Departamento de
Matemáticas

EL PROBLEMA DEL ÁREA: DE LA MEDIDA RELATIVA A LA MEDIDA ABSTRACTA

JOSÉ DIOVAN MONTILLA ERAZO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS ANTURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2014

Departamento
de Matemáticas

EL PROBLEMA DEL ÁREA: DE LA MEDIDA RELATIVA A LA MEDIDA ABSTRACTA

JOSÉ DIOVAN MONTILLA ERAZO

Trabajo de Grado para optar por el título de
MATEMÁTICO

Director
Luis Cornelio Recalde Caicedo

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS ANTURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2014

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Nos propusimos, en esta investigación, analizar el problema del área desde una perspectiva histórico–epistemológica. Fundamentalmente nos interesamos en dar cuenta del cambio conceptual que se fue estableciendo en el intento de dar respuesta al problema de la formalización de la noción de área. Para ello nos basamos en los métodos y resultados de los matemáticos más representativos que trataron de dar respuesta a este problema desde la antigüedad griega hasta la modernidad, en el contexto de la teoría de la medida. Esto nos permitió entender cómo la noción de área fue evolucionando hasta el punto en que los matemáticos vieron la necesidad de establecer una definición formal lo más general posible.

A lo largo de la historia, la medida de superficies ha sido uno de los problemas centrales de la matemática. Este problema ha ido cambiando de matices hasta constituirse, a partir del siglo XVIII, en el problema del área. En la matemática moderna, el concepto de medida abstracta se fundamenta en el concepto de función y, particularmente, en el estudio formal del área resulta indispensable el uso del conjunto ordenado de los números reales. En este sentido, el problema del área consiste en asignarle a una región plana acotada un número real positivo que determina su área. Matemáticamente esto significa que si f es la función área y $\mathcal{D}$ es el conjunto de las regiones planas acotadas, entonces la función f asigna el número real $f(D)$ a cada región D del conjunto $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} f\,:\, \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ D &\longrightarrow f(D). \end{aligned}$$

Para llegar a los albores de esta conceptualización del área, tuvo que darse un cambio epistemológico a lo largo de un periodo de unos veinticinco siglos, en el que se han identificado tres etapas en la actividad de medir. La primera de ellas es la etapa primaria, que se desarrolló en la escuela pitagórica; la segunda corresponde a la etapa relativa, sistematizada por Euclides y, por último, se identifica la etapa de la medida abstracta, desarrollada por Henri Lebesgue. En cada una de estas etapas, se identificaron los desarrollos matemáticos más significativos que permitieron la evolución del problema del área hasta su conceptualización más general, a comienzos del siglo XX. Para lograrlo hemos orientado nuestra investigación en torno a los siguientes capítulos: la medida de superficies en los antiguos, la medida de superficies mediante la teoría de indivisibles de Cavalieri, la medida de superficies en el marco del surgimiento del cálculo y el problema del área en el análisis.

En el primer capítulo se estudia la salida al problema del área en los antiguos griegos, teniendo en cuenta que para ellos este problema se reduce al problema de las cuadraturas: dada una figura plana encontrar su cuadrado equivalente. Analizamos la forma en que Euclides desarrolla un aparato teórico que le permite resolver el problema de manera parcial, al lograr la cuadratura de una figura plana adoptando el cuadrado como unidad referencial. Luego, se considera el aporte de Arquímedes, quien da un paso hacia adelante al determinar la cuadratura de algunas figuras curvilíneas, haciendo uso del método exhaustivo e incorporando el razonamiento lógico de reducción al absurdo. En esta parte del trabajo, no se desconoce la matemática "artesanal" proveniente de las culturas babilónica y egipcia, ya que constituye un precedente importante en el marco del pensamiento griego.

En el capítulo siguiente hacemos un recorrido por los antecedentes y la naturaleza del método de los indivisibles de Cavalieri, el cual emerge en la idea de querer evitar las limitaciones del método exhaustivo, con el desarrollo de una nueva técnica que diera cuenta de los procesos infinitesimales. Se muestra que pese a los problemas formales, evidentes en esta teoría, resultó ser de utilidad para el cálculo de cuadraturas de figuras planas más generales, en comparación con otras figuras cuya cuadratura ya era conocida.

En el capítulo correspondiente a la medida de superficies en el marco del surgimiento del cálculo, empezamos haciendo una descripción de la geometría cartesiana que marcaría un cambio cualitativo muy importante al incorporar el método analítico para resolver los problemas matemáticos. Luego, analizamos la manera en que, con los trabajos de John Wallis, el problema de las cuadraturas empieza a perfilarse como el problema de hallar el área bajo la curva. En Wallis se da un paso importante en el estudio de las cuadraturas, ya que al tener como propósito el asociar un valor numérico a los infinitos indivisibles de Cavalieri, Wallis señala el camino para que una figura plana pueda medirse en correspondencia con un valor numérico. Algo significativo para la medida de áreas es el hecho de que Wallis establece, implícitamente, el área de un rectángulo como el producto de la base por la altura. En lo que respecta a Newton y Leibniz, analizamos la manera en que lograron establecer algoritmos más generales a partir de los cuales podían derivarse básicamente todos los resultados de cuadraturas de figuras planas conocidos hasta entonces.

En el capítulo cuatro indagamos acerca de la evolución del problema del área en el contexto del análisis matemático hasta su posterior definición en el marco de la teoría de la medida abstracta por Henri Lebesgue. En este punto es muy importante el aporte de Cauchy quien, en su *Curso de Análisis*, da una salida a los problemas de rigor de las cantidades infinitesimales. Además, incorpora el concepto de límite a partir del cual establece una definición analítica de la integral definida de una función continua acotada, que luego interpreta como el área bajo la curva. Así, la existencia del área queda determinada por la existencia de la integral, lo que resuelve analíticamente el problema antiguo de las cuadraturas. A su turno se incorpora la redefinición de la integral definida debida a Bernhard Riemann, la cual acoge funciones altamente discontinuas. Esta integral surge precisamente en respuesta al interrogante planteado por Dirichlet acerca de que tan discontinua puede ser una función para que sea integrable. Después mostramos cómo se define el área en términos de la noción de contenido de un conjunto y la relación que se establece con la integral de Riemann. También planteamos que aunque las ideas de Jordan, acerca de la noción de contenido, sitúan la teoría de la integración en el contexto de la teoría de la medida, es Emile Borel el primero en establecer de forma axiomática los conceptos de medida y medibilidad de un conjunto. Al final de este capítulo, analizamos los planteamientos que desarrolla Henri Lebesgue en torno a la noción teórica abstracta de la medida. Esto le permite establecer una definición más refinada de la noción de integral y dar una respuesta más general al problema del área.

Finalmente, en el capítulo de las conclusiones, hemos retomado los aspectos más importantes de los capítulos anteriores. Además, analizamos cómo Lebesgue, a partir del referente geométrico, del que habían prescindido los matemáticos durante el desarrollo del análisis, establece una definición de integral que acoge una colección más general de funciones. Para ello define la integral de una función acotada en términos de la medida del conjunto acotado por su gráfica y agrega que tal procedimiento permite identificar los delineamientos que llevan a la definición analítica de la integral, tal como lo desarrolla en su tesis doctoral, como lo evidenciamos en este capítulo. Dado que en el capítulo cuatro se muestra cómo Lebesgue define el problema de área para los dominios limitados por curvas de medida superficial nula, en esta sección nos preguntamos qué sucede con los dominios limitados por curvas fractales o por curvas que tienen área. Explicamos que para esta clase de curvas el concepto de longitud no está claramente definido, por lo que ha sido necesario incorporar el concepto de dimensión fractal, el cual indica en que forma una curva llena una porción del plano. También mostraremos que la medida interior de los dominios limitados por curvas fractales de dimensión menor que dos coincide con su área, ya que dichas curvas tiene medida nula, y que los casos en los que una curva tiene área se dan cuando su dimensión fractal es igual a dos. Sin embargo un análisis profundo de estos aspectos amerita un mayor despliegue que escapa los objetivos de esta tesis.

En el desarrollo de esta investigación hemos utilizado obras de referencia generales en el área de historia de la matemática tales como (Collette, 1998), (Collette, 2002), (Boyer, 1987), (Euclides, 1991), (Kline, 1994) y (Grattan-Guinness, 1980). Las fuentes que nos han servido de referencia principal, en el desarrollo historiográfico del problema de las cuadraturas y de la noción de área son las siguientes: (Arquimedes, 1970), (Bobadilla, 2012), (Cauchy, 1994), (Dieulefait, 2003), (Euclides, 1970), (Turégano, 1993), (Thomson, 1951), (Recalde, 2011), (Hawkins, 1979). Estas fuentes, en general, abordan el desarrollo histórico de la medida y la integral. Por lo cual, en cada una, se registran hechos importantes relacionados directa o indirectamente con la evolución histórica del problema del área. Por ejemplo, Tomas Hawkins hace un análisis de la evolución histórica de la teoría de integración de Lebesgue. Pone su énfasis en el papel de la teoría de conjuntos en el desarrollo de la teoría de la integración moderna, particularmente en la conceptualización de conjuntos medibles. Pilar Turégano realiza un análisis de la concepción de área en los diferentes momentos históricos, en el marco del estudio histórico de la integral. En su investigación, hace un recorrido histórico que va desde el problema de las cuadraturas en la matemática griega hasta la teoría de la medida abstracta de Henri Lebesgue. Se enfoca en los resultados de los matemáticos más destacados que hicieron posible una conceptualización de la noción de área, pero de una manera muy descriptiva con poco análisis epistemológico. Por su parte, La profesora Martha Bobadilla, en su tesis doctoral, realiza un análisis del proceso histórico de constitución de las teorías de medida e integración de Lebesgue. Muestra los desarrollos expuestos por Lebesgue en su tesis doctoral y en su memoria de 1903 en torno al problema del área y la teoría de la integración. Así, pues, la información disponible en estas y otras obras de consulta, en su conjunto, se constituyó en una base importante en nuestro intento de conseguir el objetivo propuesto.

1. LA MEDIDA DE SUPERFICIES EN LOS ANTIGUOS

La teoría de la medida primaria adquiere su desarrollo en la primera institución matemática de los griegos, la escuela pitagórica. Hasta entonces, culturas como la egipcia y la babilónica habían desarrollado conocimientos matemáticos que utilizaban para resolver problemas que hacían parte de su cotidianidad. La mayor parte de los documentos antiguos muestra que los conocimientos de estas culturas surgieron a propósito de la medida de la tierra, la construcción de edificios y, en el caso de los egipcios, la construcción de las pirámides. En aquella época la fama de la sabiduría de los egipcios se extendió por todo el mundo civilizado, razón por la cual muchos estudiantes y eruditos se desplazaron a ese país para estudiar. Fue de esta manera que los griegos, principalmente a través de los viajes de Tales de Mileto y Pitágoras, entraron en contacto con los métodos que los egipcios empleaban en la Agrimensura y el cálculo. Los filósofos griegos, según lo explica Thomson, estudiaron esos métodos cuidadosamente y al conjunto de ellos le dieron el nombre de *Geometría*.[1]

1.1. La práctica de la medición en Babilonia y Egipto

Son muy pocos los manuscritos de carácter matemático, del antiguo Egipto, que hoy conocemos. Los que más destacan son el papiro de Rhind y el de Moscú, pues ellos dan cuenta de los métodos usados por los escribas para resolver problemas de orden práctico, lo que ha permitido a los estudiosos hacerse una idea de las matemáticas conocidas por aquella cultura.

En ocasión de las inundaciones anuales provocadas por el Nilo, había que restablecer los linderos y reasignar a cada persona la superficie de tierra que le pertenecía. Así que era necesario desarrollar métodos para medir superficies de formas variadas y, por tal motivo, muchos de los problemas planteados en los

---

[1] Ver (Thomson, 1951, págs. 3-5).

manuscritos mencionados antes, tuvieron el propósito de responder a dicha necesidad. La forma como se resuelven algunos de esos problemas, permite ver que los egipcios median superficies mediante comparación con el área de figuras conocidas tales como el triángulo rectángulo, el cuadrado, el rectángulo y el trapecio. Aunque no conocían una regla general para hallar el área de estas y otras figuras, idearon métodos a través de los cuales lograron una buena aproximación en casos específicos.

Los anudadores egipcios fueron los primeros en descubrir que al hacer trece nudos en una cuerda, igualmente espaciados, y unir los puntos extremos se podía obtener un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 unidades y su hipotenusa 5 unidades. Por casos como este, algunos piensan que los egipcios tenían conocimiento del teorema de Pitágoras, sin embargo, no hay evidencias que respalden esta hipótesis.

En cuanto a la medida de superficies triangulares, en el problema 51 del papiro Rhind[2] se pide hallar el área de un triángulo de 10 jet[3] de altura y 4 jet de base. Para solucionarlo, el escriba toma la mitad de 4 para formar un rectángulo y el resultado lo multiplica por 10 para obtener la superficie buscada. Algunos infieren que la expresión "para formar un rectángulo" sugiere que el triángulo en cuestión es isósceles. Bajo esta premisa, la figura 1.1 ilustraría la forma como procede el escriba.

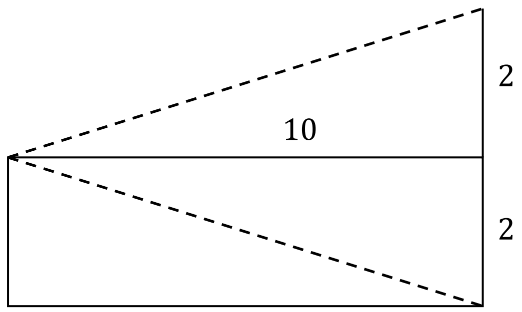


Figura 1.1

[2] Una descripción del papiro Rhind y la solución de algunos de los problemas que contiene, incluidos los que se discuten en esta sección, se encuentra disponible en (López, 1997-2014).

[3] Un jet era equivalente a 100 codos reales, una longitud aproximada de 52 metros.

El problema 50 muestra cómo obtener la superficie de un campo circular que mide 9 jet de diámetro. La solución dada consiste en sustraer de 9 su novena parte y el resultado se multiplica por 8. Finalmente se concluye que la superficie mide 64 setat[4] de tierra. La operación que realiza el escriba es $\left(9-\frac{9}{9}\right)8=64$. Dado que son cuatro los problemas del papiro Rhind en los que se obtiene el área, teniendo al diámetro como parámetro, algunos eruditos han sugerido que el escriba hace uso de la ecuación (1), donde d y A corresponden al diámetro y a la medida de la superficie circular respectivamente. Agregan que esta sería la primeria evidencia de la cuadratura del círculo, pero no hay evidencias que apoyen esa interpretación.

$$A=\left(d-\frac{1}{9}d\right)^2. \tag{1}$$

Los investigadores están de acuerdo en que el conocimiento de la constante π estaba totalmente fuera del alcance del marco conceptual de los calculistas egipcios. Sin embargo, observan que al reescribir la ecuación (1) en términos del radio r del círculo se obtiene la ecuación (2), que al ser comparada, desde la óptica moderna, con la expresión $A=\pi r^2$ permite concluir que el número 3.1605 hubiera sido una buena aproximación de π en aquella época.[5]

$$A=\frac{256}{81}r^2\approx 3.1605r^2\ . \tag{2}$$

La cuestión de cómo construyeron los egipcios su regla para medir superficies circulares, en algunos casos específicos, es un interrogante aún no resuelto. A continuación se presentan dos teorías que intentan explicar el asunto, aunque en ambos casos no se conoce una evidencia objetiva que las respalde.

En primer lugar, se ha sugerido que los egipcios calculaban el área de un círculo aproximándola a la de un cuadrado visualmente equivalente. Se infiere que para ello procedían formando una retícula cuadrada como se ilustra en la figura 1.2.a.

[4] El setat era la unidad básica de superficie y equivalía a un jet cuadrado. La equivalencia en metros cuadrados es aproximadamente de 2735.

[5] Véase (Arribas, pág. 6) y el comentario a la solución del problema 50 en (López, 1997-2014).

Para calcular el área del cuadrado de lado l, que se asume equivalente a la del círculo, se aduce que la clave está en observar que los puntos de cada lado que intersectan al círculo están a una distancia $\frac{l}{4}$ de sus vértices. Ahora, asumiendo que la retícula utilizada era más fina, de tal manera que $l = 16$ unidades entonces, de la figura 1.2.b, se concluye que el diámetro d del círculo es mayor a l en 2 unidades. Luego $\frac{l}{d} = \frac{16}{18}$ lo que implica que $l = \frac{8}{9}d$. En consecuencia, el área A del cuadrado vendría dada por $A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$

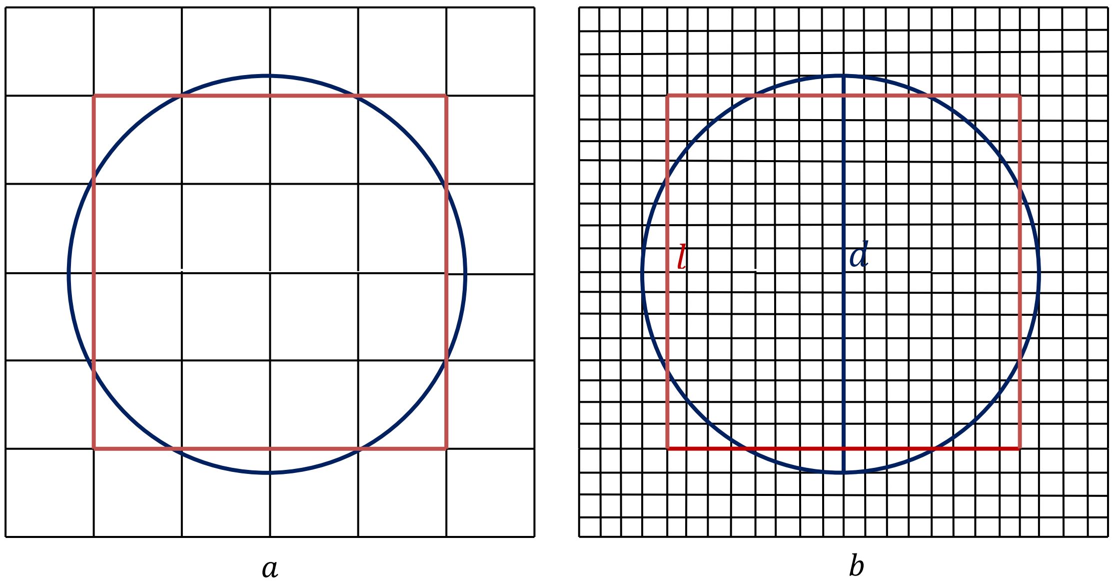


Figura 1.2

La segunda teoría se propone a partir del problema 48 del papiro Rhind. La interpretación de este problema presenta algunas dificultades básicamente porque en el manuscrito no aparece el enunciado del problema. El escriba ilustra la solución utilizando un cuadrado en el que inscribe, lo que parece ser, un octágono como se ve en la figura 1.3.

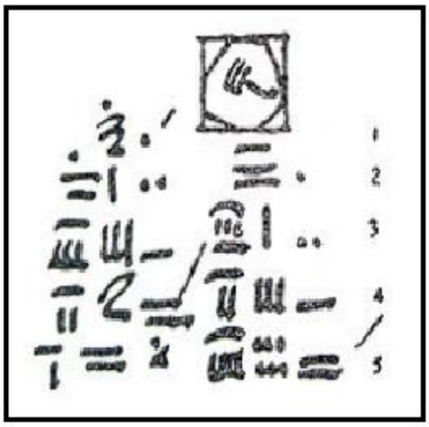


Figura 1.3: ***Problema 48 del papiro Rhind***

Al interior de este último aparece el número 9 que, según los investigadores, debe ser interpretado como el lado del cuadrado. Asumiendo que el octágono es simétrico, este se obtiene al subdividir los lados del cuadrado en 3 partes iguales y quitar los respectivos triángulos isósceles que se forman en las esquinas del cuadrado, tal como se ilustra en la figura 1.4.

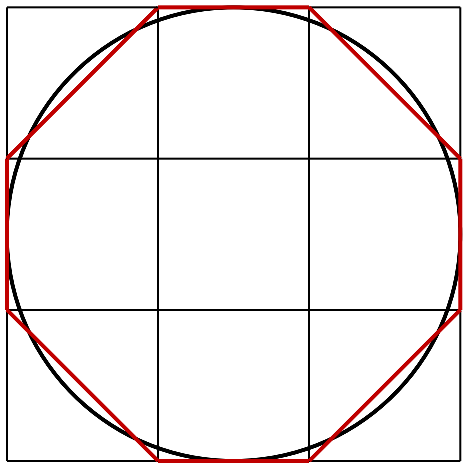


Figura 1.4

El punto importante está en asumir que el octágono es una buena aproximación del círculo cuyo diámetro coincide con el lado del cuadrado. Como el lado del cuadrado es 9, entonces el área del octágono inscrito es igual a 7 cuadrados de lado 3, es decir 63 unidades cuadradas. Por último, dado que $8^2 = 64$ es el número que más se aproxima a 63, entonces el área del círculo de 9 unidades de diámetro quedaría determinada por el área del cuadrado de 8 unidades de lado.[6]

De otro lado, se ha explicado que el octágono de la figura es el resultado de quitar dos triángulos isósceles de lado 3 y otros dos cuyos catetos miden 2 y 4 unidades. Bajo este razonamiento, más coherente con el dibujo, el área del octágono es 64, por lo que no se requiere de otra aproximación.[7]

El surgimiento de estas y otras teorías se debe a que en los manuscritos que han perdurado hasta nuestros días, los escribas solo se limitan a explicar las operaciones que se deben realizar para resolver los problemas planteados, sin dar ninguna justificación de los métodos de cálculo utilizados. Lo mismo sucede con las matemáticas mesopotámicas, pues, en opinión de Boyer, estas culturas estaban familiarizadas con el teorema de Pitágoras. Este punto de vista se sustenta en las denominadas triadas pitagóricas, que resultan de la interpretación del contenido de una de las tablillas que data del periodo babilónico antiguo. Según el mismo autor, conocían el teorema atribuido a Tales de Mileto, según el cual un ángulo inscrito en un semicírculo es recto.[8]

Lo que sí parece estar claro es que la unidad básica de superficie, para los egipcios, era el cuadrado. Específicamente, un cuadrado de 100 codos de lado, es decir 10000 codos cuadrados, al que llamaban *setat*. Para superficies más pequeñas empleaban el *remen*, el *hebes* y el *sa* equivalentes a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$ de *setat* respectivamente. Para medir superficies considerablemente grandes usaban una medida equivalente a 100 *setat*, que llamaron *jata.* De esta manera, cuando se trataba de medir una superficie, lo hacían en comparación con alguna de estas unidades básicas conocidas. Seguramente, la mayoría de las veces, esta forma de medir resultaba solo en aproximaciones aceptables en ese contexto, aunque se desconocen formulaciones explícitas entre cálculos exactos y aproximados. Para lograrlo, es posible que hicieran uso de la retícula cuadrada o de otro tipo como lo sugiere las teorías que mencionamos anteriormente.

[6] En la solución al problema 48 el escriba sólo se limita a calcular 9^2 y 8^2, valores que corresponderían a las áreas del cuadrado y del círculo inscrito, respectivamente.

[7] La discusión de estas teorías y de sus autores puede verse en (Arribas, págs. 6-9).

[8] (Boyer, 1987, págs. 65,66).

Es importante notar que para los egipcios el sistema de medir era netamente práctico, su interés estaba centrado solamente en el utilitarismo de las matemáticas que conocía. A esta conclusión se llega porque tanto en las tablillas que datan de la antigua Mesopotamia, como en los papiros procedentes del antiguo Egipto, que solo registran problemas concretos; no hay rastro de algún tipo de abstracción matemática o de alguna regla general que hubiesen deducido para realizar sus mediciones. No obstante, Boyer observa que ello

> No significa necesariamente que no existiera en el pensamiento antiguo conciencia de la generalidad de dichas reglas o principios; si no hubiera, de una manera o de otra, una regla general subyacente, sería muy difícil de explicar la analogía entre los distintos problemas del mismo tipo. Tan extensas colecciones de problemas semejantes no pudieron ser el resultado del azar [piensa además que] algunos documentos, como la tablilla 322 de la colección Plimpton de la Universidad de Columbia, [9] sugieren que pudo muy bien haber existido una cierta tolerancia, sino incluso un estímulo, hacia la matemática cultivada por sí misma (Boyer, 1987, págs. 66,59).

Lo cierto es que son los griegos quienes centran su atención en el carácter hipotético deductivo de las matemáticas, lo que trae consigo un gran salto conceptual en la matemática de esa época. Pues ahora ellos están interesados no tanto en la utilidad, sino en el estudio teórico formal de los conceptos y sus relaciones, alimentado por la curiosidad intelectual y el deseo de conocer la verdad. Los primeros estudios sistemáticos de esta naturaleza fueron realizados por Pitágoras y sus discípulos, quienes desempeñaron un papel fundamental en la construcción de la matemática como disciplina racional. Su gran mérito fue el de pensar en principios y propiedades generales aplicables a todas las figuras homogéneas; es decir, a todos los triángulos, a todos los círculos, a todos los cuadriláteros, etc. En otras palabras, construyeron un razonamiento general y abstracto que justifica la afirmación, según la cual, una propiedad se cumple en todos los casos.

---

[9] Esta tablilla data del periodo babilónico y consta de tres columnas de números escritos en base sexagesimal distribuidos en 15 filas horizontales. Su interpretación ha dado lugar a las llamadas ternas pitagóricas. Una terna pitagórica es una tripla de números enteros positivos a, b y c que satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$.

1.2. La teoría de la medida de superficies en los antiguos griegos

1.2.1. Antecedentes del problema

Para los pitagóricos los números de contar constituían la esencia del universo y, en consecuencia, pensaban que con ellos era suficiente para tener una teoría de la medida completa. Esta cosmovisión condujo a la creencia de la absoluta conmensurabilidad de todas las magnitudes, es decir que dadas dos magnitudes distintas siempre existe una unidad común que las mide. Equivalentemente, dos magnitudes A y B son conmensurables si existen dos números n y m, tales que $nA = mB$. Cuando se habla de magnitudes en este contexto no solo se hace referencia a los objetos geométricos lineales, sino que también se incluyen los objetos en dos y tres dimensiones. En este sentido, las magnitudes griegas están conformadas por los segmentos, las superficies, los volúmenes e incluso los ángulos. Pero en esta tesis centraremos nuestro interés en las magnitudes superficiales ya que, el avance de los griegos en esta dirección, constituye el antecedente más antiguo, formalmente, hablando de la noción de área.

Esta forma de pensar, respecto a los números y las magnitudes, condujo a los griegos al desarrollo de los conceptos de razón y proporción.[10] Para ellos, el concepto de razón expresaba una relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas y el termino proporción fue usado para significar a las magnitudes que guardan la misma razón. De esta manera si m y n son números enteros positivos, la expresión "m es a n", que modernamente representamos como $\frac{m}{n}$, indicaba para los griegos no un número racional sino una relación entre los números involucrados.

Cimentados en la conmensurabilidad absoluta, los griegos extendieron a las magnitudes su concepción de número como tamaño. En consecuencia, aplicaron la maquinaria de las razones y las proporciones entre números a las longitudes, áreas y volúmenes. De aquí que si A y B son magnitudes entonces cobra sentido la expresión $\frac{A}{B}$ más aún, bajo el supuesto mencionado, existen dos números m y n

---

[10] La definición de cada uno de estos términos aparece en el libro V de los *Elementos.*

tales que $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$, igualdad que se lee " A es a B como m es a n" y se expresa en la forma $A\colon B :: m\colon n$.

Esta visión de los pitagóricos se vendría abajo cuando al interior de su misma escuela se hizo evidente la existencia de magnitudes inconmensurables, es decir aquellas para las que no existe una magnitud común que las mida.[11] En el sentido de la definición anterior, dos magnitudes A y B son inconmensurables si para todo par de números n y m se tiene que $nA \neq mB$. Aunque no hay claridad acerca de las circunstancias concretas que dieron pie al primer reconocimiento de estas magnitudes, para los griegos llegó a ser evidente que este era el caso al comparar la diagonal y el lado tanto de un cuadrado como un pentágono regular.

El proceso mediante el cual es posible determinar la mayor medida común de dos magnitudes se conoce como *antiphairesis*. Tiene como propósito encontrar el segmento más grande que mida a dos magnitudes dadas, para lo cual se recurre a sustracciones sucesivas. La descripción del método es como sigue. Sean AB y CD dos magnitudes tales que $AB > CD$, como en la figura 1.5.

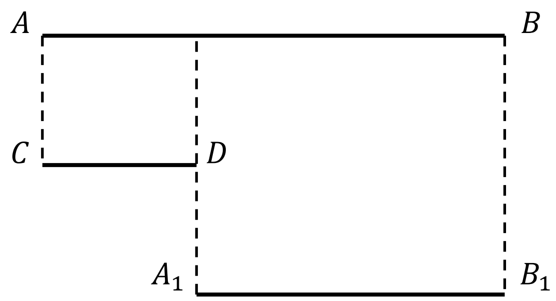


Figura 1.5

Al sustraer CD de AB, obtenemos A_1B_1. Si $CD < A_1B_1$, se sustrae CD de A_1B_1, obteniendo A_2B_2. Se aplica el mismo procedimiento repetidamente hasta obtener un segmento $A_kB_k < CD$. Entonces se cumple que $AB - kCD = A_kB_k$. Si $A_kB_k = 0$, entonces CD es el mayor segmento que mide a AB y a CD. Si, por el contrario, A_kB_k es diferente de 0, se compara A_kB_k con CD y se procede a establecer en una

[11] La temática correspondiente a las magnitudes conmensurables e inconmensurables se halla expuesta en el libro X de los *Elementos*.

segunda etapa el procedimiento anterior. Aquí pueden presentarse dos casos. En primer lugar, si después de n pasos se obtiene un k_n tal que $A_{n-2}B_{n-2} - k_n A_{n-1}B_{n-1} = 0$, entonces $A_{n-1}B_{n-1}$ es el mayor segmento que mide a $A_k B_k$ y a CD y, por tanto, las magnitudes AB y CD serán conmensurables. En segundo lugar, si el proceso continúa infinitamente y la longitud de los segmentos sucesivos tiende a cero, entonces las magnitudes serán inconmensurables.[12]

Aunque aquí hemos explicado el proceso de *antiphairesis* solamente para magnitudes lineales, debe observarse que los antiguos griegos suponían que el proceso demostrativo para las magnitudes superficiales, seguía los mismos delineamientos que para las magnitudes unidimensionales.

1.2.2. La medida de áreas

Los griegos no disponían de un sistema numérico referencial que les permitiera, como en la matemática moderna, la identificación entre números y magnitudes; por ello, debe ser claro que al hablar de medida de superficies en este contexto, no lo estamos haciendo en el sentido de asociarle un número a una superficie plana acotada.[13] En los escritos más representativos de este periodo no hay una definición concreta de lo que es medir; sin embargo, resulta evidente que la operación de medir se establece mediante la comparación de magnitudes homogéneas o de igual dimensión. En este sentido, en dos dimensiones, solo es posible medir una figura plana en comparación con otra figura plana que se toma como unidad referencial.

En el paradigma griego dos figuras bidimensionales pueden tener la misma medida superficial sin que necesariamente tengan la misma forma. Luego, el área no es una propiedad única y exclusiva de una figura en particular, lo que supone

---

[12] La explicación de este proceso la hemos hecho siguiendo las notas del profesor Luis Recalde en (Recalde, 2011).

[13] Cuando se habla de superficies, en el marco del pensamiento griego, restringimos el término a las figuras de dos dimensiones.

que dos figuras puedan ser distintas y, sin embargo, tener igual superficie.[14] De esta manera, se visualiza la posibilidad de medir una figura en comparación con otra y, de hecho, este se constituiría en el objetivo de los griegos, quienes orientarían sus razonamientos en procura de establecer el cuadrado equivalente a una figura dada.

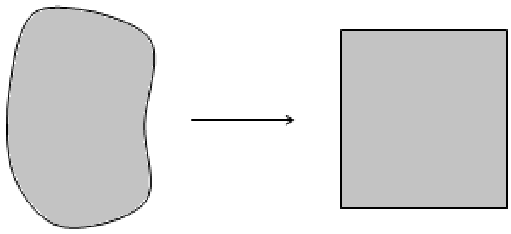


Figura 1.6

Por lo anterior, para los griegos, el problema de calcular el área consiste en hallar el cuadrado equivalente a cualquier superficie plana acotada (ver figura 1.6). Éste es el llamado problema del cálculo de cuadraturas que los antiguos solo pudieron resolver parcialmente. Desde la óptica moderna, en donde la medida de áreas se define a través de una función que asigna a cada región acotada un número real, se ha sugerido que los griegos estarían tratando de definir una función que a cada región acotada del plano le asigne un segmento determinado que coincida con el lado de su cuadrado equivalente.[15] De manera simbólica

$$f : \{\text{Regiones planas acotadas}\} \longrightarrow \{\text{Segmentos}\}$$

Muchas de las proposiciones geométricas que fueron recopiladas en los *Elementos* de Euclides fueron descubiertas por los griegos en el proceso mediante el cual intentaron solucionar los tres problemas clásicos de la geometría; a saber, la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo. Dado que esta geometría se fundamenta en la recta y la circunferencia, las demostraciones o

[14] Igual superficie en el sentido de igual medida. Para ilustrar esto, podríamos pensar que de las piezas obtenidas al descomponer la primera figura, se puede obtener la otra en un proceso de recomposición de dichas piezas.

[15] Ver (Recalde, 2011, pág. 17) y (Bobadilla, 2012, pág. 24).

la solución de los problemas geométricos debían estar determinadas por estas dos figuras y sus conexiones mutuas, es decir, debían poder efectuarse con regla y compás. Debieron transcurrir muchos siglos para que se demostrara la imposibilidad de resolver los problemas mencionados usando este método, razón por la cual todos los intentos de los griegos fueron fallidos.

1.2.2.1. Cuadratura de ciertas clases de lúnulas

Históricamente, la primera mención a la cuadratura rigurosa de una figura plana data del siglo V a. C. En un fragmento de la matemática de la época, que destaca la obra de Hipócrates de Quíos, se registra la cuadratura de ciertas figuras curvilíneas llamadas lúnulas, lograda por Hipócrates, al parecer, en su intento por establecer la cuadratura del círculo.[16] Una lúnula es una figura limitada por dos arcos circulares de radios distintos y su cuadratura se basa en el resultado, también atribuido a Hipócrates, según el cual *segmentos circulares semejantes están entre sí en la misma razón que los cuadrados de sus bases*. Esta proposición le permite demostrar que la cuadratura de la lúnula, que se ilustra en la figura siguiente, es igual a la cuadratura del triángulo isósceles ABC.

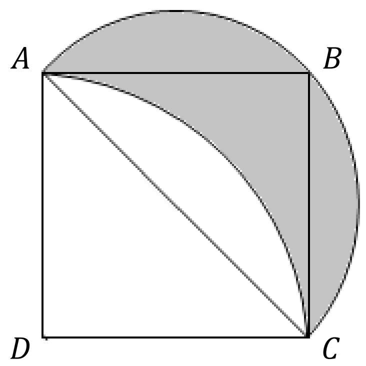


Figura 1.7

[16] Según (Boyer, 1987, pág. 98), es un fragmento que Simplicio dice haber copiado literalmente de la *Historia de la matemática* de Eudemo. Esta obra se ha perdido al igual que unos *Elementos de Geometría* que, según Proclo, escribió Hipócrates.

La idea de la prueba es la siguiente: se considera el cuadrado $ABCD$ y con centro en el punto medio de AC se traza el arco ABC, y con centro en D se traza el arco AC. Como los segmentos circulares AC y AB son semejantes entonces, por la proposición anterior, están en la misma razón que los cuadrados de sus bases. Por el teorema de Pitágoras puede verse que esta razón es $\frac{1}{2}$, lo que implica que el área del segmento de círculo AC coincide con la suma de las área de los segmentos AB y BC. Ahora, si del área del semicírculo ABC se resta el área del semicírculo AC se obtiene el área de la lúnula, pero si en vez de esta se resta la suma de las áreas de los segmentos AB y BC se obtiene el área del triángulo ABC. Como en ambos casos se han restado áreas iguales, entonces el área de la lúnula es igual al área del triángulo en cuestión. Finalmente, el cuadrado de lado $\frac{1}{2}AC$ corresponde a la cuadratura del triángulo ABC, lo que implica que se ha logrado obtener la cuadratura buscada. Esta cuadratura no es la única atribuida a Hipócrates, pero es suficiente para hacernos una idea de cómo procede para calcular la cuadratura de las otras clases de lúnulas.

1.2.2.2. Cuadratura de una figura rectilínea en los Elementos

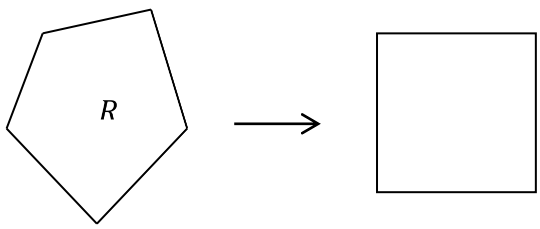


Figura 1.8

El primer avance significativo en el problema de hallar el área de una figura plana aparece en los *Elementos* de Euclides. En esta magna obra, el propósito del autor es dar cuenta de la teoría de la medida que se había desarrollado hasta ese momento. En los libros I y II aborda el problema de calcular el área de figuras rectilíneas, adoptando el cuadrado como unidad referencial y, por ello, la denominación de cuadratura para referirse al problema planteado. El autor cierra el libro II de los *Elementos* con este objetivo cumplido, pues ha resuelto el problema, enunciado en la proposición 14, de *construir un cuadrado equivalente a una figura rectilínea dada*.

Para enseñarnos cómo se resuelve el problema ha tenido que desarrollar, en un proceso sistemático, un aparato teórico que incluye, en el libro I, 23 definiciones seguidas de cinco postulados y nueve nociones comunes. Las definiciones corresponden a los conceptos básicos de la geometría y los postulados a ciertas operaciones iniciales que se le permite a los objetos geométricos que previamente ha definido. Las nociones comunes corresponden a propiedades de la operación suma y la relación de orden entre magnitudes. No hay un consenso en cuanto al número de *nociones comunes* establecidas por Euclides. En este caso tomaremos como referencia la versión de Francisco Vera, que presenta las siguientes nueve nociones:[17]

1. Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.
2. Si a cosas iguales se agregan cosas iguales, los totales son iguales.
3. Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
4. Si a cosas desiguales se agregan cosas iguales, los totales son desiguales.
5. Las cosas dobles de una misma cosa son iguales entre sí.
6. Las cosas mitades de una misma cosa son iguales entre sí.
7. Las cosas congruentes entre sí, son iguales entre sí.
8. El todo es mayor que la parte.
9. Dos rectas no comprenden espacio.

Algunos estudiosos no consideran las *nociones comunes* 4, 5, 6 y 7. Proclo, en particular, asevera que las *nociones comunes* 4, 5 y 6 pueden ser deducidas de las anteriores. También suprime la noción común 9 por considerar que se refiere al ámbito específico de la geometría, y que además se encuentra implícita en el primer postulado.

[17] (Euclides, 1970, pág. 705).

Luego introduce 48 proposiciones, de las cuales destacamos el grupo de va de la proposición 35 a la 48 porque ponen en perspectiva la ruta seguida por Euclides para cuadrar una figura rectilínea y describen las propiedades de paralelogramos, triángulos y cuadrados, haciendo énfasis en la relación de sus áreas. Además, la proposición 47 corresponde al teorema de Pitágoras, que constituye la herramienta primaria para hallar el cuadrado equivalente a otros dos cuadrados dados.

El autor de los *Elementos* utiliza algunas categorías básicas como la igualdad y la congruencia, pero no se ocupa en definirlas. No obstante, en las primeras páginas de los *Elementos* es notorio que se habla de figuras congruentes en un sentido estricto de igualdad o en el sentido de que la una "encaja" idénticamente sobre la otra. De esta manera, el término solo es aplicado a rectas, triángulos y ángulos, pero a partir de la proposición 35 se afirma la igualdad de paralelogramos de formas distintas, colocando el fundamento teórico para dar este salto en las nociones comunes que ya hemos mencionado. A continuación nos ocuparemos de las proposiciones más importantes que le permitirán, a Euclides, resolver el problema de las cuadraturas para las figuras rectilíneas.

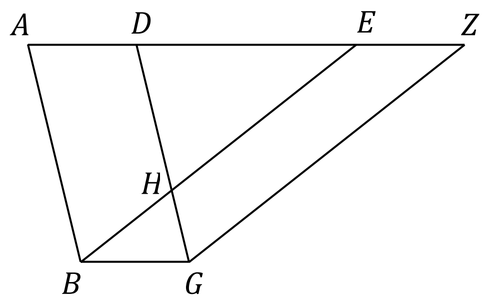


Figura 1.9

La proposición I.41 establece que *si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están colocados entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo.* Para su demostración Euclides utiliza lo que previamente ha probado en la proposición I.35, que *los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son equivalentes* –no porque sean de igual forma sino porque tienen igual superficie. La figura 1.9 ilustra este enunciado, pues los paralelogramos $ABGD$ y $EBGZ$ comparten la misma base BG y están entre las mismas paralelas AZ y BG.

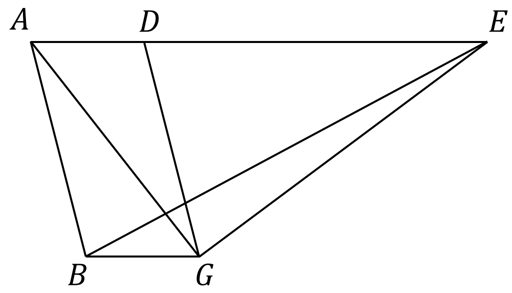


Figura 1.10

Para probar esto basta observar, en primer lugar, que los triángulos ABE y DGZ son iguales. Luego, si a cada uno de ellos se le resta el triángulo común DHE y luego se le agrega el triángulo BHG, entonces se tiene la igualdad de los paralelogramos. Y de esto último puede concluirse que los triángulos ABG y EBG de la figura 1.10, colocados sobre la misma base y entre las mismas paralelas, son equivalentes. Por lo tanto, el paralelogramo $ABDG$ equivale al doble del triángulo EBG, lo que prueba la proposición I.41.

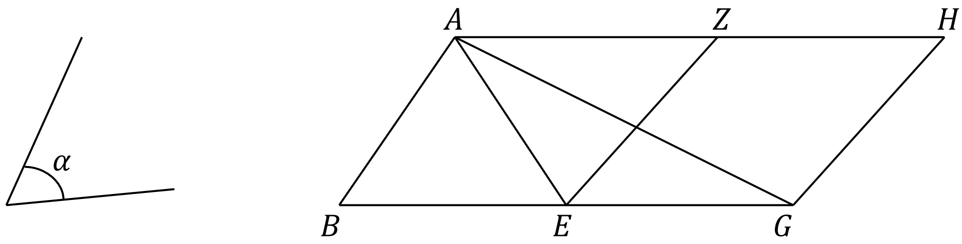


Figura 1.11

Luego, en la proposición I.42, se resuelve el problema de *construir en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado*. Para ello se consideran el ángulo α y el triángulo ABG dados, como en la figura 1.11. Luego se ubica el punto medio E de BG y se traza el segmento AE. Sobre el segmento EG y con vértice en E se construye el ángulo GEZ, de tal manera que coincida con el ángulo dado α. Se trazan AH paralela a BG y GH paralela a EZ, de donde resulta el paralelogramo $ZEGH$ que es dos veces el triángulo AEG y, por lo tanto, es equivalente al triángulo ABG.

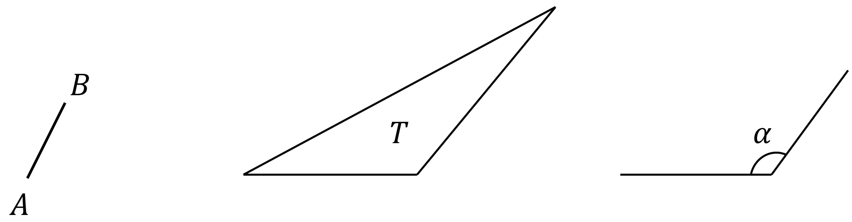


Figura 1.12

Ahora, sean la recta AB, el triángulo T y el ángulo α dados, como se ilustra en la figura 1.12. Prolonguemos el segmento AB y construyamos el paralelogramo $DBFE$ equivalente, en superficie, al triángulo T y de tal manera que los ángulos DBF y α sean iguales. Al prolongar ED y trazar AC paralela a BD se forma el paralelogramo $ABDC$ como se ilustra en la figura siguiente.

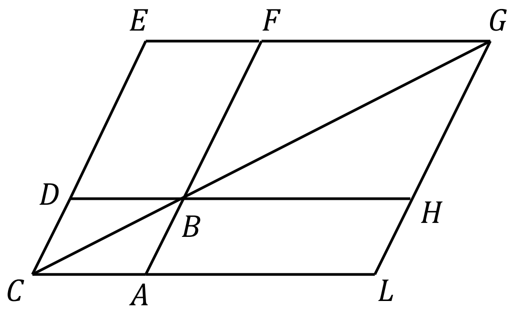


Figura 1.13

Luego se traza la diagonal CB y se prolonga hasta que coincida con la prolongación de EF en el punto G.[18] Por el punto G se traza GL paralela a AF y se prolongan DB y CA hasta los puntos H y L respectivamente. Entonces $CLGE$ es un paralelogramo cuya diagonal es CG y, por tanto, los paralelogramos $DBFE$ y $ABHL$

[18] Esto es posible porque los ángulos DEF y GCE son menores que dos rectos y como las rectas EF y CB están en el mismo plano, al ser prolongadas al infinito se intersectan en algún punto.

son equivalentes.[19] Finalmente, dado que los ángulos DBF y ABH son iguales y el paralelogramo $ABHL$ es equivalente al triángulo T, entonces se ha probado la proposición 44 del libro I: *aplicar a una recta dada en un ángulo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado*.

En la proposición siguiente, I.45, Euclides nos enseña cómo *construir en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada.* Para ello considera una figura rectilínea $ABGD$ y un ángulo θ dados, como se ilustra en la figura 1.14. Lo primero que hace es obtener una triangulación de la figura en cuestión al trazar el segmento BD. Luego, usando la proposición I.42, se construye en el ángulo θ el paralelogramo $KZHT$ igual al triángulo ABD. En este punto, la proposición I.44 permite construir sobre el segmento TH y el ángulo θ el paralelogramo $THLM$ equivalente al triángulo DBG. De esta manera se obtiene el paralelogramo $KZLM$, el cual es equivalente a la figura rectilínea dada. Hasta aquí, Euclides ha dado un paso muy importante hacia el objetivo que persigue, pues esta proposición le permite construir el rectángulo equivalente a cualquier figura rectilínea.

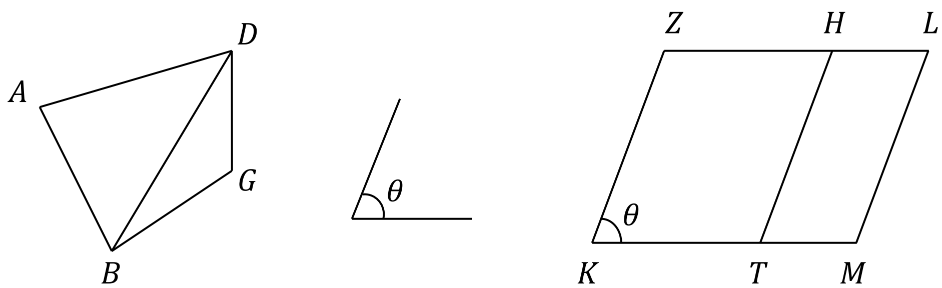


Figura 1.14

La proposición I.47 es de particular importancia porque ella se constituye en el método que permite hallar el cuadrado equivalente a otros dos cuadrados dados. Como veremos más adelante, Euclides la usará para determinar la cuadratura de

---

[19] Este resultado corresponde a la proposición 14 del libro I. Es fácil de ver ya que $ABDC$ y $HGFB$ son paralelogramos, lo que implica que los triángulos que resultan al ser subdivididos por sus respectivas diagonales son iguale. Ahora, si de cada uno de los triángulos CEG y CLG se quitan aquellos triángulos iguales, se obtiene el resultado.

una figura rectilínea. Su enunciado es el siguiente: *En los triángulos rectángulos, el cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es equivalente a los dos cuadrados sobre los lados que forman ese ángulo recto*. Como puede verse, esta proposición corresponde al famoso teorema atribuido a Pitágoras y su demostración es como sigue. Considérese el triángulo rectángulo ABG en el que se ha construido el cuadrado de cada uno de sus lados, como se muestra en la figura 1.15. Se trazan AL paralela a BD y las rectas AD, AE, BK y ZG. Como los ángulos BGK y AGE son iguales, y dado que las rectas KG y GB son respectivamente iguales a las rectas AG y GE entonces los triángulos BGK y AGE son iguales. Luego el paralelogramo $OGEL$ es el doble del triángulo AGE ya que tienen la misma base y están entre las mismas paralelas; por el mismo argumento, el cuadrado $AGKT$ es el doble del triángulo BGK. Así que el paralelogramo $OGEL$ y el cuadrado $AGKT$ son equivalentes. Análogamente se prueba que el cuadrado $ABZH$ es igual al paralelogramo $BDLO$ y, por tanto, se tiene el resultado.

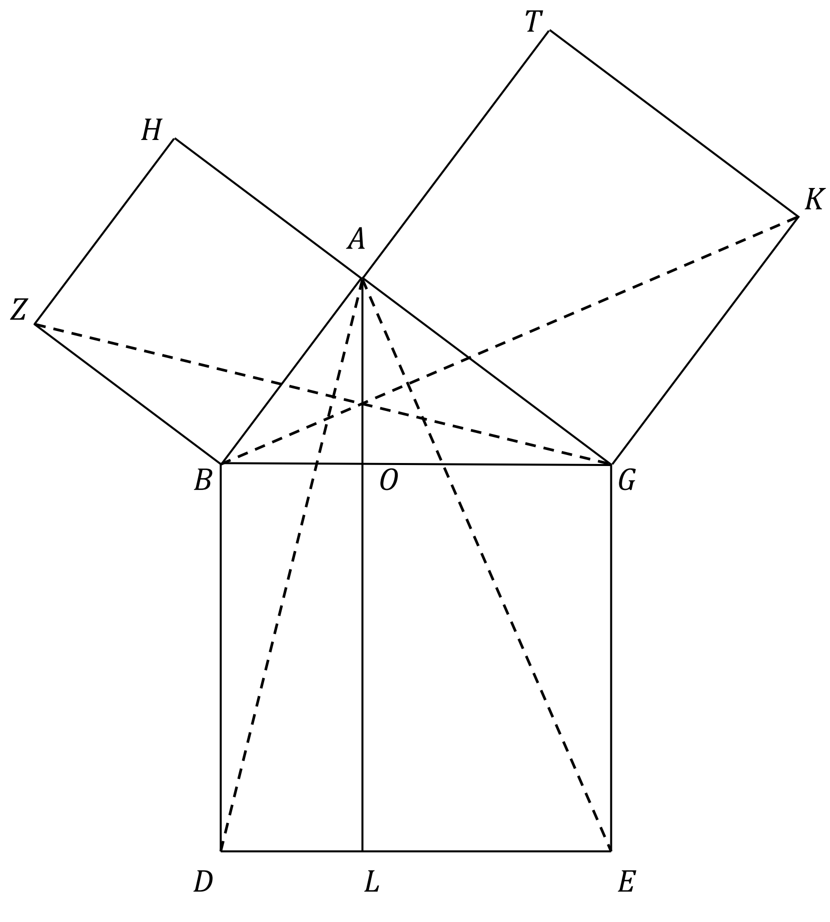


Figura 1.15

Obsérvese que dadas dos figuras rectilíneas y si de cada una se pudiera obtenerse el cuadrado equivalente, lo que en efecto podrá hacerse más adelante con la proposición II.14, entonces por la proposición en cuestión se puede también hallar el cuadrado equivalente a las figuras rectilíneas dadas. En este sentido el teorema de Pitágoras es el primer resultado fundamental que facilita la suma de cuadraturas.

Para lograr el objetivo de cuadrar una figura rectilínea dada Euclides también hará uso de la proposición 5 del libro II, según la cual, *si se divide una recta en partes iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta entera junto con el cuadrado de la mitad de la diferencia entre las dos partes, es equivalente al cuadrado de la mitad de la recta dada*.

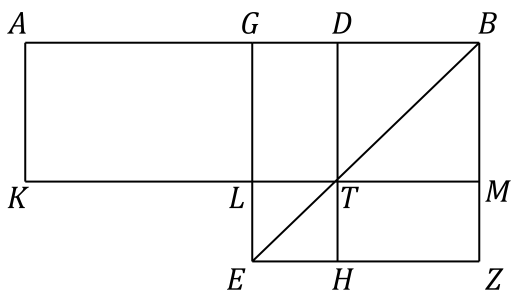


Figura 1.16

Tomando como referencia la figura 1.16, la recta AB dividida en partes iguales y desiguales en los puntos G y D respectivamente. Se construye el cuadrado $GBZE$ y se traza la diagonal BE. Luego se trazan DH paralela a GE, AK paralela a BM y, por el punto T, KM paralela a AB. A partir de esta construcción se mostrará algebraicamente la validez del resultado. Sean $a = AD$, $b = DB$ y $x = GD$. Observe que los paralelogramos $GDTL$ y $TMZH$ son iguale, lo que implica que $DB = DT$. Dado que, en notación moderna, tenemos las siguientes igualdades

$$GB = \frac{a+b}{2}, \quad x = \frac{a+b}{2} - b$$

Se concluye que

$$ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Estas proposiciones constituyen el camino a seguir para convertir una figura rectilínea en un rectángulo. Lo primero que se hace es una triangulación de la figura. Luego, con la proposición I.41 se establece la relación entre figuras planas de características genéricas diferentes, a saber triángulos y paralelogramos. La proposición I.42 permite construir un paralelogramo equivalente a un triángulo dado y I.44 condiciona dicha construcción al conocimiento de uno de los lados del paralelogramo. De esta manera los triángulos que subdividen la figura plana se pueden convertir en rectángulos de igual altura que al unirlos dan como resultado un rectángulo equivalente a la figura en cuestión. Y con la proposición II.14, como veremos a continuación, se alcanza el objetivo propuesto.

Con lo hecho hasta aquí estamos listos para comprender el proceso mediante el cual Euclides, en la proposición 14 del segundo libro, nos enseña a construir el cuadrado equivalente a una región rectilínea R dada. La proposición I.41 permite construir el rectángulo $ABDC$ equivalente a la región R, como se ilustra en la figura 1.17. Suponiendo que AB es mayor que BD, se prolonga hasta E de tal manera que $BE = BD$. Con centro en F, el punto medio de AE, se trazan el semicírculo AHE y se prolonga DB hasta H.

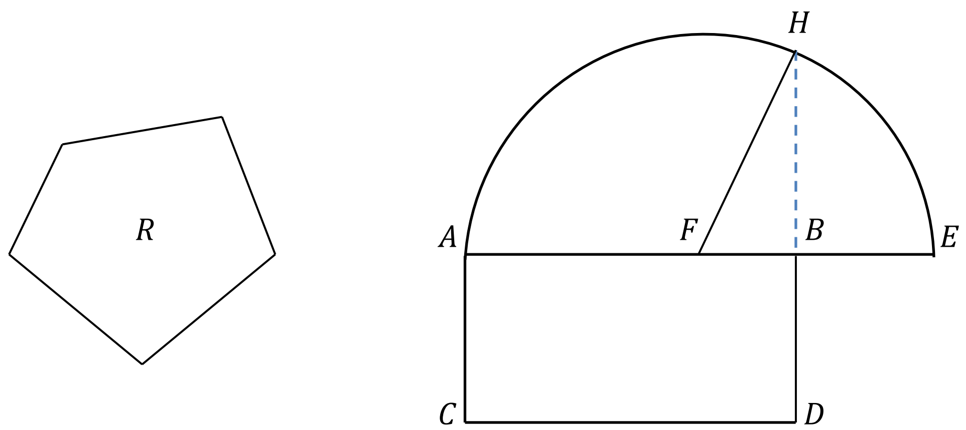


Figura 1.17

Dado que F y B dividen al segmento AE en partes iguales y desiguales, por la proposición II.5, resulta ser que el rectángulo $ABDC$ juntamente con el cuadrado de lado FB son equivalentes al cuadrado de lado FE, que a su vez es equivalente al cuadrado de lado HF. Como el ángulo HBF es rectángulo, por el teorema de Pitágoras, los cuadrados de lados BF y BH unidos equivalen al cuadrado del lado HF. En consecuencia, BH es el lado del cuadrado buscado.

De esta manera, Euclides ha resuelto el problema de calcular áreas de figuras planas rectilíneas. Pero además hace un aporte significativo al demostrar en el libro XII que un círculo se puede agotar por una sucesión de polígonos inscritos, para lo cual hace uso de la proposición X.1 de los Elementos. Esto lo explica cuando demuestra que *los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros*, pero de ello nos ocuparemos con más detalle luego de haber expuesto el método exhaustivo.

1.2.2.3. Cuadratura de figuras curvilíneas en Arquímedes

Euclides dio una respuesta parcial al problema de las cuadraturas que, posteriormente, sería complementada por los trabajos de Arquímedes (287-212). Mientras que el primero resolvió el problema de la cuadratura de figuras rectilíneas planas, el segundo logró avanzar hacia la cuadratura de algunas regiones curvilíneas. Por ejemplo, demostró que la medida de un segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área del triángulo cuya base y altura coinciden, respectivamente, con las de dicho segmento. Para realizar sus cálculos Arquímedes hace uso del método exhaustivo. Este método se fundamenta en la primera proposición del décimo libro de los *Elementos:* "Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que las magnitudes dadas."[20]

El método exhaustivo será el procedimiento utilizado por Arquímedes para determinar la cuadratura de algunas figuras planas no rectilíneas. Para ello, se basa

[20] En términos modernos, el enunciado de esta proposición equivale a establecer que $\lim_{n\to\infty} M(1-r)^n = 0$, siendo M la magnitud inicial, r la razón tal que $\frac{1}{2} \leq r < 1$ y n el número de subdivisiones efectuadas.

en algunas proposiciones de los elementos e incorpora el razonamiento lógico de reducción al absurdo al procedimiento del método en cuestión. En términos generales, la naturaleza de dicho método está en aproximar una sucesión creciente de figuras[21] geométricas rectilíneas, de medida conocida, inscritas y circunscritas, sobre otra figura curvilínea de área desconocida, de tal manera que la diferencia entre esta y el límite de dicha sucesión sea tan pequeña que se consideren equivalentes. Incorporando el método de reducción al absurdo, al procedimiento, se niega tal equivalencia y se llega a una contradicción lógica que garantiza la igualdad de las áreas en cuestión.

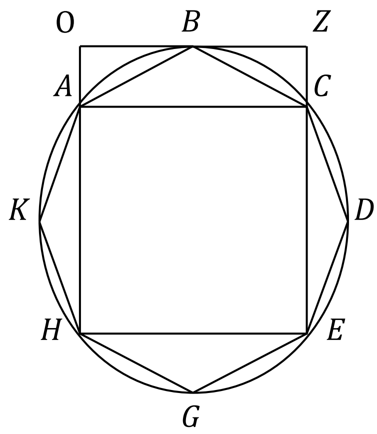


Figura 1.18

La primera aplicación del método exhaustivo aparece en el libro XII de los *Elementos*, cuando Euclides demuestra que el área de un círculo se puede agotar por medio de polígonos inscritos.[22] Para tener una idea de cómo lo hace, consideremos la figura 1.18. La sucesión de polígonos inscritos es P_0 = Cuadrado $ACEH$, P_1 = Octágono $ABCDEGHK$,..., P_n= Polígono de 2^{n+2} lados iguales,... Si denotamos por $a(C)$ y $a(P_n)$ al área del círculo y del polígono n-ésimo, respectivamente, entonces puede formarse la siguiente secuencia: M_0= $a(C) - a(P_0)$, M_1= $a(C) - a(P_1)$,..., M_n= $a(C) - a(P_n)$,... y para ver que, en efecto,

[21] Los polígonos inscritos o circunscritos P_n en la figura curvilínea R deben escogerse de tal forma que la sucesión de las diferencias $\{a(R) - a(P_n)\}$ satisfagan la hipótesis de la proposición X.1 de los *Elementos.* $a(R)$ y $a(P_n)$ corresponden al área de la figura curvilínea y al área del polígono enésimo, respectivamente.

[22] La prueba de este enunciado se halla en el marco de la demostración de la proposición XII.2.

satisface la hipótesis de la proposición X.1, se debe probar que para cada n se cumple que $M_{n+1} < \frac{1}{2}M_n$. Por ejemplo, para probar el caso $n = 0$ basta sustraer M_1 de M_0 y observar que el área de cada uno de los triángulos ABC, CDE, EGH y HKA es mayor que la mitad del área del sector circular en el que están inscritos. Este principio será clave para la demostración de los siguientes resultados.

La proposición XII.2 en la que se establece que *los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros*, es la primera en la que Euclides compara figuras planas de frontera curva con figuras planas rectilíneas. La demostración se hace por reducción al absurdo. Si C_1, C_2 son círculos de diámetros d, δ respectivamente; entonces debe probarse que $C_1 : C_2 :: d^2 : \delta^2$. Suponiendo que la tesis es falsa, debe existir un área C, distinta de C_2, tal que $C_1 : C :: d^2 : \delta^2$. Si $C < C_2$ entonces $C_2 - C > 0$ luego, por el resultado anterior, existe un polígono regulas P_n inscrito en C_2 tal que $C_2 - P_n < C_2 - C$, de donde $P_n > C$. Ahora, si $\mathcal{P}_n$ es el polígono regular inscrito en C_1, con igual número de lados que P_n, entonces por la proposición[23] XII.1 se obtiene que $\mathcal{P}_n : P_n :: d^2 : \delta^2$, lo que implica que $C_1 : C :: \mathcal{P}_n : P_n$. Por lo tanto[24] $C > P_n$, lo que no es posible. Para el caso en que $C > C_2$, siguiendo un procedimiento análogo al anterior, también se llega a una contradicción; lo que garantiza la validez del resultado.

Ahora veamos el uso que hace Arquímedes del método exhaustivo para demostrar que el área de "un círculo es equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos sean iguales al radio y a la circunferencia del círculo."[25] Sean el círculo C, de radio r cuya circunferencia es l, y el triángulo $T = ABC$ de catetos l y r como se ilustra en la figura 1.19. Si el área del círculo $a(C)$ es mayor que el área del triángulo $a(T)$, entonces $a(C) - a(T) > 0$. Luego, existe un polígono P_n de 2^{n+2} lados, inscrito en la circunferencia, tal que $a(C) - a(P_n) < a(C) - a(T)$; es decir que $a(P_n) > a(T)$. Nótese, de acuerdo a la construcción, que b_n corresponde a un de los lados de P_n y es también la base del triángulo isósceles de altura h_n, cuyos otros dos lados coinciden con el radio del círculo. Ahora, como $h_n < r$ y $2^{n+2}b_n < l$,

[23] Esta proposición establece que *los polígonos semejantes inscritos en círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros*.

[24] Véase la proposición V.14 de los *Elementos.*

[25] Esta es la proposición 1 de *La medida del círculo*, uno de los escritos más importantes de Arquímedes.

siendo r y l los catetos de T, entonces $a(P_n) = 2^{n+1} b_n h_n < \frac{1}{2} r l = a(T)$. Por lo tanto $a(P_n) < a(T)$, lo que es una contradicción. De manera similar, para el caso de polígonos circunscritos, se prueba que no es posible la desigualdad $a(C) < a(T)$, lo que implica que $a(C) = a(T)$.

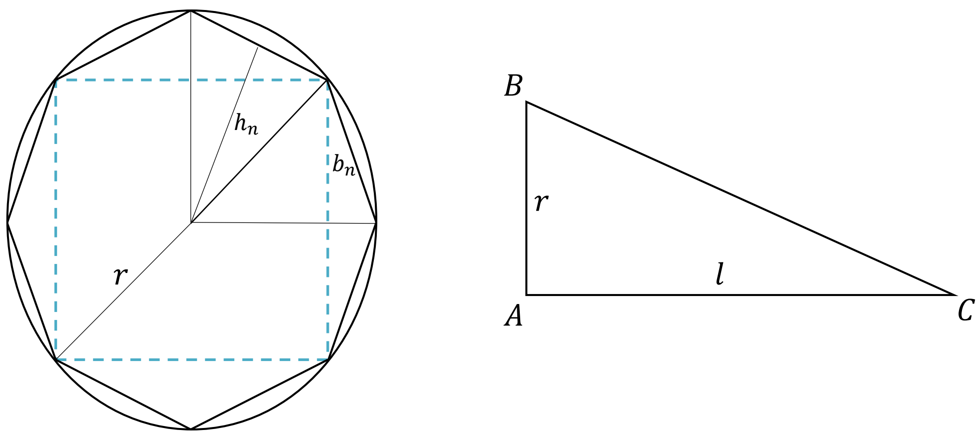


Figura 1.19

Arquímedes, al parecer, es el primero de los geómetras griegos que trata de encontrar la cuadratura de un segmento de parábola. Al respecto, en su epístola dirigida a Dositeo, observa que

> Entre los que han cultivado la geometría antes que nosotros algunos han procurado hacer ver la posibilidad de encontrar una figura rectilínea equivalente a un círculo o a un segmento circular… Pero ninguno de mis predecesores, que yo sepa, ha buscado la cuadratura de una superficie limitada por una recta y una parábola (Arquimedes, 1970, pág. 222).

Como es sabido, el llamado genio de Siracusa tuvo éxito en la solución del problema, cuyo enunciado dice: *el área de un segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de la de un triángulo de la misma base y de la misma altura que el segmento.*[26] Para bosquejar la prueba de esta proposición, consideremos el

[26] Esta es la proposición 24 en *De la cuadratura de la parábola*. Ver (Arquimedes, 1970, pág. 237).

segmento de parábola ABC limitado por cuerda AC con punto medio en M, según se ilustra en la figura 1.20. Como la recta BM, perpendicular a AC, interseca al segmento de parábola en su vértice, entonces el triángulo ABC tiene la misma base y la misma altura que el segmento. Por los puntos medios de AM y MC se trazan DG y EK paralelas a BM.

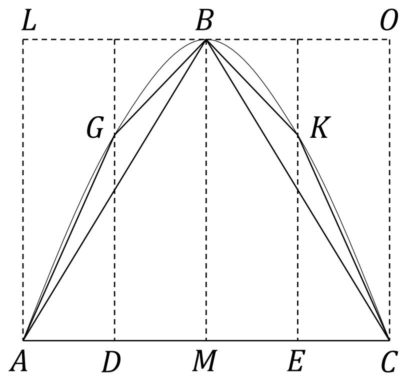


Figura 1.20

Primero se prueba que la suma de los triángulos AGB y BKC equivale a la cuarta parte del triángulo ABC. Observe que si T_0 es el área del triángulo ABC entonces el área de los dos triángulos AGB y BKC es $\frac{1}{4}T_0$. El proceso se puede continuar con cada uno de los segmentos parabólicos limitados por las rectas AG, GB, BK y KC e inscribiendo en éstos los respectivos triángulos como en la construcción anterior, la suma de sus áreas estará dada por $\frac{1}{4^2}T_0$. Siguiendo razonamientos análogos, se obtiene la siguiente sucesión creciente de áreas

$$T_0,\ T_1 = T_0 + \frac{1}{4}T_0,\ T_2 = T_0 + \frac{1}{4}T_0 + \frac{1}{4^2}T_0, \dots, T_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{4^i}T_0, \dots$$

Arquímedes demuestra[27] que

[27] Para ello hace uso del siguiente resultado: Si $S = A + B + C + D + E$ y $A : B = B : C = C : D = D : E$ entonces $S = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}E$.

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{4^i} T_0 = \frac{4}{3} T_0 - \frac{1}{3} \frac{T_0}{4^n} \qquad (1)$$

Como Arquímedes desconoce que la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} T_0$ converge a $\frac{4}{3} T_0$, razona por reducción al absurdo al suponer que el área S del segmento de parábola es distinta de $\frac{4}{3} T_0$. Para el caso en que S es mayor que $\frac{4}{3} T_0$ se demuestra que la sucesión

$$S, S - T_0, S - T_1, S - T_2, \dots, S - T_n, \dots$$

Satisface la hipótesis de la proposición X.1 de los *Elementos*. Luego, para algún n se tendrá que $S - \frac{4}{3} T_0 > S - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{4^i} T_0$, lo que implica que $\frac{4}{3} T_0 < \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{4^i} T_0$. De esta manera se ha llegado a una contradicción y lo mismo sucede cuando se considera S menor que $\frac{4}{3} T_0$. Luego se debe tener que $S = \frac{4}{3} T_0$.

Los escritos de Arquímedes nos dejan saber que el resultado anterior lo dedujo primeramente utilizando las leyes de la mecánica. Posteriormente probaría el resultado usando el método exhaustivo, pues aunque reconoce la utilidad de los medios mecánicos pensaba que éstos no proporcionan una demostración rigurosa. Al respecto, en su tratado *El Método*, dice:

> Estoy convencido de que este procedimiento no es menos útil incluso para demostrar los propios teoremas, algunos de los cuales, evidentes por medio de la mecánica, se han demostrado después geométricamente porque su investigación por dicho método no proporcionó una demostración rigurosa. Pero cuando gracias a él hemos adquirido algún conocimiento previo de la cuestión, es naturalmente más fácil dar la prueba que encontrarla sin dicho conocimiento previo (Arquimedes, 1970, pág. 263).

Veamos cómo Arquímedes utiliza las herramientas mencionadas para establecer la cuadratura de la parábola. La proposición en cuestión es la siguiente: *sea ABG un segmento de parábola limitado por la recta AG y la parábola ABG, D el punto medio de AG, y tracemos la recta DBE paralela al eje de la parábola y las rectas AB y BG. Digo que el segmento ABG equivale a las cuatro terceras partes del triángulo ABG.* Para su demostración, Arquímedes realiza la construcción que se muestra en la figura 1.21. Traza las rectas AZ paralela a DE y GZ tangente a la parábola en G. Luego se prolonga GB hasta θ de tal manera que $GK = K\theta$. Siendo L

un punto cualquiera en AD, se traza ML paralela a DE. Además, se construye ΓH igual a OL con centro de gravedad en θ y tal que $\Gamma\theta = \theta H$. A partir de esta construcción y haciendo uso de las propiedades de la parábola, Arquímedes demuestra la siguiente igualdad

$$área(\Delta AZG) = 4área(\Delta ABG)$$

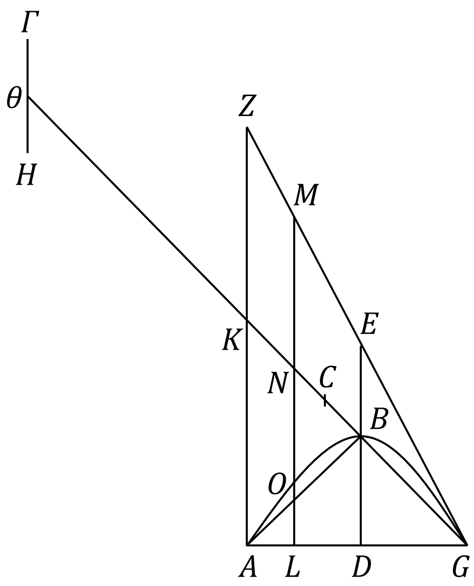


Figura 1.21

De otro lado, al equilibrar el área del segmento de parábola, $a(P)$, y el área del triángulo AZG observa que

$$\frac{a(P)}{área(\Delta AZG)} = \frac{1}{3}$$

Y de estas dos ecuaciones concluye que

$$a(P) = \frac{4}{3}\, área(\Delta ABG)$$

Es de observar que Arquímedes, al igual que Euclides, utiliza implícitamente algunas propiedades del área aunque en sus escritos no haya una definición precisa de lo que él entiende por ese concepto. Es sus trabajos

> Parece haber tomado por convenio que cada región tiene un área asociada a ella. Con esta hipótesis se ocupa en calcular áreas de regiones particulares, y en sus cálculos utiliza propiedades… que no se pueden probar mientras no se precise qué se entiende por área. Supone, por ejemplo, que si una región es interior a otra, el área de la región menor no puede exceder al área de la región mayor; y, también, que, si una región se descompone en dos o más partes, la suma de las áreas de cada parte es igual al área de toda la región (Turégano, 1993, págs. 28,29).

En la actualidad estas se conocen como las propiedades de monotonía y aditividad de la medida, respectivamente. Por ejemplo, pese a que en los *Elementos* de Euclides se demuestran varias proposiciones relativas a áreas y volúmenes, el autor no dice explícitamente lo que debe entenderse por longitud, área o volumen. En esta dirección, Lebesgue observa que:

> Para los antiguos, las nociones de longitud, área y volumen eran nociones primarias, claras por sí mismas, sin definiciones lógicas. Los axiomas, casi todos implícitos, que utilizaban para las evaluaciones, no eran, a sus ojos, definiciones de estas nociones. Se trataba siempre, para ellos, del lugar ocupado por la línea, la superficie o el cuerpo en el espacio. La dificultad sólo comenzó cuando se trató de medir ese lugar, de adjudicarle un número y esa dificultad es únicamente la existencia de los inconmensurables (Lebesgue H. , 1936, pág. 68).

Bajo esta cosmovisión, también Arquímedes propició un avance en el problema de las cuadraturas, pues el desarrollo de su pensamiento hizo posible que dicho problema también pudiera resolverse para casos particulares de figuras planas no rectilíneas. Más aún, sus ideas se constituirían en un precedente muy importante para los trabajos de algunos matemáticos en siglos posteriores.

2. LA MEDIDA DE SUPERFICIES MEDIANTE LA TEORÍA DE INDIVISIBLES DE CAVALIERI

2.1. Antecedentes de la teoría de los indivisibles

Como ya se ha explicado, Arquímedes obtiene la cuadratura de un segmento de parábola en comparación con la cuadratura de un triángulo de igual base y de igual altura que el segmento. Para lograrlo, en principio, incorporó a la geometría las leyes de la mecánica y la relación que estableció entre éstas le permitió tener una idea de que su proposición era correcta, aunque también era consciente de que ello no proporcionaba una demostración rigurosa.

En ese proceso, según explica Francisco Vera, lo que hace Arquímedes es cortar las superficies por rectas paralelas y compara una de las secciones producidas con otra hecha por la misma recta en una figura conocida y coloca ambas figuras de modo que sus centros de gravedad estén en una recta, correspondiente al brazo de palanca, en la que determina dos segmentos contiguos proporcionales a las dos secciones, cuya relación establece la ecuación de equilibrio, con respecto a un punto, de las dos áreas elementales suspendidas de los extremos de la recta. Si el brazo de palanca correspondiente al área que busca es constante, la ecuación de equilibrio le da el valor que persigue.[28] De esta manera, es Arquímedes quien concibe, por primera vez, la posibilidad de analizar las relaciones entre los objetos a partir del estudio de sus elementos constitutivos. Bajo esta percepción, las superficies son vistas como formadas por líneas, con cierta anchura, de modo que para calcular su área lo que habría que hacer es una especie de suma de todos los elementos que la componen. Así, si X es una figura plana que se desea medir, entonces se suman los elementos infinitesimales de X comparándolos con los

[28] Ver (Arquimedes, 1970, págs. 261,262).

elementos correspondientes de una figura Y de la que se conocen el área y el centro de gravedad.[29]

Hay que señalar que los métodos infinitesimales usados por Arquímedes se constituirían un presedente importante para el trabajo de algunos matemáticos en siglos posteriores. Por ejemplo, Vera comenta que las ideas arquimedianas fueron el fundamento de la teoría de los indivisibles que sería establecida en el siglo XVII por Cavalieri.

Kepler (1571-1630) es conocido como uno de los precursores del cálculo infinitesimal. El concepto de lo infinitamente pequeño, que hasta entonces había sido usado en el marco filosófico, sería introducido por él en la geometría para el cálculo de áreas. Su idea de infinitesimal es la de un elemento muy pequeño que hace parte de una figura cualquiera y conserva su dimensión. En el campo de la astronomía, Kepler planteó que los planetas se mueven alrededor del sol siguiendo orbitas elípticas, en uno de cuyos focos está el Sol, y que el radio vector que va del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. Para resolver problemas como éste

> Suponía… que el área en cuestión estaba formada por triángulos infinitamente pequeños con un vértice en el Sol y los otros dos vértices en puntos infinitamente próximos sobre la órbita del planeta (Boyer, 1987, pág. 409).

En su trabajo, *La Nova Stereometría*, sobre el cálculo de áreas y volúmenes, Kepler resuelve el problema de hallar el área de un círculo usando las técnicas infinitesimales. Para ello, considera el círculo como un polígono regular con un número infinito de lados constituido por infinitos triángulos, todos ellos con vértice en el origen, y cuyas alturas pueden considerarse aproximadamente iguales al radio del círculo. Sean C y r la circunferencia y el radio del círculo, respectivamente. Si $b_1, b_2,\ldots, b_n,\ldots$ son las bases de los triángulos infinitesimales, entonces el área del círculo A puede verse como

$$A = \frac{1}{2}r(b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots) = \frac{1}{2}rC$$

[29] Ver (Collette, 2002, pág. 135).

El uso de esta técnica también le permitió a Kepler obtener el área de la elipse y, al considerar que los sólidos están compuestos de infinitas capas superficiales, también logró calcular el volumen de los barriles de vino.

Con esta forma de proceder, Kepler sugiere un método alternativo al de reducción al absurdo, usado por Arquímedes, para abordar los problemas de áreas y volúmenes. Aunque su técnica tenía problemas de rigor, de los cuales él mismo era consiente, desde entonces sus razonamientos fueron seguidos por la mayor parte de los matemáticos.

Galileo (1564-1642) sostiene que el continuo está formado de indivisibles. Su argumento tiene como punto de partida la cosmovisión aristotélica de una indivisibilidad indefinida. Asegura que si una división puede continuarse indefinidamente, entonces las partes deben ser infinitas y por lo tanto inextensas. Luego, si las partes son inextensas es porque son indivisibles. Para Galileo los indivisibles, además de ser los componentes de los cuerpos, son las partes constitutivas de las figuras geométricas y, en consecuencia, comparten su naturaleza.

Estas ideas fueron de gran importancia conceptual y heurística en el análisis del movimiento variado. Así las cosas, el concepto de aceleración uniforme fue planteado por adición de infinitos momentos de velocidad, lo que implicaba componer el continuo de infinitos elementos unitarios inextensos y por tanto indivisibles. No obstante, Galileo no logró llegar a ninguna teoría y tampoco pudo establecer cálculos operativos concretos en torno a su, también conocido, atomismo matemático. Por ejemplo, en el contexto de su análisis no es posible establecer una distinción entre dos magnitudes continuas, ya que ambas constan de infinitos indivisibles y las propiedades de mayor, menor o igual son indeterminadas entre los infinitos.[30]

---

[30] Una exposición sobre los indivisibles de galileo se halla en (Sellés).

2.2. La teoría de indivisibles de Cavalieri

El matemático más destacado, en el siglo XVII, por contribuir de manera significativa al cálculo de áreas y volúmenes de objetos más generales, fue Bonaventura Cavalieri (1591-1647). Históricamente, Cavalieri es reconocido por el método de los indivisibles, el cual está inmerso en un desarrollo teórico complejo presentado en una de sus obras más importantes, la *Geometría de los indivisibles*. El método de Cavalieri constituye un procedimiento con el que se propone medir los objetos geométricos a partir de sus partes indivisibles. La idea de Cavalieri es evitar las limitaciones del método exhaustivo con el desarrollo de una nueva técnica, inspirada fundamentalmente en los trabajos de Kepler, que diera cuenta de los procesos infinitesimales.

Un concepto fundamental en la formulación del método de los indivisibles es el de *regula* que, para el caso de una figura plana, es una recta que se toma como dirección. Al respecto, Recalde observa:

> A cada una de las líneas paralelas a la regula y que generan la figura, Cavalieri les da el apelativo de indivisibles. En este caso se trata de los indivisibles para figuras planas. En general, los indivisibles son componentes cuya naturaleza depende de la dimensión de los objetos. Así, para las superficies los indivisibles serán las líneas; para los volúmenes, superficies, y en general, para objetos de dimensión n serán los objetos de dimensión n-1 (Recalde, 2011, pág. 163).

Es de observar que de las líneas paralelas a la regula solo una formará la tangente opuesta, lo que implica que la figura en cuestión se puede acotar entre dos rectas paralelas. Si a través de estas líneas, denominadas también tangentes opuestas, se construyen dos planos paralelos y se deja fluir un plano móvil, en paralelo al plano que contiene la regula, hasta que coincida con el plano que contiene la tangente opuesta entonces la intersección del tránsito sucesivo de este plano y la figura coincide con "todas las líneas" de la figura en cuestión. Para ilustrar este concepto, consideremos la figura plana $F = ABC$ y tomemos la línea AC como *regula.*

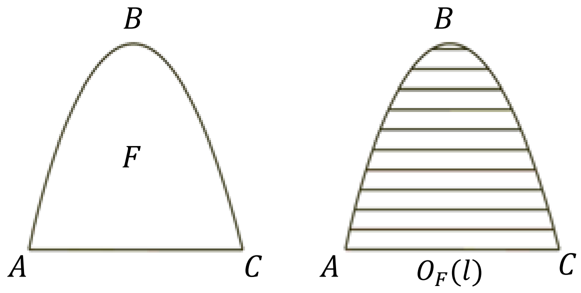


Figura 2.1

En este caso la colección de “todas la líneas” corresponde a la totalidad de las cuerdas “l” de F que son paralelas a la *regula*. Para denotar tal colección se usa el símbolo $O_F(l)$. La O corresponde a la primera letra de *omnes lineae*, expresión que traduce “todas las líneas”.

Aunque el método desarrollado por Cavalieri era útil para el cálculo de cuadraturas y volúmenes de figuras más generales, su formalismo no tardaría en ser cuestionado por los críticos ya que no escapaba a los problemas relacionados con el uso del continuo. Para poner el asunto en contexto, recuérdese que el filósofo presocrático Demócrito pensaba que los cuerpos físicos están constituidos, en última instancia, por átomos indivisibles. Contrariamente, Aristóteles sostuvo que la característica esencial del continuo es que puede ser dividido ilimitadamente en elementos de su misma naturaleza, por lo que resultaría imposible descomponerlo en elementos indivisibles. De esa manera, el punto de vista aristotélico niega que una magnitud conste de puntos o que los elementos constitutivos de una superficie plana acotada sean “todas las líneas”.

La enseñanza aristotélica fue la que prevaleció entre la mayoría de los estudiosos; sin embargo, las ideas atomistas fueron acogidas y aplicadas a la matemática por varios científicos entre los que se destacan Arquímedes, Kepler y Galileo. Por ejemplo, el método de Arquímedes plantea la posibilidad de calcular áreas de figuras operando mediante métodos mecánicos sobre las secciones que las componen. Pero, a la vez, es consciente de que este tipo de razonamiento, aunque de gran valor heurístico, no proporciona una demostración totalmente satisfactoria de los resultados que deben ser verificados rigurosamente por otras vías. De esta manera, Arquímedes señala la utilidad de su método para resolver mecánicamente algunos problemas matemáticos, pero es consciente de que por ese medio no se logra una demostración rigurosa. En general, los matemáticos griegos utilizaron heurísticamente la idea de poder "subdividir" una figura geométrica en sus partes más pequeñas, para lograr una comprensión del problema que estuviesen intentando resolver; sin embargo, un razonamiento de estas características era considerado formalmente inaceptable.

En tales circunstancias, Cavalieri parece mantener una postura un poco ambivalente. Aunque sostiene claramente que los indivisibles no constituyen el continuo, también considera que son una herramienta operativa válida para el cálculo de cuadraturas. Sería, precisamente, su forma de operar la que le haría objeto de diversas críticas puesto que en el proceso de recomponer y, sobre todo, de subdividir el continuo daba la impresión que se alejaba de la concepción aristotélica. Sin embargo, Cavalieri mismo afirma que para él la naturaleza del continuo no lo constituyen los indivisibles; estos no son más que una herramienta operativa que permite obtener cuadraturas. Aun así, algunos de sus contemporáneos se opusieron a la existencia de una razón entre dos colecciones infinitas de líneas, tal como lo sugiere el método de los indivisibles.

Como vemos, el intento de fundamentar la técnica de los indivisibles derivó en algunos vacíos conceptuales; sin embargo, con su método

> Cavalieri nos ha legado un aspecto profundo en relación con el problema de medir, como es el hecho de que para obtener la medida de un objeto geométrico no es necesario tener en cuenta todos sus elementos constitutivos. Modernamente decimos que los conjuntos de medida cero no aportan en la medida total. Este fue uno de los aspectos tomados por Lebesgue, a principios del siglo XX, para desarrollar su teoría abstracta de la medida (Recalde, 2011, pág. 164)

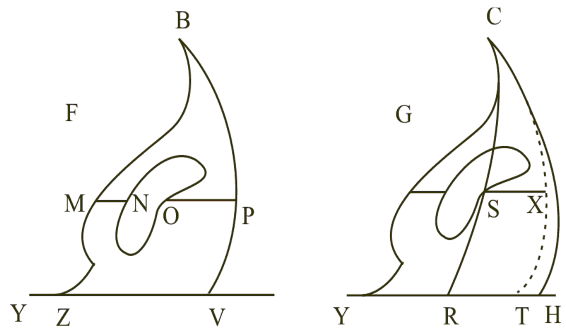


Figura 2.2

A continuación, con base en la figura 2.2, enunciamos la versión directa del *principio de Cavalieri* aplicado a rectas y superficies planas.

Principio de Cavalieri (Versión 1): Sean las figuras $F = BZV \, y \, G = CRT$, que tienen iguales alturas con respecto a la regula YH, y tal que las correspondientes cuerdas (o la suma de cuerdas) son iguales, es decir $MN + OP = SX$, entonces $F = G$ (área de BZV igual al área de CRT).

Luego, Cavalieri plantea el resultado cuando las cuerdas están en proporción. Para el caso anterior se plantearía así: tomando $l_1 = MN + OP$ y $l_2 = SX$, si $\frac{l_1}{l_2} = k$, entonces $\frac{F}{G} = k$.

Principio de Cavalieri (Versión 2): Si dos volúmenes tienen igual altura, y si secciones hechas por planos paralelos a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en una razón fija, entonces los volúmenes de los sólidos también están en esa misma razón.

Estos principios le permiten a Cavalieri hallar cuadraturas de figuras planas y volúmenes de sólidos mediante una comparación entre magnitudes geométricas. Esto en razón de que para el siglo XVII las áreas y los volúmenes no eran cantidades asociadas a un número, pues esta noción solo se alcanzaría en desarrollos posteriores.

El desarrollo de la geometría analítica de Descartes abre el camino para convertir un problema geométrico en uno algebraico y viceversa. Ello hace posible, por ejemplo, que algunas curvas puedan representarse algebraicamente. Este avance en la forma de hacer matemática, seguramente, es lo que le permite a Cavalieri encontrar cuadraturas de figuras limitadas por curvas que posteriormente vendrían a representar funciones de la forma $f(x) = x^n$, para $n = 1, 2, \dots, 6 \, y \, 9$. De esta manera, Cavalieri establece una generalización del cálculo de cuadraturas de figuras planas prescindiendo del método exhaustivo.

3. LA MEDIDA DE SUPERFICIES EN EL MARCO DEL SURGIMIENTO DEL CÁLCULO

3.1. Antecedentes de la noción de área en el cálculo

3.1.1. Geometría analítica de Descarte

En el transcurso de su vida, René Descartes (1596-1650) centró su atención fundamentalmente en el estudio de la filosofía y de la física; sin embargo, sus contribuciones en el campo de la geometría serían de gran importancia en la evolución del pensamiento matemático.

En lo que interesa a nuestro estudio, la geometría cartesiana juega un papel muy importante porque establece la metodología para el tránsito de lo geométrico a lo algebraico y viceversa. En este sentido puede caracterizarse, de una parte, como la expresión de las operaciones algebraicas en lenguaje geométrico y, de otra, como la aplicación del algebra a la geometría. Al respecto, el mismo Descartes observa en *La Geometría* que “todos los problemas de geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos”.[31] Para ello, empieza estableciendo una base geométrica para el álgebra, donde mostrará que las operaciones básicas de la aritmética corresponden a construcciones sencillas hechas con regla y compás. Veamos, por ejemplo, a partir de la figura 3.1 como construye el producto de los segmentos AB y AC.

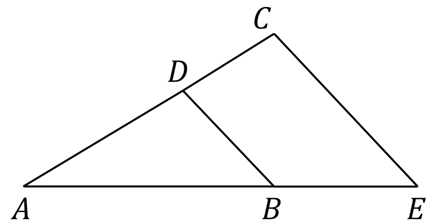


Figura 3.1

[31] Citado en (González U., pág. 317).

Primero localiza el punto D en AC tal que AD sea el segmento unidad. Luego une el punto D con B y traza CE paralelo a DB. Finalmente, usando el teorema de Tales, concluye que AE es el producto buscado.

Observe que en la construcción anterior el producto de los segmentos dados es otro segmento, ya que se obtiene como una cuarta proporcional. Esto implica, desde nuestra óptica, que descartes está dotando al producto de segmentos, y también al cociente, de la propiedad clausurativa. Esta forma de interpretar las operaciones aritméticas marcará un hito en el progreso del pensamiento matemático, pues ahora se podrán asignar números a las figuras geométricas, cosa que no habían hecho los geómetras griegos por causa de las magnitudes inconmensurables. Así, podrá operar con las magnitudes tal como lo hace con los números y es pensando en este propósito que incorpora el segmento unidad a las magnitudes.

Con el fin de facilitar la compresión de su discurso matemático, Descartes introdujo una notación algebraica y exponencial que resultó ser más dinámica y facilitó la operatividad. Usó las primeras letras del abecedario para los parámetros y las últimas para designar las incógnitas e introdujo los símbolos que usamos actualmente para la adición y la sustracción. Por ejemplo, a dos segmentos cualesquiera AB y CD los designa con las letras a y b, respectivamente, y escribe $a+b, a-b, ab$ y $\frac{a}{b}$ para simbolizar las operaciones básicas entre los mismos. Además, interpreta las potencias del tipo $a^2, b^2, a^3, a^2b, \ldots$ como segmentos[32] y no necesariamente como cuadrados o cubos, según lo hacían los griegos. Es de observar que para esta época el producto de dos segmentos era visto como un rectángulo y el de tres como un paralelepípedo; no obstante, el producto de cuatro segmentos y más no tenía sentido para los matemáticos, por lo que ni siquiera era considerado.

A continuación, Descartes describe el método para resolver los problemas geométricos. Este consiste básicamente en suponer que el problema ya está resuelto, utilizar el lenguaje algebraico para identificar a todas las líneas que intervienen en su construcción, trasladarlo al lenguaje de las ecuaciones, que

---

[32] Ver (González U., pág. 328).

deben ser tantas como incógnitas haya, resolverlo algebraicamente y verificar que la solución satisface los requerimientos del problema.

La aparición del sistema de coordenadas cartesiano permite expresar los problemas geométricos en lenguaje algebraico y viceversa. Bajo esta perspectiva, para Descartes, todos los puntos de las curvas que pueden llamarse geométricas tienen, necesariamente, alguna relación con todos los puntos de una línea recta, relación que podrá ser expresada por alguna ecuación válida para todos los puntos. Esto implicaría un aumento en el universo de las curvas, ya que se aceptaría como tales todas aquellas líneas que pueden expresarse mediante una ecuación. Será a partir de la ecuación de las curvas que podrán encontrarse sus elementos geométricos más notables entre los que destacan las rectas normales, las rectas tangentes e incluso el espacio determinado por su gráfica.

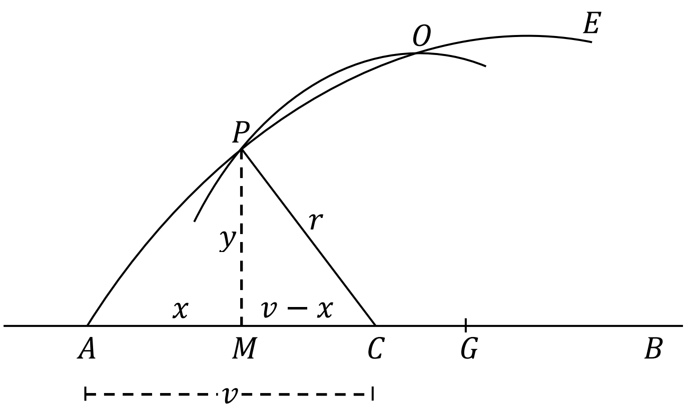


Figura 3.2

Consideremos la curva APE de la figura 3.2 y veamos cómo razona Descartes para determinar la ecuación de la recta tangente en el punto P de coordenadas (x_0, y_0). Descartes considera la recta AB y busca establecer una expresión algebraica que relacione los puntos de la curva con los de dicha recta. Además, supone que la recta PC es la solución del problema y da nombre a los segmentos involucrados así: $AM = x, PM = y, AC = v, PC = r$ y, en consecuencia, $MC = v - x$.

Supongamos que la ecuación de la curva está dada por $y = f(x)$. Como C es el punto de intersección de la normal con la recta AB, todo círculo con centro en un punto G cercano a C intersecta a la curva en dos puntos, a saber O y P. La ecuación del círculo con centro en C está dada por

$$(x-v)^2+y^2=r^2$$

De donde se obtiene

$$(x-v)^2+(f(x))^2-r^2=0 \quad (1)$$

Donde v y r son fijos. Como PC es la normal a la curva en el punto P, entonces la ecuación (1) debe tener una raíz $x=x_0$ de multiplicidad 2 y, por tanto, se infiere que

$$(x-v)^2+(f(x))^2-r^2=(x-x_0)^2\sum_{i=0}^{n-2}a_i x^i \quad (2)$$

Siendo n el grado de $(f(x))^2$. Igualando los coeficientes que se corresponden en la ecuación (2) se puede hallar v en términos de $x=x_0$. Luego, como el punto P de coordenadas (x,y) es dado, las pendientes de la recta normal m_N y de la recta tangente m_T a la curva son

$$m_N=-\frac{f(x)}{v-x}, \qquad m_T=\frac{v-x}{f(x)}$$

De esta manera, se pueden hallar las ecuaciones de las rectas en cuestión en cualquier punto de la curva. Para ilustrar esto, consideremos la curva

$$y=f(x)=x^3 \quad (3)$$

Veamos cómo se halla la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto (x_0,y_0) distinto del origen. De (2) y (3) se llega a que

$$(x-v)^2+x^6-r^2=(x-x_0)^2\sum_{i=0}^{4}a_i x^i$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta de igualar los coeficientes respectivos, se tiene que $v = x_0 + 3{x_0}^5$, es decir, $v - x = 3x^5$ ya que $x = x_0$. Luego $m_T = 3x^2$. Finalmente, la ecuación de la recta tangente en un punto (x_0, y_0) de la curva dada será

$$y = 3{x_0}^2(x - x_0) + y_0$$

Los trabajos de Rene Descartes proporcionaron herramientas eficaces para resolver problemas relacionados con las propiedades de las curvas, pues ahora estas podían ser descubiertas al examinar el comportamiento algebraico de la ecuación de la curva. Además, la geometría cartesiana transformó el problema de las cuadraturas en el problema de hallar el área bajo la curva, pues este mismo autor señalaría que al disponer de la ecuación de una curva sería posible encontrar casi todo, lo que puede ser determinado, respecto a la medida del espacio que abarcan,[33] obviamente estaba refiriéndose a su cuadratura. Por último, cabe señalar que estos aportes se constituyeron en un instrumento clave para la aparición de varios métodos y técnicas infinitesimales, que serían de gran importancia en el proceso de invención del cálculo.

3.1.2. Aritmética del infinito de Wallis

Posteriormente, el matemático inglés John Wallis (1616-1703), siguiendo los delineamientos de Descartes y Cavalieri, propone un nuevo método, denominado “inducción incompleta”, para el estudio de la cuadratura de curvas. El hecho de que Descartes dotara al producto de segmentos con la propiedad clausurativa, operación que carecía de sentido para los griegos, le permitirá a Wallis establecer implícitamente que el área del rectángulo es igual al producto de la base por la altura. Pero la inexistencia de un cuerpo numérico en el que estuviera bien definido el producto obstaculizó un desarrollo más amplio de este concepto.

[33] (González U., págs. 353,354).

En su texto, *La Aritmética de los Infinitos*, Wallis estudia el comportamiento de las razones de sucesiones, en las que el numerador corresponde a una sucesión de una potencia fija y cuyo último término determina la serie de términos constantes del denominador, es decir:

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k}$$

Wallis se interesa por el comportamiento de estas razones cuando n crece siendo k un número entero fijo. Cuando $k = 1$, encuentra que para cualquier valor de n la razón se mantiene constante

$$\frac{0 + 1 + 2 + \cdots + n}{n + n + n + \cdots + n} = \frac{1}{2}$$

Luego, la razón característica de índice $k = 1$ es $\frac{1}{2}$. Es de observar que para realizar sus cálculos, Wallis hizo uso de las fórmulas polinomiales[34] para la suma de las potencias enteras de los primeros n enteros. Cuando $k = 2$, Wallis hace el cálculo para distintos valores de n y concluye que

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \cdots + n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

Cuando n tiende a infinito la razón anterior se aproxima a $\frac{1}{3}$ y, este valor límite, es definido como la razón característica de índice $k = 2$. Al continuar con este proceso, Wallis encuentra para $k = 3$ la razón característica es $\frac{1}{4}$ y para $k = 4$ es $\frac{1}{5}$. A partir de esto infiere el resultado general, es decir que la razón característica de índice k es $\frac{1}{k+1}$ siendo k un entero positivo. Aunque Wallis no tiene el concepto de límite, entre los precursores del cálculo, es quien está más cerca de tal concepto y en sus trabajos lo utiliza al menos de forma intuitiva.

---

[34] Estas fórmulas aparecen en la Aritmética de Wallis, pero él no dice de donde las obtuvo o como las dedujo.

Para mostrar la consistencia de su aritmética, Wallis asegura que la mayoría de las razones sobre cuadraturas y volúmenes pueden derivarse a partir de las razones características. Observa, por ejemplo, que el problema de hallar el área bajo la curva $y = x^k$ es un caso particular de la razón característica de la sucesión con índice k. Pues, siguiendo las ideas de Cavalierí, asegura que una cuadratura puede obtenerse al sumar un número infinito de líneas paralelas. Se debe recordar que para entonces las magnitudes de velocidad respecto al tiempo eran representadas mediante curvas y, en este contexto, era muy importante poder hallar el área bajo la curva ya que ésta daba cuenta del cambio en la posición.

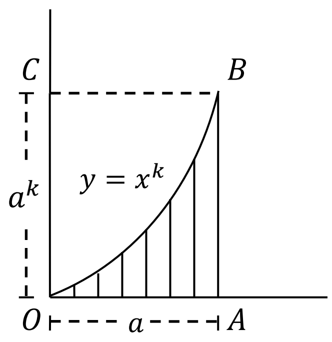


Figura 3.3

Consideremos la figura 3.3 y veamos cómo procede para determinar la cuadratura limitada por la curva $y = x^k$, la recta $x = a$ y el eje x. En general, lo que hace es establecer la razón entre la serie correspondiente a las líneas de la figura OAB y la serie correspondiente a las líneas del paralelogramo circunscrito $OABC$.

Wallis utiliza el símbolo ∞ para denotar el infinito y “con gran osadía representa lo infinitamente pequeño por $\frac{1}{\infty}$, manifestando que cada subdivisión con tal anchura indistintamente se puede interpretar como una línea o como un paralelogramo infinitesimal” (González, pág. 109). Luego, si se divide el segmento $OA = a$ en n partes de longitud $h = \frac{a}{n}$, siendo n infinito, entonces la región OAB se puede ver como formada por infinitas líneas paralelas al eje y de altura x^k. Además, el paralelogramo $OABC$ estaría formado por infinitas líneas constantes de longitud a^k. Al establecer la razón entre estas cuadraturas se obtiene

$$\frac{Cuad. OAB}{Cuad. OABC} = \frac{\left(\frac{0a}{n}\right)^k + \left(\frac{1a}{n}\right)^k + \cdots + \left(\frac{na}{n}\right)^k}{a^k + a^k + \cdots + a^k} = \frac{\sum_{i=0}^{n} i^k}{\sum_{i=0}^{n} n^k}$$

Como n tiende a infinito, entonces la anterior es una razón de índice k y por lo tanto

$$\frac{Cuad. OAB}{Cuad. OABC} = \frac{\sum_{i=0}^{n} i^k}{\sum_{i=0}^{n} n^k} = \frac{1}{k+1}$$

Ahora, como el paralelogramo $OABC$ es de base a y altura a^k, entonces su cuadratura es a^{k+1}. Luego, se concluye que

$$\frac{Cuad. OAB}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

Es decir

$$Cuad. OAB = Cuad. [x^k]_0^a = \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Lo que desde nuestro punto de vista corresponde a la integral definida

$$\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

Este resultado no era nuevo, pues ya se sabía que para un entero positivo k la cuadratura limitada por la curva $y = x^k$ guardaba una proporción de 1 a $k+1$, respecto al paralelogramo circunscrito. Sin embargo, el mérito de Wallis estaría en extender la validez del resultado para exponentes racionales. Asegura, por ejemplo, que si el índice de la curva $y = \sqrt{x}$ se define como $\frac{1}{2}$, la razón característica que debe obtenerse es $\frac{1}{\frac{1}{2}+1}$, ya que la cuadratura limitada por esta curva corresponde al complemento de la cuadratura limitada por la curva $y = x^2$.

De manera similar, concluye que la razón característica para $y = \sqrt[3]{x}$ debe ser $\frac{1}{\frac{1}{3}+1}$. A partir de estas representaciones y usando el método de interpolaciones, Wallis observa que el índice apropiado para las curvas del tipo $y = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = x^{\frac{p}{q}}$ debe quedar definido como $\frac{p}{q}$. Y siguiendo un proceso análogo al usado para determinar la cuadratura bajo la curva $y = x^k$, se obtiene que la cuadratura de la región acotada por la curva $y = x^{\frac{p}{q}}$, el eje x y la recta $x = 1$ está dada por

$$Cuad. \left[x^{\frac{p}{q}}\right]_0^1 = \frac{q}{p+q}$$

Wallis también afirmó, pero sin dar una argumentación sólida, que la igualdad en cuestión era válida para exponentes no racionales tales como $\sqrt{3}$. Es con estos avances que el problema de las cuadraturas empieza a perfilarse como el problema de hallar el área bajo la curva.

De otra parte, Wallis también se pregunta por la razón característica del círculo y fue al intentar resolver este problema que llegó a la siguiente igualdad

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \ldots}$$

Con este resultado, antes que una nueva forma de calcular π, muestra la utilidad de sus métodos en la investigación matemática. Sería la aplicación de estos lo que condujo a Newton al logro de la expansión de funciones en series binomiales.

Los trabajos del matemático inglés constituyeron un paso importante en el estudio de las cuadraturas. Pues ahora una cuadratura podrá medirse en correspondencia con un valor numérico y no necesariamente en comparación con otra, lo que en una época posterior conduciría al desarrollo de la noción de área. El hecho de considerar la cuadratura de un rectángulo como el producto de la base por la altura, llevaría a "interpretar cada sumando de la expresión $\left(\frac{0a}{n}\right)^k + \left(\frac{1a}{n}\right)^k + \cdots + \left(\frac{ia}{n}\right)^k + \cdots + \left(\frac{na}{n}\right)^k$, que corresponde a una línea, como un rectángulo de base $\frac{a}{n}$

y altura i, para $i = 1,2, \dots, n$. Cuando n tiende a infinito, el ancho de cada uno de los rectángulos corresponde a la noción de infinitesimal" (Recalde, 2011).

3.2. El área en el cálculo de Newton y Leibniz

Uno de los aspectos más destacados de Newton y Leibniz es haber demostrado la relación inversa entre el cálculo de áreas y el cálculo de razones de cambio. Hasta entonces los métodos del cálculo infinitesimal para hallar cuadraturas se constituían en una especie de matemática artesanal que solo servían para resolver algunos problemas concretos. Por ello, el gran mérito tanto de Newton como de Leibniz es haber articulado un algoritmo que, en general, es válido para todas las expresiones analíticas.

3.2.1. Teoría de cuadraturas y anti-cuadraturas

Isaac Newton (1642-1727) demuestra que si la ecuación de una curva es de la forma $y = ax^{\frac{m}{n}}$ entonces la expresión $\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ corresponde a su cuadratura. La demostración se constituye en una explicación de la relación inversa entre los problemas de cuadraturas y de tangentes. Para ello, considera una curva $y = y(x)$ y supone que

$$z(x) = \frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} \tag{1}$$

Corresponde al área ABP, como se ilustra en la figura siguiente, en donde también se observa que $AB = x, BM = o$ y $BP = y$.

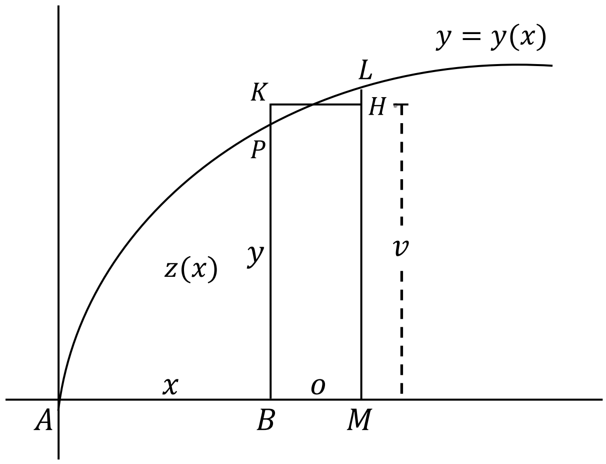


Figura 3.4

Para su argumentación, Newton incorpora una cantidad infinitesimal, que simboliza con la letra "o", e incrementa la abscisa x hasta $x + o$. Además, elige $v = BK$ de modo que el área $BPLM$ y el área $BKHM$ sean iguales. Luego, si se asume la igualdad $b = \frac{na}{m+n}$ y $t = m + n$, entonces de (1) se obtiene que $z^n = b^n x^t$. Ahora, si en esta expresión se sustituye z por $z + ov$ y x por $x + o$, se tendrá

$$(z + ov)^n = b^n (x + o)^t,$$

de donde se obtiene que

$$z^n + novz^{n-1} + \tfrac{n(n-1)}{2} o^2 v^2 z^{n-2} + \cdots = b^n (x^t + tox^{t-1} + \tfrac{t(t-1)}{2} o^2 x^{t-2} + \cdots).$$

Considerando que $z^n = b^n x^t$ y dividiendo ambos miembros de la ecuación anterior por "o", se infiere que

$$nvz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} ov^2 z^{n-2} + \cdots = b^n \left(tx^{t-1} + \frac{t(t-1)}{2} ox^{t-2} + \cdots\right)$$

Ahora, si en esta igualdad $o = BM$ se hace infinitamente pequeño, entonces los términos que le contienen se desvanecerán, por lo que pueden despreciarse. En tal caso v coincide con y, de esta marera resulta que

$$nyz^{n-1} = b^n t x^{t-1}$$

Finalmente, reemplazando z, b y t por sus respectivos valores se llega a la igualdad $y = ax^{\frac{m}{n}}$. Al invertir el proceso anterior, puede probarse que la cuadratura limitada por la curva $y = ax^{\frac{m}{n}}$ viene dada por $z(x) = \frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$, resultado que para la época ya era conocido.

La expresión a la que ha llegado Newton para la cuadratura en cuestión, ha sido obtenida no a partir de la suma de cantidades infinitesimales, sino al estudiar la variación momentánea del área en un punto. En este sentido, ha demostrado que la razón de cambio del área bajo la curva llega a ser igual a la ordenada de la curva cuando el incremento infinitesimal se hace tan pequeño como se quiera. En el lenguaje actual del cálculo diríamos que la derivada de $z(x)$ corresponde a la función $y = y(x)$. [35]

Es importante resaltar que al considerar el incremento de área, Newton utiliza el hecho de que una región limitada por un rectángulo se puede medir asignándole una medida equivalente al producto de su base por su altura. Esto es claro cuando asigna al incremento de área la medida de un rectángulo equivalente, cuya área es ov.

Siguiendo las ideas expuestas en el método de interpolación de Wallis, Newton descubrió la serie del binomio que lleva su nombre. Este resultado es una generalización del binomio cuyas potencias son números naturales. Al intentar hallar la cuadratura del círculo $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, la relacionó con las cuadraturas de curvas análogas que ya eran conocidas, tales como

$$(1 - x^2)^0, (1 - x^2)^{\frac{2}{2}}, (1 - x^2)^{\frac{4}{2}}, (1 - x^2)^{\frac{6}{2}}, \dots$$

---

[35] Esta razón de cambio corresponde al cociente $\frac{z(x+0)-z(x)}{o}$

La idea de Newton consistió en sustituir lo que nosotros conocemos como límite superior de integración por un valor genérico x, así obtuvo las siguientes cuadraturas

$$Cuad.\left[(1-t^2)^0\right]_0^x = x$$

$$Cuad.\left[(1-t^2)^{\frac{2}{2}}\right]_0^x = x - \frac{1}{3}x^3$$

$$Cuad.\left[(1-t^2)^{\frac{4}{2}}\right]_0^x = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

$$Cuad.\left[(1-t^2)^{\frac{6}{2}}\right]_0^x = x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$$

$$Cuad.\left[(1-t^2)^{\frac{8}{2}}\right]_0^x = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

Observando estas expresiones, Newton fue capaz de identificar las reglas de formación para los coeficientes y los exponentes de la variable. Por ejemplo, la variable x es el primer término de cada expresión, los denominadores de los coeficientes y las potencias de la variable aumentan siguiendo la secuencia de los números impares, mientras que los numeradores coinciden con las secuencias del triángulo de Pascal. Razonando por analogía para el caso de los exponentes racionales, dedujo que la cuadratura del círculo en cuestión es

$$Cuad.\left[(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^x = x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3 - \frac{\frac{1}{8}}{5}x^5 - \frac{\frac{1}{16}}{7}x^7 - \frac{\frac{5}{128}}{9}x^9 - \cdots$$

Invirtiendo el proceso, concluyó que para $n = \frac{1}{2}$ la expansión binomial es la siguiente

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \cdots$$

Para calcular el valor de π, Newton considera la ecuación $y = (x - x^2)^{\frac{1}{2}}$ cuya gráfica es la semicircunferencia de la figura 3.5, en donde las coordenadas de los puntos B, C y D son $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $(1{,}0)$ respectivamente.

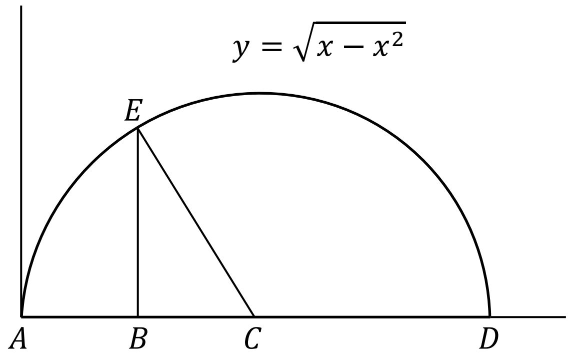


Figura 3.5

Lo primero que hace es determinar la cuadratura de la región ABE, usando el teorema del binomio.

$$y = (x - x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \cdots\right]$$

De esta igualdad se deriva, integrando término a término como diríamos modernamente, que

$$Cuad.\left[(x - x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}} - \cdots\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

En consecuencia,

$$Cuad.\left[(x - x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}} = Cuad.(ABE) = \frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \frac{5}{704 \cdot 2^{11}} - \cdots$$

De la construcción se observa que el ángulo BCE mide 60°, lo que implica que la cuadratura del área del sector circular ACE equivale a la tercera parte de la del semicírculo AED, esto es $\frac{\pi}{24}$. Como además la cuadratura del triángulo rectángulo BEC es $\frac{\sqrt{3}}{32}$, se llega a que

$$cuad.(sectorACE) = Cuad.(BEC) + Cuad.(ABE)$$

Y, por lo tanto, se obtiene el siguiente valor para π

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{2}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \frac{5}{704\cdot 2^{11}} - \cdots\right)$$

Según la percepción newtoniana las cantidades son descritas por un movimiento continuo. De esta forma, las líneas son descritas por el movimiento continuo de puntos, las superficies son generadas por el movimiento de líneas y los ángulos por la rotación de sus lados. En este sentido, el espacio recorrido por un móvil será interpretado como la superficie bajo la curva que describe su movimiento.[36] Por ejemplo, si un móvil se desplaza con una velocidad constante k en un tiempo t, entonces la cantidad variable a considerar es el espacio recorrido, $E = kt$, el cual sería generado por el movimiento de la recta de longitud k, como se ilustra en la siguiente figura.

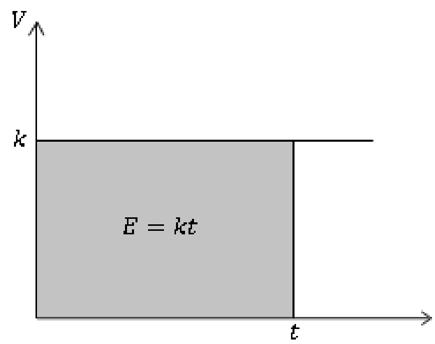


Figura 3.6

[36] Ver (Turégano, 1993, págs. 49-57).

Cuando transcurre un tiempo infinitesimal, se genera un desplazamiento infinitesimal en la ordenada de longitud k, lo que a su vez, provocará un incremento infinitesimal en el espacio recorrido. Lo que implica que la variación de esta cantidad es directamente proporcional a la variación del tiempo. Usando notación que nos es familiar, se obtiene que $dE = kdt$. Luego, la velocidad con la que se incrementa la superficie es proporcionada por la razón de cambio $\frac{dE}{dt}$ que, en este caso, es igual a la constante k.

Cuando el movimiento es variado, el espacio recorrido por un móvil que se mueve a una velocidad $v = at$ es $E = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}vt$. Si en la figura 3.7 la recta $AB = t$ adquiere un incremento infinitesimal $BD = dt$, entonces el incremento dE del triángulo ABC corresponde a la región $BDFC$. Es decir $dE = atdt + \frac{1}{2}adtdt$. Ahora, como BD es infinitamente pequeño, el incremento de la velocidad del móvil $EF = adt$ también es muy pequeño y, por consiguiente, la cantidad $\frac{1}{2}adtdt$ se puede despreciar. De este modo, la variación instantánea de la superficie ABC es $dE = atdt$ y está representada por el rectángulo $BDEC$.

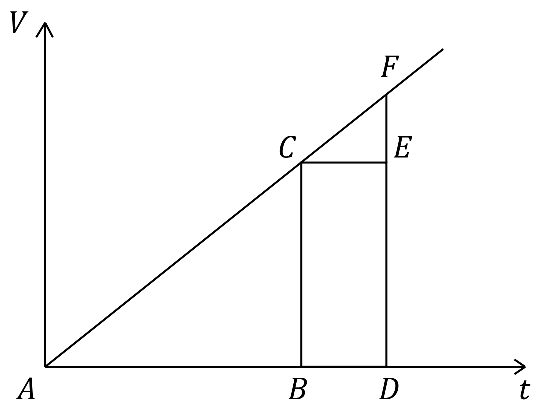


Figura 3.7

A las cantidades que varían o fluyen continuamente en el tiempo, tales como el espacio recorrido E en los ejemplos anteriores, Newton las llamó fluentes y a las razones de cambio instantáneas de estas les dio el nombre de fluxiones. Es a partir del tratamiento geométrico de estas cantidades que Newton se da cuenta de la relación inversa entre cuadraturas y tangentes.

De otra parte, los desarrollos de Gottfried Von Leibniz (1646-1716) se caracterizan por "la libre aceptación del infinitamente pequeño y su concepción del área como suma infinita de magnitudes infinitamente pequeñas" (Turégano, 1993). Consideraba una curva como formada por segmentos de longitud infinitesimal cuya prolongación generaba la tangente en cada punto y de cuya geometría se obtiene la correspondiente relación entre las diferenciales.

El estudio de las sucesiones numérica y de las sucesiones de sus diferencias consecutivas asociadas marcaría un hito importante en los trabajos de Leibniz. Él se dio cuenta que dada una sucesión $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$; la sucesión de las diferencias primeras $d_1 = a_1 - a_0, d_2 = a_2 - a_1, \dots, d_n = a_n - a_{n-1,\dots}$ se podía sumar fácilmente, ya que $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = a_n - a_0$. De esta forma de pensar emerge la idea de una relación inversa entre la operación de tomar diferencias y la de formar sumas de los elementos de una sucesión. Esta idea adquirió todo su significado cuando la utilizó para abordar el problema de las cuadraturas. Como se ilustra en la figura 3.8, Leibniz considera una sucesión de ordenadas equidistantes definidas por una curva plana. Si la distancia entre tales ordenadas fuera la unidad, entonces al sumarlas se obtendría una aproximación de la cuadratura de la región acotada por la curva, mientras que la diferencia entre dos ordenadas consecutivas aproximaría la pendiente de la recta tangente en un punto de la curva. Más aún, infiere que esta aproximación es exacta cuando la distancia entre las ordenadas se hace infinitamente pequeña. De esta analogía con las sucesiones numéricas, Leibniz concluye que el cálculo de cuadraturas y de tangentes son operaciones inversas.[37]

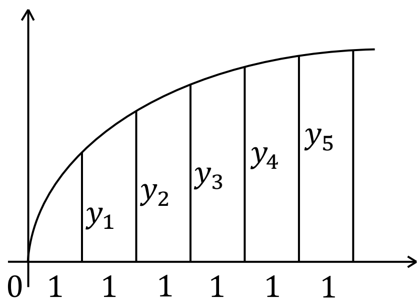


Figura 3.8

[37] (Grattan-Guinness, 1980, pág. 85)

Leibniz también es conocido por incorporar a sus investigaciones el método del "triángulo característico". Estudiando los trabajos de Pascal, quién ya había utilizado este método en el estudio de la cuadratura del círculo, es como percibe que puede utilizar el triángulo característico para determinar cuadraturas de curvas más generales. En la figura siguiente el triángulo característico está constituido por los catetos AC, BC y el arco de curva AB, el cual se identifica con la recta AB cuando el diferencial AC es una cantidad muy pequeña. Como este es semejante a los triángulos OEA y EGA[38], entonces $y \cdot AB = n \cdot AC$ y, por lo tanto, se infiere que $\sum y \cdot AB = \sum n \cdot AC$. Esto último indica que el momento total de la curva DAB, con respecto al eje x, es igual a la cuadratura determinada por una segunda curva cuya ordenada coincida con la normal a la curva inicial.

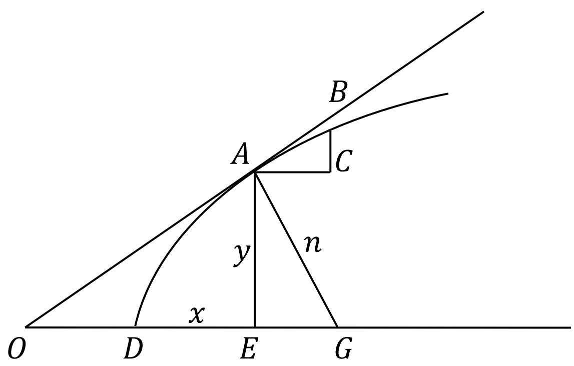


Figura 3.9

Uno de los resultados más importantes en el marco del origen del cálculo fue el método de "transmutación" obtenido por Leibniz, con el cual podían derivarse básicamente todos los resultados de cuadraturas de figuras planas hasta entonces conocidos. El método consiste en lo siguiente: si dadas dos regiones planas A y B, hay una correspondencia uno a uno entre los indivisibles[39] de A y los de B, tal que los indivisibles correspondientes tengan igual área, entonces se dice que B se

[38] El primero de estos triángulos está constituido por la ordenada, la tangente y la subtangente; mientras que el segundo está formado por la ordenada, la normal y la subnormal.

[39] Estos indivisibles generalmente son rectángulos infinitesimales. Ver (Turégano, 1993, pág. 61).

deriva de A por “transmutación” y se concluye que las dos regiones tienen áreas iguales.

> Mediante el uso del triángulo característico, [Leibniz] nos da una transformación de la cuadratura de una curva en la cuadratura de otra curva que está relacionada con la primera por medio de un proceso de trazado de tangentes. Esta transformación puede ser útil en todos aquellos casos en que ya se conoce la cuadratura de la curva nueva, o bien está en una relación conocida con la cuadratura original (Grattan-Guinness, 1980, pág. 88).

Para ver cómo funciona el método,[40] consideremos la curva $y = f(x)$ y el triángulo característico en el punto P de coordenada (x, y). Ver figura 3.10. Al trazar $OL = p$ perpendicular a la recta LK, tangente a la curva en P, y tomando $OM = BF = z$ se llega a que $FP = y - z$. Como los triángulos PKR, MPF y OML son semejantes, entonces se obtiene las siguientes igualdades

$$pds = zdx \tag{1}$$

$$z = y - x\frac{dy}{dx} \tag{2}$$

Donde $dx = BC$, $dy = KR$ y $ds = PK$. De esta manera, para cada punto P de la curva $y = f(x)$ hemos determinado el punto F de coordenadas (x, z) y, por tanto, una nueva curva dada por $z = g(x)$. Esta curva es de gran utilidad cuando se conoce la cuadratura de la región limitada por ella, pues a partir de ésta se puede hallar la cuadratura de la curva dada.

[40] Esta descripción ha sido tomada de (Recalde, 2011).

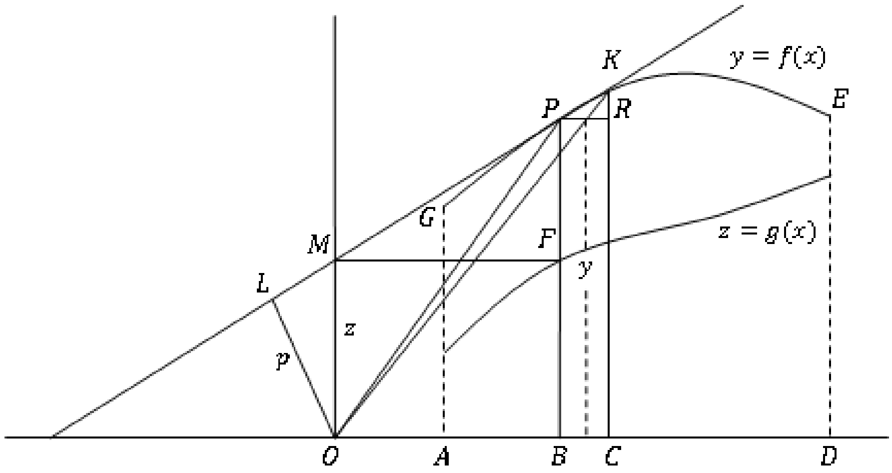


Figura 3.10

De la construcción es fácil ver que la cuadratura, que denotaremos con la letra c, del triángulo infinitesimal OPK es $c(\Delta OPK) = \frac{1}{2}pds$ y, por (1), esto implica que

$$c(\Delta OPK) = \frac{1}{2}zdx$$

Y como la cuadratura de la región $OGPE$ es equivalente a la suma de todos estos rectángulos infinitesimales, entonces

$$c(región\ OGPE) = \frac{1}{2}\int_a^b zdx \tag{3}$$

Donde $a = OA$, $b = OD$ y $z = g(x)$. Nótese que la cuadratura de la región $AGPED$ puede expresarse de la siguiente forma

$$c(región\ AGPED) = c(ODE) + c(región\ OGPE) - c(OAG)$$

Luego, considerando la ecuación (3) y usando la notación que aparecería en un tiempo posterior, se obtiene

$$\int_a^b ydx = \frac{1}{2}\left[bf(b) - af(a) + \int_a^b zdx\right]$$

De donde, finalmente, se obtiene

$$2\int_a^b ydx = [xy]_a^b + \int_a^b zdx \tag{4}$$

Leibniz utiliza este resultado para determinar la cuadratura del círculo unitario con centro (1,0), cuya ecuación en el primer cuadrante es $y = \sqrt{2x - x^2}$.

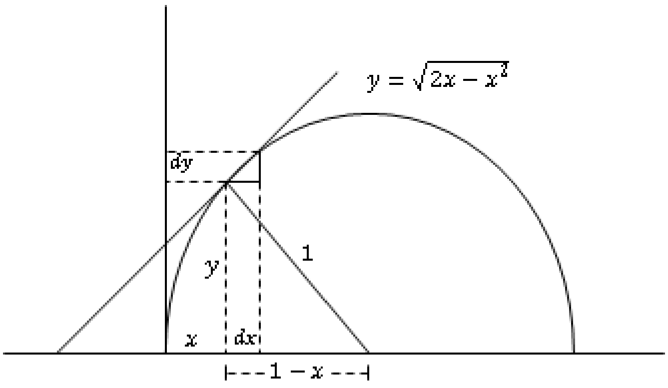


Figura 3.11

Ya sabemos que los dos triángulos de la figura anterior –el característico y el formado por la ordenada, la normal y la subnormal– son semejantes. Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

Utilizando la ecuación (2), se obtiene

$$z = g(x) = \sqrt{\frac{x}{2 - x}}$$

De donde también se infiere que

$$x = h(z) = \frac{2z^2}{1 + z^2}$$

En consecuencia, hemos determinado la curva $z = g(x)$ que facilita el cálculo de la cuadratura de la región limitada por el eje de las abscisas, la recta $x = 1$ y la curva $y = \sqrt{2x - x^2}$; lo que es equivalente a la cuadratura de un cuarto del círculo cuya ecuación es $y^2 = 2x - x^2$. Para ello, utilizando la expresión (4), se procede así

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 y dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{2x - x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 z dx \tag{5}$$

De la figura 3.11 puede verse que

$$\int_0^1 z dx = 1 - \int_0^1 h(z) dz = 1 - \int_0^1 \frac{2z^2}{1 + z^2} dz$$

$$\int_0^1 z dx = 1 - 2\int_0^1 (z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \cdots) dz$$

$$\int_0^1 z dx = 1 - 2\left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} - \frac{z^9}{9} + \cdots\right]_0^1$$

Finalmente, al reemplazar en (5) se llega a que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$

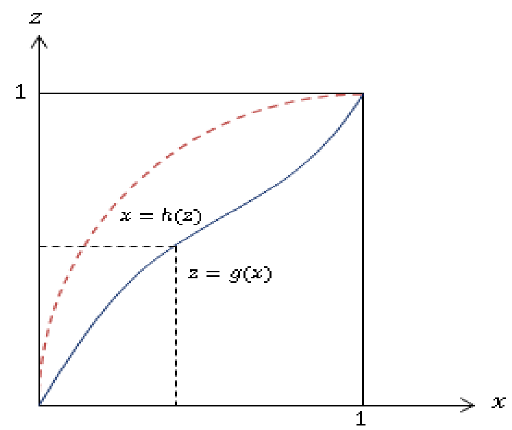


Figura 3.12

4. EL PROBLEMA DEL ÁREA EN EL ANÁLISIS

En la segunda mitad del siglo XVIII, fue considerada la posibilidad de expresar una función arbitraria en términos de una serie de senos, en un intervalo cerrado. Para pensadores de la talla de Euler y Lagrange tal representación les parecía una contradicción, precisamente por la arbitrariedad de las funciones. Sin embargo, Daniel Bernoulli (1700-1782), a partir de consideraciones físicas, argumentaba lo contrario.[41] En sus trabajos sobre la cuerda vibrante afirma que pueden existir muchos modos de oscilación e insiste en que todas las posibles curvas iniciales pueden representarse mediante una serie que tiene la forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen \frac{n\pi x}{l}$$

Ya que existen suficientes constantes a_n como para que las series se ajusten a cualquier curva. Años más tarde esta idea fue retomada por Joseph Fourier (1768-1830), quién en su *Teoría analítica del calor* afirma que cualquier función $f(x)$ acotada en un intervalo $[-l, l]$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos \frac{n\pi x}{l} + b_n sen \frac{n\pi x}{l}\right].$$

Al multiplicar esta igualdad por $cos \frac{n\pi x}{l}$ o por $sen \frac{n\pi x}{l}$ e integrando luego a ambos lados, para lo cual se asume que la integral de la serie es igual a la suma de la serie de las integrales de sus términos, se llega a que los coeficientes a_n y b_n están dados por

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

[41] Para más detalles, el lector interesado puede consultar (Hawkins, 1979, págs. 4,5).

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) sen \frac{n\pi x}{l} dx,$$

Lo que pone en evidencia la existencia de la integral definida de las funciones $f(x)\cos nx$ y $f(x)$ sen nx. Este hecho exigía,

> Reconsiderar el *significado* de esas integrales cuando $f(x)$ es "arbitraria". Obviamente resultaba inadecuado, si no directamente imposible, el hablar de antiderivadas de sistemas de ecuaciones, y en consecuencia Fourier recurrió a una interpretación más geométrica: las integrales deben ser consideradas (de nuevo) como áreas. Como para cada x existe una ordenada $f(x)$, estas ordenadas determinan una región del plano, y Fourier nunca dudó de que esta región tuviera un área definida.[42] Y así dejó planteado sin proponérselo un problema matemático de gran importancia: exactamente ¿cómo se puede definir $\int_{-l}^{l} f(x)dx$ como un área cuando f es una función arbitraria? (Hawkins, 1984, pág. 199).

Pese a estas consideraciones y a los resultados que obtuvo, Fourier no se ocupó en dar un concepto de integral definida de una función arbitraria. De esta cuestión, como veremos en las páginas siguientes, se ocuparían matemáticos tales como Cauchy, Dirichlet y Riemann.

El problema antiguo de encontrar el cuadrado equivalente a una figura plana y acotada se transformó, ya en el siglo XIX, en el problema de calcular el área limitada por una curva. En otras palabras, el problema de cuadrar una figura plana, correspondiente a una medida relativa, se convertiría en el problema del área que consiste en asignarle un valor determinado a una región acotada del plano. La transición de este problema supone, implícitamente, la generalización del cálculo del área de un rectángulo como el producto de su base por su altura. Lo que implica que si tenemos el área de una región determinada, de manera inmediata podríamos obtener el lado de su cuadrado equivalente, pues la raíz cuadrada de un número es una operación que ya está definida.

Precisamente, por ser un problema de antaño, para la época se admitía como evidente que todo conjunto acotado del plano tenía un "área". De esta manera,

[42] Para Fourier, el conjunto de ordenadas determinado por la gráfica de una curva tiene en todos los casos posible un valor definido, ya sea que se le pueda asignar una ecuación analítica o que no dependa de una ley regular (Hawkins, 1979, pág. 8).

dada una función[43] f no negativa y acotada en un intervalo $I = [a, b]$, el conjunto $\{(x, y): x \in I, 0 \leq y \leq f(x)\}$ determinaba un área que, para Fourier, era precisamente la integral de la función f en el intervalo I. Lo que sucedería, a partir de aquí, es que la existencia de la integral de una función arbitraria se fundamentaría en la existencia "indiscutible" del área del conjunto de ordenadas de la función en cuestión.[44] Sin embargo, la clarificación y generalización de la noción de área, que sería de fundamental importancia en el desarrollo histórico de la integral, no se había establecido de manera formal. Este sería un hecho criticado, posteriormente, por Peano quien, al parecer, es el primero en ver la necesidad de una definición precisa de la noción de área.[45]

Es así como la noción de integral, antes considerada simplemente como la operación inversa de la derivada, ahora es puesta en conexión directa con el problema de calcular el área bajo una curva.

4.1. El concepto de área en el análisis de Cauchy

Le correspondería al matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857) establecer el formalismo de estas ideas ya que, hasta ese momento, los métodos usados en la argumentación presentaban problemas de rigor. Antes de Cauchy las cantidades infinitesimales habían sido fuente de confusión y controversia. Por tal razón los matemáticos del siglo XVIII "no sabían cómo incorporarlas al cuerpo teórico de las matemáticas sin caer en oscuridades conceptuales ni en consideraciones metafísicas" (Recalde, 2011). Será Cauchy quien empieza a darle

---

[43] En los inicios del siglo XVIII, se le llama función a aquellos objetos determinados por una expresión analítica o un número finito de éstas en diferentes subintervalos de su dominio y, aquellos determinados por una representación en series de potencias.

[44] (Hawkins, 1979, pág. 8).

[45] Para dar su aporte en esta dirección, lo que hará Peano es considerar, para una región del plano, dos clases de polígonos: los que están contenidos en la región dada y aquellos que la contienen. Luego, observa que las áreas de estas clases de polígonos tienen un límite superior y un límite inferior, respectivamente. Peano explica que cuando estos límites coinciden, ese valor común será por definición el área de la región considerada y que, en caso contrario, el concepto de área no será aplicable.

salida a estas dificultades al emprender el camino que dotaría de rigor al análisis matemático; en este proceso, el matemático francés hace uso de la noción de función, que para entonces ya era reconocida como un objeto del análisis, e incorpora el concepto de límite como herramienta fundamental de su trabajo. Para ello inicia explicando, en las primeras páginas de su *Curso de Análisis*, lo que entiende por *número*, *cantidad* y *cantidad variable*. Emplea los números, en el sentido aritmético, para referirse a la medida absoluta de las magnitudes; el termino *cantidad* lo usará para referirse a los números precedidos con signo, positivos o negativos; y define *cantidad variable* como aquella que recibe sucesivamente varios valores unos de otros. Dicho esto, la definición de límite dada por Cauchy es la siguiente:

> Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acabará por diferir de éste tan poco como se quiera, este último se llamará el límite de todos los demás. Así por ejemplo un número irracional es el límite de diversas fracciones que dan valores cada vez más próximos de él. En geometría, la superficie del círculo es el límite hacia el cual convergen las superficies de los polígonos inscritos, mientras que el número de sus lados crece cada vez más (Cauchy, 1994, pág. 76).

Y, a partir de este concepto, define las cantidades infinitamente pequeñas como variables cuyo límite tiende a cero. Nuestro autor, también establece que una función $f(x)$ es continua en la variable x entre dos límites asignados si, para cada valor de x entre esos límites, “un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función” (Cauchy, 1994, pág. 90). Este marco conceptual le permite dar, a su vez, una definición analítica de la integral definida. Para ello considera una función continua $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ y toma una partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de dicho intervalo, para luego definir la suma

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

y argumenta que cuando la mayor de las diferencias $x_i - x_{i-1}$ –para i variando entre 1 y n– tiende a cero, el valor de S_n alcanza un único valor límite S que depende únicamente de la función f y de los extremos a y b. Este límite, según

Cauchy, corresponde a la integral definida de la función en el intervalo dado. Es decir,

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

De esta manera, para cualquier función continua existe la integral definida y le corresponde un valor determinado.

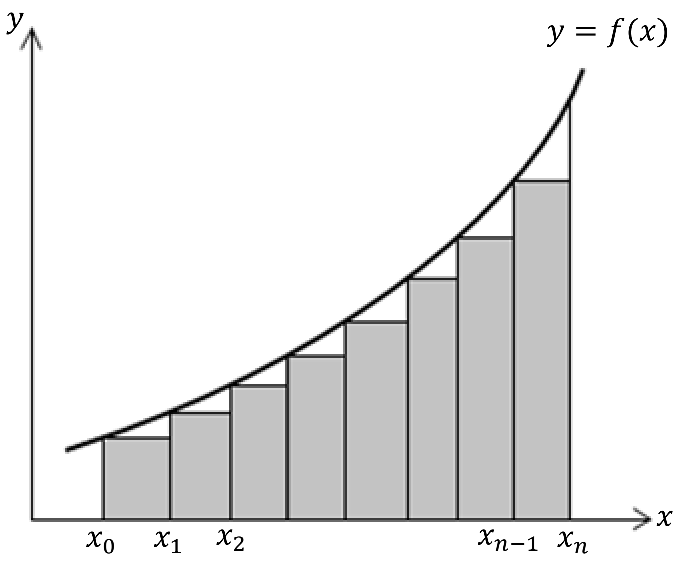


Figura 4.1

Regresando al tema que nos interesa es claro que Cauchy no tiene como propósito dar una definición formal de la noción de área; no obstante, desde la óptica moderna, es evidente que con la emergencia del nuevo formalismo hay un avance significativo en el problema de las cuadraturas. A continuación veremos el método que se nos proporciona, en este nuevo contexto, para encontrar el área limitada por la gráfica de una función continua $y = f(x)$, con valores positivos, en un intervalo $[a, b]$. Lo primero que se hace es tomar una subdivisión $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ del intervalo en cuestión y, de esta manera, se pueden considerar los rectángulos inscritos levantados sobre los subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, los cuales forman un polígono que aproxima el área de la región R limitada por la curva, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$, como se observa en la figura 4.1. Como la base y la altura del rectángulo inscrito levantado sobre el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ son, respectivamente, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $f(x_{i-1})$, entonces se define la suma

$$S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(x_{i-1}).$$

Luego, usando el hecho de que el área de un rectángulo es el producto de su base por su altura, lo que se ha hecho es aproximar el área de la región R a través de la suma de una cantidad finita de áreas rectangulares $\Delta x_i f(x_{i-1})$ inscritas en dicha región. Entre más fina sea la subdivisión que se hace del intervalo, el polígono resultante determinado por los rectángulos inscritos constituye una mejor aproximación del área que se quiere calcular. Pero este razonamiento no es otra cosa que una aplicación del método exhaustivo usado por los antiguos, quienes tenían la limitante de no saber cómo terminar el proceso. Precisamente, es Cauchy quien le da una salida a este problema al haber formalizado, de una parte, la noción de infinitesimal y, de otra, el concepto de límite. Pues es incorporando la operación de paso al límite, cuando la mayor de las diferencias $x_i - x_{i-1}$ tiende a cero, que el valor de S_n alcanza un único valor límite A, según lo demuestra Cauchy, que depende únicamente de la función f y de los extremos a y b. Ese valor límite es exactamente el área de la región R y se denota como: $A = \lim_{\|P\| \to 0} S_n$. Este límite, en términos del análisis de Cauchy, corresponde a la integral definida de la función en el intervalo dado. Es decir,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} S_n$$

Luego, la existencia del límite de las S_n garantiza la existencia de la integral definida de una función continua y positiva en un intervalo cerrado y acotado y, por lo tanto, la existencia del área de la región R. Pero la existencia no trae consigo el método para calcular la integral de cualquier función arbitraria. Incluso el mismo Cauchy no pudo evaluar la integral de algunas funciones específicas.

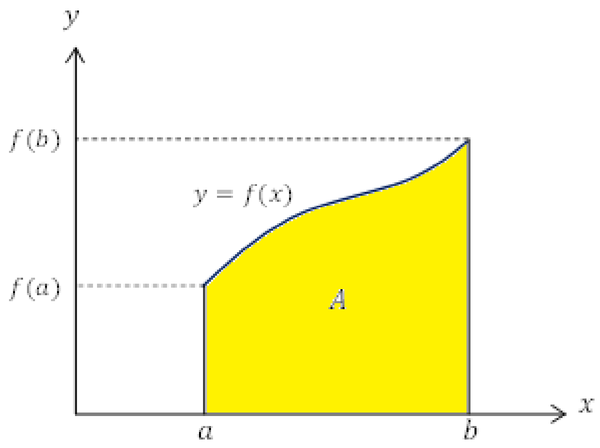


Figura 4.2

Aunque se ha desprendido del referente geométrico para definir la integral, para él es plausible la interpretación geométrica de esta como la superficie bajo la curva.[46] Para ello, designa por A a la superficie limitada por la curva $y = f(x)$, positiva entre dos límites a y b, el eje x y las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$ como se aprecia en la figura 4.2. Cauchy observa que la superficie A deberá ser una media entre los rectángulos de base $b - a$ y cuyas alturas respectivas correspondan a la menor y a la mayor de las ordenadas levantadas sobre dicha base; por ello, será equivalente a un rectángulo con la misma base y cuya altura esté dada por una ordenada media de la forma $f[a + \theta(b - a)]$, donde θ es un número menor que la unidad. Por lo tanto,

$$A = (b - a)f[a + \theta(b - a)]$$

Luego explica que al tomar las subdivisiones $x_1 - a, x_2 - x_1, \dots, b - x_{n-1}$ de la base $b - a$, quedaría dividida en elementos correspondientes cuyos valores estarán dados por ecuaciones semejantes a la anterior; así que,

---

[46] (Cauchy, 1994, pág. 307).

$$A = \Delta x_1 \cdot f[x_0 + \theta_0 \Delta x_1] + \Delta x_2 \cdot f[x_1 + \theta_1 \Delta x_2] + \cdots + \Delta x_n \cdot f[x_{n-1} + \theta_{n-1} \Delta x_n]$$

Donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $i = 1,2, \ldots, n$. Ahora, si en esta última ecuación los Δx_i se hace decrecer indefinidamente, al pasar al límite se obtendrá que

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Como ya se ha dicho, seguramente Cauchy no pretendía obtener una definición de área; no obstante, al asignarle un número a la superficie bajo la curva daría un paso muy importante hacia la definición de área. Pues más adelante Lebesgue afirmaría que la noción de área debe tratarse como número para poder darle una definición lógica.[47] De esta manera, la integral de Cauchy se constituyó en una herramienta que permitiría resolver el problema general del cálculo de cuadraturas. Esto sólo fue posible a partir del reconocimiento de la noción de función como un objeto del análisis matemático y de la demostración de la existencia de la integral para funciones continuas.

Por lo tanto, históricamente, desde el análisis, se demuestra que el problema planteado por los antiguos tiene solución. Pero también es cierto que la definición de integral puso en evidencia otros problemas que surgieron a partir de la incorporación de las funciones y de una nueva operación, el paso al límite. Concretamente si tenemos una función acotada y discontinua f definida en un intervalo finito $[a, b]$ nos preguntamos si tiene sentido el concepto de área en "regiones" más generales de la forma:

$$G = \{(x, y): y = f(x), x \in [a, b]\}.$$

Ahora, si consideramos que la integral de Cauchy resuelve el problema del cálculo del área de la región G, en el caso de las funciones continuas positivas; entonces, el planteamiento de la extensión de la definición de integral a las

[47] Ver (Lebesgue H. , 1936).

funciones discontinuas, sugiere también la posibilidad de extender la noción misma de área. Consideremos, por ejemplo, la función f definida en el intervalo [0,1] tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}, & \text{si } x \in (0,1] \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Sea $P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$ una partición del intervalo [0,1]. Obsérvese que si f fuera continua en todo su dominio el área bajo su gráfica sería

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} S_n = \frac{3}{2}$$

Pero siendo la función discontinua en el punto $x = 0$, estamos interesados en determinar que sucede con la suma de Cauchy. Cuando este es el caso se tendrá que

$$S_n = f(0)(x_1 - x_0) + \sum_{i=2}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i$$

Como la diferencia $x_1 - x_0$ tiende a cero cuando la norma de la partición tiende a ese mismo valor, entonces

$$\lim_{\|P\| \to 0} S_n = \lim_{\|P\| \to 0} \frac{3}{2}(x_n - x_0) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i,$$

Lo que implica que el valor límite de la suma de Cauchy no se afecta cuando la función f es discontinua en el extremo izquierdo de su dominio. Siguiendo un procedimiento análogo, puede verificarse que esto también es cierto cuando f es discontinua en el extremo derecho o en cualquier punto del intervalo (0,1). Lo mismo sucede cuando la función es discontinua en un número finito de puntos de su dominio. Esto sugiere que el valor del área bajo la gráfica de una función f acotada no se afecta, aunque se prescinda de un número finito de ordenadas correspondientes a un conjunto finito de puntos de su dominio, en los que la función sea discontinua.

Por lo anterior, la integral de Cauchy puede generalizarse para un número finito de discontinuidades en un intervalo de la forma $[a,b]$. Para el caso en que una función acotada f sea discontinua en un punto $c \in (a,b)$, los límites $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f$ y $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{c+\epsilon}^{b} f$ existen y, en consecuencia, la integral de la función f en $[a,b]$ puede ser definida en términos de la suma de estos límites; es decir,

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f + \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{c+\epsilon}^{b} f\,.$$ [48]

De manera análoga puede definirse la integral para funciones acotadas con un número finito de discontinuidades en un intervalo $[a,b]$. Pero ¿ocurre lo mismo con las funciones acotadas que son discontinuas en un conjunto infinito de su dominio? Para tratar de responder a esta pregunta consideremos una función escalonada definida en $[0,1]$ así: $g(x) = \frac{1}{n+1}$ cuando $x \in \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right)$, para $n \in \{0,1,2,3,\dots\}$, y $g(0) = 0$. Esta función tiene infinitas discontinuidades en los puntos de la forma $x = \frac{1}{n+1}$, pero es continua en cada uno de los subintervalos $\left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right)$.

En consecuencia, desde la óptica moderna, asumiendo el presupuesto de la sigma aditividad de la integral para funciones discontinuas en un conjunto infinito de puntos, podemos expresar la integral de la función g en el intervalo $[0,1]$ en términos de la suma de integrales según Cauchy, es decir:

$$\int_0^1 g = \int_{\frac{1}{2}}^{1} g + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} g + \cdots + \int_{a_n}^{b_n} g + \cdots + \int_0^0 g,$$

Siendo $a_n = \frac{1}{n+2}$, $b_n = \frac{1}{n+1}$ y $\int_0^0 g = 0$. Luego, se obtiene

[48] (Hawkins, 1979, pág. 12).

$$\int_0^1 g = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

De donde, finalmente, al expandir esta suma y asociar sus términos de manera conveniente, se llega a que

$$\int_0^1 g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

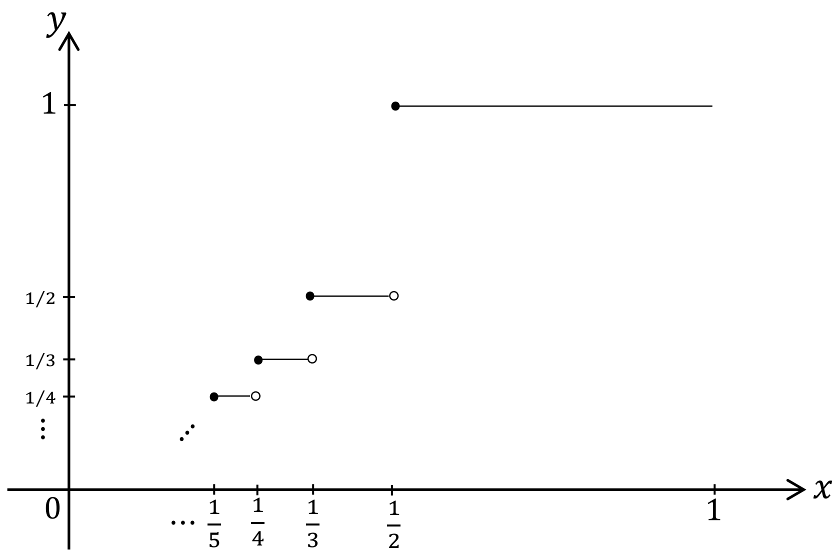


Figura 4.3

Como se ha podido calcular la integral definida de la función g, ya que las sumas anteriores convergen, entonces tiene sentido hablar del área bajo la gráfica de g, ver figura 4.3. Pues en este caso, el valor de la integral corresponde a la suma de las áreas de todos los rectángulos de base $\beta_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ y altura $h_n = g\left(\frac{1}{n+2}\right)$, puesto que

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n h_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

A partir de casos como este, de funciones con infinitas discontinuidades, en los que es posible extender la noción de integral bajo el supuesto de la sigma aditividad, se plantea la posibilidad de extender la noción de área a regiones mucho más complejas que aquella determinada por la función del ejemplo anterior.

De hecho, puede inferirse, que el método de Cauchy puede extenderse para calcular áreas de regiones determinadas por algunas funciones con infinitas discontinuidades. Sin embargo, con la integral definida no se resuelve este problema para cualquier función arbitraria; específicamente, para aquellas funciones que tienen un conjunto denso de discontinuidades. Es así, como surge la necesidad de estudiar las condiciones que debería cumplir una función para la existencia de su integral. En consecuencia, se investigan las condiciones que deberá cumplir el conjunto de discontinuidades para que la función sea integrable. Un estudio más riguroso en esta dirección fue planteado por Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático alemán, quién acoge el enfoque propuesto por Cauchy en sus textos de análisis.

Es Dirichlet quien pone en evidencia, de una parte, la existencia de funciones que son discontinuas en un conjunto infinito de puntos en un intervalo finito y, de otra, el problema de extender el concepto de integral a las funciones de esta naturaleza.[49] En este contexto asegura que la integral definida de una función f no siempre tiene sentido y, menos aún, se le puede asignar un valor determinado, según la definición establecida por Cauchy. Para ello, presenta como contraejemplo su célebre función $f(x) = c$ si x es un racional y $f(x) = d$ si x es un número irracional, con d distinto de c, y asegura que la integral definida $\int_a^b f(x)$ carece de todo significado.[50] En efecto, al considerar el caso particular en que $c = 1$ y $d = 0$, podrá verificarse fácilmente que las sumas de Cauchy S y S', la primera correspondiente a una partición P de números racionales y la segunda a una partición P' de números irracionales, ambas, en el intervalo $[0,1]$, no se aproximan a un valor límite único. Lo que implica que la integral definida $\int_0^1 f(x)$, en el sentido de Cauchy, no existe. Pareciera, entonces, que la extensión de la noción de

[49] (Hawkins, 1979, pág. 13).

[50] Véase (Grattan-Guinness, 1980, pág. 165).

área para el tipo de regiones en $\mathbb{R}^2$ limitadas por esta clase de funciones no tiene sentido.

Al igual que Fourier, Dirichlet dio a la integral un tratamiento geométrico pero en el marco del análisis de Cauchy; además, pensaba que una función no necesariamente tenía que ser continua o tener, a lo más, un número finito de discontinuidades para ser integrable.[51] Por lo tanto, es posible que Dirichlet haya concebido la idea de que algo cercano a la noción de área era plausible para este tipo de regiones. De esta manera, ya que él mismo no logró resolver el asunto, dejó planteada la discusión acerca de las condiciones que debería cumplir una función arbitraria para que exista su integral definida en un intervalo de su dominio.

Según este matemático, la integral de Cauchy podría extenderse a funciones acotadas más generales, siempre que el conjunto de puntos de discontinuidad tuviera unas connotaciones especiales. En este sentido, una función acotada f definida en un intervalo $[a, b]$ sería integrable si para todo par de puntos α y β en $[a, b]$, tales que $\alpha < \beta$, existe un intervalo $[r, s]$ con $r < s$, contenido en (α, β), en el que f sea continua.[52] Asumiendo esto como cierto, el matemático Rudolf Lipschitz (1832-193) concluyó, erróneamente, que el conjunto $D' = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, formado por todos los puntos de acumulación del conjunto de discontinuidades de f, es finito. Luego, en cada intervalo que no tenga ningún elemento x_i de D' puede definirse la integral de Cauchy, ya que en cada uno de estos la función tiene a lo más un número finito de discontinuidades. Por lo tanto, existen las integrales

$$\int_{x_{i-1}+\epsilon_i}^{x_i-\delta_i} f(x)dx$$

Donde $i = 1,2, \dots, n$ y $\epsilon_i + \delta_i < x_i - x_{i-1}$. Como f es acotada, se infiere la existencia de los límites de estas integrales cuando ϵ_i y δ_i tienden a 0^+. En consecuencia, la integral de f en $[a, b]$ quedaría determinada por la suma de dichos límites; es decir,

[51] (Hawkins, 1984, pág. 203).

[52] Ver (Hawkins, 1979, pág. 13).

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lim_{\epsilon_i,\delta_i \to 0^+} \int_{x_{i-1}+\epsilon_i}^{x_i-\delta_i} f(x)dx$$

Por lo anterior, asumiendo como cierta la condición de Dirichlet, la existencia de las integrales $\int_{x_{i-1}+\epsilon_i}^{x_i-\delta_i} f(x)dx$, garantiza la existencia del área bajo la curva en aquellos subintervalos del dominio donde la función es continua. Luego, al sumar todas estas áreas, se obtendría el área total bajo la curva en el intervalo donde la función f está definida.

4.2. La integral de Riemann: los primero pasos del área a la medida

En la idea de poder generalizar la definición de integral de Cauchy, sugerida por Dirichlet, Bernhard Riemann (1826-1866) considera el estudio de funciones más generales que hasta entonces no habían sido tenidas en cuenta. Para ello tiene como punto de partida la definición antes mencionada; la diferencia está en que él considera no solamente las funciones continuas, sino la totalidad de las que son integrables; es decir, aquellas para las que existe el límite de las sumas asociadas a sus respectivas particiones. Esto le llevó a definir condiciones necesarias y suficientes para que una función arbitraria, mucho más discontinua de lo que había imaginado Dirichlet, sea integrable.

Una función f definida y acotada en un intervalo $[a, b]$ es integrable, según Riemann, si para cada serie de valores $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, las sumas

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$ [53]

Se aproximan a un único valor límite A cuando el mayor de los $x_i - x_{i-1}$ tiende a cero, para cada t_i en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Este valor límite constituye, por

[53] Observe que si en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición del intervalo $[a, b]$ se toma un punto arbitrario t_i, entonces S corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos de altura $f(t_i)$ y base $x_i - x_{i-1}$.

definición, la integral definida de la función f en el intervalo considerado, es decir $A = \int_a^b f(x)dx$. Cuando dicha propiedad no se satisface, entonces esta integral no tiene ningún significado.

En respuesta a la cuestión de cuándo una función es integrable, Riemann presenta dos condiciones, C_1 y C_2 equivalentes a la definición, que permiten determinar si una función es o no integrable. Los enunciados respectivos son los siguientes:

$\mathbf{C_1}$: Una función f es integrable en un intervalo $[a, b]$ si y solo si, para cada partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, se cumple que

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$$

Donde ω_i denota la oscilación de la función f en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\|P\|$ corresponde a la norma de la partición[54] P.

$\mathbf{C_2}$: Una función f es integrable si y solo si, dadas $\epsilon > 0$ y $\sigma > 0$, existe $d > 0$ tal que para toda partición P, con norma menor que d, se verifica que $S(P, \sigma) < \epsilon$, donde $S(P, \sigma)$ es la suma de las longitudes de los subintervalos de dicha partición en donde la oscilación de la función sea mayor que σ.[55]

En otras palabras, la segunda condición de Riemann establece que una función es integrable si la suma total de las longitudes de los intervalos, determinados por la partición, donde la oscilación es mayor que un número positivo dado, puede hacerse tan pequeña como se quiera.

[54] $\omega_i = M_i - m_i$, donde $M_i = \sup\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $m_i = \text{ínf}\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$; además, $\|P\| = \text{máx}\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}: 1 \leq i \leq n\}$

[55] Observe que $S(P, \sigma) = \sum_{j \in \Gamma} \Delta x_j$, donde $\Gamma = \{\, j: \omega_i > \sigma\}$.

Sea P una partición, como en C_1, del intervalo $[a,b]$. Para una función acotada f en dicho intervalo, definimos $M_i = \sup\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $m_i = \text{ínf}\{f(x): x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Los números

$$S(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i\,, \;\; I(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Se llaman, respectivamente, suma superior y suma inferior de f para la partición P. La diferencia entre $S(P,f)$ y $I(P,f)$ viene dada por $\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$. Modernamente, sabemos que f es integrable si esta suma puede hacerse tan pequeña como se quiera. Si hacemos $\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = S_1 + S_2$ de tal manera que S_1 contenga sólo los subintervalos en los que f sea continua y los restantes estén contenidos en S_2. La suma S_1 podrá hacerse suficientemente pequeña ya que por la continuidad de la función, las diferencias $M_i - m_i$ tienden a cero. Aunque en S_2 las diferencias $M_i - m_i$ no necesariamente son pequeñas, están acotadas por alguna constante K, de modo que $|S_2| \leq K \sum \Delta x_i$. Por lo tanto, la función es integrable siempre que la suma de los subintervalos correspondientes a S_2 sea suficientemente pequeña.[56] Esto supone que el conjunto de puntos, de una función integrable, donde la oscilación es no nula, pueden encerrarse en rectángulos de área tan pequeña como se quiera.[57] Luego, también en estos casos, la existencia de la integral garantiza la existencia del área bajo la gráfica de esta clase de funciones.

En los trabajos de Riemann, el concepto de función integrable no está ligado a la continuidad de la misma, ya que la existencia de la integral sólo depende de la existencia del límite de las sumas. Para poner esto en evidencia construye un ejemplo de función integrable con infinitas discontinuidades, para lo cual, define la función $\varphi(x) = x - m$ cuando m es el entero más cercano a x, y cuando $x = \pm\frac{p}{2}$,

---

[56] Ver (Apostol, 1976, pág. 206).

[57] Más adelante, en el contexto de la teoría de la medida, Lebesgue establecería que una función es integrable si, y dolo si, el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida cero.

para $p = 1,3,5, \ldots$, define $\varphi(x) = 0$. Luego, para $n = 1,2,3, \ldots$, define las funciones $\varphi_n(x) = \varphi(nx)$ y, a partir de estas, obtiene la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{n^2}$$

La cual tiene infinitas discontinuidades en el conjunto de puntos de la forma $x = \frac{p}{2n}$ donde p, además de ser impar, es primo relativo con n. Conclusión a la que llega, luego de probar que $\lim_{\epsilon \to 0} f(x \pm \epsilon) - f(x) = \mp \frac{\pi^2}{16n^2}$. Y Para probar que f es integrable hace uso de la segunda condición, pues para todo $\sigma > 0$ sólo existe un número finito de tales puntos en los que la oscilación de la función es mayor que σ; esto es,

$$\omega_f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} f(x - \epsilon) - f(x + \epsilon) = \frac{\pi^2}{8n^2} > \sigma$$[58]

Sea $A = \{x : \omega_f(x) > \sigma\}$ y consideremos las longitudes $\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \ldots, k\}$ en el intervalo $[0,1]$ que contienen todos los puntos del conjunto A. Como el número de dichas longitudes es k y dado que $\Delta x_i \leq \|P\|$, se llega a que

$$S(P, \sigma) = \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i \leq k\|P\|$$

Luego, $S(P, \sigma) < \epsilon$ cuando $\|P\|$ tiende a cero. Así, puede concluirse que la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{n^2}$ es integrable en el intervalo $[0,1]$. Con este ejemplo, el autor en cuestión ha dado una muestra de que su definición de la integral acoge funciones que son discontinuas en un conjunto denso.

Aunque se llegó a creer que con el aporte de Riemann se había caracterizado el concepto de función integral en su máxima extensión, no tardaron en hacerse evidentes sus limitaciones. Al respecto Hawkins señala que

---

[58] (Hawkins, 1979, pág. 19).

La medida de la generalidad venía expresada enérgicamente por el ejemplo sin precedentes ya mencionado. Parecía imposible imaginarse la integrabilidad y la integral de una función acotada de cualquier otra manera más general, ya que si las sumas de Cauchy-Riemann no tienden a un valor límite único, no parece que tenga mucho sentido hablar del área determinada por sus ordenadas… Aunque esta actitud hacia la teoría de integración de Riemann fue dominante durante el siglo XIX, se hicieron varios descubrimientos… que revelan serios defectos de la teoría de Riemann, defectos que vienen a señalar que, a pesar de las apariencias, la condición de integrabilidad de Riemann no era lo suficientemente general (Hawkins, 1984, pág. 206).

Esto sería el efecto de una actitud más crítica hacia las hipótesis que se aceptaban como ciertas y, hacia aquellos resultados que no se demostraban conforme a los parámetros del rigor analítico. Además, contrariamente a lo que se pensaba, este nuevo enfoque dio lugar a la construcción de funciones que no son integrables según Riemann. Es el caso de la función característica de los racionales en el intervalo [0,1], pues en cualquier subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de este habrá al menos un número racional y otro irracional[59], lo que implica que $\omega_i = 1$. Luego, haciendo los cálculos respectivos, se tendrá que

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \lim_{\|P\|\to 0} 1(1-0) = 1$$

De donde se concluye que la función no es integrable, ya que no satisface la primera condición de Riemann. En este contexto, también se construyeron ejemplos de funciones, no constantes, cuyas derivadas, aunque acotadas, no son Riemann integrables; así que, para tales funciones no tiene sentido el teorema fundamental del cálculo. Además, llegó a ser evidente que esta integral no siempre se conserva en los procesos de paso al límite; puesto que, si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para toda x en el intervalo $[a, b]$, no siempre se cumple

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

[59] Esto es cierto porque tanto el conjunto de los números racionales como el de los irracionales tienen la propiedad de ser densos en el conjunto de los números reales.

Ya que la función límite no necesariamente es integrable y el hecho de que las f_n sean uniformemente acotadas, es una condición necesaria para que se cumpla la igualdad.

Para los matemáticos de la época, en general, dada una función f definida y acotada en un intervalo $[a, b]$, era natural pensar que el conjunto E de puntos limitado por el eje de las abscisas, la gráfica de f y las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$ siempre tiene un "área" al margen de si f es o no una función integrable. Esta idea había sido retomada por Fourier, quien en su momento la usó para justificar la existencia de las integrales que aparecen en el cálculo de los coeficientes, en las series que llevan su nombre. Por ello, los esfuerzos estaban orientados a extender la integral definida de Cauchy, que diera respuesta al problema de las cuadraturas de los antiguos, para que acogiera el mayor número de funciones posible. Como hemos visto, la extensión del concepto debida a Riemann, también acoge funciones que son discontinuas en un subconjunto denso de su dominio; además, es Riemann quien, por primera vez, enuncia condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la integral de una función arbitraria. Pero, en este proceso, pareciera que para la mayoría de los matemáticos no es indispensable establecer una definición formal de la noción de área. Justamente en esta dirección orienta sus opiniones el matemático italiano Giussepe Peano (1858-1932), cuando critica los tratamientos de la integral en los que su definición y existencia se fundamentan en la noción de área, aun careciendo de una definición precisa y rigurosa del concepto.[60]

La necesidad de una definición formal del concepto de área emerge cuando empiezan a considerarse funciones cada vez más generales, para las que no es claro que su gráfica determine una región a la que se le pueda asignar un número positivo. A manera de ejemplo, consideremos la función f definida en el intervalo $[0,1]$, tal que $f(x) = 1$ si x es racional y $f(x) = 2$ cuando x es irracional. La región del plano comprendida entre la gráfica de f y el eje de las abscisas sería el conjunto de todos los segmentos verticales de alturas 1 y 2 levantados sobre los puntos racionales e irracionales del intervalo $[0,1]$, respectivamente. No es del todo evidente que este conjunto tenga área y, si la tuviese, tampoco es claro qué

[60] (Hawkins, 1979, pág. 87).

valor se le debe asignar. Éste es, pues, un ejemplo que pone de manifiesto la necesidad de precisar matemáticamente el concepto de área.

Un avance importante en relación a estas cuestiones se daría en la década de los 1880, cuando se introdujo el concepto de medibilidad de un conjunto y las ideas de la emergente teoría de la medida fueron aplicadas a la integral de Riemann. En este proceso fue importante el trabajo del matemático Hermann Hankel (1839-1873) quién, basándose en C_2, introduce el concepto de "salto", análogo al de oscilación de una función en un punto. La definición establece que el salto de una función f en un punto x es mayor o igual que un número positivo σ, si para cada ϵ positivo existe δ tal que $|\delta| < \epsilon$ y $|f(x+\delta) - f(x)| > \sigma$. Luego, clasifica las funciones con infinitas discontinuidades en dos tipos: las puntualmente discontinuas y las totalmente discontinuas. Para ello, incorpora en su análisis la noción de conjunto diseminado.

Definición. Sean $I = [a, b]$ un intervalo en $\mathbb{R}$ y D un subconjunto de I. Decimos que D es diseminado en I si para todo par de puntos α y β en D existe un intervalo $[r, s]$ en I, con $r < s$, tal que $[r, s] \subset (\alpha, \beta)$ y el conjunto $[r, s] \cap \mathrm{D}$ es vacío.

Si designamos por S_σ el conjunto formado por todos los puntos donde el salto de la función es mayor que σ, entonces las funciones puntualmente discontinuas son aquellas en las que S_σ es diseminado para toda $\sigma > 0$. De otra parte, si S_σ es denso en algún intervalo, para alguna $\sigma > 0$, entonces la función será totalmente discontinua. Hankel centró sus esfuerzos en la naturaleza de los conjuntos S_σ y se dio cuenta que una función podía o no ser integrable dependiendo del grado de sus discontinuidades.

En el siglo XIX, a comienzos de los años 70, se reconocían tres clases de conjuntos: los diseminados o topológicamente "pequeños", los que podía recubrirse con un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña, o de contenido nulo como se les conoce actualmente, y los conjuntos de primera especie. Estos últimos fueron introducidos por Cantor y se caracterizan porque alguno de sus conjuntos derivados es vacío.

Definición. Un conjunto E se llama de primera especie si el conjunto $E^{(n)}$ es vacío para algún entero positivo n, donde $E^{(1)} = E'$ es el conjunto de puntos de acumulación del conjunto E y, en general, $E^{(n)} = \left(E^{(n-1)}\right)'$.

Estos tipos de conjuntos no son iguales, pero en aquella época no se tenían los elementos suficientes para reconocer sus diferencias, lo que dio pie a algunas confusiones notables. Por ejemplo, el mismo Hankel creyó haber demostrado que una función acotada f es Riemann integrable si y solo si es puntualmente discontinua, es decir S_σ es diseminado para toda $\sigma > 0$. Si f es integrable entonces el contenido exterior de S_σ es nulo para toda σ y, por tanto, S_σ es diseminado;[61] sin embargo, la otra implicación es falsa ya que los conjuntos diseminados no pueden identificarse con los de contenido nulo.[62] También Du Bois Reymond adujo erróneamente que la condición de Dirichlet era suficiente para la integrabilidad de una función. Su conclusión fue el resultado de haber identificado los conjuntos de primera especie como los únicos diseminados. Es cierto que los conjuntos de primera especie son de contenido nulo y estos, a su vez, son diseminados. El problema es que hay conjuntos diseminados que no pueden encerrarse en un número finito de intervalos de longitud total tan pequeña como se quiera, pues, contrario a lo que había conjeturado Hankel, tienen contenido exterior positivo.

En 1875 el matemático inglés Henry John Smith (1826-1883) había publicado un artículo sobre la integración de funciones discontinuas, en el que exponía los métodos que había descubierto para la construcción de conjuntos diseminados. Utilizando el segundo método obtuvo conjuntos diseminados de contenido exterior positivo, lo que implica la existencia de funciones puntualmente discontinuas, como las funciones características de tales conjuntos, que no son Riemann integrables. De esta manera, Smith refuta el supuesto teorema de Hankel y su conjetura respecto al contenido de un conjunto diseminado.

A continuación explicamos uno de los métodos ideados por Smith para la construcción de conjuntos diseminados en el intervalo $[0,1]$. En primer lugar, se

---

[61] Si S_σ fuera denso en algún intervalo I entonces $C_e(S_\sigma) \geq l(I)$, pero esto no es posible.

[62] Para más detalles sobre la ideas de Hankel puede consultarse el segundo capítulo de (Hawkins, 1979).

divide dicho intervalo en m partes iguales, siendo m un entero positivo estrictamente mayor que 2, y se elimina el último segmento de la subdivisión. Luego, se divide cada uno de los $m-1$ segmentos restantes en m partes iguales y se quita el último segmento de cada subdivisión. Lo mismo se hace con los $2(m-1)$ segmentos restantes y se continúa con este proceso de manera indefinida. Así, se obtendrá el conjunto P de todos los puntos de subdivisión, en el intervalo $[0,1]$, que claramente es diseminado por el método de construcción. En el paso k la longitud total de los intervalos que quedan es $\left(1-\frac{1}{m}\right)^k$, cantidad que tiende a cero cuando k se hace muy grande. Esto implica que P puede cubrirse con intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña y, por lo tanto, una función acotada con discontinuidades en P es integrable. El problema es que no todos los conjuntos diseminados satisfacen esa propiedad, lo que puede verse haciendo una ligera modificación en el proceso mediante el cual se obtuvo P. La idea básica es dividir en m^k partes iguales los intervalos restantes en el paso k y, como antes, quitar el último segmento de cada una de las subdivisiones. Así, el intervalo $[0,1]$ se divide en m partes iguales, luego cada uno de los $m-1$ segmentos restantes en m^2 partes iguales, en el paso siguiente se divide por m^3 a cada uno de los $(m-1)(m^2-1)$ restantes y así indefinidamente. El conjunto Q que resulta del proceso, es tal que en el paso k la longitud total de los segmentos que no han sido eliminados es $\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{m^k}\right)$, y cuando k tiende a infinito será $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{m^k}\right)$. En consecuencia, Q es un conjunto diseminados que no es de contenido nulo. $C_e(Q)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{m^k}\right)>0$. De esto se infiere la existencia de funciones acotadas puntualmente discontinuas, como por ejemplo la función característica de Q, que no son integrables. En tales casos, no tendría sentido hablar del área bajo la gráfica.

Seguramente el desconocimiento de los trabajos de Smith, según opinan algunos historiadores, retardó el posterior desarrollo de la teoría de la medida, pues el descubrimiento de tales conjuntos fue fundamental para que los matemáticos empezaran a pensar en esa dirección.

Fue Peano quien dio una interpretación más rigurosa de la integral definida de una función, al incorporar a sus investigaciones la noción de contenido, haciendo una distinción entre los contenidos interno y externo. Es de notar que, en general, se asumía que el conjunto E limitado por la gráfica de una función siempre tiene un contenido o “área” exterior, al margen de si la función es integrable. Por ello, sería la introducción de un contenido interno lo que, en cierta forma, caracterizó los trabajos del matemático italiano. En este punto, los trabajos de Peano llaman la atención en tanto, establece la relación entre la integral definida de una función y el contenido del conjunto limitado por su gráfica.

Al presentar este concepto, lo hace de manera independiente para una, dos y tres dimensiones. Así, para un subconjunto E del plano, define el contenido interior $c_i(E)$ como el supremo de las áreas de todas las regiones poligonales contenidas enteramente en E y el exterior $c_e(E)$ como el ínfimo de las áreas de todas las regiones poligonales que contienen a E. Ahora, cuando estos dos valores coinciden se dice que E tiene contenido $c(E)$ y este valor común lo define como el área de E. Cuando esto no ocurre entonces E no tiene, según Peano, un área comparada con la de un polígono. Además dio la siguiente relación entre el contenido interno y externo

$$c_e(E) = c_i(E) + c_e(\partial E)$$

Donde ∂E es la frontera de E. Y en consecuencia, a partir de esta expresión, se infiere que el conjunto E tiene área si y solo si el área exterior de la frontera es cero.

Los aportes de Peano, en el sentido de dar una definición precisa del concepto de área en términos del contenido, permitieron una nueva caracterización geométrica de la integral de Riemann. En el año 1883 introdujo las integrales superior e inferior, las cuales equivalen, respectivamente, a los límites superior e inferior de las sumas de Riemann de una función dada. Con estos nuevos elementos observa que si f es una función no negativa definida en un intervalo $[a, b]$ y E es la región determinada por la gráfica de f, entonces

$$c_i(E) = \overline{\int}_a^b f(x)dx, \quad c_e(E) = \underline{\int}_a^b f(x)dx$$

De donde se concluye que f es Riemann integrable si y sólo si E tiene un área en el sentido de que sus contenidos interno y externo sean iguales. Lo que no es otra cosa, sino una redefinición de la primera condición de Riemann para la existencia de la integral.[63]

El uso de la noción de contenido para definir el concepto de área y, particularmente, los desarrollos de Camille Jordan en esta dirección, fue lo que señaló el camino a seguir para el posterior desarrollo de la integral de Lebesgue y una generalización del área en el marco de la teoría de la medida.

4.3. De la medibilidad a la medida: Jordan y Borel

La noción de medibilidad está implícitamente contenida en la obra de Peano, pero fue camille Jordan (1838-1922), basándose en la noción de contenido de aquel, quien determinó su importancia y la introdujo explícitamente. Lo que hace es asignarle a cualquier dominio S una medida interior $c_i(S)$ y una medida exterior $c_e(S)$ y define como medibles aquellos dominios para cuales estas dos medidas coinciden; es decir, $c_i(S) = c_e(S)$ en cuyo caso la medida de S es denotada por $c(S)$. El contenido de un conjunto, según lo aclara Jordan, se bebe interpretar de acuerdo a la dimensión del espacio que ocupe. Por ejemplo, en una dimensión es su longitud mientras que en dos dimensiones el contenido de un conjunto corresponde a su área.

El método de Jordan para medir dominios planos,[64] es una generalización del método exhaustivo y, al igual que este, también está basado en el principio según el cual si A es un subconjunto del conjunto B, entonces el área de A es menor o igual que el área de B. Con esto en mente, Jordan define el área de los que llama "dominios fundamentales", a partir de los cuales se puede asignar una medida o un área a los conjuntos que tales dominios aproximan bien. De esta forma, si un conjunto E pude descomponerse como unión finita de cuadrados C_i de lados paralelos a los ejes coordenados de longitud l, entonces $E = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ y el área de E

---

[63] Ver (Hawkins, 1979, pág. 88).

[64] El método de Jordan para medir dominios planos ha sido tomado y adaptado de (Dieulefait, 2003).

será nl^2. Un conjunto que admite esta descomposición es llamado dominio fundamental.

Ahora, si S es un conjunto acotado del plano y se descompone en cuadrados de lado l, al variar l se obtiene una familia U de dominios fundamentales contenidos en S y, en tal caso, la medida interior de Jordan del conjunto S, denotada por $m_i(S)$, se define como $m_i(S) = \sup_{E \in U} \text{área}(E)$. Similarmente, si consideramos $F = E \cup E'$, donde E' está conformado por todos los cuadrados de lado l que tienen algún punto en común con la frontera de S y $E \in U$, ver figura 4.4, entonces al variar l también se obtendrá una familia V de dominios fundamentales que contienen a S. En este caso la medida exterior de Jordan de S, simbolizada por $m_e(S)$, esta dada por $m_e(S) = \inf_{F \in V} \text{área}(F)$. Dado que todo elemento F_k de V contiene a cualquier elemento E_i de U y $E_i \subset S \subset F_k$, entonces $\text{área}(E_i) \leq \text{área}(F_k)$. Además, es claro que $m_i(S) \leq m_e(S)$. Cuando $m_i(S) = m_e(S)$, entonces el conjunto S es Jordan medible y su valor común se denota por $m(S)$.

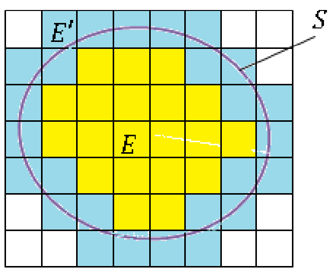


Figura 4.4

Observe que $m_i(S)$ y $m_e(S)$ pueden determinase de la siguiente forma

$$m_i(S) = \lim_{l \to 0} \text{área}(E_l) = \sup_{l > 0} \text{área}(E_l)$$

$$m_e(S) = \lim_{l \to 0} \text{área}(E_l \cup E_l') = \inf_{l > 0} \text{área}(E_l \cup E_l')$$

De donde se infiere que si el conjunto S es medible, en el sentido de Jordan, entonces

$$\lim_{l\to 0} \text{área}(E_l) = \lim_{l\to 0} \text{área}(E_l \cup E_l') = \lim_{l\to 0} \text{área}(E_l) + \lim_{l\to 0} \text{área}(E_l')$$

Luego, debe tenerse que $\lim_{l\to 0} \text{área}(E_l') = 0$ y como E_l' es un dominio fundamental que contiene la frontera ∂S de S, se concluye que $m_e(\partial S) = 0$. Por lo tanto, S es Jordan medible si su frontera tiene medida nula.

Una vez que ha realizado su análisis para las áreas exterior e interior de un conjunto, Jordan observa que las consideraciones tenidas en cuenta, para este caso particular, también son aplicables a conjuntos de un número cualquiera de dimensiones.[65]

Utilizando estas ideas, redefine la integral de Riemann como sigue: dada una función f acotada y definida en un intervalo $[a,b]$ y una colección $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ de conjuntos Jordan medibles tales que $[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, se definen las sumas superior e inferior de f, relativas a una partición P, de la siguiente manera:

$$U = \sum_{k=1}^{n} M_k c(E_k) \text{ y } L = \sum_{k=1}^{n} m_k c(E_k)$$

Donde M_k y m_k son, respectivamente, el supremo y el ínfimo de los valores de f en el conjunto E_k. Jordan prueba que U y L convergen cuando las dimensiones de los E_k tienden a cero. A estos límites los denomina "integral por exceso" e "integral por defecto" y cuando son iguales, entonces el conjunto determinado por la gráfica de f tiene área. Cuando esto ocurre, se dice también que f es Riemann integrable en $[a,b]$ y el valor de $\int_a^b f(x)dx$ es, por definición, ese valor común. Luego, la definición de integral definida, debe ser entendida como una primera aproximación matemática al concepto intuitivo de área.

Con el trabajo de Jordan, la teoría de la integración quedaría situada en el contexto de la teoría de la medida. Sin embargo, sería Emile Borel (1871-1956) el primero en plantear, de forma axiomática, las definiciones de medida y medibilidad. Al respecto observa que una definición de medida solo puede ser útil si ésta verifica ciertas propiedades fundamentales que él ha impuesto a priori y, a su vez, ha utilizado para definir la clase de conjuntos que ha considerado como

[65] Una cita al respecto puede verse en (Bobadilla, 2012, pág. 128).

medibles. Borel considera, por simplicidad, los conjuntos formados por puntos del intervalo $[0,1]$ y plantea los postulados esenciales que debe cumplir una medida, a saber:

1. La medida jamás es negativa.
2. Si un conjunto es la unión de una cantidad infinita numerable de intervalos que no se solapan y que tienen longitud total s, entonces diremos que el conjunto tiene medida s.
3. Si dos conjuntos no tienen puntos comunes y sus medidas son s y s', entonces su suma tendrá medida $s + s'$. De manera más general, si tenemos una infinidad numerable de conjuntos tales que dos a dos no tienen puntos comunes, y que tienen medidas $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, entonces su suma tiene medida $s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$.
4. Si un conjunto E tiene medida s y contiene todos los puntos de otro conjunto E' de medida s', entonces el conjunto $E - E'$ tiene medida $s - s'$.
5. Todo conjunto que no tiene medida nula no es numerable.

Luego, agrega que los conjuntos para los cuales se pueda definir una medida en virtud de las definiciones precedentes, se denomina medibles.[66]

Para Borel, el proceso de medir conjuntos lineales debe fundamentarse en la generalización de la longitud de segmentos. Bajo esta perspectiva, se establece que la medida de un intervalo es su longitud independientemente de que este sea abierto, cerrado o semiabierto; ya que los puntos extremos del intervalo no aportan a su medida. Pero Borel también argumenta que a un conjunto numerable se le puede asignar medida cero. Si T es un conjunto numerable, sus elementos pueden ponerse en biyección con los números naturales, digamos $t_1, t_2, t_3, \dots$. Dado $\epsilon > 0$, cada elemento t_k en T puede cubrirse por un intervalo de la forma $\left(t_k - \frac{\epsilon}{2^{k+1}}, t_k + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right)$ de longitud $\frac{\epsilon}{2^k}$. Luego, la medida de T debe ser nula porque

[66] Ver (Bobadilla, 2012, págs. 129,130).

puede cubrirse con una cantidad numerable de intervalos de longitud total, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i}$, arbitrariamente pequeña.[67]

Es sabido que Borel no planteó relación alguna entre su teoría de la medida y la teoría de la integración; sin embargo, sus planteamientos, combinados con las ideas de Jordan, sirvieron de base para el desarrollo de la teoría de la medida abstracta desarrollada por Henri Lebesgue. En este marco, Lebesgue buscaría superar los problemas que no habían sido resueltos por sus predecesores; a saber,

> La definición general del concepto de área y una definición de integral lo suficientemente general y útil que permitiera resolver el cálculo de primitivas para un conjunto suficientemente amplio de funciones (Bobadilla, 2012, pág. 13).

4.4. La medida de Lebesgue

La teoría de la medida y la integral que actualmente se considera matemáticamente satisfactoria se debe a Henri Lebesgue (1875-1941). Para su época ya habían aparecido las curvas de relleno, tipo fractal, que tienen área. De esta clasificación, por ejemplo, hacen parte las curvas de Peano y de Hilbert. De ahí que Lebesgue se pregunte si su teoría le permitirá dar una respuesta general al problema del área. Específicamente, piensa en la posibilidad de elaborar una definición de área que involucre todas las curvas.

En su tesis doctoral, *Integral, Longitud y Área*, Lebesgue elabora un marco conceptual para obtener una definición de área que satisfaga las condiciones requeridas para que el problema del área pueda solucionarse. De esta manera elabora una definición de área para dominios cuadrables, aquellos cuya frontera tiene medida superficial nula. Luego, en el artículo de 1903, *Sur le probléme des aires*, observa que algunos de los razonamientos, expuestos en su tesis, ponen de manifiesto la indeterminación del problema del área para los dominios no cuadrables. Califica tal exposición de inexacta e incompleta y, por ello, reanuda la discusión del asunto en el artículo mencionado. Allí define con más precisión los conceptos necesarios que le permitirán obtener una definición de área para

[67] (Dieulefait, 2003, pág. 41).

dominios no cuadrables. Además construye una curva no cuadrable que le servirá, en cierto sentido, para mostrar la validez de su definición. No obstante, este fue un asunto que Lebesgue no logró concluir.

En el primer capítulo de su tesis doctoral, aduce que el problema de la medida consiste en definir una función medida m que le asigne a cada conjunto acotado E una medida $m(E)$, que verifique las siguientes condiciones:

1. La medida $m(E)$ es no nula para algún conjunto E.
2. Si dos conjuntos son iguales, entonces sus medidas son iguales.
3. Si un conjunto es la unión finita o numerable de conjuntos disjuntos entre sí, su medida será la suma de las medidas de estos conjuntos.

Pero, según este planteamiento, ¿cómo deberán medirse los conjuntos? Para el caso de los subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$, nos dirá que estos pueden cubrirse con una infinidad numerable de intervalos y, en tal caso, el límite inferior de la suma de las longitudes de estos es la medida exterior del conjunto, denotada por m^*. En términos actuales, si E es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, se define

$$m^*(E) = \text{ínf}\left\{\sum \ell(I_k) : E \subset \bigcup I_k, I_k \text{ es un intervalo}\right\}$$

Esta definición constituye una extensión de las ideas de Borel acerca del contenido exterior de un conjunto. Lebesgue también define la medida interior de un subconjunto E del intervalo $I = [a, b]$, que simbolizamos por m_*. Para ello considera el conjunto E^c de los puntos que están en I y no están en E y define

$$m_*(E) = m(I) - m^*(E^c)$$

Luego, a partir de estas definiciones, establece que un subconjunto E de $\mathbb{R}$ es medible si se cumple que $m^*(E) = m_*(E)$ y su medida $m(E)$ será, por tanto, ese valor común. Esta definición satisface las propiedades de una función medida y, además, se prueba que tanto la unión como la intersección de un número finito o infinito numerable de conjuntos medibles, es medible.

A partir de los resultados obtenidos para una dimensión, Lebesgue generaliza el concepto de medida para superficies acotadas por curvas en el plano. Ahora nos dice que cualquier subconjunto acotado E de $\mathbb{R}^2$ puede cubrirse con una infinidad numerable de triángulos y, en consecuencia, define la medida exterior de E de la siguiente manera

$$m^*(E) = \text{ínf}\left\{\sum m(\Delta_k) : E \subset \cup \Delta_k, \Delta_k \text{ es un triágulo}\right\}$$

Si E está contenido en el triángulo $T = \Delta ABC$ y $E^c = T - E$, entonces la medida interior de E está dada por $m_*(E) = m(T) - m^*(E^c)$. Cuando el conjunto E es medible, las medidas exterior e interior coinciden y este valor común será su medida.

Para decirnos en que consiste el problema del área para dominios acotados por curvas en el plano, Lebesgue empieza definiendo los conceptos que son pertinentes al tema, como sigue:

Curva plana: es el conjunto de puntos determinado por las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = \varphi(t)$, donde f y φ son funciones continuas definidas en el intervalo finito $[a, b]$.

Punto múltiple: dada una curva plana α, decimos que $(x, y) \in \alpha$ es un punto múltiple si corresponde a varios valores de t. Se dice que α es cerrada sin puntos múltiples, si el único punto múltiple es el punto doble correspondiente a $t = a$ y $t = b$. Por lo tanto, son los únicos puntos que satisfacen $\big(f(a), \varphi(a)\big) = \big(f(b), \varphi(b)\big)$.

Dominio: es el conjunto de puntos interiores a una curva cerrada α que no tiene puntos múltiples. En este caso la curva α se denomina frontera del dominio[68]. Un dominio D es la unión de los dominios $\{D_i\}$ si todo punto de D pertenece a uno y solo uno de los D_i o, al menos, a una de las fronteras de los D_i.

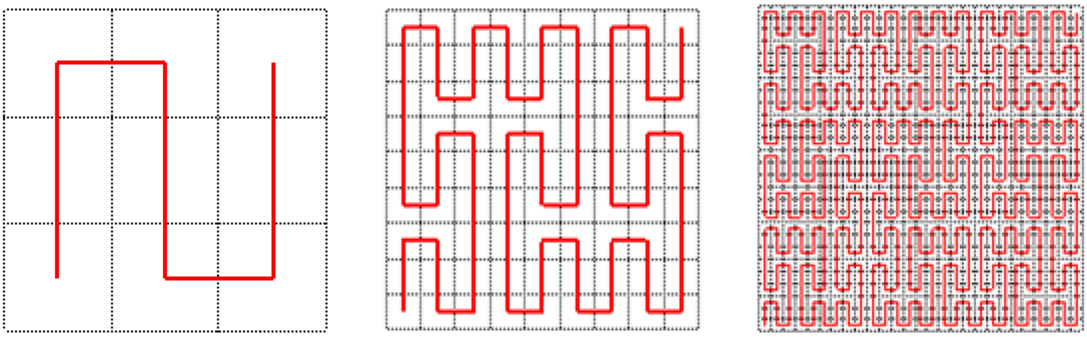
[68] Lebesgue también enuncia dos proposiciones según las cuales un domino es un conjunto abierto y toda curva cerrada sin puntos múltiples divide al plano en una región interior y en otra exterior.

De manera subsiguiente explica que el problema del área consiste en asociar a cada dominio un número positivo que será su área, de tal forma que si dos dominios son iguales tengan áreas iguales y que si un dominio es la unión de un número finito o infinito de dominios, que teniendo porciones de frontera comunes no se solapan entre sí, tenga por área la suma de las área de los dominios componentes. Matemáticamente, si Γ es el conjunto de los dominios de $\mathbb{R}^2$, la función A definida en Γ que satisface, de una parte, que $A(D_1) = A(D_2)$ para D_1 y D_2 dominios iguales en Γ y, de otra, que $A(D) = \sum A(D_i)$, donde $\{D_i\} \subset \Gamma$ y $D = \bigcup D_i$, se denomina función Área y el número que esta le asigna a un dominio D es su área.

Si D es un dominio tal que $D = D_1 \cup D_2 \cup \alpha\beta$, donde $\alpha\beta$ es un arco frontera común a los dominios disjuntos D_1 y D_2, entonces $m(D) = m(D_1) + m(D_2) + m(\alpha\beta)$. Luego, para que se cumpla la aditividad del área debe tenerse que $m(\alpha\beta) = 0$. De este resultado, Lebesgue concluye que el problema del área es posible para los dominios cuya frontera tiene medida superficial nula. A los dominios que cumplen esta condición les llama cuadrables y, en este mismo sentido, una curva se dice cuadrable si tiene medida superficial nula. Para el caso de un dominio no cuadrable D, limitado por una curva no cuadrable α, advierte que el valor de su área esta entre la medida del dominio y la medida del mismo agregándole la medida superficial de la curva; es decir $m(D) \leq A(D) \leq m(D) + m(\alpha)$.

La definición de curva, debida primeramente a Jordan, además de las curvas usuales también incluía figuras geométricas que intuitivamente nadie consideraba como curvas. Esto fue evidente cuando Peano demostró que los puntos interiores limitados por el cuadrado, el triángulo y el círculo también son curvas en el sentido de Jordan. En otras palabras, probó la existencia de curvas que llenan toda un área plana, por lo que su medida superficial no puede considerarse nula. Estas son las curvas que Lebesgue denomina no cuadrables y sería el mismo Peano quien lograra construir una curva que pasa por todos los puntos de un cuadrado.

La idea para construir una curva de esta naturaleza es tomar como soporte el cuadrado unidad y subdividirlo, a su vez, en nueve cuadrados iguales. Luego, se unen contiguamente los centros de estas subdivisiones, como se ilustra en la figura 4.5a. Repitiendo el mismo procedimiento con cada una de las subdivisiones del cuadrado inicial, se obtienen en total 9^2 subdivisiones que deberán recorrerse de forma análoga, teniendo en cuenta que el recorrido de la primera subdivisión de nueve cuadrados debe coincidir con el recorrido anterior y, siguiendo el mismo patrón, se recorren todas las subdivisiones restantes para obtener la curva de la figura 4.5b. En la siguiente etapa se obtiene 9^3 subdivisiones, lo que permite obtener la curva que se ilustra en 4.5c. Continuando con el proceso, en la n-ésima etapa habrá 9^n subdivisiones; de esta manera, para un n suficientemente grande el área de cada subdivisión tiende a cero y, en tal caso, la curva que se traza pasa por todos los puntos de la superficie del cuadrado.



a b c

Figura 4.5

Ahora, teniendo como punto de partida un cuadrado unitario, se puede construir una curva no cuadrable y sin auto intersecciones. El procedimiento consiste en ir eliminando áreas centrales, en forma de cruceta, de los cuadrados respectivos como se ilustra en la figura 4.6. En el primer paso se eligen las dimensiones de la cruceta, de tal manera que la primera área eliminada sea de $\frac{8}{25}$; luego, en el segundo paso, se eligen las crucetas de las cuatro subdivisiones cuadradas que quedan, asegurando que el área eliminada sea de $\left(\frac{8}{25}\right)^2$; en el paso tres el área eliminada deberá ser $\left(\frac{8}{25}\right)^3$ y así sucesivamente. Al sumar estos valores, se obtiene la serie geométrica

$$\frac{8}{25}+\left(\frac{8}{25}\right)^2+\left(\frac{8}{25}\right)^3+\cdots=\frac{8}{17}$$

Así, el área total eliminada es $\frac{8}{17}$, lo que implica que del cuadrado inicial queda un área de $\frac{9}{17}$. El conjunto que se ha obtenido es totalmente disconexo ya que toda conexión entre sus puntos ha sido rota. No contiene ni una sola pieza del plano y ni siquiera un arco de curva. Sin embargo, su área no es nula y tampoco puede cubrirse con un dominio poligonal de área menor que $\frac{9}{17}$.

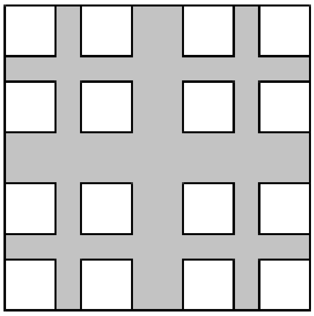


Figura 4.6

Luego, al unir todos los puntos de este conjunto se obtendrá una curva cuya área será al menos de $\frac{9}{17}$; además, la curva no tendrá auto intersecciones porque en cada paso se eliminaron cruces completas. Al unir los puntos extremos de dicha curva con algún tipo de curva, por ejemplo una semicircunferencia, se obtiene una curva cerrada y, por tanto, un cierto dominio E que no tiene área en el sentido de Jordan, pues el área de su frontera es no nula.[69]

De lo anterior puede verse que el problema del área está bien definido para dominios cuadrables, pero todavía quedará pendiente el problema de definir el área para los dominios no cuadrables. Este asunto será retomado por Lebesgue en su artículo de 1903, *Sur le probléme des aires*, en el que trata de dar una salida conceptual a dicho problema.

[69] Este ejemplo se discute en (Anónimo).

Henri Lebesgue también elaboró una teoría de integración más general que superó las limitaciones de la integral de Riemann. En su tesis doctoral señala que estas no pueden resolverse con las herramientas del análisis, sino a través de la teoría abstracta de la medida. Teniendo en cuenta el referente geométrico, Lebesgue nos explica que la integral de una función continua y positiva puede definirse como el área de un dominio plano:

> Desde una perspectiva geométrica, el problema de la integral puede plantearse como sigue: *Para una curva C dada por la ecuación $y = f(x)$... encontrar el área del dominio acotado por un arco de C, un segmento de $0x$ y dos líneas paralelas al eje y para valores de la abscisa dados a y b, donde $a < b$.* A esta área se le llama la integral definida de f entre los límites a y b, y se representa por $\int_a^b f(x)dx$ (Lebesgue H. , 2010, pág. 927).

Dada una función f acotada en un intervalo $[a, b]$, se denota por E al conjunto de puntos limitado por la gráfica de f, el eje de las abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$. Además, E puede expresarse como la unión de los subconjuntos E^+ y E^-, que corresponden a los puntos de E que están por encima y por debajo del eje x, respectivamente. Lebesgue observa que si el conjunto E es medible, en cuyo caso también lo son E^+ y E^-, entonces la integral definida de f entre a y b puede definirse por $\int_a^b f = m(E^+) - m(E^-)$. Esta definición constituye la generalización geométrica de la noción de integral.

Pero más adelante Lebesgue daría una definición más fina de la integral y mostraría la superioridad de esta en comparación con las anteriores. Para ello, tuvo como punto de partida su planteamiento geométrico de la integral, pues nos explica que

> Este método tiene la ventaja de llevarnos a definir la integral de una función discontinua acotada como la medida de un cierto conjunto de puntos… En una nota al margen, esta definición puede reemplazarse por una definición analítica, bajo la cual la integral aparece entonces como el límite de una serie de sumas de forma muy parecida a las que considera Riemann en su definición (Lebesgue H. , 2010, pág. 916).

Su estrategia consiste en tomar una partición, no en el intervalo donde está definida la función, sino en su rango y definir la integral en términos de una suma de conjuntos medibles, antes que como una suma de rectángulos. Consideremos una función f definida y acotada en el intervalo $[a, b]$ y veamos como procede. Por ser acotada existen n y M tales que $n \leq f \leq M$, entonces se puede considerar una partición $P = \{m = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = M\}$ de $[m, M]$ y pueden definirse los conjuntos medibles de la forma $E_i = \{x : a_i \leq f(x) \leq a_{i+1}\}$. Luego considera las sumas

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i m(E_i), \quad \delta_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(E_i)$$

Y concluye que si tienden a un mismo límite, independientemente de los a_i elegidos, cuando la diferencia máxima entre dos a_i consecutivos tiende a cero, entonces este límite será por definición la integral definida de la función f. Es decir,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sigma_n = \lim_{\|P\| \to 0} \delta_n$$

Lebesgue prueba que si f es integrable en el sentido de su definición, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x : f(x) > \alpha\}$ es medible, resultado que permite inferir fácilmente que los E_i son medibles. A las funciones que satisfacen esta condición se les denomina medibles. Además, demuestra que su definición cumple las propiedades usuales de la integral; que las funciones medibles, clasificación que acoge la función de Dirichlet, son integrables y su integral se conserva en el paso al límite; también prueba que se cumple el teorema fundamental del cálculo y se da cuenta que una función acotada es R-integrable si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida nula.

La integral de una función f entre los límites de integración a y b puede ser interpretada como el área bajo la gráfica de f. Esto es fácil de asimilar, por ejemplo, en el caso de las funciones continuas o con un número finito de discontinuidades; pero, en el caso de las funciones con infinitas discontinuidades o que son discontinuas en un conjunto denso ¿seguirá teniendo sentido la interpretación de su integral como área bajo la curva? Como ya se dijo, una función acotada discontinua en un conjunto de medida cero es integrable y su integral corresponde a la medida del recinto determinado por la gráfica de la función, pero ¿es dicho valor equiparable al "área bajo la curva"? La clave para dar una respuesta a este interrogante, posiblemente, está en el hecho de considerar el área como un caso particular de la medida de conjuntos.

5. CONCLUSIONES

En esta investigación, nuestro propósito ha sido seguirle la huella al desarrollo histórico de la noción de área a lo largo de más de veinticinco siglos, hasta su definición formal, en el marco de la teoría de la medida, para dominios cuadrables a comienzos del siglo XX. A modo de conclusión queremos destacar los siguientes aspectos.

La práctica de medir extensiones de tierra surgió como una necesidad natural entre las civilizaciones antiguas. Según lo registra la historia, los primeros descubrimientos en el arte de medir longitudes y superficies emergieron entre los babilonios y los egipcios. Por ejemplo, en el antiguo Egipto los primeros interesados en desarrollar un método para medir superficies de tierra fueron los sacerdotes; pues, cada año, durante la época de la cosecha exigían un tributo a los agricultores como paga por sus servicios y, al parecer, la cuantía de este dependía de la extensión de la propiedad. Pero otra de las razones que mantuvo ocupados a los sacerdotes, en su tarea de medir la tierra, fue la necesidad de restablecer los linderos de cada propiedad, ya que cada año estos desaparecían por causa de los desbordamientos del Nilo. En este contexto, los egipcios medían una superficie de tierra mediante la comparación con la superficie de figuras que para la época ya eran conocidas tales como el cuadrado, el rectángulo, el triángulo rectángulo y el trapecio. La unidad básica de superficie que utilizaban era el cuadrado. Aunque no desarrollaron métodos generales para medir estas figuras, en algunos casos lograron aproximaciones aceptables. Por ejemplo, su método de cálculo para medir terrenos triangulares era adecuado, pero solamente era aplicable a magnitudes con una unidad común. También lograron una aproximación aceptable del área del círculo pero no hay certeza de cómo idearon esta y otras formas de cálculo. Las teorías que se han sugerido parecen razonables pero no dejan de ser fruto de la especulación ya que, en los documentos antiguos, cuando el escriba resuelve un problema, solo se limita a realizar los cálculos sin dar ninguna explicación de los métodos utilizados. Por lo tanto, en estas culturas no hay ningún rasgo de abstracción matemática o de algún algoritmo general para sus mediciones. En contraste con los griegos, no estaban interesados en cultivar la matemática por sí misma sino en la obtención métodos prácticos de cálculo.

La medida de superficies en la Grecia antigua se realizó mediante la comparación de figuras geométricas en el marco de un razonamiento formal, siendo el cuadrado el patrón referencial de medida. De una matemática motivada por la necesidad de resolver los problemas cotidianos de medición, se daría el paso hacia una matemática motivada por la construcción de razonamientos generales y abstractos que justifiquen el cumplimiento de una propiedad en todos los casos. Los autores de este gran salto cualitativo son los griegos, quienes desempeñan un papel importante en la construcción de la matemática como disciplina racional. Para ellos, el problema del área se reduce al problema de las cuadraturas; es decir, adoptando el cuadrado como unidad referencial, al igual que los egipcios, se proponen determinar el cuadrado equivalente a una figura plana dada. Para ello, articularon un corpus teórico en el que establecieron propiedades generales para todos los cuadrados, todos los triángulos, todos los círculos, etc. y con esta teoría lograrían darle salida al problema de las cuadraturas, aunque de manera parcial. En los libros I y II de los *Elementos*, Euclides resuelve el problema de hallar el cuadrado equivalente a una figura rectilínea plana, mediante el método de regla y compás. El problema es netamente geométrico, no hay números involucrados en el proceso, y se resuelve descomponiendo la figura en varias piezas que luego serán reacomodadas formando el cuadrado equivalente. Sin embargo, aún quedaba por resolver el problema de las cuadraturas para figuras curvilíneas. Para avanzar en este problema fue clave la teoría de las razones y proporciones de Eudoxo, en respuesta al problema de las magnitudes inconmensurables. En este nuevo enfoque, fue posible establecer proporciones entre razones de figuras geométricas que no necesariamente son de la misma naturaleza. En este sentido, pudieron comparase razones de figuras planas curvilíneas con razones de figuras planas rectilíneas. Es así como Arquímedes, usando el método exhaustivo y razonando por reducción al absurdo, establece la cuadratura de un segmento de parábola y demuestra que todo círculo es equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos coinciden con la circunferencia y el radio del círculo. Los trabajos de Arquímedes se constituyeron en un precedente fundamental para el desarrollo de la noción de área en siglos posteriores. Pues, al igual que Euclides, en sus trabajos usa implícitamente la monotonía y la aditividad que llegarían a ser propiedades del área y porque, además, fue el primero en considerar las superficies como formadas por líneas o elementos infinitesimales a partir de los cuales podría determinarse su área.

Hacia el siglo XVII, los matemáticos utilizaron la noción de infinitesimal para abordar el problema de las cuadraturas. Los métodos que desarrollaron estaban fundamentados en la concepción de un área como una suma de elementos infinitesimales. Por ejemplo, usando técnicas infinitesimales Kepler resuelve el problema de hallar el área de un círculo. Galileo rompe con la tradición aristotélica al sostener que el continuo está formado de indivisibles y por consiguiente vendrían a ser las partes constitutivas de las figuras geométricas, compartiendo con estas la misma naturaleza. Siguiendo estas ideas y las de Kepler Cavalieri desarrolló el método de los indivisibles con el que contribuyó al cálculo de áreas más generales. No obstante, la importancia de su método no radica tanto en los resultados que obtuvo sino en la heurística mediante la cual se permitía subdividir una figura en partes muy pequeñas para obtener una mejor comprensión de los problemas geométricos. Como es sabido, la noción misma de infinitesimal presentaba problemas de rigor que los estudiosos de la época no supieron resolver; pero, esto no fue un obstáculo para que idearan métodos operativos distintos que resultaron adecuados para solucionar algunos problemas de cuadraturas. Aunque en esos días la matemática griega era admirada por su rigor y constituía una asignatura esencial de formación, los matemáticos no pudieron inferir de sus métodos ideas claras acerca de cómo enfocar los nuevos problemas, entre ellos el de cuadraturas más generales. Es seguramente la razón por la que adoptaron otros métodos que aunque no estuvieran a la altura del rigor griego, proveyeron la heurística necesaria para solucionar algunos problemas específicos. Es siguiendo en esta dirección que, por ejemplo, Wallis establece el área del rectángulo como el producto de la base por la altura y plantea que una cuadratura puede obtenerse al sumar un número infinito de líneas paralelas. Desde esta perspectiva una región limitada por una curva es concebida como formada por infinitas líneas paralelas al eje y. Además, al observar que la cuadratura limitada por curvas de la forma $y = x^k$ constituye un caso particular de las razones de índice k, empezaría a dilucidarse la posibilidad de medir una cuadratura en correspondencia con un valor numérico. De esta forma, el problema de las cuadraturas empieza a constituirse en el problema de hallar el área bajo la curva. Debe advertirse que la concepción del área como una suma de infinitesimales no resolvía el problema, pues no había certeza de lo que había de entenderse por magnitud infinitesimal y por una suma infinita.

Es pertinente señalar aquí que, para un rectángulo de lados a y b, los predecesores de Wallis entendían el simbolismo ab como la expresión que representaba su área y no como el producto de las magnitudes a y b. Para que Wallis llegase a concebir este producto como el área del rectángulo fue muy importante el aporte de René Descartes, para quien el producto de segmentos puede definirse como una operación cerrada. Luego, al identificarse los números con las magnitudes, el producto entre a y b se constituyó en el número que se le asigna al área del rectángulo en cuestión.

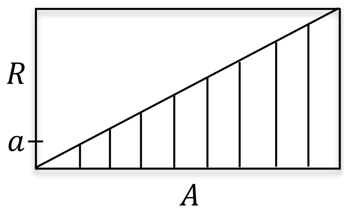


Figura 5.1

En la proposición 108, Wallis dice que si una sucesión constante es reducida término a término por una sucesión de primeras potencias, entonces la suma de las diferencias será la mitad de la suma de las sucesiones constantes. En el marco del argumento, según se explica en (Vargas, 2007, pág. 18), se considera que el término de la sucesión constante y el último de la sucesión de primeras potencias es R, véase la figura 5.1. Para Wallis la cantidad $a = \frac{R}{\infty}$ corresponde a una parte infinitamente pequeña de R y, seguramente, en la idea de que cada término de la sucesión de primeras potencias se puede poner en correspondencia con una línea levantada sobre A, concluye que el número total de los términos de esta sucesión es A. De aquí que "si la altura del rectángulo es A, su área es AR". Es de esta manera que Wallis expresa el área del rectángulo, un hecho que posibilitaría

> La introducción de los infinitesimales, al considerar una figura F como formada por estos rectángulos de ancho infinitesimal, obteniendo de esta manera $F = \sum l \cdot \Delta x$, donde Δx representa el ancho infinitesimal de los rectángulos (Vargas, 2007, pág. 52).

Antes del auge de la geometría analítica no se desarrollaron principios generales para la determinación de cuadraturas. Para ello sería necesario establecer la metodología que permitiera expresar un problema geométrico en uno algebraico y viceversa. Es con Descartes que adquiere sentido el producto de segmentos, aumenta el universo de las curvas, se incorpora una notación que facilita la comprensión del discurso matemático y, entre otras cosas, se establece el método para resolver los problemas geométricos. Dotar a los segmentos de la propiedad clausurativa es un hecho que trae implícito un avance muy importante en el problema del área. Pues como la superficie de un rectángulo es el producto de la base por la altura y dado que el área se concibe como la suma de rectángulos infinitesimales, entonces podrá asignarse un número no solo a las figuras geométricas sino también al área bajo la gráfica de una curva representada analíticamente. Desde entonces el método analítico adquiere preferencia y, por tanto, se intenta prescindir de la intuición geométrica. En este marco, la integral es vista solo como un operador sobre las expresiones analíticas que representaban funciones; no obstante, la consideración de la integral como una antiderivada era razonable solo para funciones continuas, ya que no tenía sentido hablar de antiderivadas de sistemas de ecuaciones. Fourier, quién estudia la representación de funciones arbitrarias en series trigonométricas, ve la necesidad de retornar al referente geométrico y sugiere que para calcular los coeficientes de dichas series, las integrales deben ser consideradas como áreas. En términos generales estaría diciendo que el conjunto limitado por la gráfica de una función integrable tiene, en todos los casos posibles, un valor definido el cual es el valor de la integral. Luego, la definición y existencia de la integral se fundamentan en la noción de área. Por ser un problema antiguo, para esta época se admitía que todo conjunto acotado tenía un “área”, pero el concepto no había sido definido formalmente ni había claridad acerca de sus propiedades.

En el siglo XVIII predominó la intuición geométrica para abordar y resolver problemas de cálculo. Durante esa época se desarrollaron métodos innovadores mediante los cuales se resolvieron muchos de los problemas que se habían planteado. Pero, aunque su utilidad era indiscutible, en esos métodos había ciertos problemas de rigor que los estudiosos no habían podido resolver. Con el surgimiento del análisis matemático emerge un distanciamiento del referente geométrico, puesto que empieza a delinearse un tratamiento formal, esencialmente aritmético y lógico, de los conceptos de límite, función y convergencia. En este nuevo escenario se resuelven los problemas de rigor que habían presentado las magnitudes infinitesimales. Además, la integral se convierte en un problema del análisis y, por tanto, es definida analíticamente como el límite de una suma, en el marco de las funciones continuas. Así, la existencia de la integral se fundamenta en la existencia de dicho límite y cuando esta existe tiene sentido hablar del área, pues no se desconoce la interpretación geométrica de la integral como área bajo la curva. De esta forma, con el giro que ha dado Cauchy, la existencia del área depende de la existencia de la integral. Por lo tanto, puede decirse que con la integral definida el problema de las cuadraturas planeado por los antiguos, para las regiones planas limitadas por curvas de medida exterior cero, fue resuelto desde el análisis en el sentido de haberse probado la existencia de la solución para todos los casos. En otras palabras, aunque Cauchy no considera la necesidad de formalizar la noción de área, al interpretar la integral como el área bajo la curva y asignarle un número a esa región, ha dado un paso importante que señalaría el camino para su posterior definición a comienzos del siglo XX.

Cauchy dio una definición analítica de la integral para funciones continuas, por lo que no es muy claro porqué a su turno Peano asume que la existencia y la definición de la integral se fundamentan en la existencia del área. Como sea, Peano piensa que no debería ser así porque hasta ese momento aún no se había llegado a una definición matemática precisa de la noción de área. Lo que hay que destacar aquí es que el italiano va más allá de su crítica al establecer lo que, hasta entonces, al parecer, era la primera definición formal del concepto en cuestión para una región acotada del plano, en términos de la noción de contenido.

Para poder establecer una definición más general de la integral que resolviera los defectos de la integral de Riemann y una definición tan precisa como fuera posible del problema del área, Lebesgue retomó los estudios que Jordan había realizado en esta dirección y los estudios de Borel en torno a la medida de conjuntos. Contrariamente a lo que había sucedido durante el desarrollo del análisis matemático, Lebesgue plantea que la geometría es una herramienta indispensable para establecer una generalización de la integral que acoja una colección más general de funciones. Desde su perspectiva, la medida de conjuntos no es más que una generalización de los objetos geométricos, por lo cual observa que a partir de la idea de medida de un conjunto de puntos en el plano, se podrá inferir la idea de área de una región plana. Así, Lebesgue define la integral a partir del área y explica que esta puede reemplazase por una definición analítica. Él lo expresa de la siguiente forma:

> Nada nos impide definir la integral de una función continua como el área de un dominio plano; y de hecho este método tiene la ventaja de llevarnos a definir la integral de una función discontinua acotada como la medida de un cierto conjunto de puntos… esta definición puede reemplazarse por una definición analítica, bajo la cual la integral aparece entonces como el límite de una serie de sumas de forma muy parecida a las que considera Riemann en su definición (Lebesgue H. , 2010, pág. 916).

Para una función positiva f definida en un intervalo $[a,b]$, Lebesgue define el conjunto $E = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ y, desde una perspectiva geométrica, aduce que para garantizar la existencia de la integral de f es necesario y suficiente que E sea J-medible y la medida de E será su integral. Así, Lebesgue define la integral de una función acotada, en un intervalo acotado, en términos de la medida del conjunto acotado por su gráfica; por lo que, en el marco de esta definición, se entiende que el área bajo la gráfica de una función continua es un caso particular de la medida de conjuntos.

Por otra parte, Lebesgue define el problema y concluye que solo es posible para los dominios limitados por curvas cuya medida superficial es nula, es decir, los dominios que él mismo denomina cuadrables. Pero ¿Qué sucede con los dominios limitados por curvas fractales o por curvas que tiene área? ¿Tiene área una curva fractal? En los párrafos subsiguientes discutiremos algunas ideas sobre este asunto.[70]

Sea α una curva rectificable en el plano cubierta por una cuadrícula, formada por líneas paralelas a los ejes coordenados, constituida por cuadrados de lado λ. Si $N(\lambda)$ es el número de cuadrados que tienen algún punto en común con la curva, entonces el $\lim_{\lambda\to 0} N(\lambda)\cdot\ \lambda$ es finito, lo que implica que

$$m_e(\alpha)=\lim_{\lambda\to 0} N(\lambda)\cdot\ \lambda^2=0$$

Esto significa que la medida exterior o "área" de una curva rectificable es nula. Ahora, nos preguntamos si ocurre lo mismo con curvas, tipo fractal, de longitud infinita. Cuando se trata de medir estos objetos, siempre habrán partes más finas que escapan a la sensibilidad del instrumento utilizado y a medida este se hace más sensible, también aumenta la longitud de la curva. Por ello, para las curvas fractales el concepto de longitud no está claramente definido. Esto sucede, por ejemplo, con la curva cerrada de Koch que se construye a partir de un triángulo equilátero, en este caso, de perímetro unitario. Primero se divide cada uno de los lados del triángulo inicial en tres partes iguales de longitud $\frac{1}{3^2}$; luego, en cada lado, se quita el segmento central y los dos segmentos que quedan se vuelven a unir con otros dos segmentos de su misma longitud, como se ilustra en la figura 5.1. El símbolo $L(\lambda)$ denota la longitud de la curva cuando está formada por $N(\lambda)$ segmentos de longitud λ. De esta manera, en el primer paso, se obtiene una curva de longitud $L\left(\frac{1}{3^2}\right)=\frac{4}{3}$. Si en cada uno de los lados de la figura obtenida en el paso anterior se aplica el mismo proceso, entonces tendremos una curva de longitud $L\left(\frac{1}{3^3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^2$ conformada por $N\left(\frac{1}{3^3}\right)=3\cdot 4^2$ partes de longitud $\frac{1}{3^3}$. Así, en el n-ésimo paso se obtiene una curva de longitud $L(\lambda)=\left(\frac{4}{3}\right)^n$ constituida por $N(\lambda)=\frac{L(\lambda)}{\lambda}$ segmentos de longitud $\lambda=\frac{1}{3^{n+1}}$. Luego, la longitud de la curva límite, llamada curva de koch, crece indefinidamente aunque acota una región del plano

[70] Las ideas de los párrafos siguientes en relación a este tema han sido tomadas y adaptadas fundamentalmente de (Dieulefait, 2003), (Gutierrez & Hott, 2004) y (Plaza, 2011).

con área finita. Por lo tanto, cuando la longitud de la línea fractal depende de la unidad de medida que se tome, la noción de longitud carece de sentido. Por lo anterior, se ha incorporado el concepto de dimensión fractal que indica en qué forma una curva fractal llena una porción del plano.

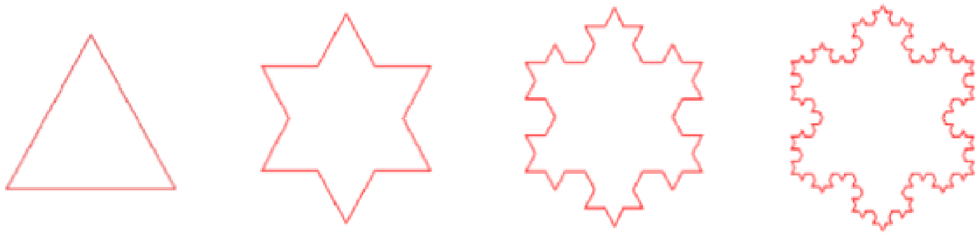


Figura 5.2

Para una curva infinita la expresión $N(\lambda) \cdot \lambda$ diverge y, si la curva no tiene área, $N(\lambda) \cdot \lambda^2$ converge a cero cuando λ se hace tan pequeña como se quiera. Ahora, si una curva infinita llena una superficie plana entonces, en el límite, podemos pensar que $N(\lambda) \cdot \lambda^2$ converge al área de la curva. Así, una curva infinita, de tipo fractal, será un objeto matemático que cumple un "rol intermedio" entre una curva y una superficie; luego, existirá un único número D en el intervalo $[1,2]$ tal que $\lim_{\lambda \to 0} N(\lambda) \cdot \lambda^D = k$, donde k es una constante no nula. El exponente D es la dimensión fractal de la curva y se puede definir como $D = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\ln N(\lambda)}{\ln \lambda^{-1}}$. Observe que si $N(\lambda) = 3 \cdot 4^n$ y $\lambda = \frac{1}{3^{n+1}}$ entonces $D = 1.26186$, cifra que corresponde a la dimensión de la curva cerrada de Koch. De otro lado, la medida interior del dominio E, $m_i(E)$, limitado por la curva de Koch, generada a partir de un triángulo equilátero de lado ℓ_0, es:

$$m_i(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{3}}{4} {\ell_0}^2 \left[1 + \frac{3}{4} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{3^2} \right)^i \right] = \frac{8}{5} A_0$$

Donde A_0 es el área del triángulo inicial. Pero ¿es $m_i(E)$ también el área del dominio E? La respuesta a este interrogante es afirmativa, ya que las curvas con dimensión fractal menor que dos tienen medida nula, como se muestra a continuación.

Teorema. Una curva con dimensión fractal menor que dos tiene medida de Jordan cero.

En efecto, consideremos una curva plana α y supongamos que $D < 2$. Si α es cubierta por $N(\lambda)$ cuadrados de lado λ entonces $\lim_{\lambda\to 0} N(\lambda) \cdot \lambda^D = k > 0$. Luego, se llega a que:

$$\lim_{\lambda\to 0} N(\lambda) \cdot \lambda^2 = \lim_{\lambda\to 0} N(\lambda) \cdot \lambda^D \cdot \lambda^{2-D} = k \cdot \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{2-D} = 0$$

Lo que implica que la curva α tiene medida exterior cero. También puede verse que los casos en que una curva tiene “área” se dan cuando su dimensión fractal es igual a dos.

Un ejemplo de curva simple que tiene área puede construirse a partir de un cuadrado unitario. Primero se subdivide en 9 cuadrados iguales de lado $\frac{1}{3}$ que se separan entre sí a una distancia de $\frac{1}{3^2}$. Si en cada uno de los cuadrados trazamos una diagonal, siendo alternado el conjunto de todas ellas, y las unimos por medio de segmentos se obtiene la poligonal izquierda de la figura 5.2. Luego, en un segundo paso, cada una de las partes del primer paso se subdividen en 9 cuadrados iguales de lado $\frac{1}{3^2}$ y se separan entre sí una distancia de $\frac{1}{3^4}$. De cada cuadrado se escoge una diagonal, alternadamente, y el total de las mismas se unen con los segmentos respectivos para formar la poligonal derecha de la figura 5.2. El resultado de continuar con este proceso, en el límite, será una curva α que empieza y termina en los extremos opuestos de una misma diagonal. Para obtener una curva simple cerrada, que sea la frontera de un dominio E, solo hay que unir los extremos de α con una curva adecuada. Como α es una curva simple de dimensión topológica unitaria entonces $m_i(\alpha) = 0$, en el sentido de Jordan. Además, puede verse que cuando el área de los cuadrados de la subdivisión tiende a cero, el cubrimiento óptimo de la curva tiende al área del cuadrado original, lo que implica que $m_e(\alpha) = 1$. Por ello, ni la curva cerrada ni el domino E son Jordan medibles, pero si lo serán en el sentido de Borel-Lebesgue ya que *la medida de Borel de un cerrado coincide con su medida exterior de Jordan, y la de un abierto con su medida interior de Jordan*. Por lo tanto, la curva α tiene área. Además es fácil comprobar que $D(\alpha) = 2$ es su dimensión fractal.

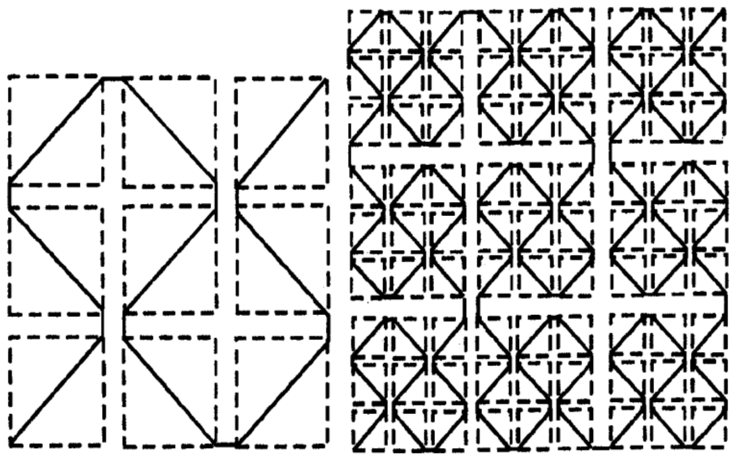


Figura 5.3

En general, nos preguntamos si el problema del área es posible para los dominios que tienen una curva no cuadrable como parte de su frontera. Pero la respuesta a este interrogante no es nada trivial, por lo que amerita sea desarrollada con más profundidad en una investigación posterior.

BIBLIOGRAFÍA

Andersen, K. (1985). Cavalieri's Method of Indivisibles. *Archive for History of Exact Sciences*, 291-367.

Anónimo. (s.f.). *Funciones y curvas extraordinarias, o un paseo por un museo de arte matemático.* Obtenido de valle.fciencias.unam.mx/titulacion/narraciones2.pd

Apostol, T. M. (1976). *Análisis matemático.* Reverté.

Apostol, T. M. (1988). *Calculus. Vol. 1.* Reverté.

Arquimedes. (1970). *En: Científicos Griegos. Recopilación de Francisco Vera.* Madrid: Aguilar.

Arribas, I. (s.f.). *Pi en el Egipto de los faraones.* Obtenido de pages.uv.es/iarribas/wikibase/Varios/Pi_egipto.pdf

Berciano, A. (s.f.). *Matemáticas en el Antiguo Egipto.* Obtenido de www.ehu.es/aba/div/paseo-06-07.pdf

Bobadilla, M. L. (2012). *Constitución histórica de la teoría de la medida y la integral de Lebesgue: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico.* Cali: Tesis Universidad del valle.

Boyer, C. (1987). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Cauchy, A. (1994). *Curso de Análisis. Traducción el español: Carlos Alvarez.* México: Servicos Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

Chamorro, G. y. (2009). *Estudio histórico-epistemológico del concepto de integral: Cauchy - Riemann - Lebesgue.*

Collette, J. P. (1998). *Historia de las matemáticas II. 3ed.* Siglo veintiuno editores.

Collette, J. P. (2002). *Historia de las matemáticas I. 5ed.* Siglo veintiuno editores.

Dennis, D. y. (2000). La creación de exponentes continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 5-31.

Descartes, R. (1996). *Discurso del método. La diótrica. Los Meteoros. La geometría.* Barcelona: Círculo de Lectores.

Dieulefait, L. V. (2003). Medida de Jordan. *Miscelánea matemática*, 29-63.

Euclides. (1970). *En: Científico Griegos. Recopilación de Francisco Vera.* Madrid: Aguilar.

Euclides. (1991). *Elementos. Versión española de María Luisa Puertas.* Madrid: Gredos.

González U., P. (s.f.). *La Geometría de Descartes.* Obtenido de www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriadescartes.pdf

González, P. (s.f.). *Orígenes y evolución histórica del cálculo infinitesimal.* Obtenido de es.slideshare.net/PabloPerez6/calculinfinitesimal

Grattan-Guinness, I. (1980). *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. An Introductory History. Tradución al español: Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica.* Madrid: Alianza Editorial.

Gutierrez, P., & Hott, E. (2004). *Introducción al mundo fractal: matemática.* Obtenido de www.sectormatematica.cl/fractales/fractales.pdf

Hawkins, T. (1979). *Lebesgue's theory of integration. Its Origins and Development.* New York: Chelsea Publishing Company.

Hawkins, T. (1984). Los orígenes de las teorías de integración modernas. En I. Grattan-Guinness, *Del cálculo a la teoría de conjuntos,1630-1910. Una introducción histórica* (págs. 194-234). Madrid: Alianza Editorial.

Hogben, L. (1968). *El maravilloso mundo de las matemáticas.* Aguilar.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días. Vols. I, II, III.* Madrid: Alianza Editorial.

Lebesgue, H. (1902). *Integrale, Longeur, aire.* Milan: Annali di Matematica Pura et Aplicatta: Universidad de Nancy.

Lebesgue, H. (1903). Sur le problème des aires. *Bulletin de la S.M.F. tome 31*.

Lebesgue, H. (1936). *La mesure des grandeurs. Traducción al español: La medida de las magnitudes.* Mexico: Editorial Limusa, 1995.

Lebesgue, H. (2010). Integrale, Longeur, aire. Traducción al español: Intaegral, longitud y área. En S. Hawking, *Dios creó los números. Recopilación de los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia.*

López, F. (1997-2014). *Las matemáticas en el Antigu Egipto*. Obtenido de www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

Plaza, S. (2011). *Fractales: una introducción.* Obtenido de fermat.usach.cl/~dinamicos/Fractales.minimonograph.pdf

Recalde, L. (2011). *Lecciones de historia de la matemática.* Cali: Universidad del Valle.

Sellés, M. (s.f.). *La teoría de los indivisibles de Galileo y su geometrización del movimiento.* Obtenido de Internet

Thomson, J. E. (1951). *Geometría.* Mexico: Uteha.

Turégano, P. (1993). *De la noción de área a su definición: investigación histórica sobre las técnicas, métodos y conceptos que condujeron a la teoría de la medida.* Universidad de Castilla.

Turner, R. (1948). *Las grandes culturas de la humanidad.* Mexico: Fondo de cultura económica.

Vargas, V. (2007). *De los indivisibles a los infinitesimales en Arithmetica infinitorum Wallis 1956.*