a nivel subcrítico asociado a la existencia de una métrica g conforme a g_0 dada la función de curvatura media $h(r)$. Además nos aporta que la condición de Kazdan-Warner más la condición de suavidad resultan una condición necesaria y suficiente para nuestro problema.

Bibliografía

- [1] AUBIN T. *Nonlinear Analysis on manifolds. Monge Ampere equations* Springer-Verlag, (1982).
- [2] CHANG Y YANG P. *a perturbation result for prescribing mean curvature* Math. Ann 310 (1998)
- [3] CHEN AND LEE C. *Prescribing Scalar Curvature on S^n* . Pacific journal of mathematics. Vol 189, 1, (2001).
- [4] CHERRIER P. *Problèmes de Newman non linéaires sur les variétés Riemanniennes* J. functional Analysis 57 (1984) 657-667.
- [5] DO CARMO M. *Riemannian Geometry*. Birkhauser, 1992. American Math Society, (1998).
- [6] ESCOBAR J. *Conformal metric with prescribed mean curvature on the boundary* Calculus of Variations and Partial Differential Equations 4 (1996) 559-592
- [7] ESCOBAR J. Y GARCIA G. *Conformal metrics on the ball with zero scalar curvature and prescribed mean curvature on the boundary* Journal of Functional Analysis. 211 (2004), 71-152.
- [8] ESCOBAR J. *Diferential Geometry and Partial Diferential Equations* Bloomington (1993).
- [9] ESCOBAR J. *The Yamabe Problem on Manifolds with Boundary* J. Diff Geom, 35(1992). 21-84.
- [10] ESCOBAR J. *Uniqueness theorems on conformal deformations of metrics, Sobolev inequalities, and eigenvalue estimate* Comm. Pure Appl. Math., 43(1990). 867-883.
- [11] ESCUDERO C.Y GARCIA G. *Una nota sobre la no suficiencia de la condición Escobar-Kazdan-Warner* Matemáticas y Educación (2001).
- [12] ESCUDERO C.Y GARCIA G. *Una nota sobre el problema de la deformacion conforme de metricas en la bola unitaria* Revista colombiana de matemáticas. Vol 37 (2003) 1-9.

- [13] EVANS L. *Partial Differential Equations* graduate studies on mathematics. vol 19.(1998)
- [14] PINZON C. *Sobre la existencia de una métrica conforme a la métrica euclidiana en la n-esfera* (2005)
- [15] STRUWE, M. *Variational Methods*. Springer-Verlag, (1991).
- [16] BERGER, M. *Nonlinearity and Funtional Analysis*. Academic Press, New York (1977).