



# Uso de variables latentes para estimar el origen más probable de un evento sísmico

Juan Camilo Martínez Muñoz

Universidad del Valle  
Facultad de Ingeniería, Escuela de Estadística  
Santiago de Cali, Colombia  
2019



# Uso de variables latentes para estimar el origen más probable de un evento sísmico

**Juan Camilo Martínez Muñoz**

Tesis o trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Estadística**

Directores:

José Rafael Tovar Cuevas, Doctor en Estadística  
Lina Ospina Ostios, PhD. Ciencias de la Tierra

Línea de Investigación:  
Probabilidad

Universidad del Valle  
Facultad de Ingeniería, Escuela de Estadística  
Santiago de Cali, Colombia

2019



## Dedicatoria

Para todas las formas de vida que de algún modo me han ayudado o al menos pretendido hacerlo, particularmente al grupo incondicional de mamíferos que conforman mi familia, seres amados, amigos, profesoras, profesoras y cuerpo administrativo. Sin sus comentarios, críticas, paciencia y apoyo no tendría la posibilidad de estudiar. También a la Universidad del Valle que me abrió las puertas y brindó el privilegio de estudiar Estadística.



# Agradecimientos

Agradezco enormemente a mis seres queridos y amados, en particular a mis papás, mi hermano, mi novia, mis directores de trabajo de grado, compañeros de la maestría, y profesores y profesoras dentro y fuera de la Universidad del Valle que se han tomado el tiempo de leer la propuesta y hacer aportes importantes. Espero no defraudar y seguir avanzando.

Espero que la propuesta ayude a resolver problemas y facilite otros procesos de investigación que permitan que esta propuesta siga mejorando.

También, al proyecto CI2850 de convocatoria interna de la Universidad del Valle por haber financiado el presente trabajo de investigación. Como gesto de gratitud, el código computacional desarrollado es libre para ser utilizado por cualquier persona.

# Declaración

Me permito afirmar que he realizado el presente Trabajo de Grado de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en el propio trabajo. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los hemos reconocido. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de Tesis o Trabajo de Grado.

Igualmente declaro que los datos utilizados fueron proporcionados por el Servicio Geológico Colombiano para el avance del conocimiento del territorio nacional.

Santiago de Cali, 08.04.2019

---

(Juan Camilo Martínez Muñoz)

## Resumen

Este trabajo de investigación presenta una propuesta metodológica para resolver el problema conjunto Hipocentro-Modelo de Velocidad considerando la forma probabilística y no lineal del problema inverso. La incertidumbre de los tiempos de arribo y modelos de velocidad es analizada y modelada por variables aleatorias que involucran la subjetividad e información externa de los datos y parámetros del fenómeno físico. El *problema hacia adelante* es descrito por la solución de la ecuación de onda para medios no homogéneos a través de la ecuación Eikonal o cálculo de tiempos de viaje de rayos sísmicos, considerando la metodología de Monte Carlo para diferentes escenarios de posición inicial y configuración de modelos de velocidad. La selección de focos probables considera las variables aleatorias construidas para los tiempos de arribo registrados por estaciones sismológicas y los tiempos de viaje aleatorios calculados. Las estimaciones obtenidas con la propuesta metodológica son validadas empíricamente usando el concepto de convergencia en probabilidad de sucesiones de variables aleatorias. Finalmente, la solución del problema conjunto Hipocentro-Modelo de Velocidad es resumida por los valores esperados de los las sucesiones de variables aleatorias de los parámetros hipocentrales y modelos de velocidad probabilísticos.

**Palabras clave:** Sismología, Tiempo de Viaje, Variable Aleatoria, Problema Inverso, Convergencia de Variables Aleatorias.

## Abstract

This document presents a methodological proposal to solve the joint problem Hypocenter-Velocity Model considering the probabilistic and non-linear form of the inverse problem. The uncertainty of the arrival times and speed models is analyzed and modeled by random variables that involve the subjectivity and external information of the data and parameters of the physical phenomenon. The problem ahead is described by the solution of the wave equation for non-homogeneous media through the Eikonal equation or calculation of travel times of seismic rays, considering the Monte Carlo methodology for different initial position scenarios and configuration of models of speed. The selection of probable sources considers the random variables constructed for the arrival times recorded by seismological stations and the calculated random travel times. The estimations obtained with this methodological proposal are validated empirically using the concept of convergence in probability of successions of random variables. Finally, the solution of the joint problem Hypocenter-Velocity Model is summarized by the expected values of the successions of random variables of hypocentral parameters and probabilistic velocity models.

**Keywords:** Seismology, Travel time, Random Variable, Inverse Problem, Convergence of Random Variables.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>XIII</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>XVII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del Problema . . . . .	5
1.1.1. Problema geofísico . . . . .	6
1.1.2. Problema estadístico . . . . .	7
1.2. Justificación . . . . .	8
1.2.1. Justificación del problema estadístico . . . . .	9
1.3. Objetivos . . . . .	11
1.3.1. Objetivo general . . . . .	11
1.3.2. Objetivos específicos . . . . .	11
1.4. Antecedentes . . . . .	12
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>17</b>
2.1. Sismología . . . . .	17
2.1.1. Señal sísmica . . . . .	17
2.1.2. La Tierra como un sólido elástico . . . . .	19
2.1.3. Ecuación Eikonal y rayos sísmicos . . . . .	20
2.2. Marco Teórico estadístico . . . . .	22
2.2.1. Probabilidad . . . . .	22
2.2.2. Teoría del Problema Inverso . . . . .	24
<b>3. Metodología</b>	<b>28</b>
3.1. Tiempo de arribo aleatorio . . . . .	28
3.2. Rapidez de una onda sísmica como variable aleatoria continua . . . . .	31
3.2.1. Variables latentes e incertidumbre . . . . .	32
3.2.2. Transformación de un modelo determinístico en uno probabilístico . . . . .	33
3.3. Obtención de focos posibles a partir de distribuciones <i>a priori</i> . . . . .	38

3.4.	Trazado de rayos sísmicos bajo diferentes escenarios de posición inicial y velocidad . . . . .	39
3.5.	Selección de focos probables a través del cálculo de tiempos de viaje . . . . .	40
3.6.	Tiempo de origen aleatorio . . . . .	43
3.7.	Algoritmo de la propuesta metodológica . . . . .	44
3.7.1.	Valores de entrada . . . . .	45
3.7.2.	Almacenamiento y cálculos . . . . .	46
<b>4.</b>	<b>Resultados</b>	<b>48</b>
4.1.	Variables aleatorias de los tiempos de arribo $\{T_{a_n}\}$ . . . . .	50
4.1.1.	Sotará, Cauca. (SOTA) . . . . .	51
4.1.2.	Popayán, Cauca. (POP2) . . . . .	52
4.1.3.	La Cruz, Nariño. (CRU) . . . . .	54
4.1.4.	Tiempos de arribo generados . . . . .	55
4.2.	Convergencia . . . . .	56
4.2.1.	Focos seleccionados . . . . .	56
4.2.2.	Medias y varianzas muestrales de sucesiones de variables aleatorias . . . . .	59
4.2.3.	Convergencia en Probabilidad . . . . .	64
4.2.4.	Convergencia de los modelos de velocidad probabilísticos $\{V_P\}$ y $\{V_S\}$ . . . . .	65
<b>5.</b>	<b>Discusión, conclusiones y recomendaciones</b>	<b>69</b>
5.1.	Discusión y conclusiones . . . . .	69
5.2.	Recomendaciones . . . . .	73
<b>A.</b>	<b>Anexo: Mecánica del medio continuo</b>	<b>74</b>
A.1.	Anexo: Tensores cartesiano . . . . .	74
A.1.1.	Tensores . . . . .	75
A.1.2.	Análisis de esfuerzo y deformación . . . . .	75
A.2.	Ondas elásticas . . . . .	79
A.2.1.	Rapidez de una onda en un sólido elástico . . . . .	80
<b>B.</b>	<b>Teoría de Rayos</b>	<b>81</b>
B.1.	Ecuación Eikonal . . . . .	81
B.2.	Fases sísmicas . . . . .	83
B.2.1.	Fases corticales . . . . .	83
B.2.2.	Fases sísmicas para toda la Tierra . . . . .	84
B.3.	El problema conjunto Hipocentro-Modelo de Velocidad . . . . .	85
	<b>Bibliografía</b>	<b>86</b>

# Lista de Figuras

1-1.	En recuadro superior la señal sísmica registrada por un sismógrafo, y en el inferior la funciones de densidad de probabilidad asignadas a los intervalos de tiempo donde él analista <i>cree</i> arribó la onda sísmica de interés. Modificado de [Tarantola, 2005]. . . . .	3
1-2.	Ejemplo del método del diagrama de Wadati para calcular el tiempo de origen de un terremoto [Lay and Wallace, 1995b]. . . . .	13
2-1.	Modelo de sismómetro inercial simple que registra movimientos verticales únicamente. Modificado [Shearer, 2009]. . . . .	18
2-2.	Señal sísmica registrada por la estación MRG015 el 24 de Julio de 2008 por <i>National Research Institution for Earth Science and Disaster Resilience</i> del gobierno Japonés. . . . .	18
2-3.	Relación geométrica de un frente de onda circular con un conjunto de rayos.	20
2-4.	Trayectoria del rayo incidente. Modificado de [Shearer, 2009]. . . . .	21
3-1.	Señal sísmica y límite inferior $t_{qh}$ en la componente vertical registrada por una estación de la Red Sismológica Nacional de Colombia. . . . .	29
3-2.	Señal sísmica y una función de densidad de probabilidad asociada al tiempo de arribo aleatorio $T_a$ de la onda P en la estación Sotará (SOTA) de la Red Sismológica Nacional de Colombia. . . . .	31
3-3.	Modelo de velocidad que representa la velocidad de las ondas P y S en función de la profundidad con los colores azul y rojo, respectivamente. Modificado de [Ojeda and Havskov, 2001]. . . . .	33
3-4.	Posibles funciones de densidad de probabilidad para representar la incertidumbre de las rapidezces del modelo de velocidad determinístico, $v(x, y, z)$ propuesto por [Ojeda and Havskov, 2001]. . . . .	36
3-5.	Modelos de velocidad probabilísticos $\{\mathbf{V}_{P_j}\}$ y $\{\mathbf{V}_{S_j}\}$ . En rojo los contornos de densidad de probabilidad de la rapidez de la onda S y en azul para la onda P. . . . .	38
3-6.	Muestreo sobre $\mathbf{w}$ o posiciones iniciales para los focos. . . . .	39
3-7.	Diferentes trayectorias probables para un rayo que viaja en una región del espacio cuya velocidad es una sucesión de variables aleatorias $\{\mathbf{V}(\psi) : \psi \in \mathbb{R}^3\}$ .	40
3-8.	Método de Monte Carlo aplicado a la solución del problema conjunto Hipocentro - Modelo de Velocidad. . . . .	44

4-1. Resumen de la estimación de los parámetros hipocentrales y tiempos de arribo seleccionados por estación. . . . .	48
4-2. Señales sísmicas registradas por las estaciones SOTA, POP2 y CRU, en la componente vertical, con sus respectivos tiempos de arribo estimados para la onda P y S. . . . .	50
4-3. Ampliación de la señal sísmica. Función de densidad de probabilidad para el tiempo de arribo de la onda P, y la línea vertical discontinua anarajanda indica el tiempo de arribo de la onda P según RSNC. . . . .	51
4-4. Ampliación de la señal sísmica. Función de densidad de probabilidad para el tiempo de arribo de la onda P. . . . .	52
4-5. Ampliación de la señal sísmica. Función de densidad de probabilidad para el tiempo de arribo de la onda S. . . . .	53
4-6. Ampliación de la señal sísmica. Función de densidad de probabilidad para el tiempo de arribo de la onda P, y la línea vertical discontinua anarajanda indica el tiempo de arribo de la onda P según RSNC. . . . .	54
4-7. Valores aleatorios generados para la onda P. . . . .	55
4-8. Valores aleatorios generados para la onda S a partir de la función de densidad definida en (4-3). . . . .	55
4-9. Proporción del número de focos probables con respecto al número de focos posibles. . . . .	56
4-10. Sucesiones de variables aleatorias $\{X_k\}$ y $\{Y_k\}$ . . . . .	57
4-11. Comportamiento de las sucesiones de variables aleatorias $\{Z_k\}$ y $\{T_k\}$ . Las líneas anaranjadas horizontales corresponden a la estimación realizada por RSNC. . . . .	58
4-12. Convergencia de los valores esperados de la sucesión de variables aleatorias $\{X_k\}$ . . . . .	60
4-13. Convergencia de los valores esperados de la sucesión de variables aleatorias $\{Y_k\}$ . . . . .	60
4-14. Convergencia de los valores esperados de la sucesión de variables aleatorias $\{Z_k\}$ . . . . .	61
4-15. Convergencia de los valores esperados de la sucesión de variables aleatorias $\{T_{k^*}\}$ . . . . .	61
4-16. Análisis de la convergencia en probabilidad de los parámetros hipocentrales. . . . .	64
4-17. Valores de rapidez plausibles para la región de estudio $w$ . . . . .	65
4-18. Convergencia de los valores esperados de las velocidades representados por las líneas azul y roja discontinuas para las ondas P y S respectivamente. Las líneas continuas indican los valores del modelo de RSNC modificado. . . . .	67
4-19. Convergencia en probabilidad de los modelos de velocidad <i>Esperados</i> . En color azul la convergencia del valor esperado para la onda P y en rojo para la onda S. . . . .	68

---

<b>A-1.</b> Componentes de los esfuerzos que actúan sobre un paralelepípedo rectangular infinitesimal. Modificado [Kolsky, 1963]. . . . .	76
<b>B-1.</b> Nomenclatura de fases sísmica en la Corteza para una onda P. Modificado [Shearer, 2009]. . . . .	84
<b>B-2.</b> Nomenclatura de fases sísmica para las ondas P y S en el Manto y Núcleo de la Tierra. Modificado [Shearer, 2009]. . . . .	85



# Lista de Tablas

3-1. Modelo determinístico de velocidad. Modificado de [Ojeda and Havskov, 2001].	34
4-1. Estimación de los parámetros hipocentrales según RSNC considerando el modelo determinístico de velocidad de [Ojeda and Havskov, 2001]. . . . .	49
4-2. Conversión de unidades de parámetros hipocentrales según RSNC. . . . .	49
4-3. Relación entre cantidad de puntos iniciales $\Lambda$ y focos seleccionados $k$ . . . . .	57
4-4. Diferencia en los resultados obtenidos por la propuesta metodológica y RSNC.	59
4-5. Intervalos de confianza para $E[X_k]$ asumiendo normalidad para $\bar{X}_k$ . . . . .	62
4-6. Intervalos de confianza para $E[Y_k]$ asumiendo normalidad para $\bar{Y}_k$ . . . . .	62
4-7. Intervalos de confianza para $E[Z_k]$ asumiendo normalidad para $\bar{Z}_k$ . . . . .	63
4-8. Intervalos de confianza para $E[T_{k^*}]$ asumiendo normalidad para $\bar{T}_{k^*}$ . . . . .	63
4-9. Parámetros hipocentrales obtenidos para el origen más probable de un evento sísmico. . . . .	64
4-10. Modelo de velocidad <i>Esperado</i> para $\mathbf{w}$ . . . . .	68



# 1. Introducción

*Mucho mejor es una respuesta  
aproximada a la pregunta correcta, que  
a menudo es vaga, que una respuesta  
exacta a la pregunta incorrecta, que  
siempre puede ser precisa.*

---

*John W. Tukey, 1962*

La sismología es un componente de la geofísica que estudia las vibraciones mecánicas que ocurren en la tierra [Aki and Richards, 2002] para tratar de entender los procesos internos del planeta. Estas vibraciones también conocidas como terremotos o eventos sísmicos tienen gran incertidumbre relacionada a los parámetros y variables que controlan su origen y evolución [Tarantola, 2005].

Los registros de las vibraciones y la descripción de los daños o efectos, han generado conocimiento sobre los terremotos desde el siglo II A. C. [Needham, 2004], permitiendo delimitar las regiones de la Tierra donde estos ocurren con mayor frecuencia. Pero el origen espacial o hipocentro <sup>1</sup> de los terremotos sigue representando una situación de gran incertidumbre, dado que nunca se ha podido observar de manera directa el punto en el espacio donde el mismo se originó.

Las hipótesis de las causas de estos fenómenos naturales consideran masas de suelo o roca lo suficientemente grandes para generar vibraciones cuando alguna de estas se desplaza sobre o bajo las demás [Koyama, 2013]. Esto implica que los terremotos de origen natural tienen una profundidad mínima a la que pueden ocurrir, explicando así porque el origen de estos eventos nunca ha sido observado directamente. Dicho esto, estimar la posible ubicación de un terremoto es asumir la tarea de encontrar un punto o región en el subsuelo que explique satisfactoriamente las vibraciones registradas del terremoto.

La presente propuesta metodológica considera el modelo *stick-slip* [Turcotte and Schubert, 2002] como modelo de referencia, el cual asume que existe una región de la Tierra,  $\mathbf{w} \subset \mathbb{R}^3$ , de

---

<sup>1</sup>El hipocentro está definido por las coordenadas espaciales del punto de origen de un terremoto. La palabra *foco* también es un término válido. Mientras que el *epicentro* es la proyección del hipocentro a la superficie topográfica.

geometría desconocida, en un estado de equilibrio representado por un tensor de esfuerzos<sup>2</sup>,  $\boldsymbol{\tau}$ . Esta geometría desconocida está parcialmente acotada por la superficie topográfica<sup>3</sup>, que a la vez, es donde se registran las vibraciones o desplazamientos  $u(x', y', z', t)$ <sup>4</sup>. También, asume un comportamiento aproximadamente elástico<sup>5</sup>, permitiendo que  $\mathbf{w}$  acumule energía potencial,  $E_p$ , durante periodos de tiempo de regimenes compresivos o distensivos. Estas condiciones pueden cambiar haciendo que  $\mathbf{w}$  se aleje del equilibrio, alcanzando un valor crítico de estrés. Una vez alcanzado este valor crítico,  $\mathbf{w}$  puede desarrollar una superficie de ruptura,  $\mathbf{s} \subseteq \mathbf{w}$ , a partir de un punto o foco con coordenadas  $(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o)$ , la cual es conocida como falla geológica, liberando el estrés acumulado desde un tiempo  $\mathbf{t}_o$ . El área superficial de  $\mathbf{s}$  puede ser del orden de  $10^3 \text{ km}^2$ , y el foco puede estar en cualquier punto de  $\mathbf{s}$ . Se asumen además, que a partir del foco se propagan las primeras vibraciones, por eso es necesario identificar los tiempos de arribo<sup>6</sup> de las fases sísmicas<sup>7</sup> que iniciaron la ruptura o terremoto, pues proporcionan datos sobre el foco y su tiempo de origen [Havskov and Ottemöller, 2010].

La energía potencial acumulada durante el tiempo previo a la ruptura o desplazamiento,  $\mathbf{t}_o$ , será disipada en forma de energía cinética o vibraciones. Estas vibraciones generadas en el tiempo  $\mathbf{t}_o$  pueden viajar desde el foco ubicado en  $(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o)$ , hasta una estación ubicada en  $(x_h, y_h, z_h)$ , registrando un tiempo de inicio de vibraciones o tiempo de arribo,  $t_a$ , de la onda sísmica a la estación. De tal manera que la diferencia entre el tiempo de arribo de la onda a la estación,  $t_a$ , y el tiempo de origen,  $\mathbf{t}_o$ , definen un tiempo de tránsito o viaje de la onda en viajar desde su origen o foco hasta la estación.

Esta propuesta metodológica considera únicamente la propagación de ondas elásticas bajo los supuestos de los sistemas conservativos o sistemas sin pérdidas energéticas por fricción, junto con la ley de Hooke [Love, 2013], dejando a un lado el efecto de las ondas visco-elásticas y plásticas. Esto implica que conocer los desplazamientos en la superficie topográfica,  $u(x', y', z', t)$ , será suficiente para estimar el foco  $u(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o, \mathbf{t}_o)$ , si y solo si, se conocen las características mecánicas de  $\mathbf{w}$ . Esta última condición representa un gran problema pues es prácticamente imposible tomar muestras representativas de  $\mathbf{w}$ . Por ejemplo, un evento sísmico ocurrido en el sur-occidente de Colombia puede ser registrado en un área de aproximadamente  $109601 \text{ km}^2$ , y si se considera que este pudo haber ocurrido a una profundidad menor a  $30 \text{ km}$ . Entonces la región del espacio  $\mathbf{w}$  que debería ser muestreada, tendría un volumen de  $3'288.030 \text{ km}^3$ .

---

<sup>2</sup>Ver Anexo A.1.

<sup>3</sup>Conjunto de puntos,  $(x', y', z') \subset \mathbb{R}^3$ , que definen la superficie topográfica.

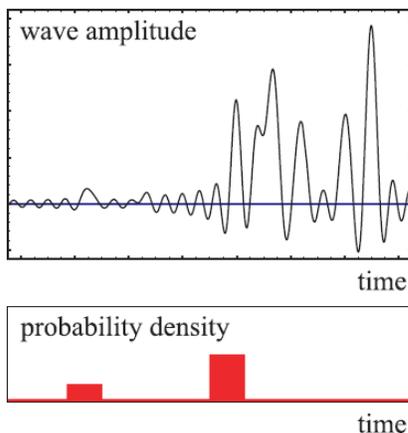
<sup>4</sup> $u$  es una función que cuantifica el desplazamiento de una partícula ubicada en  $(x', y', z')$  en un tiempo  $t$ , tal que  $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ .

<sup>5</sup>Ver sección A.2.

<sup>6</sup>Ver sección 2.1.1.

<sup>7</sup>Ver sección B.2.

Este primer problema de conocer o estimar las propiedades mecánicas de  $\mathbf{w}$  puede ser resuelto conociendo uno de los resultados más importantes de la teoría de la Elasticidad, el cual establece que *La velocidad de propagación de una onda en medio sólido depende únicamente de las propiedades elásticas del sólido y su densidad* [Love, 2013]. Entonces, un *modelo de velocidad*<sup>8</sup>,  $v(x, y, z)$ , para  $\mathbf{w}$  es una abstracción o simplificación de  $\mathbf{w}$ , que permite entender la propagación de ondas sísmicas a través de  $\mathbf{w}$ . Aunque dudas pueden surgir sobre la representatividad o validez del modelo de velocidad, pues este debe ser coherente con toda la información registrada y observada de  $\mathbf{w}$ . Además, debe explicar satisfactoriamente las vibraciones o los datos registrados por las estaciones sismológicas en  $\mathbf{w}$ . Adicional a lo anterior, los  $n$  tiempos de arribo seleccionados<sup>9</sup>,  $\{t_{a_n}\}$ , para un terremoto, pueden tener un alto grado de subjetividad, pues la sensibilidad del instrumento y los efectos de sitio<sup>10</sup> pueden generar ruido que dificulta el proceso de selección, tal y como lo muestra siguiente figura 1-1, en donde se observa como se relaciona la probabilidad de que cierto intervalo de tiempo, representada por la altura del rectángulo rojo, contenga el arribo de una onda sísmica:



**Figura 1-1.:** En recuadro superior la señal sísmica registrada por un sismógrafo, y en el inferior la funciones de densidad de probabilidad asignadas a los intervalos de tiempo donde él analista *cree* arribó la onda sísmica de interés. Modificado de [Tarantola, 2005].

Evidentemente, cualquier tiempo de arribo seleccionado,  $t_a$ , para este caso tendrá una validez cuestionable, pues no hay manera de determinar exactamente el verdadero valor de  $t_a$ . Propuestas como la asignación de *pesos* para representar la validez o incertidumbre como la que propone [Havskov and Ottemöller, 1999], no desaparecen la subjetividad del proceso, pues un tiempo de arribo seleccionado,  $t_a$ , puede tener diferentes *pesos* para diferentes

<sup>8</sup>Un modelo de velocidad es una función,  $v$ , que asigna un valor de rapidez a cualquier punto  $(x, y, z) \in \mathbf{w}$ , tal que  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

<sup>9</sup>Ver sección 2.1.1.

<sup>10</sup>Efecto de las rocas y suelo bajo una estación sismológica sobre las vibraciones registradas [Semblat et al., 2002].

intérpretes. Por esta razón, se propone representar estos tiempos de arribo,  $t_a$ , con funciones de densidad de probabilidad, y así modelar adecuadamente la incertidumbre relacionada con este proceso de selección.

Bajo esta perspectiva, se considera que el problema de la estimación del foco de un terremoto puede ser interpretado como un problema inverso<sup>11</sup> [Tarantola, 2005], asignando variables aleatorias a las velocidades de propagación y tiempos de arribo. Entonces, como una alternativa coherente con la incertidumbre del fenómeno natural y las leyes naturales que lo gobiernan, se propone convertir y fortalecer algún modelo determinístico de velocidad,  $v(x, y, z)$ , en un modelo probabilístico de velocidad,  $\mathbf{V}(x, y, z)$ , usando transformaciones de variables aleatorias. Luego, será posible analizar el comportamiento asintótico de las estimaciones de coordenadas y tiempos de origen de los focos probables,  $u(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o, \mathbf{t}_o)$ , para las diferentes realizaciones,  $\mathbf{v}(x, y, z)$ , del modelo probabilísticos de velocidad,  $\mathbf{V}(x, y, z)$ , que mejor explican las diferentes realizaciones,  $\{t_a\}$ , del conjunto de variables aleatorias de los *tiempos de arribo* probables  $\{T_a\}$ .

Solucionar el problema inverso requiere solucionar el problema hacia adelante<sup>12</sup> definido por la ecuación de onda no homogénea en tres dimensiones [Grigoriu, 2013]:

$$\rho(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla \left[ \mathbf{K}(z) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right], \quad (x, y, z) \subseteq \mathbf{w} \subset \mathbb{R}^3 \quad (1-1)$$

donde la relación de esfuerzo-deformación,  $\mathbf{K}(z)$  es aleatoria con valores siempre positivos que varían según este planteamiento, únicamente en dirección  $z$ . La densidad del medio,  $\rho(z)$  también toma valores siempre positivos y únicamente varía en dirección  $z$ . Esta ecuación puede ser solucionada mediante la ecuación Eikonal y la Teoría de Rayos<sup>13</sup> [Cerveny, 2005], para simplificar los cálculos y el tiempo computacional. Los datos registrados e incógnitas de la ecuación (1-1) se consideran como condiciones iniciales y de frontera:

1.  $u(x, y, z, \mathbf{t}_o)$ : Distribución espacial del foco o posición inicial.
2.  $u(x'_h, y'_h, z'_h, t_a)$ : Desplazamiento registrado por la estación  $h$ , ubicada en  $(x_h, y_h, z_h)$ .
3.  $u_{tt}(x'_h, y'_h, z'_h, t_a)$ : Aceleración registrado por la estación  $h$ , ubicada en  $(x_h, y_h, z_h)$ .
4.  $u(x_\iota, y_\iota, z_\iota, t_{v_j})$ : Puntos que pertenecen a la trayectoria de tiempo de viaje mínimo del rayo, con  $\iota = 1, \dots, j$ , donde  $j$  indica el medio al que pertenece el foco.
5.  $u_t(x, y, z, \mathbf{t}_o)_j = \delta(x, y, z)$ : Velocidad inicial.
6.  $u_t(x_\iota, y_\iota, z_\iota, t_v) = V_j$ : Velocidad en  $j$ -ésimo medio.

<sup>11</sup>Ver sección 2.2.2.

<sup>12</sup>*Forward problem*: El modelo físico o ley natural que explica el resultado observado. Ver sección 2.2.2.

<sup>13</sup>Ver sección 2.1.3.

De esta forma, las soluciones de la ecuación (1-1) podrán ser comparadas con los datos reportados por una red de estaciones. Adicional a lo anterior, cada frente de onda o rayo solución de la ecuación (1-1) tendrá un tiempo de viaje,  $t_v$ , el cual se relaciona con los tiempos de arribo,  $t_a$ , de la siguiente manera [Lay and Wallace, 1995a]:

$$t_a = \mathbf{t}_o + t_v \quad (1-2)$$

Donde, el tiempo de origen del terremoto,  $\mathbf{t}_o$ , es una constante desconocida que se puede calcular a partir de la diferencia entre el tiempo de arribo reportado,  $t_a$ , y el tiempo de viaje calculado,  $t_v$ . Dicho esto, es posible representar la función  $t_v$  en función de las coordenadas de una estación sismológica ubicada en  $(x_h, y_h, z_h)$ , junto con los parámetros del modelo, modificando la expresión de  $t_v$  en [Kissling, 1988]:

$$t_v((\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o), (x_h, y_h, z_h), v(x, y, z)) \quad (1-3)$$

De esta forma, el tiempo de viaje,  $t_v$ , de un frente de onda sísmica dependerá de sus posiciones inicial y final,  $(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o)$  y  $(x_h, y_h, z_h)$ , respectivamente; y un modelo de velocidad  $v(x, y, z)$ . La ecuación (1-2) puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$t_a = \mathbf{t}_o + t_v((\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o), (x_h, y_h, z_h), v(x, y, z)) \quad (1-4)$$

entonces, cualquier tiempo de arribo,  $t_a$ , registrado por una estación ubicada en  $(x_h, y_h, z_h)$ , podrá ser explicado por el tiempo de origen,  $\mathbf{t}_o$ , más un tiempo de viaje calculado  $t_v$ . Por lo tanto, esta propuesta metodológica calcula tiempos de viaje considerando diversos escenarios de posición inicial,  $(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o)$  y rapidez, usando el método de Monte Carlo, donde los valores de rapidez son generados aleatoriamente a partir de un modelo de velocidad probabilístico,  $\mathbf{V}(x, y, z)$ , construido a partir de un modelo de velocidades determinístico,  $v(x, y, z)$ . Luego, los focos seleccionados o posiciones iniciales,  $u(x, y, x, \mathbf{t}_o)$ , más plausibles serán las que mejor expliquen los  $n$  tiempos de arribo,  $\{t_{a_n}\}$ , registrados por una red de  $r$  estaciones sismológicas con ubicación conocida  $\{(x_h, y_h, z_h)\}$  con  $h = 1, 2, \dots, r$ . Finalmente, las coordenadas del foco más probable se evaluarán usando criterios de convergencia de variables aleatorias.

## 1.1. Planteamiento del Problema

Un problema inverso surge cuando se realizan diferentes mediciones o registros,  $\mathbf{d}$ , sobre algún proceso o fenómeno físico del que no se tiene total certeza sobre sus parámetros,  $\mathbf{m}$ , que gobiernan su comportamiento [Mosegaard et al., 2002]. En donde se busca describir como se puede obtener información sobre sus parámetros,  $\mathbf{m}$ , considerando los datos registrados u observados,  $\mathbf{d}$ , a partir de una relación física,  $g$ , entre ambos [Mosegaard and Tarantola, 1995]:

$$\mathbf{d} = g(\mathbf{m}) \quad (1-5)$$

$g(\cdot)$  es conocido como *operador hacia adelante*, y expresa la ley física o modelo matemático que gobierna el fenómeno físico bajo estudio, como es el caso de las ecuaciones (1-1) y (1-4). Dado que no se cuenta con información directa sobre los parámetros del evento sísmico,  $\mathbf{m}$ , como la distribución espacial de las propiedades elásticas de  $\mathbf{w}$ , se propone como problema de investigación, estimar los parámetros,  $\mathbf{m}$ , a través de la solución del problema inverso [Tarantola, 2005]:

$$\sigma(\mathbf{m}, \mathbf{d}) = k \frac{\rho(\mathbf{m}, \mathbf{d})\Theta(\mathbf{m}, \mathbf{d})}{\nu(\mathbf{m}, \mathbf{d})} \quad (1-6)$$

donde las funciones de densidad de probabilidad  $\sigma(\mathbf{m}, \mathbf{d})$  representa información posterior sobre los parámetros y datos del fenómeno natural tales como tiempos de arribo,  $\{t_a\}$ , modelo de velocidad,  $\mathbf{v}(x, y, z)$ , coordenadas hipocentrales y tiempo de origen,  $(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o, t_o)$ ;  $\rho(\mathbf{m}, \mathbf{d})$  representa información *a priori* sobre estos datos y parámetros;  $\Theta(\mathbf{m}, \mathbf{d})$  información teórica sobre la correlación física entre los datos y parámetros, definida por alguna ley natural. La distribución homogénea o uniforme  $\nu(\mathbf{m}, \mathbf{d})$  representa el estado de la información; y  $k$  es una constante de normalización [Tarantola, 2005].

La solución a un problema inverso consiste en la estimación de los parámetros,  $\mathbf{m}$ , que mejor expliquen los datos o registros,  $\mathbf{d}$ :

$$\sigma_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}) = \int_{\mathfrak{D}} \sigma(\mathbf{m}, \mathbf{d}) d\mathbf{d} \quad (1-7)$$

con  $\mathfrak{D}$  como el espacio de datos del sistema físico.

### 1.1.1. Problema geofísico

Los desarrollos físicos y matemáticos permitirían calcular de manera precisa la ubicación de las coordenadas de un foco si se conociera de manera precisa las propiedades físicas y mecánicas de todos los puntos del interior de  $\mathbf{w}$  [Lomnitz, 1982]. Análogamente, la geometría y las propiedades físicas y mecánicas del interior de la Tierra, o de una región  $\mathbf{w}$ , podrían ser determinados si se conociera con exactitud las coordenadas de los focos y tiempos de origen de todos los terremotos que han ocurrido dentro de esta región. Sin embargo, ninguno de los anteriores escenarios es posible, entonces se plantea como problema de investigación, estimar de manera simultánea la ubicación y tiempo de origen del foco de un evento sísmico, junto con las propiedades físicas y elásticas de la región donde este evento tuvo lugar representadas por un modelo de velocidad,  $\mathbf{v}(x, y, z)$ . Lo anterior implica resolver el problema conjunto Hipocentro-Modelo de Velocidad [Kissling et al., 1995]<sup>14</sup>, considerando un solo evento sísmico ocurrido al interior de  $\mathbf{w}$ . La solución del problema planteado implica estimar

---

<sup>14</sup>Ver sección B.3

las coordenadas del foco,  $(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o)$ , y su tiempo de origen,  $\mathbf{t}_o$ , a partir diferentes escenarios de posición inicial para los focos, y diferentes realizaciones del modelo probabilístico de velocidad,  $\mathbf{V}(x, y, z)$ , y de las variables aleatorias de los  $n$  tiempos de arribo seleccionados,  $\{T_{a_n}\}$ . De manera simultánea, se pretende analizar la relación y el comportamiento asintótico del foco y tiempo de origen estimados después de cada realización del modelo de velocidad probabilístico,  $\mathbf{V}(x, y, z)$ .

### 1.1.2. Problema estadístico

El problema estadístico puede ser subdividido en tres partes, asignación de funciones de densidad de probabilidad sobre el *espacio de datos*  $\mathfrak{D}$ , y sobre el *espacio de modelos*  $\mathfrak{M}$ , junto con la implementación del método de Monte Carlo en las soluciones de los problemas *hacia adelante* e inverso.

Los datos o cantidades escalares,  $\mathbf{d}$ , conformados por los valores seleccionados de los  $n$  tiempos de arribo  $\{t_{a_n}\}$  que fueron registrados por  $r$  estaciones sismológicas ubicadas en  $\{(x_h, y_h, z_h)\}$  carecen de una representación del comportamiento de su incertidumbre. Además, tampoco existe un procedimiento que permita construir funciones de densidad de probabilidad que representen la información sobre los posibles tiempos de arribo y su incertidumbre asociada. Dicho esto, el conjunto de las  $n \leq 2r$  observaciones<sup>15</sup> de tiempos de arribo de las ondas P y S deben ser representados por dos conjuntos o sucesiones de variables aleatorias  $\{T_{a_{p_h}}\}$  y  $\{T_{a_{s_h}}\}$ ,

$$\left\{ T_{a_{p_1}}(x_1, y_1, z_1), \dots, T_{a_{p_h}}(x_h, y_h, z_h), \dots, T_{a_{p_n}}(x_n, y_n, z_n) \right\} \quad (1-8)$$

$$\left\{ T_{a_{s_1}}(x_{e_1}, y_{e_1}, z_{e_1}), \dots, T_{a_{s_h}}(x_h, y_h, z_h), \dots \right\}$$

permitiendo expresar el comportamiento de la incertidumbre asociada a  $\mathbf{d}$ , por funciones de densidad de probabilidad sobre el espacio de datos  $\mathfrak{D}$ , denotada por  $\rho_{\mathfrak{D}}(\mathbf{d})$ .

Un modelo de velocidad determinístico,  $v(x, y, z)$ , propuesto para una región  $\mathbf{w}$  puede ser considerado como información *a priori*<sup>16</sup>, sobre la distribución espacial de la velocidad de las ondas P y S en  $\mathbf{w}$ , pero este tipo de información o modelo no incluye la incertidumbre asociada a cada uno de los valores de velocidad, lo cual es necesario para la formulación probabilística del problema inverso que requiere funciones de densidad de probabilidad sobre  $\mathfrak{D}$  y  $\mathfrak{M}$  [Mosegaard and Tarantola, 1995]. Sin embargo, en sismología la conversión de modelos de velocidad determinísticos a probabilísticos no ha sido presentada, por esta

<sup>15</sup>Esta expresión sugiere que si a partir de cada una de las  $r$  estaciones reportan los tiempos de arribo de las ondas P y S se tendría  $2r$  tiempos de arribo. Pero esto no necesariamente ocurre, dado que no siempre es posible definir o seleccionar un tiempo de arribo para la onda S. Por eso  $n \leq 2r$ .

<sup>16</sup>Indica que este modelo fue obtenido previo a la obtención de los datos  $\mathbf{d}$ .

razón, el problema estadístico incluye construir o encontrar sucesiones de variables aleatorias  $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_j, \dots, V_{\mathbf{J}}\}$ , cuyas funciones de densidad de probabilidad representen el comportamiento variable de la velocidad de las ondas sísmicas en los  $\mathbf{J}$  medios de  $\mathbf{w}$ , las cuales deben incluir información *a priori* del modelo de velocidad determinístico:

$$\mathbf{V} = \begin{cases} V_1 & \text{si } (x, y, z) \in ((-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times [0, z_1)) \\ V_2 & \text{si } (x, y, z) \in ((-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times [z_1, z_2)) \\ \vdots & \vdots \\ V_j & \text{si } (x, y, z) \in ((-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times [z_{j-1}, z_j)) \\ \vdots & \vdots \\ V_{\mathbf{J}} & \text{si } (x, y, z) \in ((-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times [z_{\mathbf{J}-1}, z_{\mathbf{J}})) \end{cases} \quad (1-9)$$

De esta forma, se podría relacionar la incertidumbre sobre variación vertical de la rapidez de una onda sísmica en cada uno de los  $\mathbf{J}$  medios de  $\mathbf{w}$ .

La posición inicial y tiempo de origen,  $(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o, \mathbf{t}_o)$ , también hacen parte de los parámetros<sup>17</sup> del modelo  $\mathbf{m}$ , y deben ser modelados por funciones de densidad de probabilidad que representen información *a priori* de la ocurrencia del evento sísmico. En otras palabras, es necesario modelar la información *a priori* de los parámetros del modelo  $\mathbf{m}$  a través de funciones de densidad  $\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{m})$ .

Por último, el enfoque probabilístico del problema conjunto Hipocentro-Modelo de Velocidad implica deducir u obtener información sobre las variables aleatorias que componen los parámetros del evento sísmico, tales como la magnitud de la velocidad por donde viajan las ondas sísmicas del evento en cuestión, su posición y tiempo de origen. Esto implica estimar de manera simultánea características de la región  $\mathbf{w}$  y del evento sísmico.

## 1.2. Justificación

El estudio de los terremotos no solo brinda la posibilidad de generar conclusiones sobre el interior de la tierra y sus procesos. También, puede prevenir muertes y daños a la infraestructura, a través del análisis de los datos registrados. En un caso concreto, es importante identificar las zonas donde la ocurrencia de terremotos tiene una alta frecuencia. La ubicación del origen de los terremotos es una de las tareas más importantes en sismología, haciendo que la mayoría de sismólogos se vean involucrados en esta tarea en algún momento de sus carreras [Havskov and Ottemöller, 2010].

<sup>17</sup>Los parámetros de un evento sísmico hacen referencia a parámetros físicos de un fenómeno natural y no a parámetros de distribución de probabilidad.

Desde 1977 organizaciones como *Bureau International des Poids et Mesures* y *International Organization of Standardization* han resaltado la importancia de reportar la incertidumbre de las medidas y cuantificación de variables, particularmente de las variables que no se miden ni observan directamente, como es el caso de los tiempos de arribo  $\{t_{an}\}$  y las características mecánicas de las rocas o medios al interior de la Tierra. Inclusive han publicado guías para hacerlo [JCGM et al., 2008], asumiendo un modelo Gaussiano para las incertidumbres, lo cual no necesariamente aplica para todos los casos.

Los modelos de velocidad como los generalmente propuestos en la literatura pueden ser usados en cualquier parte del mundo como es el caso del IASP91 [Kenntt and Engdahl, 1991], ignorando la variabilidad espacial o las particularidades de las diferentes partes de la Tierra. Por esta razón, es importante considerar la magnitud de la velocidad de propagación de las ondas sísmicas como un campo escalar aleatorio.

El problema conjunto Hipocentro-Modelo de Velocidad planteado en [Kissling, 1988] solo ha sido resuelto considerando múltiples eventos sísmicos registrados por más de 4 estaciones, a través de la solución de un sistema de ecuaciones lineales empleando mínimos cuadrados,

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{e} \quad (1-10)$$

donde:

- $\mathbf{t}$  es el vector de residuales generados a partir de la diferencia de tiempos de arribo observados y calculados.
- $\mathbf{A}$  es una matriz cuyas entradas corresponden a las derivadas parciales de la función del tiempo de viaje con respecto a los parámetros hipocentrales y los parámetros del modelo de velocidad.
- $\mathbf{m}$  de parámetros hipocentrales y del modelo de velocidad.
- $\mathbf{e}$  vector que contiene los errores producidos por la linealización del problema.

Pero este problema no ha sido solucionado considerando un solo evento sísmico y menos de 4 estaciones sismológicas. Dicha solución permitiría hacer inferencias sobre el interior de la Tierra en regiones con poca cobertura de estaciones sismológicas o donde nunca antes ha sido registrado un evento sísmico. Adicionalmente, la presente propuesta metodológica no emplea ningún tipo de linealización ni solución por mínimos cuadrados.

### 1.2.1. Justificación del problema estadístico

La manera más adecuada o eficiente de unir mediciones y predicciones físicas con sus incertidumbres todavía está en desarrollo. La forma más general para describir cualquier estado

de información es definiendo funciones de densidad de probabilidad [Tarantola, 2005]. Por lo tanto, el determinismo de los tiempos de arribo  $\{t_{a_n}\}$  y modelo de velocidad  $v(x, y, z)$  deben ser reemplazado por modelos probabilísticos que incluyan funciones de densidad de probabilidad.

Considerando la magnitud<sup>18</sup> de la velocidad de las ondas P y S, cualquier imprecisión en la selección del tiempos de arribo conlleva a errores en la estimación de las coordenadas del foco y tiempo de origen. Funciones de densidad sobre el espacio de datos,  $\rho_{\mathfrak{D}}(\mathbf{d})$ , genera la posibilidad de generar muestras aleatorias de tiempos de arribo, las cuales permiten obtener un conjunto de soluciones plausibles y no una única solución que puede ser sesgada o influenciada por datos erróneos. Además, si el modelo de velocidad de  $\mathbf{w}$  es desconocido o involucra incertidumbre, este debe ser considerado dentro de los parámetros a estimar, es decir que las funciones de densidad de probabilidad sobre el espacio de modelos,  $\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{m})$ , también deben representar la información *a priori* del origen del evento sísmico y la distribución de la velocidad en  $\mathbf{w}$  [Tarantola, 2005]. El método de Monte Carlo considera estas funciones de densidad de probabilidad sobre los espacios de datos y modelos para generar una gran cantidad de muestras aleatorias de modelos de velocidad y posición inicial,  $\Lambda$ , para luego evaluar la calidad con la que estas muestras reproducen realizaciones de los tiempos de arribo. Este método proporciona una forma útil para solucionar problemas inversos no lineales al garantizar un muestreo extensivo en los espacios de datos modelos,  $\mathfrak{D}$  y  $\mathfrak{M}$  respectivamente [Mosegaard and Tarantola, 1995].

Hasta el momento de redacción de este documento no se cuenta con un método para construir funciones de densidad de probabilidad para los  $n$  tiempos de arribo,  $\{t_{a_n}\}$ , que considere información de las señales sísmicas de una red de estaciones sismológicas. Esta propuesta metodológica ofrece una alternativa para construir estas funciones de densidad de probabilidad considerando la subjetividad del analista e información derivable de las señales sísmicas, permitiendo combinar subjetividad e incertidumbre en el proceso de selección de tiempos de arribo. De esta manera, los  $n$  tiempos de arribo aleatorios registrados por las  $r$  estaciones al interior de  $\mathbf{w}$ ,  $\{T_{a_h}(x_h, y_h, z_h)\}$ , pueden ser considerados como un campo escalar aleatorio, o sucesión de variables aleatorias indexadas por un parámetro<sup>19</sup>,  $\xi$ , es decir  $\{T_a(\xi) : \xi \in \mathbf{w}\}$ . Además de lo anterior, la presente metodología tiene como propósito presentar un método para construir un modelo de velocidad probabilístico  $\{\mathbf{V}\}$  a partir de un modelo de velocidad determinístico  $v(x, y, z)$ , al considerar cada valor de velocidad del modelo determinístico como un estadístico de orden o una medida de tendencia central. Asumiendo esto, el valor de

<sup>18</sup>A pesar que la rapidez de las ondas sísmicas puede ser variable, su velocidad en rocas de la corteza como los Granitos puede ser aproximadamente para las ondas P y S 4.5 y 2.5 *km/s*, respectivamente [Mavko, 2005].

<sup>19</sup>Este parámetro únicamente toma valores sobre la superficie topográfica de  $\mathbf{w}$  pues no hay estaciones al interior de la región  $\mathbf{w}$ .

velocidad en el  $j$  medio del modelo determinístico,  $v_j$ , puede ser convertido en una variable aleatoria,  $V_j$ , que representa por ejemplo la distribución de la velocidad máxima en el medio  $j$ . De esta manera, una colección de variables aleatorias indexadas por el parámetro<sup>20</sup>,  $\psi$ , definen un campo escalar aleatorio,  $\{\mathbf{V}(\psi) : \psi \in \mathbb{R}^3\}$ , que representa la rapidez probable en todos los puntos  $(x, y, z)$  que pertenecen a  $\mathbf{w}$ .

Los parámetros del modelo pueden ser subdividido en dos subconjuntos,  $m_1$  y  $m_2$ , los cuales representan los parámetros hipocentrales y un modelo de velocidad para  $\mathbf{w}$ , respectivamente:

$$\mathbf{m} = \{m_1, m_2\} \quad (1-11)$$

con,

$$m_1 = \{\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o, \mathbf{t}_o\} \quad (1-12)$$

$$m_2 = \{v(x, y, z)\} \quad (1-13)$$

Así, la solución del problema conjunto Hipocentro-Modelo de Velocidad para un evento sísmico consiste en estimar sus parámetros,  $\mathbf{m}$ , a partir de la función de densidad conjunta  $\sigma_{m_1 m_2}(m_1, m_2)$  obtenida al resolver el problema inverso definido por la ecuación (1-7) y planteado en [Kissling et al., 1995]. Esta solución puede ser alcanzada al evaluar la convergencia simultánea de los parámetros  $m_1$  y  $m_2$  considerando su capacidad para explicar o reproducir datos observados o simulados, a medida que aumenta el tamaño de muestra de modelos generados aleatoriamente.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo general

Proponer un modelo que estime los parámetros hipocentrales de un evento sísmico considerando el uso de variables latentes, cuyo comportamiento puede ser modelado usando distribuciones de probabilidad.

### 1.3.2. Objetivos específicos

- Desarrollar un modelo de tiempos de viaje de rayos sísmicos bajo diferentes escenarios de posición inicial y velocidad usando la metodología de Monte Carlo.
- Proponer un procedimiento de validación del modelo empleando técnicas como la convergencia de variables aleatorias.

<sup>20</sup>Este parámetro sí toma valores en todos los puntos  $(x, y, z) \in \mathbf{w}$ .

- Ilustrar la propuesta metodológica desarrollada usando datos de la red sismológica nacional de Colombia.

## 1.4. Antecedentes

En esta sección se presentan las propuestas más relevantes encontradas en la literatura, las cuales, casi en su totalidad abordan el problema a través de la formulación del problema inverso [Thurber and Kissling, 2000], [Lomax et al., 2000], [Menke and Schaff, 2004], [Tarantola, 2005], [Stein and Wysession, 2009], y [Havskov and Ottemöller, 2010].

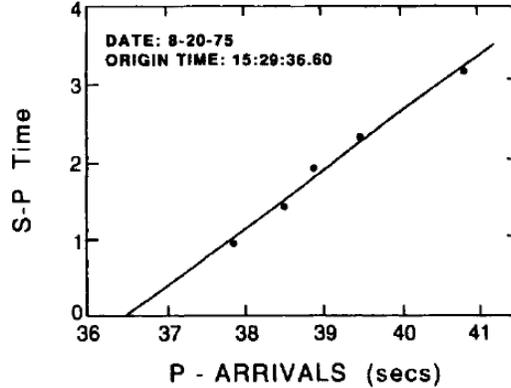
Sin excepción alguna, todos los métodos propuestos asumen que la corteza o parte más exterior de la Tierra se comporta como un sólido de Poisson ideal<sup>21</sup>. Por esta razón, los diferentes métodos presentan pequeñas variaciones entre sí. Se destacan los cuatro teoremas desarrollados por Cinna Lomnitz, quien parte de las propuestas de Harold Jeffreys para modelar la incertidumbre y de su propuesta de solucionar el problema a través del método de *mínimos cuadrados* [Jeffreys, 1970]. En su primer teorema desarrollado en [Lomnitz, 1982], establece que no es posible determinar la profundidad de un evento sísmico sin hacer supuestos sobre la estructura de la Tierra. Dichos supuestos afectan críticamente la estimación o determinación de la profundidad. Además, demuestra que el epicentro puede ser ubicado sin calcular la profundidad o el tiempo de origen. Los tres teoremas restantes descritos en [Lomnitz, 2006] formalizan y generalizan los diferentes supuestos y dificultades de los métodos creados hasta ese entonces, haciendo énfasis y explicando en el segundo teorema que la profundidad de foco debe ser estimada o calculada por separado de los demás parámetros hipocentrales, pues todas las mediciones o registros son realizadas en la superficie de la Tierra, haciendo que la estimación de la profundidad a partir de tiempos de viaje sea sesgada o no necesariamente única. Mientras que en el tercer teorema muestra el efecto que tiene la separación entre las estaciones sobre el cálculo de parámetros hipocentrales [Lomnitz, 2006]. Finalmente concluye el problema de localización del foco de un evento sísmico es un problema mal planteado o *ill-posed*<sup>22</sup>.

El primer método de ubicación conocido como el *método de los círculos* presentado en [Lay and Wallace, 1995b], es un método geométrico creado al inicio de la sismología instrumental. Los instrumentos conocidos como estaciones sismológicas registran señales sísmicas en función del tiempo. A partir de estos registros se buscaba estimar el tiempo de origen,  $t_o$ , a través de un diagrama de Wadati como lo muestra la figura 1.4, el cual no es más que una regresión lineal entre dos variables definidas por los tiempos de arribo registrados por una

<sup>21</sup>Sólido elástico e isotrópico.

<sup>22</sup>Un problema está bien planteado o *well-posed*, cuando este tiene única solución, y depende de los datos iniciales. Entonces, se dice que un problema está mal planteado cuando incumple alguna de estas características [Hadamard, 1923].

red de estaciones:



**Figura 1-2.:** Ejemplo del método del diagrama de Wadati para calcular el tiempo de origen de un terremoto [Lay and Wallace, 1995b].

La variable dependiente  $y^*$  se contruye a partir de las diferencias de los tiempos de arribo de la onda S (en segundos [s]),  $t_{a_s}$ , y los tiempos de arribo de la onda P (en segundos [s]),  $t_{a_p}$ , es decir,  $t_{a_s} - t_{a_p}$ . La variable independiente  $X^*$  corresponde a los tiempos de arribo de la onda P (en segundos [s]),  $t_{a_p}$ . Se asume que  $t_o$  se obtiene al calcular el valor de  $X^*$  cuando  $y^* = 0$ , del modelo de regresión  $y^* = X^*\beta + e$ . Luego, se calcula un valor *promedio*,  $\bar{\alpha}$ , para la velocidad de la onda  $P$ , el cual es necesario para calcular los radios,  $r$ , de los círculos con centro en cada estación. Entonces, para la  $i$ -ésima estación, es posible calcular un radio  $r_i$  así:

$$r_i = (t_{a_{p_i}} - t_o)\bar{\alpha} \quad (1-14)$$

Finalmente, el epicentro se encuentra en la intersección de los círculos.

Thurber y Kissling hacen una revisión bibliográfica sobre los métodos publicados de cálculo de tiempos de viaje y trazado de rayos hasta el año 2000. Estos métodos son divididos en dos grandes grupos, los exactos y aproximados, cuyos algoritmos también fueron clasificados en los siguientes grupos [Thurber and Kissling, 2000]:

- Shooting.
- Bending.
- Perturbation.
- Grid-based.

También, hacen una discusión sobre las ventajas y desventajas de las diferentes metodologías según el fundamento teórico, los cuales consideran el Principio de Fermat, Principio de Huygen, o la ecuación Eikonal <sup>23</sup>. Aunque ninguna de las metodologías planteadas hasta ese momento incluyó la probabilidad, ni el análisis estadístico de los resultados [Thurber and Kissling, 2000].

Durante el mismo año, Anthony Lomax y Jean Virieux propusieron un método probabilístico para la ubicación del foco a partir de un modelo de velocidades determinístico, tri-dimensional, de interfaces plano paralelas. Empleando algoritmos del tipo *grid based* para discretizar el espacio y facilitar el cálculo de los tiempos de viaje. Una vez encuentran una región que pueda contener el foco, esta es muestreada o subdividida usando el método de Metropolis-Gibs. De esta forma, se pueden construir funciones de densidad de probabilidad de los parámetros hipocentrales [Lomax et al., 2000]. Además, los autores señala las dificultades de los métodos convencionales cuando el posible foco se encuentra cerca a interfaces con medios de velocidades contrastantes. Finalmente, compara el rendimiento computacional del algoritmo propuesto con respecto a los métodos determinísticos.

La propuesta de William Menke y David Schaff propone calcular la ubicación del foco de un evento sísmico a través de la linealización del problema inverso, cuya solución involucra mínimos cuadrados, y para calcular los tiempos de viaje emplean algoritmos tipo *Perturbation*. Los residuales obtenidos por el proceso son minizados realizando simulaciones de Monte Carlo para modelar el *error* en las mediciones de tiempos de arribo y modelo de velocidad [Menke and Schaff, 2004].

Albert Tarantola publicó Inverse Problem Theory en el que presenta un desarrollo teórico bajo una óptica estadística sobre problemas de inversión. Definiendo el problema de la inversión como el proceso de inferir los parámetros  $\mathbf{m}$ , de un sistema físico que genera datos  $\mathbf{d}$ , planteando la posibilidad de que estos parámetros se relacionen con variables aleatorias, los cuales deben ser estimados o inferidos [Tarantola, 2005]. Además, contextualiza el concepto de probabilidad en los sistemas físicos. También, define dos conceptos importantes para el planteamiento del problema de inverso:

- Espacio de los modelos: Es el conjunto de parámetros del sistema físico a ser estudiado, seleccionados por el investigador. En este orden de ideas, para un sistema físico, los parámetros seleccionados pueden variar según los criterios de investigación.
- Espacio de los datos: Conjunto de observaciones y mediciones realizadas durante el experimentos físico.

Finalmente, el autor plantea que la solución de un problema inverso no es un modelo único, sino que es una colección de modelos, los cuales deben ser consistentes con los datos y la

---

<sup>23</sup>Ver sección 2.1.3.

información a priori sobre el sistema físico.

Previo al desarrollo del método de Monte Carlo, el análisis del resultado determinísticos de un experimento o simulación de algún fenómeno físico representaba un reto para la estadística, pues el comportamiento de la incertidumbre de este resultados determinístico debía ser modelada a través de alguna técnica estadística asumiendo supuestos distribucionales que no necesariamente era coherentes con el fenómeno físico. El método de Monte Carlo cambió esta situación al considerar la incertidumbre de los parámetros del fenómeno físico como variables aleatorias, las cuales permitían realizar muestreos aleatorios sobre estos parámetros, para luego obtener múltiples resultados en la simulación del fenómeno, el cual fue considerado como determinístico en primera instancia [Kroese et al., 2014].

En términos más generales, cuando una función de densidad de probabilidad es definida sobre un espacio de modelos de reducido número de dimensiones, la probabilidad de un evento cualquiera puede ser evaluada fácilmente por diferentes técnicas numéricas. Pero cuando el espacio de modelos tiene un gran número de dimensiones puede ser imposible representar la función de densidad de probabilidad sobre este espacio. Para este tipo de situaciones el método de Monte Carlo puede realizar un muestreo aleatorio sobre dicha función de densidad de probabilidad para aproximar una solución. De hecho, existen dos problemas con el muestreo de Monte Carlo cuando la función de densidad de probabilidad tiene un gran número de dimensiones. El primero consiste en ubicar regiones con alta densidad de probabilidad, el segundo consiste en conseguir un muestreo lo suficientemente grande [Tarantola, 2005]. Aunque, una vez que estas regiones de alta densidad de probabilidad han sido aproximadas por el muestreo, técnicas como *Muestreo de Gibbs* o el algoritmo de *Metrópolis* pueden realizar caminatas aleatorias para explorar de manera más eficiente la multidimensionalidad de la función de densidad de probabilidad bajo estudio [Robert and Casella, 2013].

El desarrollo de la teoría del problema inverso y el uso del método de Monte Carlo para dar solución a este tipo de problemas ha sido condicionada a la tecnología disponible. Además, su aplicación a la sismología no siempre ha sido directa. Por ejemplo, Mosegaard y Tarantola [Mosegaard and Tarantola, 1995] propusieron un algoritmo que incluía el método de Monte Carlo para resolver el problema inverso considerando datos *gravimétricos*, el cual fue planteado previamente por [Tarantola, 1987] de la siguiente manera:

$$\sigma(\mathbf{m}) = k\rho(\mathbf{m})L(\mathbf{m}) \quad (1-15)$$

donde  $k$  es una constante de normalización, la información *a priori* de los parámetros del modelo está representada por la función de densidad de probabilidad  $\rho(\mathbf{m})$ , la función de densidad de probabilidad,  $\sigma(\mathbf{m})$ , representa la información *posterior* deducida a partir de  $\rho(\mathbf{m})$ , y el grado de ajuste entre los datos calculados y observados en función de los parámetros del modelo, o simplemente verosimilitud,  $L(\mathbf{m})$ . Dicho algoritmo implementa una caminata

aleatoria que combina información *a priori* con información de las medidas o registros, junto con la relación teórica entre los datos y los parámetros del modelo. El algoritmo genera modelos según  $\rho(\mathbf{m})$  y sus correspondiente valores de verosimilitud o semejanza entre valores calculados y observados. El resultado obtenido por el algoritmo consiste en un conjunto de *pseudo-realizaciones* de la distribución *posterior*, la cual contiene toda la información derivable de las fuentes de información sobre el sistema físico parametrizado.

## 2. Marco Teórico

Para abordar las ciencias de la tierra desde la probabilidad, es necesario entender ciertos conceptos y premisas necesarios para plantear problemas, formular hipótesis y generar conclusiones. Esta sección se presentan conceptos físicos necesarios estudiar el origen o foco de un terremoto.

### 2.1. Sismología

La sismología es el estudio científico de las vibraciones mecánicas de la Tierra. La sismología cuantitativa toma la información contenida en los sismogramas, o de los registros de las vibraciones de la Tierra en función del tiempo [Aki and Richards, 2002]. A diferencia de la dinámica clásica, la sismología desconoce las causas de las vibraciones y las características de los medios perturbados, pero busca plantear una serie de causas del movimiento que expliquen las perturbaciones registradas.

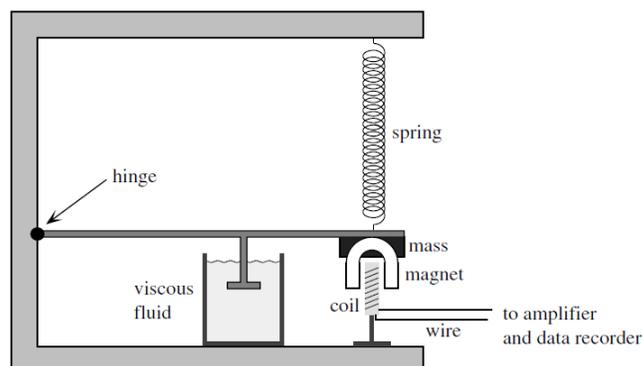
#### 2.1.1. Señal sísmica

Los instrumentos que registran las ondas sísmicas o elásticas<sup>1</sup> son conocidos como *sismómetros* o *acelerógrafos*. Estos tienen la capacidad de registrar el efecto de las ondas elásticas generadas por un evento sísmico a través de la cuantificación de la velocidad o aceleración que sufre el suelo por el paso de estas ondas [Havskov and Ottemöller, 2010].

Los sismómetros más comunes registran señales a partir de la inercia de la masa suspendida en la base del resorte del instrumento, la cual tiende a permanecer estacionaria con las perturbaciones externas. Esta masa también está conectada a una barra la cual limita su movimiento en la dirección deseada, haciendo que el instrumento tenga un solo *grado de libertad* como es conocido en términos físicos.

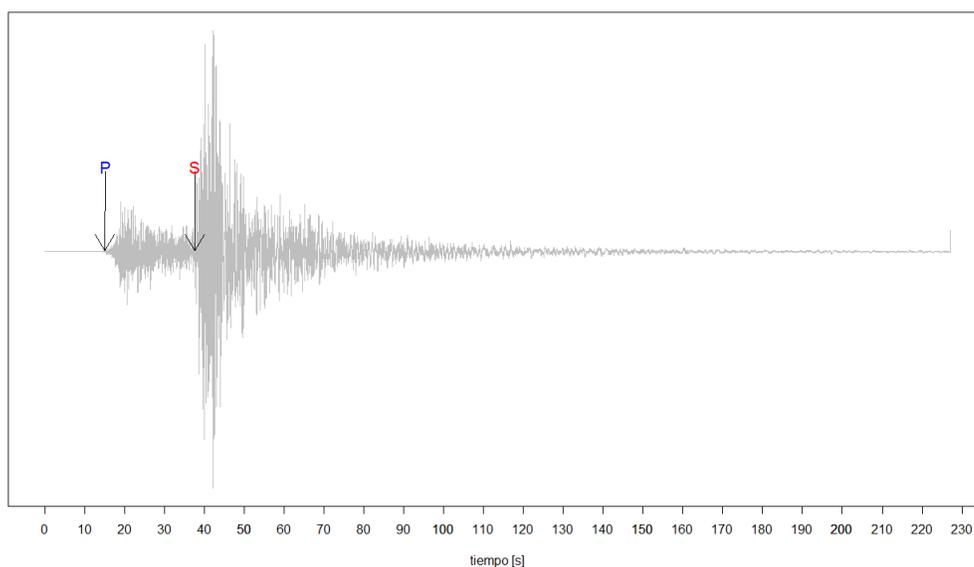
---

<sup>1</sup>Las ondas sísmicas son generadas por terremotos, mientras que las ondas elásticas comprenden causas naturales y artificiales como explosiones, movimiento de carga o colisiones.



**Figura 2-1.:** Modelo de sismómetro inercial simple que registra movimientos verticales únicamente. Modificado [Shearer, 2009].

Una vez que se ha registrado una señal sísmica, se procede a identificar o seleccionar los primeros *tiempos de arribo* de las diferentes fases sísmicas<sup>2</sup> *P* y *S*. Es decir, identificar el tiempo en el que llega la primera perturbación atribuible a la onda, *P* y la onda *S* como lo indican las flechas negras y las letras azul y roja respectivamente, en la figura 2-2:



**Figura 2-2.:** Señal sísmica registrada por la estación MRG015 el 24 de Julio de 2008 por *National Research Institution for Earth Science and Disaster Resilience* del gobierno Japonés.

<sup>2</sup>Ver anexo B.2.

Para este caso, la onda P registra un tiempo de arribo en el segundo 15.2 aproximadamente. Mientras que para el caso de la onda S se observa un tiempo de arribo alrededor del segundo 37.6. De esta forma, un intérprete de señales sísmicas de una red de estaciones construye un reporte de tiempos de arribo para un evento sísmico dado.

En general, los tiempos de arribo de las ondas S involucran una incertidumbre mucho mayor que los tiempos de arribo de las ondas P. Por eso, no todas las estaciones reportan tiempos de arribo de la onda S. De todas formas, el conjunto de los tiempos de arribo observados o seleccionados son posteriormente utilizados como datos para encontrar o calcular las coordenadas del foco de un evento sísmico y su tiempo de origen [Havskov and Ottemöller, 2010].

### 2.1.2. La Tierra como un sólido elástico

La relación *esfuerzo-deformación*<sup>3</sup> en un sólido isotrópico<sup>4</sup> puede ser descrita por los parámetros de Lamé,  $\mu > 0$  y  $\lambda > 0$ , los cuales proporcionan información sobre el comportamiento elástico de un sólido, el parámetro  $\mu$  representa el módulo de cizalla mientras que  $\lambda$  no tiene una interpretación física directa pero sí es directamente proporcional al módulo volumétrico *kapa* [Love, 2013]. A partir de estos se puede caracterizar el sólido en términos de las constantes elásticas [Shearer, 2009]:

- Módulo de Young,  $E$ : Expresa la relación la razón del esfuerzo extensional y la deformación extensional de un cilindro que está siendo estirado desde sus dos extremos [Shearer, 2009],

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu} \quad (2-1)$$

- Módulo volumétrico  $\kappa$ : Hace relación a la presión hidrostática necesaria para ejercer un cambio en el volumen del sólido. Es decir, una medida de la incompresibilidad del material, la cual se expresa como [Kolsky, 1963]:

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (2-2)$$

- Razón de Poisson  $\rho$ : Representa la razón de la contracción lateral de un cilindro que está siendo comprimido desde sus extremos, con su longitud extensional [Kolsky, 1963]:

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2-3)$$

---

<sup>3</sup>Ver Anexo A.1.

<sup>4</sup>Ver Anexo A.

### Velocidad de las ondas sísmicas

En sismología se procura estudiar el comportamiento de las ondas compresivas (*ondas P*), y las ondas de cizalla (*onda S*), cuyas velocidades de propagación en un sólido homogéneo e isotrópico pueden ser calculadas a partir de las constantes elásticas y la densidad  $\rho > 0$  [Shearer, 2009]:

- Velocidad de la onda P,  $v_p$ :

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad (2-4)$$

- Velocidad de la onda S,  $v_s$ :

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2-5)$$

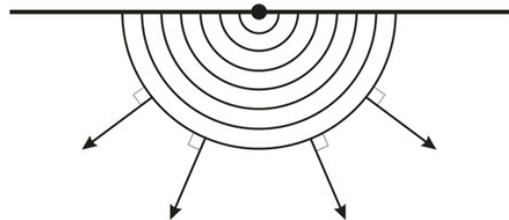
Las anteriores expresiones implican que valores de velocidad para las ondas P y S permiten establecer una descripción completa de las propiedades del sólido isotrópico [Love, 2013].

### 2.1.3. Ecuación Eikonal y rayos sísmicos

La relación entre el comportamiento físico u ondulatorio de una onda, y la geometría de los rayos o vectores perpendiculares al frente de onda está definida por la ecuación Eikonal<sup>5</sup>:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x, y, z)} \quad (2-6)$$

donde  $T$  es la superficie de tiempo de viaje y  $v$  la rapidez del frente de onda en función de las variables espaciales  $(x, y, z)$ . Esta ecuación permite encontrar soluciones a la ecuación (1-1) al encontrar trayectorias o variaciones temporales y espaciales de los vectores o rayos perpendiculares al frente de onda como lo muestra la figura (2-3):



**Figura 2-3.:** Relación geométrica de un frente de onda circular con un conjunto de rayos.

<sup>5</sup>Ver sección B.1.

El cálculo de las trayectorias de los rayos o vectores es conocido como *ray tracing* o trazado de rayos, los cuales a través de la ecuación Eikonal es posible resumir información de la superficie o frente de onda.

El tiempo de viaje de un rayo que parte desde una fuente o (*posición inicial*),  $(x_i, y_i, z_i)$ , a un receptor o (*posición final*),  $(x_f, y_f, z_f)$ , a través de diferentes medios puede ser calculado a partir de la función de *tiempo de viaje*:

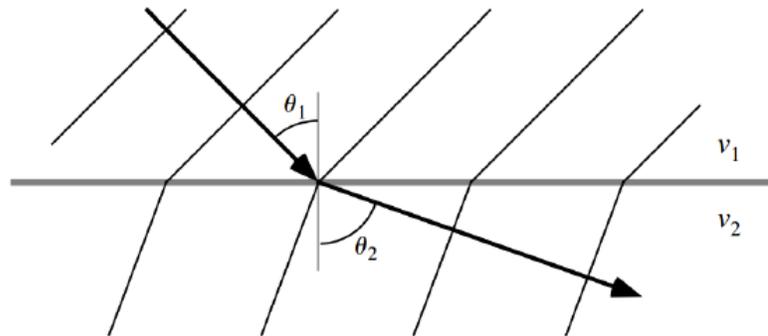
$$t_{v_i,f} = \sum_{\iota=0}^j \frac{\sqrt{(x_{j-\iota} - x_{\iota})^2 + (y_{j-\iota} - y_{\iota})^2 + (z_{j-\iota} - z_{\iota})^2}}{v_{\iota}} \quad (2-7)$$

donde  $\iota$  indica el medio al que el punto con coordenadas,  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $j$  la cantidad de medios por donde viaja al rayo hasta llegar a la posición final. El conjunto de puntos  $\{(x_{\iota}, y_{\iota}, z_{\iota})\}$  representan las coordenadas de los puntos que pertenecen a la trayectoria de tiempo de viaje mínimo entre las posiciones inicial y final. Además, la geometría de la trayectoria de un rayo debe cumplir con criterios geométricos definidos por la Ley de Snell y el principio de Fermat.

La Ley de Snell describe la relación geométrica que existe entre un rayo incidente y el rayo refractado. Por ejemplo, para dos medios homogéneos e isotrópicos, con velocidades  $v_1$  y  $v_2$  respectivamente, la ley de Snell establece que el rayo que incide con ángulo  $\theta_1$  que va desde el medio 1 al medio dos, en dirección  $x$ , se refractará a través del medio dos con un ángulo  $\theta_2$ , cumpliendo la siguiente igualdad:

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2} \quad (2-8)$$

La figura (2-4) muestra la trayectoria definida por la Ley de Snell para la situación planteada:



**Figura 2-4.:** Trayectoria del rayo incidente. Modificado de [Shearer, 2009].

Mientras que el Principio de Fermat también conocido como el principio de *acción mínima*, y establece que:

*La trayectoria definida por un rayo, siempre es la trayectoria de tiempo de viaje mínimo y no necesariamente la de longitud mínima.*

El tiempos de viaje total se obtienen al sumar los tiempos de viaje del rayo para cado uno de los  $j$  medios por donde este transita como lo indica la ecuación (2-8), mientras que la distancia recorrida por el rayo sísmico un rayo sísmico que viaja a través del  $\iota$ -ésimo medio está definida por el término  $d_{\iota,f}$ :

$$\begin{aligned} d_{\iota,f} &= \sqrt{(x_{\iota+1} - x_{\iota})^2 + (y_{\iota+1} - y_{\iota})^2 + (z_{\iota+1} - z_{\iota})^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x_{\iota})^2 + (\Delta y_{\iota})^2 + (\Delta z_{\iota})^2} \end{aligned} \quad (2-9)$$

Los puntos que pertenecen a las trayectorias de tiempo de viaje mínimo,  $\{(x_{\iota+1}, y_{\iota+1}, z_{\iota+1})\}$ , pueden ser calculados minimizando la función de tiempo de viaje y cumpliendo con el principio de Fermat,

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{v_{\iota,f}}}{\partial x_{\iota+1}} &= 0 \\ \frac{\partial t_{v_{\iota,f}}}{\partial y_{\iota+1}} &= 0 \\ \frac{\partial t_{v_{\iota,f}}}{\partial z_{\iota+1}} &= 0 \end{aligned} \quad (2-10)$$

Los términos de la izquierda de estas derivadas parciales corresponden a las siguientes diferencias:

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta x_{\iota})}{v_{\iota}((\Delta x_{\iota})^2 + (\Delta y_{\iota})^2 + (\Delta z_{\iota})^2)^{1/2}} - \frac{(\Delta x_{\iota+1})}{v_{\iota+1}((\Delta x_{\iota+1})^2 + (\Delta y_{\iota+1})^2 + (\Delta z_{\iota+1})^2)^{1/2}} &= 0 \\ \frac{(\Delta y_{\iota})}{v_{\iota}((\Delta x_{\iota})^2 + (\Delta y_{\iota})^2 + (\Delta z_{\iota})^2)^{1/2}} - \frac{(\Delta y_{\iota+1})}{v_{\iota+1}((\Delta x_{\iota+1})^2 + (\Delta y_{\iota+1})^2 + (\Delta z_{\iota+1})^2)^{1/2}} &= 0 \\ \frac{(\Delta z_{\iota})}{v_{\iota}((\Delta x_{\iota})^2 + (\Delta y_{\iota})^2 + (\Delta z_{\iota})^2)^{1/2}} - \frac{(\Delta z_{\iota+1})}{v_{\iota+1}((\Delta x_{\iota+1})^2 + (\Delta y_{\iota+1})^2 + (\Delta z_{\iota+1})^2)^{1/2}} &= 0 \end{aligned} \quad (2-11)$$

con  $\Delta x_{\iota+1} = x_{\iota+2} - x_{\iota+1}$ ,  $\Delta y_{\iota+1} = y_{\iota+2} - y_{\iota+1}$ , y  $\Delta z_{\iota+1} = z_{\iota+2} - z_{\iota+1}$ .

De esta forma es posible calcular una geometría para la trayectoria de la rayo minimizando la función de tiempo de viaje en las direcciones  $x$ ,  $y$ , y  $z$ .

## 2.2. Marco Teórico estadístico

### 2.2.1. Probabilidad

Los procedimientos de la propuesta metodológica involucran una serie de conceptos básicos, utilizados para alcanzar los objetivos planteados. Esta sección contiene una serie de definiciones formales de probabilidad y conceptos fundamentales de la teoría del problema inverso,

las cuales consideran un espacio de probabilidad,  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\Omega$  es un conjunto arbitrario,  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ , y  $P$  es una medida de probabilidad definida sobre  $\mathcal{F}$  [Rincón, 2007]. Mientras que el concepto de variable latente es considerado para caracterizar propiedades que no pueden ser observadas o medidas directamente, las cuales deben ser inferidas a través de modelos matemáticos, usando otras variables que sí se pueden medir directamente [Loehlin, 1998].

Las variables aleatorias se representan por letras mayúsculas tales como  $X, Y, Z$ , las cuales pueden estar en *negrilla*, y sus funciones de distribución, por letras mayúsculas como  $F, G$ , o  $H$ . Para el caso en que la variable aleatoria es absolutamente continua las letras minúsculas denotarán su función de densidad de probabilidad.

Las funciones de distribución truncada de variables aleatorias no tendrán una notación particular o distintiva, para esta situación las funciones de densidad de probabilidad se presentan en su forma condicional indicando la restricción del dominio de la función. Por ejemplo, para el caso en que el truncamiento esté definido por el intervalo  $(a < \mathbf{X} \leq b]$  la función de densidad de probabilidad tiene la siguiente expresión [Johnson et al., 1994]:

$$f(x|a < \mathbf{x} \leq b) = \begin{cases} \frac{f(\mathbf{x})}{F(b)-F(a)} & \text{si } a < \mathbf{x} \leq b, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2-12)$$

y el valor esperado de la variable aleatoria es

$$E[\mathbf{X}] = \int_a^b \mathbf{x}f(\mathbf{x}|a < \mathbf{x} \leq b)d\mathbf{x} \quad (2-13)$$

El Teorema de Cambio de Variable es considerado para obtener o transformar variables aleatorias. Las variables aleatorias generadas a partir de este procedimiento no tienen una notación particular.

La distribución Beta mantiene su notación estandar con distribuciones de probabilidad definidas en el intervalo  $[0, 1]$ , las cuales son parametrizadas por dos parámetros de forma positivos  $\alpha$  y  $\beta$  [Johnson et al., 1995] como indica la siguiente ecuación:

$$f(v) = \begin{cases} \frac{1}{Beta(\alpha, \beta)} v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} & \text{si } 0 < v < 1, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2-14)$$

con

$$Beta(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad (2-15)$$

Donde  $\Gamma(z)$  es la función gama:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx \quad (2-16)$$

La media de la variable aleatoria  $V$  es,

$$E[V] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (2-17)$$

su moda,  $m_b$ ,

$$m_b = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2}, \text{ para } \alpha, \beta > 1 \quad (2-18)$$

y varianza:

$$Var[V] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}, \text{ para } \alpha, \beta > 1 \quad (2-19)$$

La convergencia de una sucesión de variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$ , o simplemente  $\{X_k\}$ , hace referencia a su comportamiento cuando que  $k \rightarrow \infty$  [Casella and Berger, 2002]. El tipo de convergencia considerado en el presente documento es la convergencia en probabilidad, la cual establece que la sucesión de variables aleatorias  $\{X_1, X_2, \dots\}$  converge en probabilidad a la variable aleatoria  $\mathbf{X}$  si, para cada  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(|X_k - \mathbf{X}| \geq \epsilon) = 0 \text{ o, equivalentemente, } \lim_{k \rightarrow \infty} P(|X_k - \mathbf{X}| < \epsilon) = 1 \quad (2-20)$$

La notación para este tipo de convergencia de variables aleatorias es  $X_k \xrightarrow{p} \mathbf{X}$  [Rincón, 2007].

### 2.2.2. Teoría del Problema Inverso

Se refiere al proceso de calcular a partir de un conjunto de observaciones, los parámetros del *Sistema físico* bajo estudio, que causaron el conjunto de observaciones. El objetivo de un problema inverso es encontrar los parámetros del modelo  $\mathbf{m}$ , también llamadas causas, que expliquen, así sea de manera aproximada, los resultados observados o datos.

Esta teoría tiene una serie de conceptos importantes para su desarrollo. En primer lugar, se define un *sistema físico*  $\mathfrak{S}$  que puede ser el planeta Tierra por ejemplo. El procedimiento científico para estudiar este sistema se puede dividir en los siguientes pasos [Tarantola, 2005]:

1. *Parametrización del sistema*: Hace referencia al descubrimiento del conjunto mínimo de parámetros del modelo, cuyos valores caracterizan el *sistema físico* desde un punto de vista.
2. *Modelado hacia adelante*: Descubrimiento de las *leyes físicas* que permiten hacer predicciones sobre los resultados medibles considerando unos valores para los parámetros del modelo.
3. *Modelamiento inverso*: Uso de los resultados o mediciones para inferir los valores de los parámetros del modelo.

Los primeros dos pasos consideran una lógica inductiva, mientras que el tercer paso considera una lógica deductiva.

### Espacio de modelos

La elección de los parámetros del modelo para describir el *sistema físico* no necesariamente es única. Una elección particular de parámetros del modelo es una *parametrización* del *sistema físico*,  $\mathfrak{S}$ . El conjunto de todas las parametrizaciones puede ser considerado como un conjunto abstracto de puntos, en el que cada punto,  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots$ , representa un modelo concebible del sistema  $\mathfrak{S}$ . A este conjunto de puntos se le denomina *espacio de modelos*, el cual es representado por la letra  $\mathfrak{M}$  [Tarantola, 2005]. Definir una *parametrización* para el sistema  $\mathfrak{S}$  significa definir un conjunto de procedimientos experimentales que permiten medir o cuantificar dicho sistema. Cada punto  $\mathcal{M}$  de  $\mathfrak{M}$  es conocido como un *modelo*, y por conveniencia en el presente documento el símbolo  $\mathbf{m}$  denotará o representará un modelo o punto  $\mathcal{M}$ .

Análogamente a las coordenadas de un punto en  $\mathbb{R}^n$ , el *modelo*  $\mathbf{m}$  es un conjunto de valores,  $\mathbf{m}=\{m_*\}$ , que pueden ser considerados como coordenadas de  $\mathbf{m}$  [Tarantola, 2005].

### Espacio de datos

Para obtener información sobre los parámetros del modelo, se deben registrar algunas observaciones durante el experimento físico, es decir, se deben hacer medidas de algunos de los parámetros observables del sistema físico  $\mathfrak{S}$ . Desde un punto de vista abstracto, el *espacio de datos*,  $\mathfrak{D}$ , es el espacio de todas las respuestas instrumentales concebibles. Cualquier conjunto de resultados *exactos* de las mediciones corresponde a un punto particular  $\mathbf{d}$  en  $\mathfrak{D}$ . Las coordenadas de  $\mathbf{d}$  son sus componentes, y cada posible realización de  $\mathbf{d}$  se denomina *vector de datos* [Tarantola, 2005].

### Problema hacia adelante

Los experimentos y la observación sugieren teorías físicas, y estas teorías físicas pueden ayudar a predecir el resultado de un experimento. Dicho esto, el problema hacia adelante parte de las causas para luego obtener unos resultados. Resolver el problema hacia adelante se refiere a predecir los valores libres de error de los parámetros observables  $\mathbf{d}$  que corresponderían a cierto modelo  $\mathbf{m}$ . Esta predicción teórica se puede denotar como [Tarantola, 2005]:

$$\mathbf{m} \mapsto \mathbf{d} = \mathbf{g}(\mathbf{m}) \quad (2-21)$$

donde el operador  $g(\cdot)$  es llamado el *operador hacia adelante*, el cual expresa un modelo matemático del sistema físico bajo estudio.

### Parámetros e información

El grado de información sobre los valores de los parámetros de un modelo puede variar desde *conocimiento total* a *ignorancia total*. El grado de conocimiento o información sobre los va-

lores de los parámetros de un modelo,  $\mathbf{m}$ , puede ser representado por funciones de densidad de probabilidad  $\rho(\mathbf{m})$  [Tarantola and Valette, 1982].

Por información *a priori* se hace referencia a cualquier tipo de información sobre los parámetros del modelo,  $\mathbf{m}$ , que es obtenida independientemente del resultado de las mediciones o datos,  $\mathbf{d}$ . Esta información *a priori* es representada por una función de densidad de probabilidad denotada por  $\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{m})$ . De esta forma el problema inverso puede ser formulado como una combinación de información experimental, información *a priori* sobre los parámetros, e información teórica. Considerando este enfoque, la solución general al problema inverso no-lineal es única y consistente, pues al resolver el mismo problema con los mismos datos pero con diferentes configuraciones de parámetros, no se alterará la solución [Tarantola and Valette, 1982].

### Resultado de las mediciones

Todas las mediciones o registro están sujetos a la incertidumbre. Por lo tanto, el resultado de una medición no solo es un *valor observado*, también representa un *estado de la información* obtenido a partir de parámetros observables. Si  $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_n]$  representa el conjunto de parámetros observables, el resultado de la medición puede ser representado por la densidad de probabilidad  $\rho_{\mathfrak{D}}(\mathbf{d})$  definido sobre el espacio de datos  $\mathfrak{D}$ .

### Definición de la solución del Problema Inverso

Para un sistema físico,  $\mathfrak{G}$ , la función de *densidad de probabilidad conjunta a priori*,  $\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m})$ , definida en el espacio  $\mathfrak{D} \times \mathfrak{M}$ , representa la información obtenida sobre los datos  $\mathbf{d}$  y la información *a priori* sobre los parámetros del modelo  $\mathbf{m}$ . La relación teórica o *física* entre  $\mathbf{d}$  y  $\mathbf{m}$  es representada por la función de densidad conjunta  $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$ . La combinación de estos dos estados de información se combinan para producir,  $\sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m})$ , la cual representa un estado de información posterior [Tarantola and Valette, 1982]:

$$\sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = k \frac{\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m})\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})}{\nu(\mathbf{d}, \mathbf{m})} \quad (2-22)$$

donde  $\nu(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  representa el estado homogéneo de información y  $k$  es una constante de normalización. A partir de la ecuación (2-20) es posible obtener una función de densidad de probabilidad marginal para los datos  $\mathbf{d}$ , lo que es equivalente a solucionar el *problema hacia adelante*:

$$\sigma_{\mathfrak{D}}(\mathbf{d}) = \int_{\mathfrak{M}} \sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m}) d\mathbf{m} \quad (2-23)$$

Análogamente para los parámetros del modelo:

$$\sigma_{\mathfrak{M}}(\mathbf{m}) = \int_{\mathfrak{D}} \sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m}) d\mathbf{d} \quad (2-24)$$

De esta forma, es posible transferir información de los parámetros  $\mathbf{m}$  a los datos  $\mathbf{d}$ , a través de relaciones teóricas, dando solución al *problema inverso*.

### **Método de Monte Carlo**

Existen muchas variaciones del método de Monte Carlo, las cuales se ajustan a condiciones o problemas particulares. Los siguientes pasos resumen la estructura del método de Monte Carlo adaptado y aplicado a esta propuesta metodológica:

1. Definir espacios muestrales para los valores de entrada.
2. Definir variables aleatorias.
3. Definir funciones de densidad de probabilidad para las variables aleatorias.
4. Realizar muestreos aleatorios a partir de las funciones de densidad de probabilidad.
5. Realizar cálculos.
6. Aplicar regla de *Rechazo/Aceptación*.
7. Agrupar soluciones.
8. Calcular promedios.

A lo largo de la presentación de la metodología en el capítulo 3, se presenta la adaptación y aplicación de cada uno de estos pasos para solucionar el problema propuesto por la ecuación (1-6) junto con el análisis de la convergencia de una serie de iteraciones del método.

## 3. Metodología

El planteamiento probabilístico del problema inverso implica considerar variables aleatorias y proponer funciones de densidad de probabilidad coherentes con el comportamiento natural de los parámetros del fenómeno físico y su información disponible.

Dado que las características mecánicas o elásticas de los medios o rocas que componen una región de la Tierra,  $\mathbf{w}$ , no pueden ser observadas directamente, se propone incorporar variables latentes para construir funciones de densidad de probabilidad para estos casos, buscando evitar posibles sesgos o errores al momento de calcular valores para dichas características de una manera determinística. Además, dicho sesgo puede afectar sistemáticamente las estimaciones de los parámetros hipocentrales [Lomnitz, 1982].

La solución propuesta al problema conjunto Hipocentro-Modelo de Velocidad para un único evento sísmico no necesariamente difiere de la solución actual para múltiples eventos sísmicos [Kissling, 1988]. Simplemente, se consideran las diferentes realizaciones de la sucesión de variables aleatorias  $\{T_{a_h}(x_h, y_h, z_h)\}$  como eventos sísmicos adicionales. Luego, el problema conjunto Hipocentro-Modelo de Velocidad es solucionado para un conjunto de eventos sísmicos muy similares entre sí, permitiendo asumir que son prácticamente el mismo evento sísmico.

La estructura de este capítulo está diseñada según los pasos propuestos por [Tarantola, 2005] descritos en 2.2.2. Las secciones 3.1, 3.2 y 3.3 exponen los pasos propuestos para la *parametrización del sistema físico*  $\mathfrak{G}$ , mientras que la sección 3.4 hace referencia al *Modelado hacia adelante*. La sección 3.5 es el primer paso en el *Modelamiento inverso*, pues explica el mecanismo de selección de focos probables según los resultados o mediciones disponibles, y la sección 3.6 surge para explicar como el tiempo de origen,  $\mathbf{t}_o$ , de un evento sísmico también debe ser representado por una variable aleatoria. Por último, se propone la convergencia en probabilidad de los promedios obtenidos para las variables aleatorias de los parámetros  $\mathbf{m}$  a partir de  $k$  iteraciones como una validación empírica de la presente propuesta metodológica.

### 3.1. Tiempo de arribo aleatorio

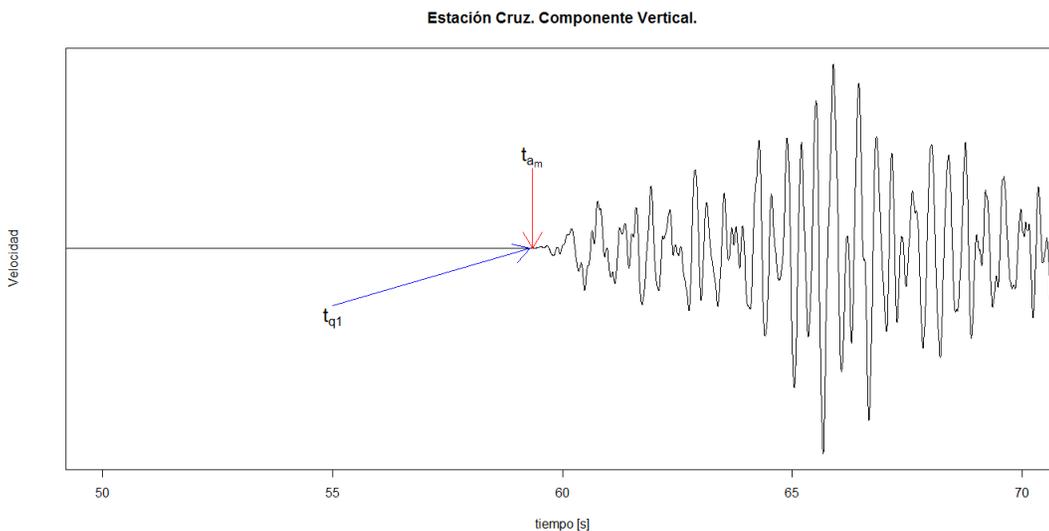
En esta sección se expone una serie de ideas para construir funciones de densidad de probabilidad *a priori*,  $\rho_{\mathfrak{D}}(\mathbf{d})$ , a partir de un conjunto de datos,  $\mathbf{d}$ , y de los instrumentos que registran

el fenómeno físico  $\mathfrak{G}$ . Aunque es importante destacar la situación en la que el instrumento y registro sean perfectos, es decir, el caso en que el dato observado o registrado tenga incertidumbre despreciable. En esta situación, el uso de variables aleatorias no es necesario.

Para los demás casos, los datos,  $\mathbf{d}$ , son un conjunto de valores,  $\{t_{a_n}\}$ , que representan los  $n$  tiempos de arribo de ondas P y S a una red de  $r$  estaciones. Mientras que las funciones de densidad de probabilidad,  $\rho_{\mathfrak{D}}(\mathbf{d})$ , representan el comportamiento de las variables aleatorias,  $\{T_{a_n}\}$ , las cuales contienen información sobre los  $n$  tiempos de arribo de las ondas P y S, y su incertidumbre. Los valores  $\{t_{a_n}\}$  deben tener una relación directa con el comportamiento de las variables aleatorias  $\{T_{a_n}\}$ , por eso se propone que estos valores sean considerados como *modas* o *tiempos de arribo más probables*. El comportamiento de la incertidumbre relacionados a los tiempos de arribo seleccionados puede ser modelado a través de un conjunto de variables aleatorias  $\{I_{a_n}\}$ . Luego, el tiempo de arribo aleatorio de cierto tipo de onda a la  $h$ -ésima estación puede ser obtenido a partir de la suma de un escalar y una variable aleatoria, la cual debe tener como moda el valor  $t_{a_h}$ :

$$T_{a_h} = t_{qh} + I_{a_h} \quad (3-1)$$

donde  $t_{qh}$  representa un *límite inferior* o un valor mínimo probable para todos los posibles tiempos de arribo de la onda de interés a la  $h$ -ésima estación. De esta forma, la variable aleatoria  $T_{a_h}$  es construida a partir de información derivable de la señal sísmica y de una variable aleatoria que representa el comportamiento de la incertidumbre. La figura (3-1) muestra la señal sísmica registrada por una estación y los valores propuestos para  $t_{qh} = t_{q1}$  y  $t_{a_h} = t_{a_m}$  con una flecha azul y roja, respectivamente:



**Figura 3-1.:** Señal sísmica y límite inferior  $t_{qh}$  en la componente vertical registrada por una estación de la Red Sismológica Nacional de Colombia.

Diferentes distribuciones pueden ser consideradas, aunque se recomienda utilizar la familia de distribuciones Beta pues su dominio es restringido al intervalo  $[0, 1]$  y sus dos parámetros de forma,  $\alpha$  y  $\beta$ , facilitan la tarea de modelar el comportamiento de la incertidumbre garantizando que el valor  $t_{a_h}$  sea la moda o valor de máxima densidad de probabilidad.

Considerando una variable aleatoria  $I_{a_h}$  para representar el comportamiento de la incertidumbre relacionada al tiempo de arribo de cierto tipo de onda a la  $h$ -ésima estación, se deben proponer criterios de asimetría para dar una forma conveniente a la función de densidad de probabilidad, los cuales deben considerar información de la señal sísmica registrada. Es decir, es necesario asignar valores para los parámetros de forma. Para el caso en que únicamente se propongan valores para un parámetro de forma, el valor del segundo parámetros de forma puede ser calculado y garantizando que  $t_{a_h}$  se la moda. Por ejemplo, si se propone un valor arbitrario  $\alpha_*$  para el parámetro de forma  $\alpha_h$ , el valor de  $\beta_h$  puede ser calculado a partir de la ecuación (2-16) así:

$$\begin{aligned}
 t_{a_h} &= t_{qh} + \frac{\alpha_* - 1}{\alpha_* + \beta_h - 2} \\
 t_{a_h} - t_{qh} &= \frac{\alpha_* - 1}{\alpha_* + \beta_h - 2} \\
 (\alpha_* - 2) + \beta_h &= \frac{\alpha_* - 1}{t_{a_h} - t_{qh}} \\
 \beta_h &= \frac{\alpha_* - 1}{t_{a_h} - t_{qh}} - (\alpha_* - 2)
 \end{aligned} \tag{3-2}$$

Lo anterior expresa la relación entre los parámetros de las variables aleatorias  $T_{a_h}$  y  $I_{a_h}$ , lo que permite relacionar el tiempo de arribo aleatorio,  $T_{a_h}$ , de cierto tipo de onda y el comportamiento de su incertidumbre  $I_{a_h}$ .

Una vez establecidos los valores para los parámetros  $\alpha_h$  y  $\beta_h$  es posible construir una función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria según el teorema de cambio de variable,

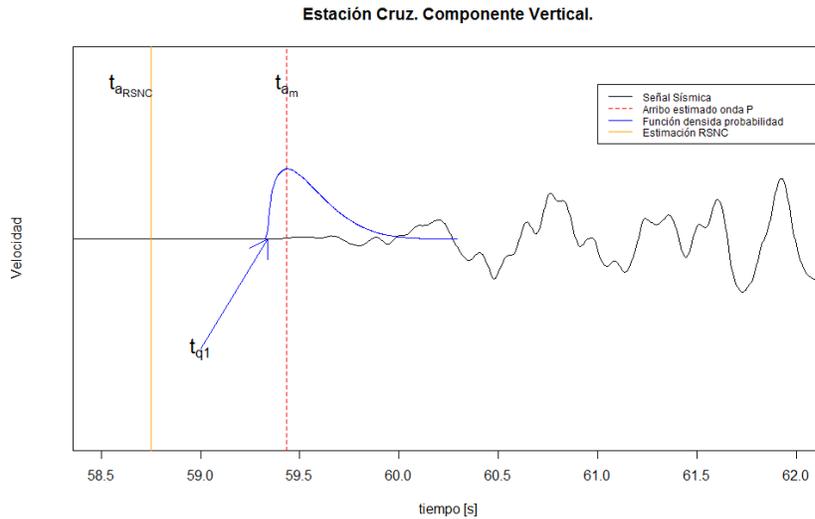
$$f_{T_{a_h}}(t_{a_h}) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_h + \beta_h)}{\Gamma(\alpha_h)\Gamma(\beta_h)} (t_{a_h} - t_{qh})^{\alpha_h - 1} (1 - (t_{a_h} - t_{qh}))^{\beta_h - 1} & \text{si y solo si, } t_{qh} \leq t_{a_h} < (t_{qh} + 1) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3-3}$$

La figura **3-2** muestra una función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria que representa el tiempo de arribo de la onda P en la estación Sotará. Se observa como la función de densidad propuesta se concentra alrededor de  $t_a$  el cual es la suposición inicial de un intérprete de señal sísmica. Para este caso particular, el comportamiento de la incertidumbre fue modelado por una variable aleatoria cuya función de densidad es asimétrica,

atribuyendo una mayor densidad de probabilidad a los tiempos menores o iguales al intervalo de tiempo en que se espera arribó la onda sísmica, y menor densidad de probabilidad a los tiempos posteriores a este intervalo de tiempo.

De esta manera es posible construir funciones de densidad de probabilidad para las  $n$  variables aleatorias que modelan los  $n \leq 2r$  tiempos de arribo  $\{T_{a_n}\}$ , las cuales son necesarias para generar valores aleatorios de los datos  $\mathbf{d}$ . De esta forma es posible relacionar variables aleatorias de tiempos de arribo con las coordenadas espaciales de las  $r$  estaciones sismológicas:

$$\{T_{a_1}(x_1, y_1, z_1), \dots, T_{a_h}(x_h, y_h, z_h), \dots, T_{a_r}(x_r, y_r, z_r)\}$$



**Figura 3-2.:** Señal sísmica y una función de densidad de probabilidad asociada al tiempo de arribo aleatorio  $T_a$  de la onda P en la estación Sotará (SOTA) de la Red Sismológica Nacional de Colombia.

## 3.2. Rapidez de una onda sísmica como variable aleatoria continua

En esta sección se presenta un método para construir modelos de velocidad *a priori*,  $\rho_{m_2}(m_2)$ , considerando información externa o subjetiva. Estas funciones de densidad de probabilidad permiten generar una gran cantidad de configuraciones o modelos de velocidad para  $\mathbf{w}$ . Luego, el proceso de selección de focos probables permitirá identificar los modelos de velocidad plausibles para  $\mathbf{w}$  según las señales sísmicas registradas del evento sísmico bajo estudio.

La zona de estudio  $\mathbf{w}$  puede ser subdividida en partes o subregiones que agrupen puntos con propiedades elásticas semejantes. Esta subdivisión implica que la densidad,  $\rho$ , y la relación de esfuerzo y deformación<sup>1</sup>,  $\mathbf{K}$ , al interior de cada subregión o medio de  $\mathbf{w}$  deben ser aproximadamente iguales para poder asumir que la rapidez<sup>2</sup> de propagación de una onda sísmica dada es igual al interior de una subregión. Así, es posible simplificar o idealizar la región  $\mathbf{w}$  del interior de la Tierra como un conjunto de medios homogéneos.

Para poder llevar a cabo esta tarea es necesario considerar toda la información *a priori* sobre  $\mathbf{w}$ , como la suministrada por modelos de velocidad<sup>3</sup>,  $v(x, y, z)$ , los cuales se consideran como un conjunto de valores probables de los parámetros  $m_2$ . Además, si dicho modelo de velocidad es determinístico, se propone convertir este modelo a una forma probabilística que considere la incertidumbre de sus valores o el contenido de información que este proporciona.

Este proceso es importante pues la idealización de  $\mathbf{w}$  a través de un modelo de velocidad afecta los procesos de cálculo o estimación de los parámetros hipocentrales generando errores o sesgos [Lomnitz, 2006]. Un modelo de velocidad probabilístico,  $\rho_{m_2}(m_2)$ , permite considerar en los procesos de estimación de parámetros hipocentrales,  $m_1$ , una gran cantidad de configuraciones plausibles de velocidad. Dicho esto, no solo se espera que la aleatoriedad del modelo de velocidad probabilístico permita estimar parámetros hipocentrales con un menor error o sesgo, también, que los valores de velocidad se ajusten o actualicen según la información suministrada por el evento sísmico bajo estudio.

### 3.2.1. Variables latentes e incertidumbre

Se consideran variables latentes para modelar el comportamiento natural de las rapidezces de las ondas P y S en cada uno de los  $\mathbf{J}$  medios o subregiones de  $\mathbf{w}$ , permitiendo incluir valores teóricos de rapidez sugeridos por un modelo de velocidad *a priori*  $v(x, y, z)$ , junto con su incertidumbre. De tal forma que las sucesiones de variables aleatorias,  $\{\mathbf{V}_{P_J}\}$  y  $\{\mathbf{V}_{S_J}\}$ , conformen modelos de velocidad probabilístico para las ondas P y S respectivamente, generados a partir de un modelo determinístico  $v(x, y, z)$ . Adicionalmente, las funciones de densidad de probabilidad,  $\rho_{m_2}(m_2)$ , de dichas sucesiones de variables aleatorias representan la incertidumbre relacionada con los parámetros,  $m_2$ .

La mayoría de modelos de velocidad,  $v(x, y, z)$ , encontrados en la literatura, únicamente consideran variaciones verticales para la rapidez de las ondas sísmicas. Esto hace que la

<sup>1</sup>Esta relación también permite cuantificar la elasticidad de medio tal y como se presenta en la sección A.2.

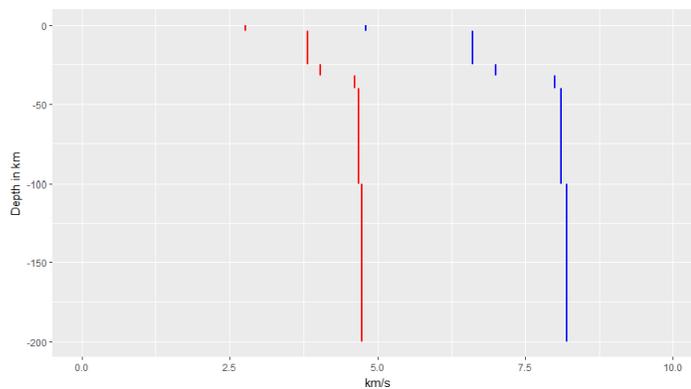
<sup>2</sup>La rapidez es considerada una magnitud escalar obtenida a partir de la magnitud de la velocidad, la cual es considerada como una cantidad vectorial.

<sup>3</sup>También conocido como modelo de Tierra o *Earth Model* [Kennett, 2009].

simplificación de o subdivisión de  $\mathbf{w}$  en capas plano paralelas sea más fácil de construir, pero también hace que las estimaciones de los parámetros hipocentrales,  $m_1$ , tengan sesgo, dado que no hay forma de asegurar o comprobar de manera directa la geometría por capas para  $\mathbf{w}$  y mucho menos los valores estimados para  $m_1$ . Esta simplificación permite que el problema hacia adelante definido por la ecuación (1-1), pueda ser abordado con mayor facilidad por la teoría de rayos<sup>4</sup>, haciendo que las soluciones de dicha ecuación simplemente requieran del cálculo de tiempos de viaje mínimo de rayos perpendiculares al frente de onda [Cerveny, 2005]. Este nuevo enfoque sobre el problema hacia adelante no solo es más sencillo de solucionar, también permite sintetizar la densidad y elasticidad de cada uno de los medios de  $\mathbf{w}$ , en valores de velocidad o realizaciones  $\mathbf{v}_{P_j}$  y  $\mathbf{v}_{S_j}$ , según lo planteado por las ecuaciones (2-4) y (2-5) respectivamente, dado que, la definición de rapidez de propagación de una onda sísmica es igual a la raíz cuadrada de la razón de parámetros de Lamé y densidad [Love, 2013].

### 3.2.2. Transformación de un modelo determinístico en uno probabilístico

Para ilustrar el proceso de transformación de un modelo determinístico a uno probabilístico se considera el modelo de velocidad modificado de la Red Sismológica Nacional de Colombia propuesto por [Ojeda and Havskov, 2001], el cual divide a  $\mathbf{w}$  en  $\mathbf{J} = 6$  medios. Los autores no presentaron valores para la rapidez de la onda S, por esta razón, se modificó dicho modelo determinístico al calcular un modelo de velocidad determinístico para la onda S a partir de una razón teórica de rapidez de onda P y S,  $(v_p/v_s) = \sqrt{3}$  [Tarantola, 2005]. El resultado de este modelo y su modificación puede ser observado en la figura (3-3):



**Figura 3-3.:** Modelo de velocidad que representa la velocidad de las ondas P y S en función de la profundidad con los colores azul y rojo, respectivamente. Modificado de [Ojeda and Havskov, 2001].

<sup>4</sup>Ver sección B.

De manera sintetizada, la tabla (3-1) relaciona la profundidad de los medios de  $\mathbf{w}$  en la primera columna, con valores para la rapidez para la onda P,  $(v_{p_j})$ , en la segunda columna, y para la onda S,  $(v_{s_j})$ , en la tercera columna.

**Tabla 3-1.:** Modelo determinístico de velocidad. Modificado de [Ojeda and Havskov, 2001].

	Profundidad en km	Rapidez onda P máxima [km/s] $(v_{p_j})$ .	Rapidez de onda S máxima [km/s] $(v_{s_j})$ .
1	[0,4)	4.8	3.36
2	[4,25)	6.6	3.75
3	[25,32)	7.0	4.47
4	[32,40)	8.0	4.5
5	[40,100)	8.1	5
6	[100, <i>half-space</i> )	8.2	5

El supuesto de velocidades constantes a lo largo de los diferentes medios de  $\mathbf{w}$  no permite incluir información sobre la variación lateral de la velocidad de las ondas sísmicas. Se espera que un modelo de velocidad pueda ser una alternativa para minimizar el efecto de sus fuertes supuestos. Aunque dicho modelo probabilístico propone que:

*Si las rapideces de las ondas P y S en cada uno de los medios de  $\mathbf{w}$  pueden ser consideradas como constantes desconocidas, entonces, es posible asumir que estas rapideces pueden ser modeladas por variables aleatorias, lo que implica que cada uno de los medios  $\mathbf{w}$  es homogéneo e isotrópicos.*

El reduccionismo de los modelos de velocidad determinísticos,  $v(x, y, z)$ , permite que estos puedan ser considerados como funciones definidas a trozos, dando lugar a preguntas sobre el significado o información que ofrece cada segmento de la función, o cómo estos pueden ser tenidos en cuenta para construir funciones de densidad de probabilidad a partir de estos valores. Por ejemplo, si se asume que los valores  $v_{p_j}$  y  $v_{s_j}$  en la tabla (3-1) corresponden a rapideces máximas posibles de las ondas P y S en el  $j$ -ésimo medio, entonces, las funciones de densidad de probabilidad deben modelar esta condición, mostrando el comportamiento de todas las rapideces menores a estos valores. Una vez definidos los significados o el tipo de información suministrada por dichos valores, se propone utilizar transformaciones de variables aleatorias involucrando estas cantidades escalares.

Siguiendo con la idea o supuesto que el modelo determinístico considerado,  $v(x, y, z)$ , proporciona información sobre velocidades máximas, transformaciones de variables aleatorias como el producto de un escalar y una variable aleatoria pueden ser consideradas para obtener expresiones para los modelos de velocidad probabilísticos  $\{\mathbf{V}_{P_j}\}$  y  $\{\mathbf{V}_{S_j}\}$ , tal y como lo

muestra la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{P_j} &= v_{p_j} \cdot I_{p_j} \\ \mathbf{V}_{S_j} &= v_{s_j} \cdot I_{s_j}\end{aligned}\tag{3-4}$$

donde las variables aleatorias  $I_{p_j}$  e  $I_{s_j}$  representan los comportamientos de las incertidumbres sobre las ondas P y S en el  $j$ -ésimo medio;  $v_{p_j}$  y  $v_{s_j}$  son valores suministrados por el modelo de velocidad determinístico  $v(x, y, z)$ ; y  $\mathbf{V}_{P_j}$  y  $\mathbf{V}_{S_j}$  son variables aleatorias que representan la velocidad de las ondas P y S respectivamente, en el  $j$ -ésimo medio de  $\mathbf{w}$ .

Múltiples distribuciones de probabilidad pueden ser consideradas para modelar el comportamiento de la incertidumbre relacionada a los valores del modelo determinístico. Aquí, se proponen distribuciones Beta pues ofrecen facilidad para modelar información externa que involucre subjetividad. Por lo tanto, se propone que

$$\begin{aligned}I_{p_j} &\sim \text{Beta}(\alpha_{I_{p_j}}, \beta_{I_{p_j}}) \\ I_{s_j} &\sim \text{Beta}(\alpha_{I_{s_j}}, \beta_{I_{s_j}})\end{aligned}\tag{3-5}$$

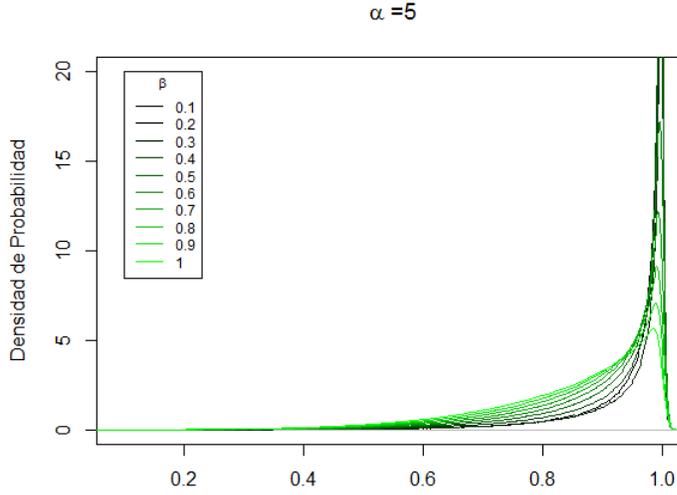
Es necesario tener presente que los parámetros de estas distribuciones deben ser coherentes con los modelos geodinámicos<sup>5</sup> definidos o propuestos para la región de estudio  $\mathbf{w}$ , o al menos con modelos geodinámicos teóricos [Turcotte and Schubert, 2002]. Según estos modelos geodinámicos, las magnitudes de las velocidades de las ondas sísmicas no solo aumenta con la profundidad, también, sus valores se concentran alrededor de velocidades particulares [Turcotte and Schubert, 2002].

Continuando con el supuesto ilustrativo de velocidades máximas para  $v(x, y, z)$ , es necesario definir valores para los parámetros de las distribuciones de la ecuación (3-5), los cuales deben garantizar que los escalares  $v_{p_j}$  y  $v_{s_j}$  del modelo determinístico sean velocidades máximas. Por ejemplo, un valor de  $\alpha_{I_{*j}} = 5$  para las distribuciones de las variables aleatorias  $I_{p_j}$  e  $I_{s_j}$  independientemente del tipo de onda sísmica, garantiza que las funciones de densidad de probabilidad tengan un *skewness* menor que cero, es decir que las funciones de densidad de probabilidad generadas para las variables aleatorias  $\mathbf{V}_{P_j}$  y  $\mathbf{V}_{S_j}$ , asignarán una baja densidad de probabilidad para las velocidades cercanas a cero, y una mayor densidad de probabilidad para velocidades menores a los valores  $v_{p_j}$  y  $v_{s_j}$ , respectivamente. De esta forma, se asegura que las velocidades del modelo de velocidad determinístico,  $v(x, y, z)$ , sean máximas como fue definido anteriormente, y que los modelos de velocidad probabilísticos obtenidos a través de las transformaciones presentadas por la ecuación (3-4), representen el comportamiento de todas las rapidezces menores a estos valores.

---

<sup>5</sup>Geodinámica es una rama de la geofísica que se encarga de estudiar la Tierra desde un punto de vista dinámico, involucrando física, química y matemáticas para entender como la convección al interior de la Tierra conlleva a la tectónica de placas [Turcotte and Schubert, 2002].

Adicional a lo anterior, para los parámetros  $\beta_{I_{*j}}$ , independientemente del tipo de onda sísmica, se debe cumplir que  $\beta_{I_{*1}} > \beta_{I_{*2}} > \dots > \beta_{I_{*J}}$  como lo muestra la figura 3-4, en donde se observa una mayor concentración de la densidad de probabilidad a medida que  $\beta \rightarrow 0$ :



**Figura 3-4.:** Posibles funciones de densidad de probabilidad para representar la incertidumbre de las rapidezces del modelo de velocidad determinístico,  $v(x, y, z)$  propuesto por [Ojeda and Havskov, 2001].

Es importante tener presente que la incertidumbre asociada a la información sobre las ondas S es mucho mayor que la incertidumbre asociada a las ondas P, dado que los tiempos de arribo de las ondas S son mucho más difíciles de identificar. Según las condiciones del ejemplo ilustrativo, se propone que  $\beta_{I_{p_j}} < \beta_{I_{s_j}}$  para todos los  $J$  medios de  $\mathbf{w}$ , como una forma para reflejar las diferencias en la incertidumbre de estos dos tipos de onda sísmica.

Generalizando el método y aplicando el Teorema de Cambio de Variable para obtener expresiones para las funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias  $\mathbf{V}_{P_j}$  y  $\mathbf{V}_{S_j}$  se obtiene,

$$f_{\mathbf{V}_{P_j}}(\mathbf{v}_{P_j}) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_{I_{p_j}} + \beta_{I_{p_j}})}{\Gamma(\alpha_{I_{p_j}})\Gamma(\beta_{I_{p_j}})} \left(\frac{\mathbf{v}_{P_j}}{v_{p_j}}\right)^{\alpha_{I_{p_j}}-1} \left(1 - \frac{\mathbf{v}_{P_j}}{v_{p_j}}\right)^{\beta_{I_{p_j}}-1} \left(\frac{1}{v_{p_j}}\right) & \mathbf{v}_{P_j} \in [0, v_{p_j}], \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3-6)$$

$$f_{\mathbf{V}_{S_j}}(\mathbf{v}_{S_j}) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_{I_{s_j}} + \beta_{I_{s_j}})}{\Gamma(\alpha_{I_{s_j}})\Gamma(\beta_{I_{s_j}})} \left(\frac{\mathbf{v}_{S_j}}{v_{s_j}}\right)^{\alpha_{I_{s_j}}-1} \left(1 - \frac{\mathbf{v}_{S_j}}{v_{s_j}}\right)^{\beta_{I_{s_j}}-1} \left(\frac{1}{v_{s_j}}\right) & \mathbf{v}_{S_j} \in [0, v_{s_j}], \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado, es importante analizar las implicaciones geodinámicas de las funciones de densidad de probabilidad obtenidas, pues bajo ciertas condiciones, para un medio cualquiera

de  $\mathbf{w}$ , los dominios de estas funciones de densidad de probabilidad pueden generar contradicciones o inclusive resultados absurdos desde un punto de vista geodinámico, pues estos dominios, sugieren que la rapidez de la onda P puede ser cero, o incluso menor que la rapidez de la onda S, lo cual va en contra de los postulados de la teoría de la Elasticidad [Love, 2013], los cuales declaran que para todos los  $\mathbf{J}$  medios de  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v}_{P_j} > \mathbf{v}_{S_j} \geq 0$  [Graff, 2012]. Por esta razón, es importante definir valores máximos y mínimos para las variables aleatorias  $\mathbf{V}_{P_j}$  y  $\mathbf{V}_{S_j}$ , y así garantizar que la rapidez de la onda S siempre es menor que la rapidez de la onda P.

En esta propuesta metodológica se proponen dos alternativas para este problema, en caso tal que se decida mantener funciones de densidad de probabilidad que puedan generar valores con incoherencias geodinámicas. La primera consiste en una regla sencilla de *rechazo-aceptación*, dentro del proceso de simulación y cálculo. Esta regla considera un par de realizaciones de velocidad cualesquiera,  $\mathbf{v}_{P_j}$  y  $\mathbf{v}_{S_j}$ , del  $j$ -ésimo medio de  $\mathbf{w}$  y:

- Si  $0 \leq \mathbf{v}_{S_j} < \mathbf{v}_{P_j}$ , se acepta el par de valores. En caso contrario, se rechazan y se generadas dos nuevos valores.

La segunda alternativa es más elaborada y consiste en truncar las funciones de densidad de probabilidad con el objetivo de asegurarse que los dominios de las funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias de las velocidades de las ondas P y S del  $j$ -ésimo medio no se superpongan. Aunque esta alternativa abre una nueva discusión sobre el proceso para proponer o calcular valores para las velocidades mínimas,  $v_{*min_j}$ . De todas maneras, dicho valor mínimo,  $v_{*min_j}$ , debe ser coherente con los postulados de elasticidad para sólidos, mientras que los valores máximos siguen siendo los valores del modelo de velocidad determinístico. Estas funciones de densidad de probabilidad tienen la siguiente expresión:

$$f(\mathbf{v}_{P_j} | v_{pmin_j} < \mathbf{v}_{P_j} \leq v_{p_j}) = \begin{cases} \frac{f(\mathbf{v}_{P_j})}{F(v_{p_j}) - F(v_{pmin_j})} & \text{si } v_{pmin_j} < \mathbf{v}_{P_j} \leq v_{p_j}, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3-7)$$

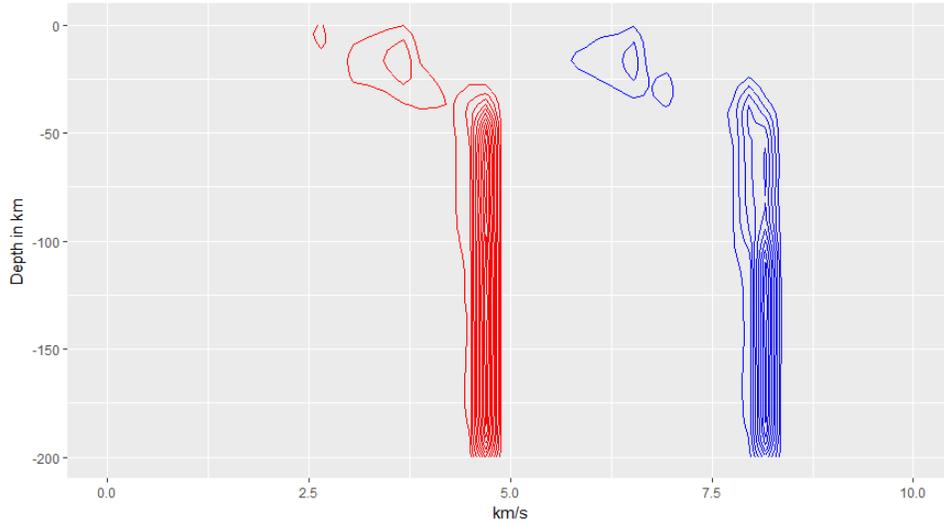
$$f(\mathbf{v}_{S_j} | v_{smin_j} < \mathbf{v}_{S_j} \leq v_{s_j}) = \begin{cases} \frac{f(\mathbf{v}_{S_j})}{F(v_{s_j}) - F(v_{smin_j})} & \text{si } v_{smin_j} < \mathbf{v}_{S_j} \leq v_{s_j}, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

donde,

$$\frac{f(\mathbf{v}_{P_j})}{F(v_{p_j}) - F(v_{pmin_j})} = \frac{1}{F(v_{p_j}) - F(v_{pmin_j})} \frac{\Gamma(\alpha_{I_{P_j}} + \beta_{I_{P_j}})}{\Gamma(\alpha_{I_{P_j}})\Gamma(\beta_{I_{P_j}})} \left(\frac{\mathbf{v}_{P_j}}{v_{p_j}}\right)^{\alpha_{I_{P_j}} - 1} \left(1 - \frac{\mathbf{v}_{P_j}}{v_{p_j}}\right)^{\beta_{I_{P_j}} - 1} \left(\frac{1}{v_{p_j}}\right) \quad (3-8)$$

$$\frac{f(\mathbf{v}_{S_j})}{F(v_{s_j}) - F(v_{smin_j})} = \frac{1}{F(v_{s_j}) - F(v_{smin_j})} \frac{\Gamma(\alpha_{I_{S_j}} + \beta_{I_{S_j}})}{\Gamma(\alpha_{I_{S_j}})\Gamma(\beta_{I_{S_j}})} \left(\frac{\mathbf{v}_{S_j}}{v_{s_j}}\right)^{\alpha_{I_{S_j}} - 1} \left(1 - \frac{\mathbf{v}_{S_j}}{v_{s_j}}\right)^{\beta_{I_{S_j}} - 1} \left(\frac{1}{v_{s_j}}\right)$$

Finalmente, una simulación de los modelos de velocidad probabilísticos para las ondas P y S es presentado en la figura **3-5**, en donde se observa que una gran cantidad de realizaciones o modelos de velocidad definidos a partir de las funciones de densidad,  $\rho_{m_2}(m_2)$ :



**Figura 3-5.:** Modelos de velocidad probabilísticos  $\{\mathbf{V}_{P_j}\}$  y  $\{\mathbf{V}_{S_j}\}$ . En rojo los contornos de densidad de probabilidad de la rapidez de la onda S y en azul para la onda P.

### 3.3. Obtención de focos posibles a partir de distribuciones a priori.

La región  $\mathbf{w}$  debe contener todos los del interior de la Tierra de donde posiblemente se propagó el evento sísmico bajo estudio. A esta región contenida al interior de  $\mathbf{w}$ , la llamaremos  $\Omega$ , y se describe así:

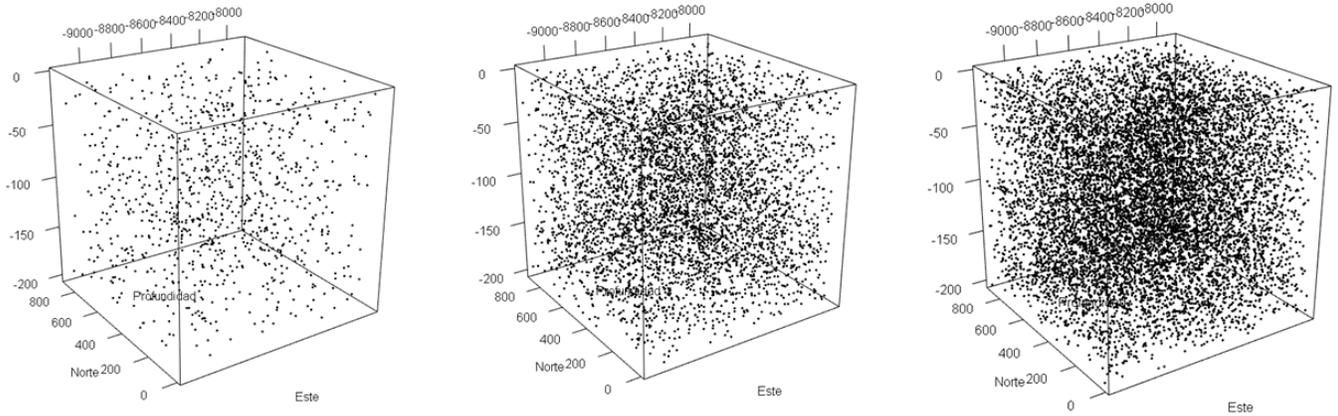
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]\} \quad (3-9)$$

donde los puntos  $(a_\gamma, b_\gamma)$  con  $\gamma = 1, 2, 3$ , son los extremos de los dominios de las distribuciones de probabilidad y los límites de  $\Omega$ .

Previo al análisis de las señales sísmicas registradas por la red de estaciones, la ubicación *a priori* del foco del evento sísmico se asume uniforme sobre  $\Omega$ , pues sin información o datos,  $\mathbf{d}$ , no es posible establecer con seguridad una posición sobre el origen espacial del evento sísmico. Por lo tanto, se proponen tres distribuciones uniformes continuas que representen el estado de información o condición de ignorancia sobre el origen espacial del evento sísmico:

$$\begin{aligned} X_o &\sim \text{Unif}(a_1, b_1) \\ Y_o &\sim \text{Unif}(a_2, b_2) \\ Z_o &\sim \text{Unif}(a_3, b_3) \end{aligned} \quad (3-10)$$

El anterior supuesto permite tomar muestras aleatorias de tamaño  $\Lambda$  sobre  $\Omega$ , para luego analizar el comportamiento asintótico de los focos probables del evento sísmico a medida que el tamaño de  $\Lambda \rightarrow \infty$ . En la figura 3-6 se observa una serie de simulaciones sobre  $\Omega$  aumentando el tamaño de muestra  $\Lambda$ :



**Figura 3-6.:** Muestreo sobre  $\mathbf{w}$  o posiciones iniciales para los focos.

Finalmente, las diferentes configuraciones de velocidad y posición inicial generados a partir de las realizaciones de las variables aleatorias definidas por las ecuaciones (3-10) y las sucesiones de variables aleatorias  $\{\mathbf{V}_{P_j}\}$  y  $\{\mathbf{V}_{S_j}\}$  conforman un conjunto de valores de entrada para el algoritmo del presente método.

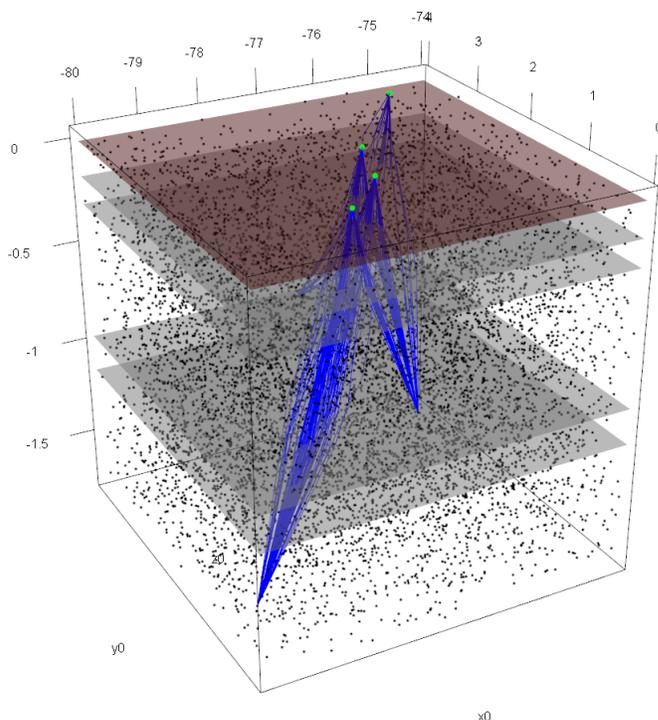
### 3.4. Trazado de rayos sísmicos bajo diferentes escenarios de posición inicial y velocidad

En esta sección se analiza cómo las realizaciones de los modelos de velocidad probabilísticos  $\{\mathbf{V}_{P_j}\}$  y  $\{\mathbf{V}_{S_j}\}$  afectan los tiempos de viaje y trayectorias de los rayos sísmicos cuando la posición inicial y final permanecen iguales.

La función de tiempo de viaje representada por la ecuación (2-7), depende de la rapidez,  $\mathbf{v}_\iota$ , que alcanza el rayo sísmico en el  $\iota$ -ésimo medio de  $\mathbf{w}$ . Por eso, cuando se evalúan diferentes realizaciones de los modelos de velocidad probabilísticos, se deben calcular diferentes trayectorias y tiempos de viaje válidos para cada situación, lo que permite construir matrices de tiempos de viaje cuyas filas indican las posiciones iniciales generadas, las columnas las realizaciones de los modelos de velocidad, y cada entrada, el tiempo de viaje calculado a

una estación de la red de estaciones. De esta forma es posible considerar una gran cantidad de variaciones en el tiempo de viaje y trayectorias, las cuales pueden ser representadas por variables aleatorias.

La figura 3-7 muestra una región arbitraria  $\mathbf{w}$  con una serie de simulaciones de posición inicial representados por puntos negros, y de modelos de velocidad que afectan las trayectorias de los rayos sísmicos representados por los segmentos de línea azules, las cuales se dirigen a un conjunto de estaciones indicadas por los puntos verdes. Los planos grises y rojo translúcidos indican las interfaces de los modelos de velocidad considerados:



**Figura 3-7.:** Diferentes trayectorias probables para un rayo que viaja en una región del espacio cuya velocidad es una sucesión de variables aleatorias  $\{\mathbf{V}(\psi) : \psi \in \mathbb{R}^3\}$ .

### 3.5. Selección de focos probables a través del cálculo de tiempos de viaje

Resolver el problema hacia adelante equivale a encontrar trayectorias para los rayos sísmicos cuyo tiempo de viaje es mínimo. A pesar que estos tiempos no pueden ser observados ni registrados, calcularlos proporciona información valiosa para seleccionar focos probables. En

esta sección se discute la importancia del cálculo de tiempos de viaje y como se puede utilizar la relación lineal entre estos tiempos y los tiempos de arribo,  $\{t_{a_n}\}$ , según la ecuación (1-2). Luego, se discute como la implementación de los modelos probabilísticos  $\{\mathbf{V}_{P_j}\}$  y  $\{\mathbf{V}_{S_j}\}$  en los cálculos de tiempos de viaje hacen que estos tiempos también deban ser considerados como variables aleatorias.

Según la ecuación (1-2) los tiempos de arribo,  $\{t_{a_n}\}$  pueden ser descritos de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} t_{a_1} &= \mathbf{t}_o + t_{v_1} \\ t_{a_2} &= \mathbf{t}_o + t_{v_2} \\ &\vdots \\ t_{a_n} &= \mathbf{t}_o + t_{v_n} \end{aligned} \tag{3-11}$$

donde  $\{t_{v_1}, t_{v_2}, \dots, t_{v_n}\}$  representan los tiempos de viaje de los rayos sísmicos que parten desde un punto con coordenadas  $(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o, \mathbf{z}_o) \in \mathbf{w}$ , a una red de estaciones sismológicas; y  $\mathbf{t}_o$  representa el tiempo de origen del evento sísmico bajo estudio, el cual es completamente desconocido.

Lo anterior representa un problema para establecer las coordenadas y tiempo de origen del evento sísmico, pues existen infinitas combinaciones de tiempos de origen y tiempos de viaje que al sumarse son iguales a los tiempos de arribo. Entonces, para solucionar este problema, se propone calcular los rayos sísmicos que van desde cada uno de los  $\Lambda$  puntos que fueron muestreados, con el objetivo de identificar el punto o subregión de  $\Omega$  que mejor expliquen los tiempos de arribo observados. Esta tarea puede facilitarse si se consideran las diferencias en los tiempos de arribo.

Para ilustrar lo anterior, se consideran dos tiempos de arribo  $t_{a_l}$  y  $t_{a_h}$  registrados por las  $l$ -ésima y  $h$ -ésima estaciones como se describen en la ecuación (3-11), el  $i$ -ésimo punto de la muestra de tamaño  $\Lambda$  con coordenadas  $(x_o, y_o, z_o)$ . Despejando los tiempos de origen e igualando las expresiones se obtiene que,

$$t_{a_l} - t_{v_{i,l}} = t_{a_h} - t_{v_{i,h}} \tag{3-12}$$

donde  $t_{v_{i,l}}$  y  $t_{v_{i,h}}$  representan los tiempos de viaje calculados de los rayos sísmicos definidos por la ecuación (2-7), que parten desde el  $i$ -ésimo punto a las  $l$ -ésima y  $h$ -ésima estaciones.

La expresión (3-12) indica que si se los modelos de velocidad probabilísticos  $\{\mathbf{V}_{P_j}\}$  y  $\{\mathbf{V}_{S_j}\}$  son apropiados y las coordenadas  $i$ -ésimo punto son correctas, se debe cumplir esa igualdad.

En otras palabras, si las diferencias en tiempos de arribo observados son iguales a las diferencias en tiempos de viaje calculados:

$$t_{a_l} - t_{a_h} = t_{v_{i,l}} - t_{v_{i,h}} \quad (3-13)$$

las realizaciones de los modelos de velocidad probabilísticos  $\{\mathbf{V}_{P_j}\}$  y  $\{\mathbf{V}_{S_j}\}$  se consideran como plausibles representaciones de  $\mathbf{w}$  y la coordena del  $i$ -ésimo foco es coherente con los demás tiempos de arribo o datos observados  $\mathbf{d}$ , se considera este coordenada como un foco probable del evento sísmico bajo estudio. Por lo tanto, las diferencias de tiempos de viaje calculados pueden aportar información para seleccionar focos o coordenadas probables para el foco del evento sísmico y modelos de velocidad plausibles.

Cumplir con la igualdad (=) de la ecuación (3-12) es prácticamente imposible pues esto no solo implicaría conocer los tiempos de viaje de cada uno de los puntos  $(x, y, z) \in \mathbf{w}$ . También implicaría contar con tiempos arribo libres de error, lo cual no es posible en muchos casos. Por estas razones, se propone adaptar el desarrollo presentado en (3-12) considerando realizaciones de variables aleatorias y desigualdades para construir un criterio o regla de *Rechazo/Aceptación*:

$$\left[ \left( t_{v_{*i,h}} - t_{v_{*i,l}} \right) \leq (t_{a_{*h}} - t_{a_{*l}} - \varepsilon) \right] \cap \left[ \left( t_{v_{*i,h}} - t_{v_{*i,l}} \right) \geq (t_{a_{*h}} - t_{a_{*l}} + \varepsilon) \right] \quad (3-14)$$

donde  $t_{v_{*i,h}}$  y  $t_{v_{*i,l}}$  representan los tiempos de viaje calculados de dos rayos sísmicos que van desde el  $i$ -ésimo foco generado a las  $h$ -ésima y  $l$ -ésima estaciones, y  $t_{a_{*h}}$  y  $t_{a_{*l}}$  las respectivas realizaciones de tiempos de arribo de las ondas bajo consideración. El término  $\varepsilon$  es una constante arbitraria y positiva que indica un error.

Diferentes combinaciones pueden ser consideradas dentro del criterio de selección dado por la ecuación (3-14), como diferencias de tiempos de viaje y arribo de la onda S, y diferencias de tiempos de viaje y arribo de las ondas S y P. Estos criterios se pueden resumir así:

- $t_{v_{P_{i,h}}} - t_{v_{P_{i,l}}}$  : es la diferencia de tiempo de viaje calculado de la onda P desde el  $i$ -ésimo foco a las  $h$ -ésima y  $l$ -ésima estación.
- $t_{a_{P_h}} - t_{a_{P_l}}$  : es la diferencia de las realizaciones de tiempos de arribo de la onda P a las  $h$ -ésima y  $l$ -ésima estación.
- $t_{v_{S_{i,h}}} - t_{v_{S_{i,l}}}$  : es la diferencia en tiempos de viaje calculados de las ondas S desde el  $i$ -ésimo foco a la  $h$ -ésima estación y  $l$ -ésima estación.
- $t_{v_{S_{i,h}}} - t_{v_{P_{i,h}}}$  : es la diferencia en tiempos de viaje calculados de las ondas S y P desde el  $i$ -ésimo foco a la  $h$ -ésima estación.
- $t_{v_{S_{i,h}}} - t_{v_{P_{i,l}}}$  : es la diferencia en tiempos de viaje calculados de las ondas S y P desde el  $i$ -ésimo foco a la  $h$ -ésima estación y  $l$ -ésima estación.

La condición (3-14) está construida por diferencias de tiempos de viaje entre estaciones, e *intra* estación, y de realizaciones de tiempos de arribo. Debe tenerse presente que esta condición puede ser más flexible, es decir, la magnitud de  $\varepsilon > 0$  puede aumentar cuando se consideran tiempos de arribo de ondas S, los cuales tienen mayor incertidumbre que los tiempos de arribo de las ondas P. Por otro lado, si el número de estaciones aumenta, la condición (3-14) es más difícil de satisfacer, pues esta representa una secuencia *anidada* de condiciones. El número de condiciones posibles de los  $n$  tiempos de arribo puede ser calculada como una combinatoria:

$$\binom{n}{2} = \frac{n}{2!(n-2)!} \quad (3-15)$$

Por lo tanto, un evento sísmico con una gran cantidad de tiempos de arribo tendrá más condiciones que satisfacer, pero la precisión de la estimación de los parámetros hipocentrales será mayor.

### 3.6. Tiempo de origen aleatorio

Los focos probables o seleccionados a través de la condición de la ecuación (3-14) proporcionan información sobre el tiempo de origen,  $\mathbf{t}_o$ , del evento sísmico en consideración. Una expresión para  $\mathbf{t}_o$  puede ser obtenida a partir de la expresión del tiempo de arribo,  $t_a$ , en función de tiempo de viaje representada por la ecuación (1-4):

$$\mathbf{t}_o = t_{a_h} - t_{v_{k,h}}(x_o, y_o, z_o, x'_h, y'_h, z'_h, \mathbf{v}) \quad (3-16)$$

es decir que un tiempo de origen probable puede ser calculado a partir de la diferencia entre la realización de un tiempo de arribo  $t_{a_h}$  y el tiempo de viaje,  $t_{v_{k,h}}$ , del  $k$ -ésimo foco probable a la  $h$ -ésima estación. Entonces, el conjunto de tiempos de origen pueden ser considerado como una variable aleatoria  $T_o$ , generada a partir de la diferencia de dos variables aleatorias, y su función de densidad de probabilidad,  $f_{T_o}(t_o)$ , puede ser obtenida de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} F_{t_o}(t_o) &= P(T_o \leq t_o) \\ &= P(T_{a_h} - T_{v_{k,h}} \leq t_o) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{t_o + t_{v_{k,h}}} f(t_{a_h}, t_{v_{k,h}}) dt_{a_h} dt_{v_{k,h}} \end{aligned} \quad (3-17)$$

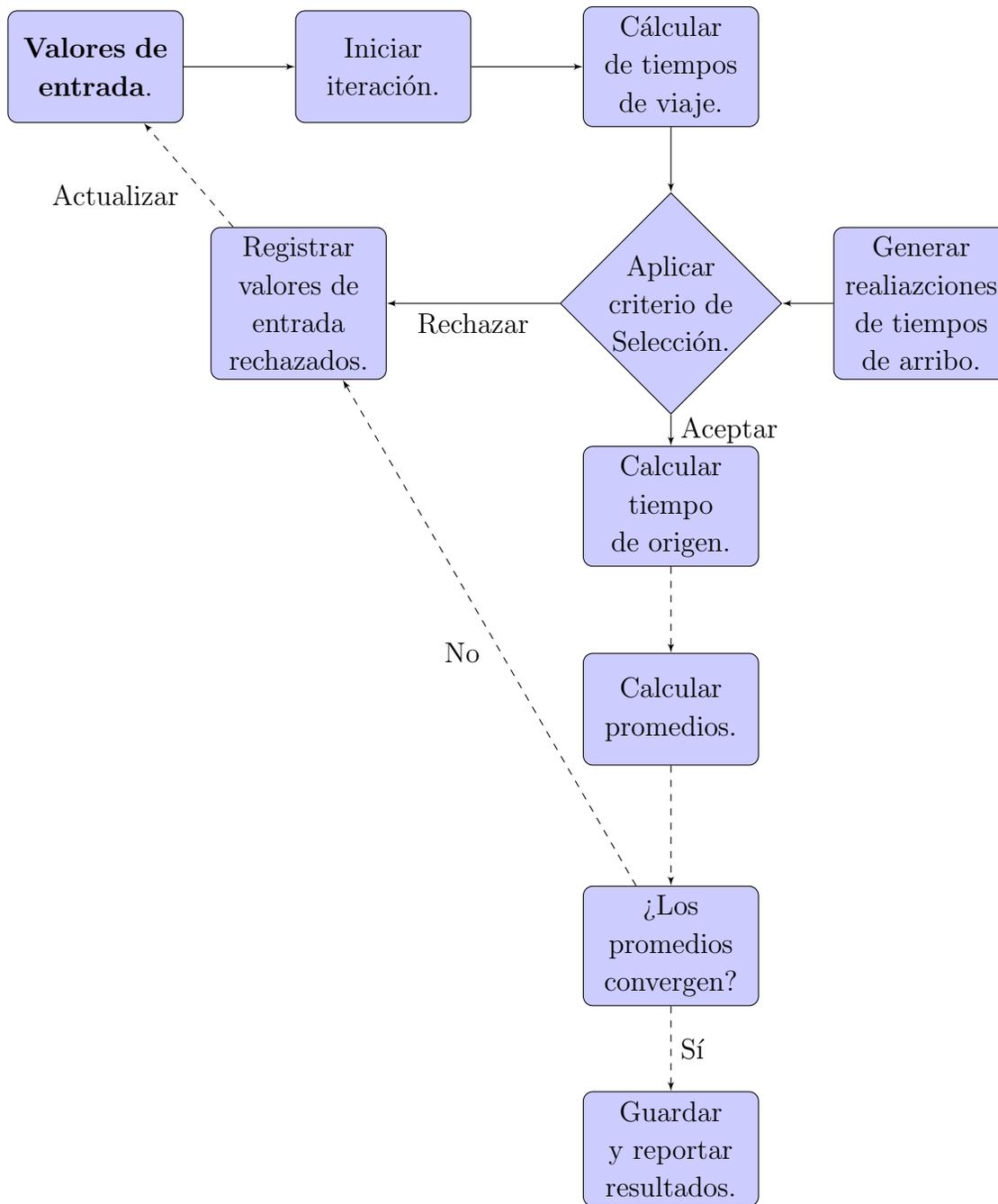
para  $t_o \geq 0$ . Consecuentemente, su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f_{T_o}(t_o) = \int_0^\infty f_{T_{a_h}, T_{v_{k,h}}}(t_o + t_{v_{k,h}}, t_{v_{k,h}}) dt_{v_{k,h}} \quad (3-18)$$

Adicional a esto, se debe tener presente que el tiempo de origen  $t_o$  debe ser aproximadamente igual independientemente del foco seleccionado o estación considera. En otras palabras, la varianza de  $T_o$  debe ser tan pequeña como sea posible para poder tener resultados apropiados.

### 3.7. Algoritmo de la propuesta metodológica

La figura 3-8 ofrece un esquema del algoritmo de la propuesta metodológica:



**Figura 3-8.:** Método de Monte Carlo aplicado a la solución del problema conjunto Hipocentro - Modelo de Velocidad.

Los valores de entrada corresponden a las realizaciones de los modelos probabilísticos de velocidad  $\{\mathbf{V}_{P_j}\}$  y  $\{\mathbf{V}_{S_j}\}$ , y de las variables aleatorias de la ecuación (3-10) que representan la posición inicial. El cálculo de los tiempos de viaje está definido por la ecuación (2-7), los cuales junto con las realizaciones de las variables aleatorias,  $\{T_{an}\}$ , generan criterios de selección como está descrito por la ecuación (3-14). Estos criterios de selección conforman la primera regla de *Rechazo/Aceptación*, y a partir de esta, las realizaciones de los modelos de velocidad y posición *rechazadas* pasan ser almacenadas para ubicar futuros eventos sísmicos y para actualizar los valores de entrada iniciales. Mientras que las posiciones iniciales y modelos de velocidad *aceptados* son utilizados para calcular valores para el tiempo de origen del evento sísmico. Luego, se analiza la convergencia de los promedios de los valores del tiempo de origen, coordenadas espaciales, modelos de velocidad *aceptados*.

El problema con esta forma de análisis siempre será la falta de información sobre los parámetros del modelo,  $\mathbf{m}$ , pero al menos se cuenta con la información obtenida de las sucesiones de variables aleatorias  $\{X_k\}$ ,  $\{Y_k\}$ ,  $\{Z_k\}$  y  $\{T_{k*}\}$  de los parámetros hipocentrales y de las sucesiones,  $\{V_{P_{k*}}\}$  y  $\{V_{S_{k*}}\}$ , que representan los modelos de velocidad seleccionados. Por esta razón, se propone analizar estas sucesiones de variables aleatorias a través de la Ley de Los Grandes Números, esperando que los promedios sean un estimador de la media de todos los parámetros del modelo,  $\mathbf{m}$  definido por la ecuación (1-11), y así probar que la propuesta metodológica genera soluciones convergentes.

De manera más específica, las siguientes subsecciones explican el algoritmo de la presente propuesta metodológica.

### 3.7.1. Valores de entrada

Se indican las condiciones que se deben tener antes de resolver el problema hacia adelante:

1. Seleccionar una región de la Tierra  $\mathbf{w}$  que contenga las estaciones que registraron el evento sísmico local.
- 2 Registrar el número de tiempos de arribo  $n$  y definir la incertidumbre asociada a cada uno de estos tiempos siguiendo el desarrollo expuesto en la sección 3.1.
  - 2.1 Si los tiempos de arribo están libres de incertidumbre siga al paso 3.
  - 2.2 Asignar funciones de densidad de probabilidad usando información de expertos como explica la ecuación (3-2), e información sobre el intervalo de muestreo, frecuencia, parámetros de amortiguamiento del instrumento y los retardos calculados para la estación.
  - 2.3 Definir una muestra de tamaño  $n_{at}$  para cada uno de los  $n$  tiempos de arribo considerando las funciones de densidad de probabilidad definidas en el punto anterior.

3. Seleccionar y luego transformar un modelo de velocidades determinístico en un modelo probabilístico de velocidades, como se explica en la sección 3.2.
4. Generar una muestra de tamaño  $v_o$  para cada uno de los dos modelos de velocidad probabilísticos,  $\{\mathbf{V}_{P_j}\}$  y  $\{\mathbf{V}_{S_j}\}$ , considerando sus funciones de densidad de probabilidad generadas a partir de las ecuaciones (3-6), y (3-7) si es necesario.
5. Generar una muestra focos posibles o puntos iniciales de tamaño  $\Lambda$  usando las variables aleatorias de la ecuación (3-10) .

### 3.7.2. Almacenamiento y cálculos

Se debe generar el espacio para almacenar los cálculos que se realizarán en cada iteración.

6. Crear  $n$  matrices de  $\Lambda \times v_o$  donde la información será guardada, considerando el análisis de la sección 3.4:

$$\begin{matrix} & v_1 & \cdots & v_o \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ \Lambda \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- 6.1 Para cada una de las entradas de las  $n$  matrices: Calcular los tiempo de viaje según la ecuación (2-7) y las  $v_o$  realizaciones generadas en el paso (4), que van desde cada uno de los  $\Lambda$  focos del paso (5) a las  $r$  estaciones.
7. Proponer un valor  $\varepsilon \rightarrow 0$  para las el criterio de selección o regla de *Rechazo/Aceptación* de la ecuación (3-14).
  - 7.1 Calcular el número de diferencias de tiempos de arribo posibles usando la combinatoria  $C(n, 2)$  de la ecuación (3-15).
8. Aplicar la regla de *Rechazo/Aceptación* de la ecuación (3-14) considerando los  $n_{at}$  tiempos de arribo del punto (2.3).
  - 8.1 Registrar los valores iniciales que sean rechazados según la regla de *Rechazo/Aceptación* para actualizar los valores de entrada de la siguiente iteración.
  - 8.2 Si los valores iniciales son aceptados, calcular el tiempo de origen según la ecuación (3-16).
9. Calcular promedios de los valores iniciales aceptados.

- 
10. Repetir el algoritmo  $k$  veces aumentando progresivamente el tamaño de muestra  $\Lambda$ .
  11. Evaluar la convergencia en probabilidad de los  $k$  promedios obtenidos en el punto anterior según la ecuación (2-20).
    - 11.1 Si algún valor promedio no converge, rechazar los valores de entrada seleccionados y actualizar los valores de entrada de la siguiente iteración.
    - 11.2 Si el promedio converge, aceptar y guardar tiempos de origen y valores de entrada.
  12. Reportar resultados y finalizar proceso.

Por último, las matrices de tiempo de viaje calculadas en el punto (6) pueden ser utilizadas para resolver el problema inverso de futuros eventos sísmicos.

## 4. Resultados

El evento sísmico ocurrido el 30 de Septiembre de 2012 con epicentro estimado en el municipio de La Vega, Cauca; fue seleccionado para ilustrar la presente propuesta metodológica. La información general resumida para este evento sísmico según RSNC se presenta en la figura 4-1:

STAT	SP	IPHASW	D	HRMM	SECON	CODA	AMPLIT	PERI	AZIMU	VELO	AIN	AR	TRES	W	DIS	CAZ7
2012-09-30-1630-00M.COL_220																1
																6
SOTA	HZ	IP	D	1631	57.13		26.4e4	0.78			173		-0.4010	19.0	342	
SOTA	HZ	I		1632	12.23		26.4e4	0.78						19.0	342	
CRU	SZ	EP		1631	58.75						159		0.1710	62.7	225	
CRU	SZ	I		1632	12.73		22.2e4	0.59						62.7	225	
POP2	HZ	IP	D	1631	58.12						159		-0.3510	64.3	348	
POP2	HE	ES	1	1632	17.07						159		-0.177	64.3	348	
FLO2	HZ	IP	D	1631	59.92						146		-0.8110	109	113	
CPAS2EZ	IP		D	1632	3.17						145		1.7010	113	223	
MARA	HZ	IP	D	1632	1.35						144		-0.3010	117	35	
MARA	HN	ES	1	1632	22.92						144		0.037	117	35	
GCUF	HZ	IP	D	1632	2.69						143		0.5010	120	227	
BET	SZ	EP		1632	3.48						137		-0.509	151	57	
HORQ	SZ	IP	D	1632	4.95						134		-0.739	167	357	
HORQ	SZ	I		1632	15.89		14.7e4	0.62						167	357	
HORQ	SE	ES		1632	30.10						134		0.039	167	357	
GOR	SZ	EP		1632	8.85						126		-0.638	212	302	
GOR	SZ	I		1632	22.48		12.5e4	0.66						212	302	
GOR	SN	ES	1	1632	37.24						126		0.406	212	302	
GOR	SN	I		1632	51.50		31.6e4	0.67						212	302	
YOT	HZ	IP		1632	9.93						125		-0.848	224	6	
YOT	EZ	EP		1632	10.14						126			224	6	
YOT	HZ	I		1632	50.88		25.0e4	0.94						224	6	
MAL	SZ	IP		1632	13.32						123		0.898	242	339	
MAL	SZ	I		1632	25.82		21.4e4	0.52						242	339	
MAL	SN	I		1632	59.30		27.7e4	0.38						242	339	
PRA	HZ	IP	D	1632	15.18						120		0.008	267	44	
PRA	HE	ES	1	1632	47.69						120		0.726	267	44	
ANIL	HZ	EP		1632	19.01						116		-0.707	307	25	
ANIL	HE	ES	1	1632	56.76						116		1.715	307	25	
ANIL	HZ	I		1633	11.64		16.4e4	0.37						307	25	
TOL	SZ	EP		1632	20.45						115		-0.777	320	25	
PAL	HZ	EP		1632	20.74						115		-0.797	326	5	
PAL	HZ	I		1632	33.68		16.0e4	0.18						326	5	

Figura 4-1.: Resumen de la estimación de los parámetros hipocentrales y tiempos de arribo seleccionados por estación.

La figura 4-1 contiene información sobre las estimaciones de parámetros hipocentrales  $m_1$  según RSNC, las cuales se presentan en la tabla 4-1:

**Tabla 4-1.:** Estimación de los parámetros hipocentrales según RSNC considerando el modelo determinístico de velocidad de [Ojeda and Havskov, 2001].

$X(^{\circ}Este)$	$Y(^{\circ}Norte)$	$Z(km)$ (Profundidad)	Tiempo de origen (hh:mm:ss)
-75.555	1.971	-171.9	16:31:34.4

El sistema coordinado de estas coordenadas espaciales tiene su origen en el Meridiano de Greenwich y en el *Paralelo del Ecuador*, el nivel del mar se asume como una altura de referencia igual a 0. El signo  $(-)$  en la coordenada  $X$  significa *en dirección Oeste* y en la coordenada  $Z$  significa *hacia el interior de la Tierra*. El signo  $(+)$  en la coordenada  $Y$  significa *en dirección al Polo Norte*.

En total 16 estaciones registraron el evento sísmico, las cuales se observan en la primera columna con título STAT, comenzando con SOTA (abreviación de Sotará, Cauca), y terminando en PAL (abreviación de San José del Palmar, Chocó). El tipo de onda identificada se observa en la columna IPHAS, donde la letra I indica que la onda observada es *impulsiva*, y la letra E para ondas *emergentes*. Las letras P o S seguidas de las letras I o E indican el tipo de onda, P para ondas P y S para ondas S. Según lo anterior, IP significa que la onda P observada es *impulsiva*, ES que la onda S observada es *emergente*.

La columna W indica que *penalizaciones* asignados a los tiempos de arribo seleccionados. Las columnas HRMM y SECON indican la hora, minuto y segundos de los tiempos de arribo seleccionados.

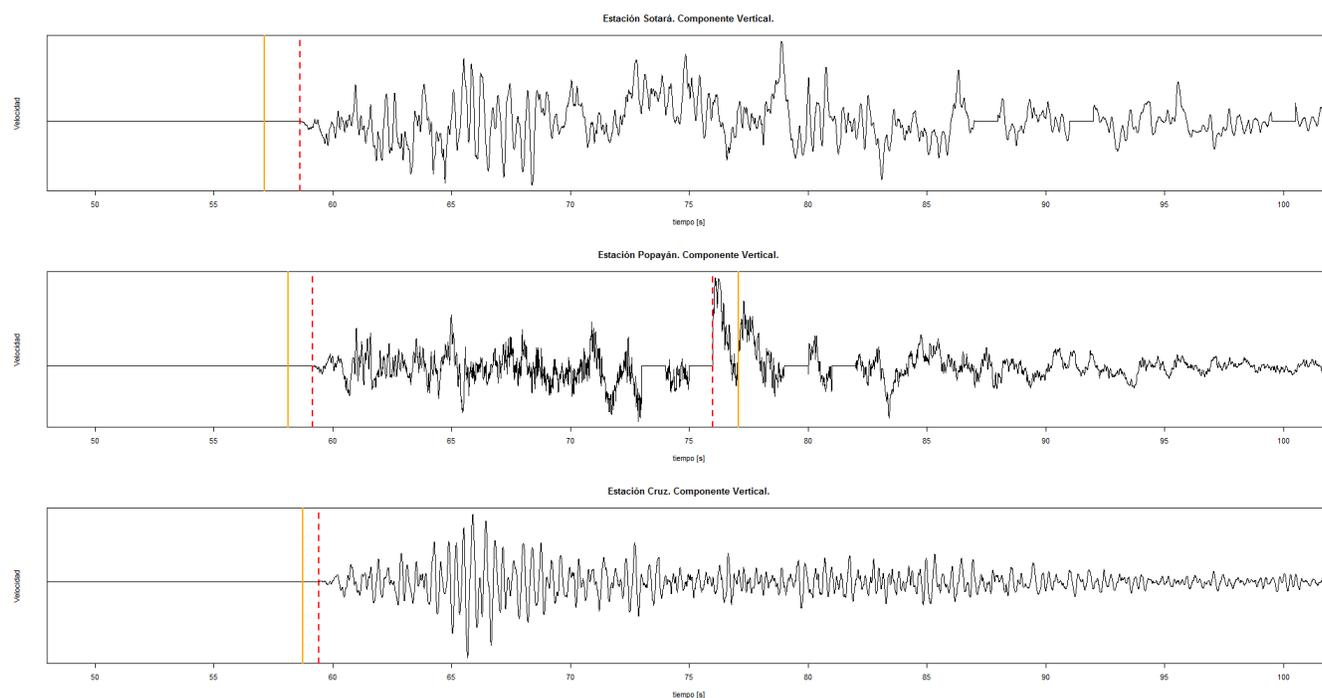
Las coordenadas *Este* y *Norte* fueron convertidas a unidades de kilómetros [ $km$ ] al multiplicar por  $111.3 km/^{\circ}$ . De esta manera, la posición de cualquier partícula en  $\mathbf{w}$  puede ser definida en coordenadas rectangulares cuya unidad de longitud es el kilómetro. La unidad de tiempo para realizar los cálculos fue el segundo [ $s$ ]. La tabla 4-2 muestra la conversión de estas unidades:

**Tabla 4-2.:** Conversión de unidades de parámetros hipocentrales según RSNC.

$x : Este [km]$	$y : Norte [km]$	$z : Profundidad [km]$	Tiempo de origen [ $s$ ]
-8520.572	219.3723	-171.9	34.4

## 4.1. Variables aleatorias de los tiempos de arribo $\{T_{a_n}\}$

Los tiempos de arribo reportados por RSNC fueron analizados para conocer su veracidad considerando las señales sísmicas registradas por las estaciones. Luego, a partir de estas señales sísmicas se construyeron funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias que modelan los tiempos de arribo de las ondas sísmicas  $\{T_{a_n}\}$  registradas por la red de estaciones de RSNC que registraron el evento sísmico considerado. Para efectos prácticos, únicamente se ilustra el procedimiento propuesto con las señales sísmicas más relevantes, las cuales pertenecen a las estaciones más cercanas al epicentro, tal y como lo muestra la siguiente figura 4-2, donde la línea roja vertical indica los tiempos de arribo propuestos y en color anaranjado los tiempos de arribo reportados por RSNC:



**Figura 4-2.:** Señales sísmicas registradas por las estaciones SOTA, POP2 y CRU, en la componente vertical, con sus respectivos tiempos de arribo estimados para la onda P y S.

Estas señales sísmicas corresponden a las señales registradas en la estación SOTA (recuadro superior), POP2 (segundo recuadro), y estación CRU (recuadro inferior). Claramente, los tiempos de arribo propuestos difieren de los reportados por RSNC. Exceptuando para el tiempo de arribo de la onda S en POP2, los tiempos de arribo propuestos para la onda P son posteriores a los reportados por RSNC.

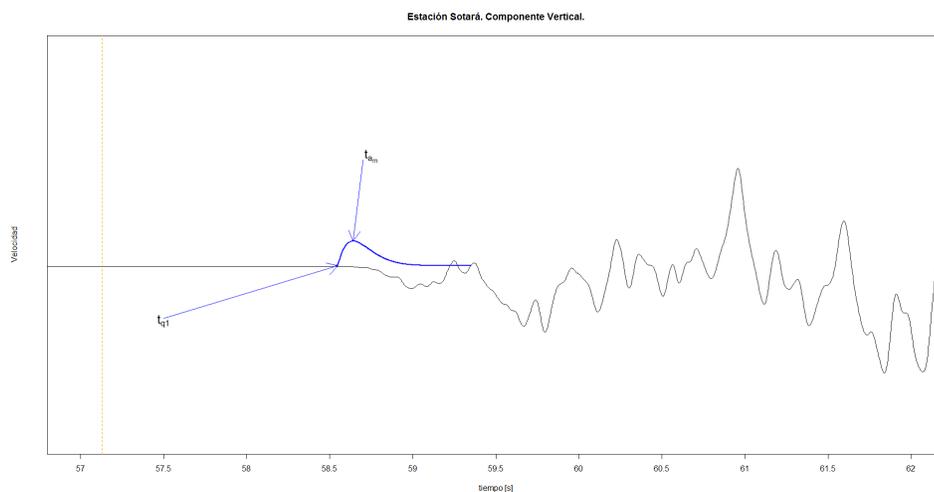
A continuación se muestra en detalle las funciones de densidad de probabilidad obtenidas para estas tres señales sísmicas. Nótese además que el eje vertical de las señales sísmicas son valores de velocidad sin unidades específicas, por esta razón no se proporciona una escala de valores en dicha componente. De todas maneras, esto no afecta los valores de tiempo de arribo, ni la construcción de las funciones de densidad de probabilidad para el conjunto de variables aleatorias  $\{T_{a_n}\}$ .

Las muestras aleatorias generadas a partir de estas funciones de densidad de probabilidad se reportan al final de la presente sección para dar prioridad al proceso empleado en la construcción de dichas funciones de densidad de probabilidad junto con su relación con las señales sísmicas.

#### 4.1.1. Sotaró, Cauca. (SOTA)

Haciendo una ampliación sobre la señal sísmica registrada tal y como lo muestra la figura 4-3, puede observarse que el tiempo de arribo seleccionado por RSNC no necesariamente es una elección apropiada pues este no indica el inicio de la actividad sísmica. Mientras que el tiempo de arribo seleccionado en el presente estudio,  $t_{a_{m1}}$ , es más coherente con datos registrados por esta estación, dado que este valor es más cercano al inicio de la actividad sísmica.

La función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria,  $T_{a_{p1}}$ , representada por la curva azul modela el tiempo de arribo de la onda P a la estación SOTA:



**Figura 4-3.:** Ampliación de la señal sísmica. Función de densidad de probabilidad para el tiempo de arribo de la onda P, y la línea vertical discontinua anaranjada indica el tiempo de arribo de la onda P según RSNC.

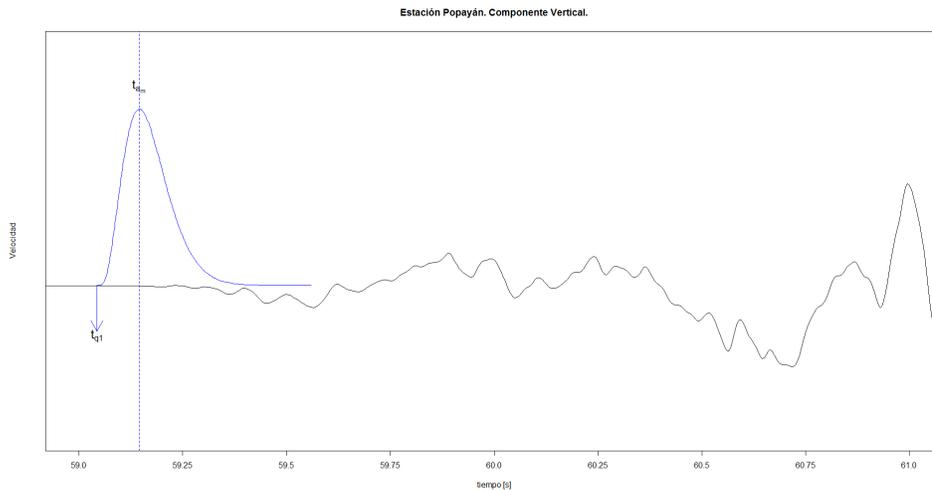
El arribo de la onda P no está definido por un cambio drástico en los valores registrados, por el contrario, la onda P describe un comportamiento aproximadamente *emergente*, haciendo aún más difícil su interpretación. Por esta razón, se proponen los tiempos 58.55 y 58.64, para las variables  $t_{q1}$  y  $t_{am1}$  respectivamente, para definir un intervalo plausible para el tiempo de arribo de la onda P. Luego, estos valores de referencia representan información sobre el comportamiento del arribo de la onda P en la presente señal sísmica.

Considerando un valor propuesto para el parámetro  $\alpha_1 = 2$  y el desarrollo descrito por la ecuación (3-2), se obtiene un valor para el parámetro  $\beta_1 = 11.11$ . Entonces, la variable aleatoria  $T_{a_{p1}}$  que representa el tiempo de arribo de la onda P en la estación SOTA sigue una distribución  $Beta(2, 11.11)$ , y su función de densidad de probabilidad para es:

$$f_{T_{a_{p1}}}(t_{a_{p1}}) = \begin{cases} \frac{\Gamma(13.11)}{\Gamma(2)\Gamma(11.11)}(t_{a_{p1}} - 58.55)^1(1 - (t_{a_{p1}} - 58.55))^{10.11} & \text{si y solo si, } 58.55 \leq t_{a_{p1}} < (59.55) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4-1)$$

#### 4.1.2. Popayán, Cauca. (POP2)

En esta estación se seleccionaron los tiempos de arribo de las onda S y P, los cuales se analizaron por separado, dado que sus comportamientos son diferentes. En primer lugar, se aborta el tiempo de arribo de la onda P descrito en la figura 4-4, en la que se observa que el arribo de la onda P tiene un comportamiento *emergente*, es decir, su arribo se caracteriza por cambios suaves o sutiles en los datos registrados generando ambigüedad.



**Figura 4-4.:** Ampliación de la señal sísmica. Función de densidad de probabilidad para el tiempo de arribo de la onda P.

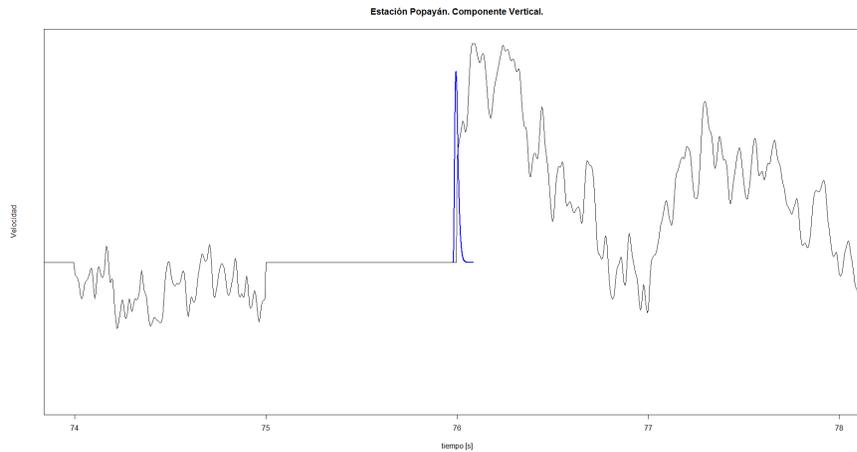
Los tiempos propuestos para los valores  $t_{q_2}$  y  $t_{a_{m_2}}$  fueron 59.05 y 59.145, respectivamente. Para el parámetro  $\alpha_2$  se propuso un valor de 4, mientras que para el parámetro  $\beta_2$  se obtuvo un valor de 29.57895  $\cong$  29.58 según el proceso en (3-2). La curva azul en la figura 4-4 describe la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $T_{a_{p_2}}$  generada para modelar el tiempo de arribo de la onda P a la estación POP2 y su relación con la señal sísmica registrada. La expresión generada de la función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria  $T_{a_{p_2}}$  es:

$$f_{T_{a_{p_2}}}(t_{a_{p_2}}) = \begin{cases} \frac{\Gamma(33.58)}{\Gamma(4)\Gamma(29.58)}(t_{a_{p_2}} - 59.05)^3(1 - (t_{a_{p_2}} - 59.05))^{28.58} & \text{si y solo si, } 59.05 \leq t_{a_{p_2}} < (60.05) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4-2)$$

Para el caso de la onda S el procedimiento fue diferente pues la señal presenta problemas en ciertos intervalos de tiempo. Por esta razón la función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria  $T_{a_{s_3}}$  se concentra alrededor de  $t_{a_{m_3}} = 75.995$ . Dicho esto, el valor de  $t_{q_3}$  propuesto se encuentra muy cercano al valor de  $t_{a_{m_3}}$ , pues no existe información suficiente para establecer valores coherentes. Entonces, se propone que  $t_{q_3} = 75.98$ . Finalmente, la variable aleatoria  $T_{a_{s_3}}$  tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f_{T_{a_{s_3}}}(t_{a_{s_3}}) = \begin{cases} \frac{\Gamma(202)}{\Gamma(4)\Gamma(198)}(t_{a_{s_3}} - 75.98)^3(1 - (t_{a_{s_3}} - 75.98))^{197} & \text{si y solo si, } 75.98 \leq t_{a_{s_3}} < 76.98 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4-3)$$

La figura 4-5 presenta esta dificultad en los datos registrados y en color azul la función de densidad de probabilidad propuesta para la variable aleatoria  $T_{a_{s_3}}$ .



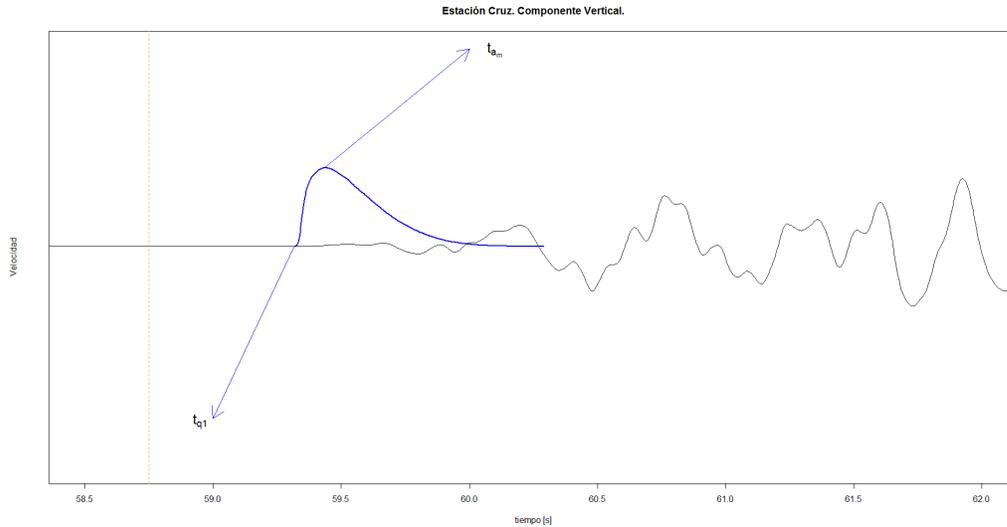
**Figura 4-5.:** Ampliación de la señal sísmica. Función de densidad de probabilidad para el tiempo de arribo de la onda S.

### 4.1.3. La Cruz, Nariño. (CRU)

El tiempo de arribo de la onda P en esta estación involucra una gran incertidumbre pues la onda registrada es *emergente*, lo que hace difícil establecer valores apropiados para  $t_{q4}$  y  $t_{am4}$ . A pesar de esto, se propusieron valores para estas dos variables, las cuales son necesarias para construir una función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria  $T_{ap4}$ , tal y como lo muestra la curva azul en la figura 4-6.

Considerando un valor para el parámetro  $\alpha_4 = 1.5$  y el procedimiento planteado en (3-2), se obtiene un valor para el parámetro  $\beta_4 = 5.76$ . Entonces, la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $T_{ap4}$  propuesta es:

$$f_{t_{ap4}}(t_{ap4}) = \begin{cases} \frac{\Gamma(7.26)}{\Gamma(1.5)\Gamma(5.76)}(t_{ap4} - 59.34)^{0.5}(1 - (t_{ap4} - 59.34))^{4.76} & \text{si y solo si, } 59.34 \leq t_{ap4} < 60.34 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4-4)$$

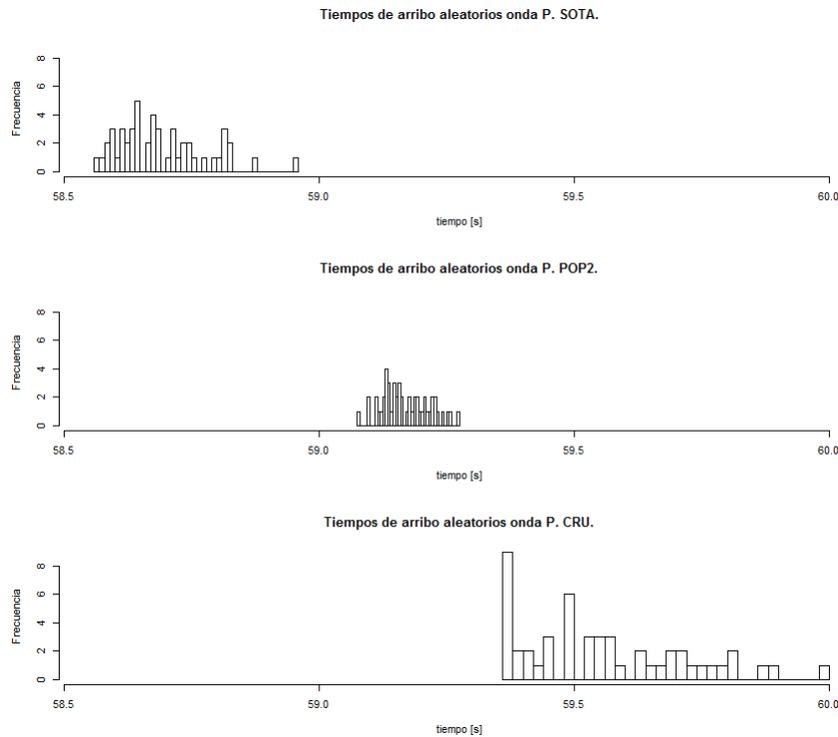


**Figura 4-6.:** Ampliación de la señal sísmica. Función de densidad de probabilidad para el tiempo de arribo de la onda P, y la línea vertical discontinua anaranjada indica el tiempo de arribo de la onda P según RSNC.

Finalmente, las figuras 4-7 y 4-8 muestran los valores aleatorios de los tiempos de arribo generados para las onda P y S, respectivamente, a las tres estaciones presentadas, considerando las funciones de densidad de probabilidad generadas para el conjunto de variables aleatorias  $\{T_{a_n}\}$ .

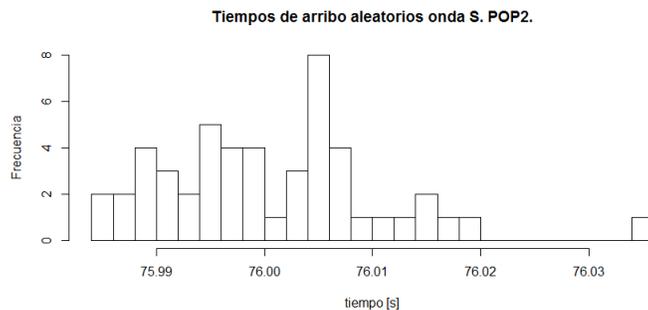
#### 4.1.4. Tiempos de arribo generados

A partir de las funciones de densidad (4-1), (4-2) y (4-4) se generan muestras de tamaño 50 para los tiempos de arribo de la onda P a las tres estaciones consideradas:



**Figura 4-7.:** Valores aleatorios generados para la onda P.

Los tiempos de arribo de la onda S aleatorios generados son:

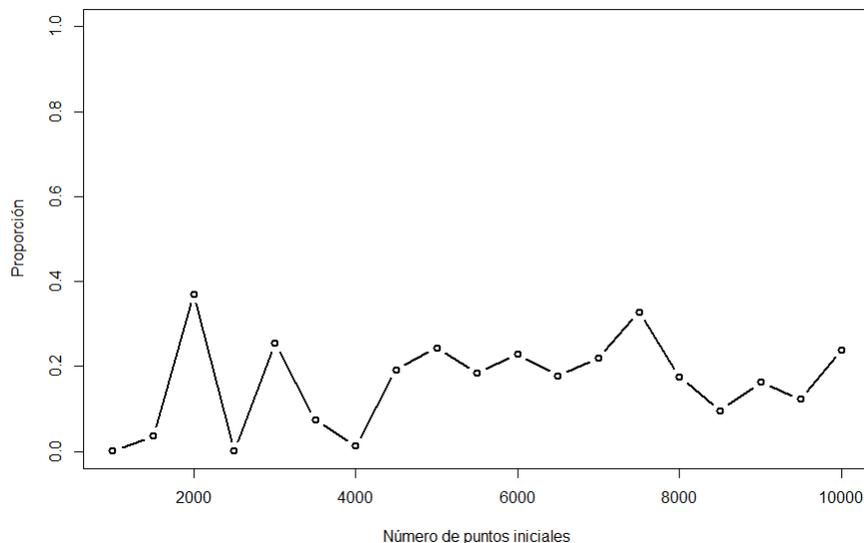


**Figura 4-8.:** Valores aleatorios generados para la onda S a partir de la función de densidad definida en (4-3).

## 4.2. Convergencia

### 4.2.1. Focos seleccionados

El algoritmo de la presente propuesta metodológica fue aplicado 19 veces o ciclos, comenzando con 1000 y aumentando 500 puntos iniciales hasta alcanzar los 10000 focos posibles<sup>1</sup>. La proporción de focos seleccionados o focos probables con respecto a la cantidad de focos posibles está representada por la figura 4-9, la cual sugiere que alrededor del 20 % de los puntos iniciales,  $\Lambda$ , fueron seleccionados como focos probables  $k$ . De los 104500 diferentes puntos iniciales generados aleatoriamente a lo largo del proceso iterativo, 114 fueron seleccionados como probables. Las diferentes realizaciones de los modelos de velocidad probabilísticos y focos posibles, permitieron solucionar el problema hacia adelante descrito por la ecuación (1-1) bajo diferentes escenarios de velocidad y posición inicial obteniendo tiempos de viaje, los cuales, junto con la sucesión de variables aleatorias de los tiempos de arribo permitieron implementar el criterio de selección presentado por la ecuación (3-14). 114 posiciones iniciales fueron seleccionados en más de una ocasión.



**Figura 4-9.:** Proporción del número de focos probables con respecto al número de focos posibles.

A pesar que la proporción de focos seleccionados fue aproximadamente constante durante el proceso iterativo, la relación entre la cantidad de puntos iniciales,  $\Lambda$ , y la cantidad de focos seleccionados  $k$  no presentó un comportamiento monótono, es decir que al aumentar la

<sup>1</sup> $\Lambda = 1000, 1500, 2000, \dots, 10000$ .

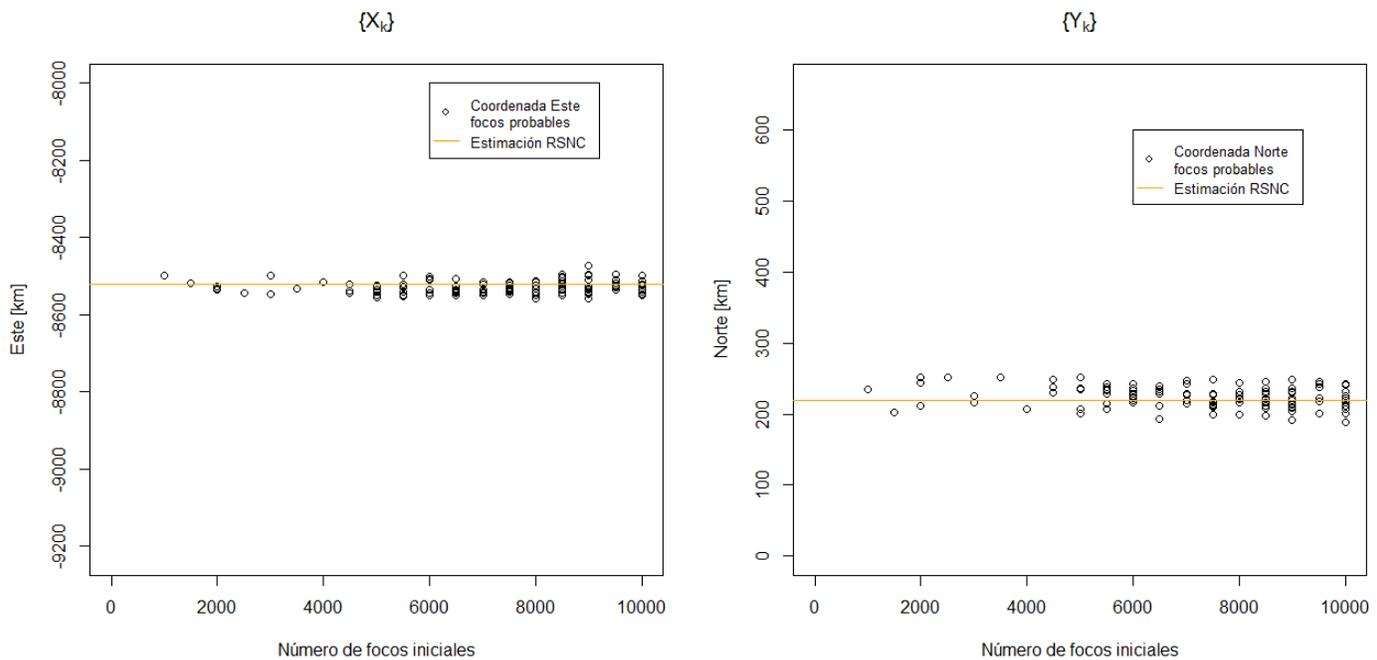
cantidad de puntos iniciales no necesariamente aumentaba la cantidad de focos seleccionados como lo reporta la tabla 4-3:

**Tabla 4-3.:** Relación entre cantidad de puntos iniciales  $\Lambda$  y focos seleccionados  $k$ .

$\Lambda$	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500	7000	7500	8000	8500	9000	9500	1000
$k$	1	53	740	1	763	258	50	864	1219	1011	1368	1153	1538	2453	1396	815	1464	1165	2358

Lo anterior es una evidencia del efecto conjunto que tienen los modelos de velocidad probabilísticos  $\{\mathbf{V}_P\}$  y  $\{\mathbf{V}_S\}$ , y los tiempos de arribo  $\{T_a^n\}$  sobre el proceso de selección, pues cada vez que se aplicó el algoritmo se consideraron 100 realizaciones de los modelos de velocidad probabilísticos y 50 realizaciones del conjunto de tiempos de arribo. De todos modos, el análisis de convergencia realizado consideró la sucesión de variables aleatorias según el subíndice  $k$  y no el orden definido por  $\Lambda$ .

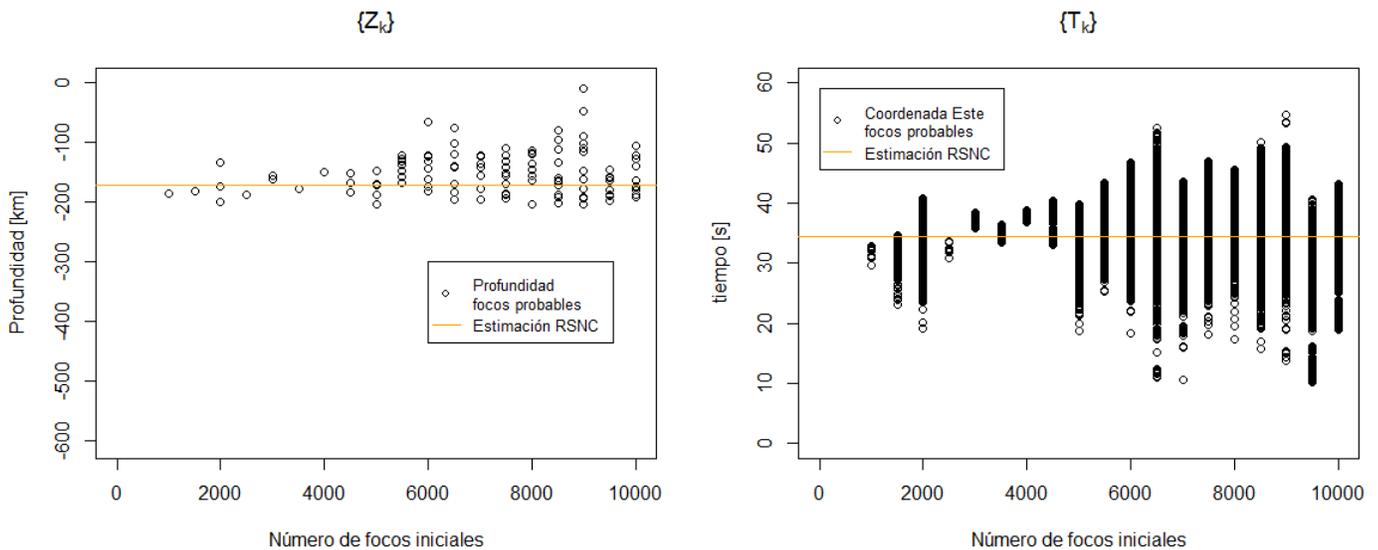
Las sucesiones de variables aleatorias  $\{X_k\}$  y  $\{Y_k\}$  que representan las coordenadas de los focos probables obtenidos en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente, muestran convergencia a una región de  $\mathbf{w}$  como se puede observar en la figura 4-10:



**Figura 4-10.:** Sucesiones de variables aleatorias  $\{X_k\}$  y  $\{Y_k\}$ .

Mientras que la sucesión de variables aleatorias  $\{Z_k\}$  que representan la profundidad de los focos probables obtenidos no necesariamente presentaron una convergencia tan clara como en los dos casos anteriores. Sus valores extremos o máximos y mínimos presentaron comportamientos muy diferentes, los valores mínimos de profundidad no sobrepasaron los 204.293  $km$  durante todo el proceso iterativo. Por el contrario los máximos mostraron una alta variabilidad y alcanzaron profundidades de hasta 9.97  $km$ . Además, se observó que la varianza de los profundidades no disminuyó a medida que el número de focos seleccionados  $k$  aumentaba.

El teorema presentado en [Lomnitz, 1982] y en [Lomnitz, 2006] sobre la profundidad de los eventos sísmicos establece que es *prácticamente* imposible obtener una solución determinística para la profundidad, lo cual ofrece una explicación razonable para el comportamiento de la varianza de las sucesiones de variables aleatorias  $\{Z_k\}$ . El recuadro de la izquierda en la figura 4-11 muestra este comportamiento.



**Figura 4-11.:** Comportamiento de las sucesiones de variables aleatorias  $\{Z_k\}$  y  $\{T_k\}$ . Las líneas anaranjadas horizontales corresponden a la estimación realizada por RSNC.

De manera semejante, los tiempos de origen obtenidos muestran un aumento en la variabilidad de los datos a medida que el número de puntos iniciales aumenta, pero a diferencia de los valores obtenidos de la sucesión  $\{Z_k\}$ , sus valores máximos y mínimos fueron muy variables a lo largo del proceso iterativo. A pesar de lo anterior, los tiempos de arribo obtenidos sí parecen concentrarse alrededor de un valor tiempo en particular como se observa en el

recuadro de la derecha de la figura 4-11.

### 4.2.2. Medias y varianzas muestrales de sucesiones de variables aleatorias

Las medias y varianzas muestrales de las variables aleatorias definida en la ecuación (??) fueron calculadas considerando las sucesiones de variables aleatorias que representan los parámetros hipocentrales que definen la posición inicial y tiempo de origen del evento sísmico en consideración. Las medias muestrales de las sucesiones  $\{X_k\}$  y  $\{Y_k\}$  mostraron un comportamiento asintótico convergente mientras que sus varianzas disminuían o se estabilizaban alrededor de un valor. En otras palabras, a medida que  $k \rightarrow \infty$ , también se observó que  $var(X_i) = \sigma_x^2$ , y  $var(Y_i) = \sigma_y^2$  con  $i = 1, 2, \dots, k$ . Las figuras 4-12 y 4-13, muestran este comportamiento para las sucesiones  $\{X_k\}$  y  $\{Y_k\}$ , respectivamente.

Las medias muestrales de la sucesión  $\{Z_k\}$  en el recuadro de la izquierda en la figura 4-14, también mostraron convergencia a cierto valor a medida que la cantidad de focos seleccionados,  $k$ , aumentaba. Pero a diferencia de las dos sucesiones anteriores, las varianzas muestrales se estabilizaron sin mostrar una tendencia a disminuir con el aumento del número de focos seleccionados representados en el recuadro de la derecha en la figura 4-14, como sí fue el caso de las varianzas muestrales de la sucesión  $\{T_k\}$ , las cuales sugieren una tendencia a disminuir cuando  $k \rightarrow \infty$ , las cuales pueden observarse en la figura 4-15. Además de lo anterior, sus medias muestrales también mostraron convergencia hacia cierto valor. En resumen, las medias y varianzas muestrales se estabilizan cuando  $k > 1500$ . Por último, los comportamiento asintóticos mostraron que:

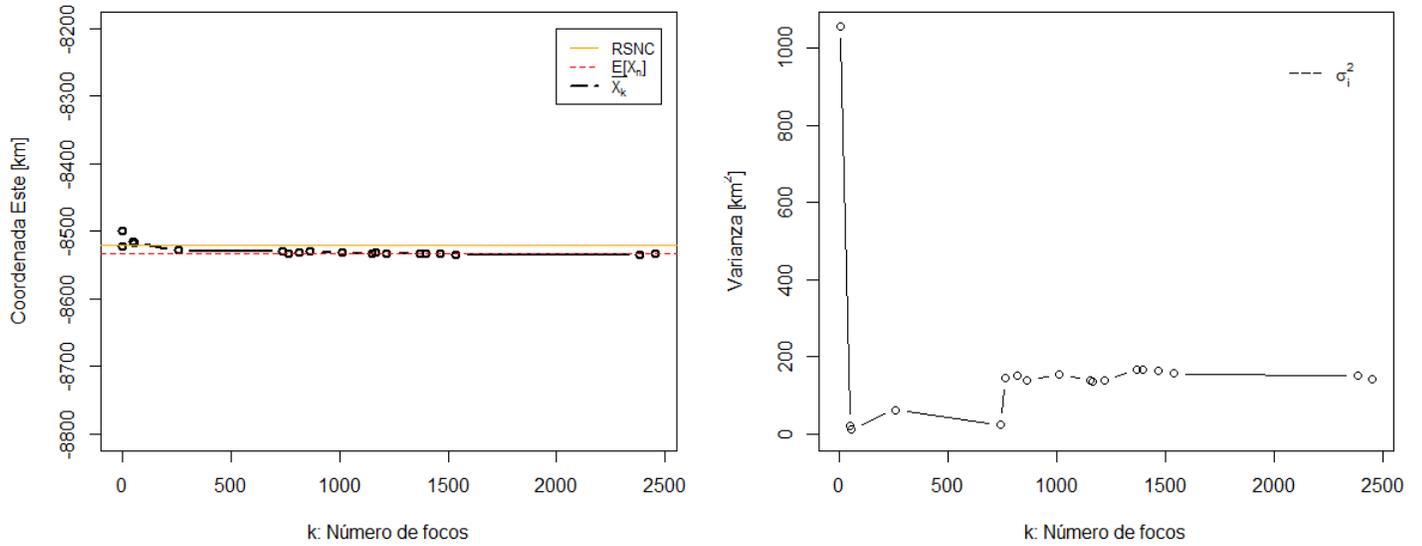
$$E[X_k] \rightarrow \mu_x, \quad E[Y_k] \rightarrow \mu_y, \quad E[Z_k] \rightarrow \mu_z \quad y \quad E[T_k] \rightarrow \mu_t \quad (4-5)$$

La tabla 4-4 muestra las estimaciones o valores de las medias muestrales para cada una de las sucesiones de los parámetros hipocentrales. También, una comparación con las estimaciones de RSNC, y la diferencia entre estos valores:

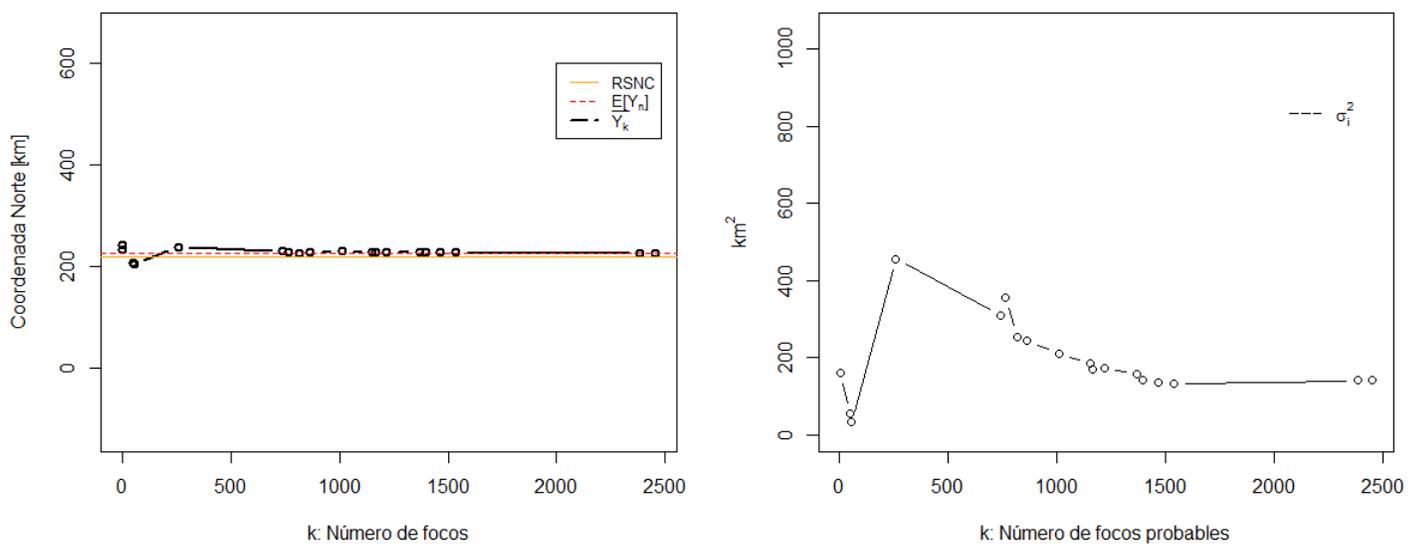
**Tabla 4-4.:** Diferencia en los resultados obtenidos por la propuesta metodológica y RSNC.

Sucesión	$E[\cdot]$	Estimación RSNC	Diferencia
$\{X_k\}$	-8533.343 km	-8520.572 km	-12.77 km
$\{Y_k\}$	225.6912 km	219.3723 km	6.3189 km
$\{Z_k\}$	-152.6885 km	-171.9 km	19.2115 km
$\{T_k\}$	35.84211 s	34.4 s	1.44211 s

También, se realizó estimación por intervalos del 90% de confianza para cada uno de los parámetros hipocentrales. Las tablas 4-5, 4-6, 4-7 y 4-8, contienen los intervalos obtenidos y sus longitudes para cada uno de los 19 ciclos realizados.



**Figura 4-12.:** Convergencia de los valores esperados de la sucesión de variables aleatorias  $\{X_k\}$ .



**Figura 4-13.:** Convergencia de los valores esperados de la sucesión de variables aleatorias  $\{Y_k\}$ .

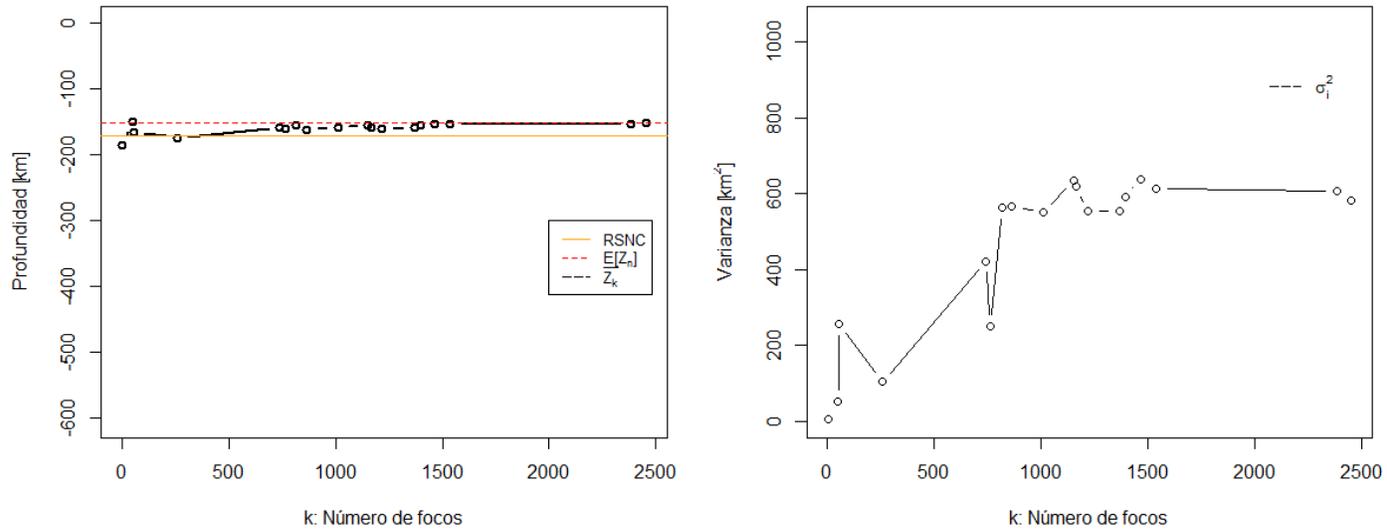


Figura 4-14.: Convergencia de los valores esperados de la sucesión de variables aleatorias  $\{Z_k\}$ .

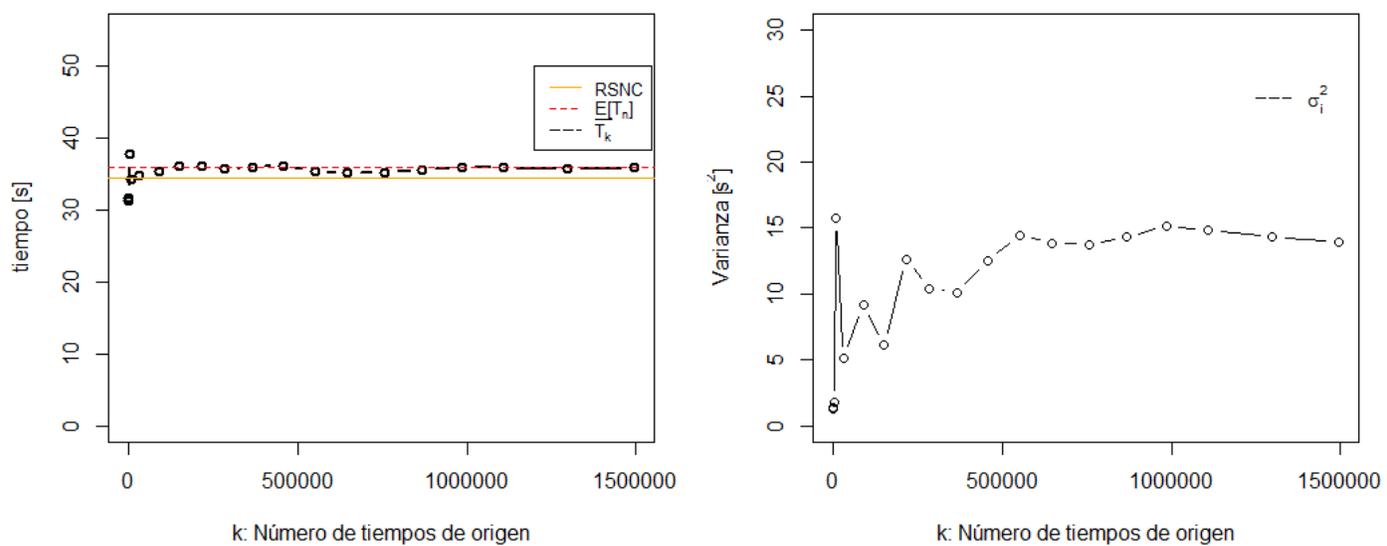


Figura 4-15.: Convergencia de los valores esperados de la sucesión de variables aleatorias  $\{T_{k^*}\}$ .

**Tabla 4-5.:** Intervalos de confianza para  $E[X_k]$  asumiendo normalidad para  $\bar{X}_k$ .

Ciclo	$E[X_k]$ [km]	Límite izquierdo [km]	Límite derecho [km]	Longitud del intervalo [km]
1	-8498.445	NA	NA	NA
2	-8521.406	-8550.832	-8491.981	58.8507919
3	-8514.713	-8515.556	-8513.870	1.6860439
4	-8516.152	-8516.604	-8515.699	0.9047929
5	-8528.244	-8528.78	-8527.708	1.071431
6	-8528.81	-8529.003	-8528.616	0.3868768
7	-8533.695	-8534.052	-8533.337	0.7154225
8	-8531.938	-8532.244	-8531.632	0.6116194
9	-8529.712	-8529.966	-8529.458	0.5084504
10	-8531.449	-8531.685	-8531.214	0.4703752
11	-8532.56	-8532.761	-8532.358	0.4023002
12	-8531.314	-8531.494	-8531.134	0.3595457
13	-8532.523	-8532.69	-8532.355	0.3349735
14	-8532.277	-8532.447	-8532.107	0.3402565
15	-8533.203	-8533.363	-8533.044	0.3182332
16	-8533.41	-8533.558	-8533.262	0.2951173
17	-8534.087	-8534.224	-8533.951	0.272388
18	-8533.856	-8533.98	-8533.733	0.2476803
19	-8533.343	-8533.455	-8533.23	0.2245739

**Tabla 4-6.:** Intervalos de confianza para  $E[Y_k]$  asumiendo normalidad para  $\bar{Y}_k$ .

Ciclo	$E[Y_k]$ [km]	Límite izquierdo [km]	Límite derecho [km]	Longitud del intervalo [km]
1	234.4641	NA	NA	NA
2	243.4329	231.939	254.9268	22.98784
3	207.9206	206.6076	209.2337	2.62612
4	205.3197	204.5962	206.0433	1.447105
5	238.3719	236.9364	239.8074	2.870977
6	230.9417	230.2139	231.6695	1.455552
7	228.4683	228.0245	228.912	0.8874338
8	226.0792	225.7202	226.4383	0.7180764
9	229.1174	228.8205	229.4142	0.5936913
10	230.1959	229.9484	230.4435	0.4950711
11	229.1091	228.8962	229.3221	0.4258741
12	229.8711	229.6804	230.0618	0.3814225
13	229.7522	229.5741	229.9303	0.3562059
14	228.9253	228.7676	229.083	0.3154647
15	228.4849	228.3448	228.6251	0.28022
16	228.1886	228.0591	228.3181	0.2590103
17	228.006	227.8851	228.127	0.2419452
18	226.8013	226.6865	226.916	0.2294796
19	225.6912	225.5838	225.7987	0.2148778

**Tabla 4-7.:** Intervalos de confianza para  $E[Z_k]$  asumiendo normalidad para  $\bar{Z}_k$ .

Ciclo	$E[Z_k]$ [km]	Límite izquierdo [km]	Límite derecho [km]	Longitud del intervalo [km]
1	-185.0051	NA	NA	NA
2	-186.5452	-188.5189	-184.5715	3.947423
3	-150.5179	-151.8121	-149.2237	2.588356
4	-165.7747	-167.778	-163.7714	4.006654
5	-174.6599	-175.3522	-173.9676	1.384605
6	-159.6832	-160.4756	-158.8908	1.584827
7	-160.2531	-160.7237	-159.7824	0.9413321
8	-155.9157	-156.5029	-155.3285	1.174384
9	-162.3925	-162.9044	-161.8805	1.023929
10	-158.5215	-158.9678	-158.0753	0.8925473
11	-155.9874	-156.4144	-155.5604	0.8540935
12	-159.554	-159.9387	-159.1693	0.7694095
13	-161.03	-161.365	-160.6951	0.6699111
14	-159.092	-159.4022	-158.7817	0.620478
15	-155.8846	-156.1839	-155.5853	0.5985783
16	-153.8943	-154.1862	-153.6025	0.5837377
17	-152.8699	-153.1393	-152.6006	0.5387124
18	-153.6987	-153.9463	-153.4511	0.4951811
19	-152.6885	-152.9148	-152.4622	0.4526494

**Tabla 4-8.:** Intervalos de confianza para  $E[T_{k^*}]$  asumiendo normalidad para  $\bar{T}_{k^*}$ .

Ciclo	$E[T_{k^*}]$ [s]	Límite izquierdo [s]	Límite derecho [s]	Longitud del intervalo [s]
1	31.34566	31.17833	31.51299	0.334661
2	31.74251	31.62588	31.85914	0.2332576
3	37.6884	37.66214	37.71466	0.05251987
4	34.26938	34.21395	34.32481	0.1108638
5	34.78107	34.7641	34.79804	0.03393981
6	35.38469	35.37162	35.39777	0.02615343
7	36.01791	36.0097	36.02611	0.01640727
8	36.11179	36.10195	36.12164	0.0196909
9	35.67611	35.66834	35.68387	0.01552243
10	35.97508	35.96833	35.98183	0.01350083
11	36.06773	36.06101	36.07444	0.01343129
12	35.41857	35.412	35.42514	0.0131412
13	35.10204	35.09611	35.10797	0.01185588
14	35.2397	35.23423	35.24516	0.01092453
15	35.62955	35.62435	35.63474	0.01039443
16	35.83936	35.83433	35.84438	0.01005415
17	35.91514	35.91045	35.91983	0.009380873
18	35.75477	35.75051	35.75902	0.008508337
19	35.84211	35.83819	35.84603	0.007834709

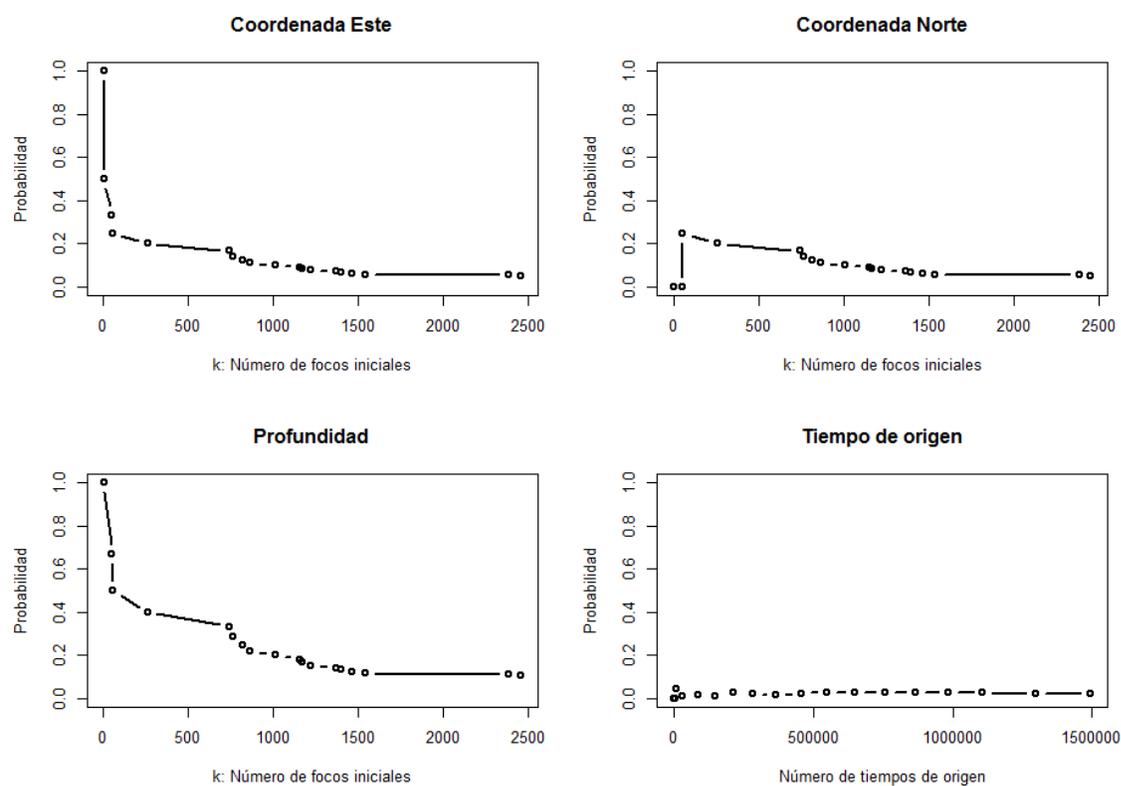
### 4.2.3. Convergencia en Probabilidad

La convergencia en probabilidad de la sucesión de variables aleatorias fue analizada a partir de la forma *débil* de la Ley de Los Grandes Números definida por la ecuación (2-20), considerando los valores obtenidos para los parámetros hipocentrales y constantes arbitrarias  $\epsilon_* > 0$ , presentados en la tabla 4-9:

**Tabla 4-9.:** Parámetros hipocentrales obtenidos para el origen más probable de un evento sísmico.

$\{X_k\}$		$\{Y_k\}$		$\{Z_k\}$		$\{T_k\}$	
$\mu_x$	$\epsilon_x$	$\mu_y$	$\epsilon_y$	$\mu_z$	$\epsilon_z$	$\mu_t$	$\epsilon_t$
$-8533.343 \text{ km}$	$20 \text{ km}$	$225.6912 \text{ km}$	$20 \text{ km}$	$-152.6885 \text{ km}$	$25 \text{ km}$	$35.84211 \text{ s}$	$9 \text{ s}$

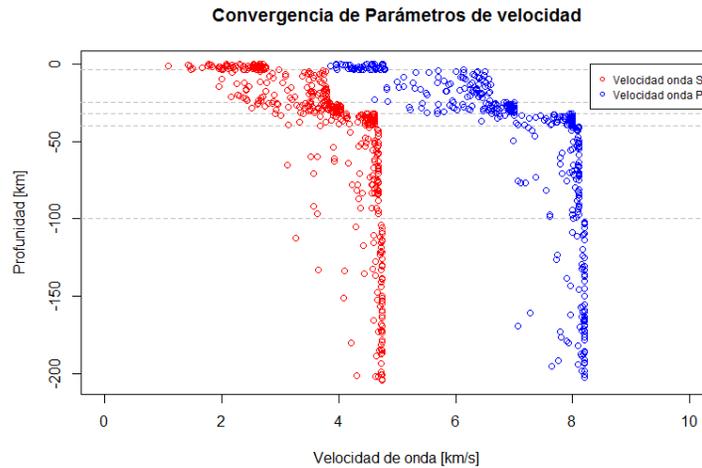
La figura 4-16 muestra la convergencia en probabilidad en su forma *débil* de las sucesiones de variables aleatorias a las estimaciones obtenidas de los parámetros hipocentrales:



**Figura 4-16.:** Análisis de la convergencia en probabilidad de los parámetros hipocentrales.

#### 4.2.4. Convergencia de los modelos de velocidad probabilísticos $\{V_P\}$ y $\{V_S\}$

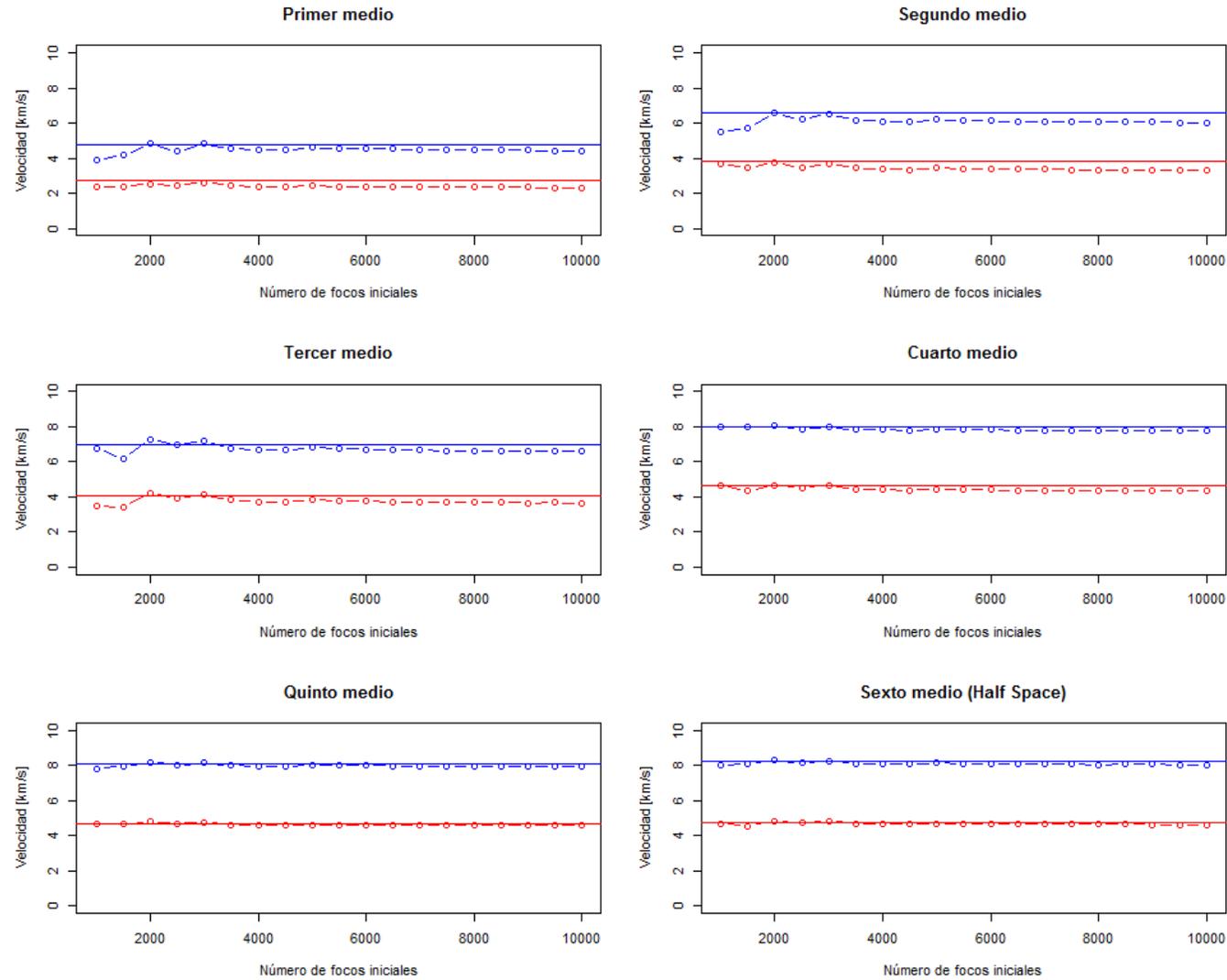
Cada vez que un punto inicial fue seleccionado como foco probable se registró las realizaciones de los modelos de velocidad  $\{V_P\}$  y  $\{V_S\}$  que hicieron posible la selección de dicho punto. Entonces, para cada punto seleccionado  $k$ , se registraron en cada uno de los seis medios que componen a  $\mathbf{w}$  los valores de velocidad de las ondas P y S. Se generaron 1900 modelos de velocidad diferentes para las ondas P y S a lo largo del proceso iterativo, de los cuales, 1584 fueron seleccionados como modelos de velocidad probables para  $\mathbf{w}$ . La figura 4-17 muestra la distribución de estos modelos de velocidad y su relación con los diferentes medios que componen a  $\mathbf{w}$ :



**Figura 4-17.:** Valores de rapidez plausible para la región de estudio  $\mathbf{w}$ .

Los valores de estos modelos de velocidad probables fueron analizados a medida que  $k \rightarrow \infty$ . En cada uno de los medios de  $\mathbf{w}$  se observó convergencia de los promedios muestrales de los valores de las velocidades de ondas P y S seleccionados,  $E[V_{P_k}]$  y  $E[V_{S_k}]$  respectivamente. La figura 4-18 muestra el comportamiento de estos valores esperados y su relación con el modelo de velocidad propuesto por RSNC. Allí se puede observar que las velocidades promedio siempre difieren de los valores propuestos por RSNC, la cual disminuye con la profundidad. La tabla 4-10 contiene los valores a los que convergen las velocidades de las ondas P y S para cada medio de  $\mathbf{w}$ , junto con la relación  $V_p/V_s$ , la cual sugiere que para ningún medio de  $\mathbf{w}$  no se espera un valor teórico de  $\sqrt{3} = 1.7320$ , lo cual es coherente con la complejidad estructural de la región  $\mathbf{w}$ . La figura 4-19 muestra la convergencia de las velocidades *Esperadas* de la tabla 4-10, considerando un  $\epsilon_v = 0.7$ , en la que se puede observar que para los primeros tres medios la convergencia no es tan rápida comparada con los medios más profundos. En general, la convergencia de las velocidades *esperadas* fue

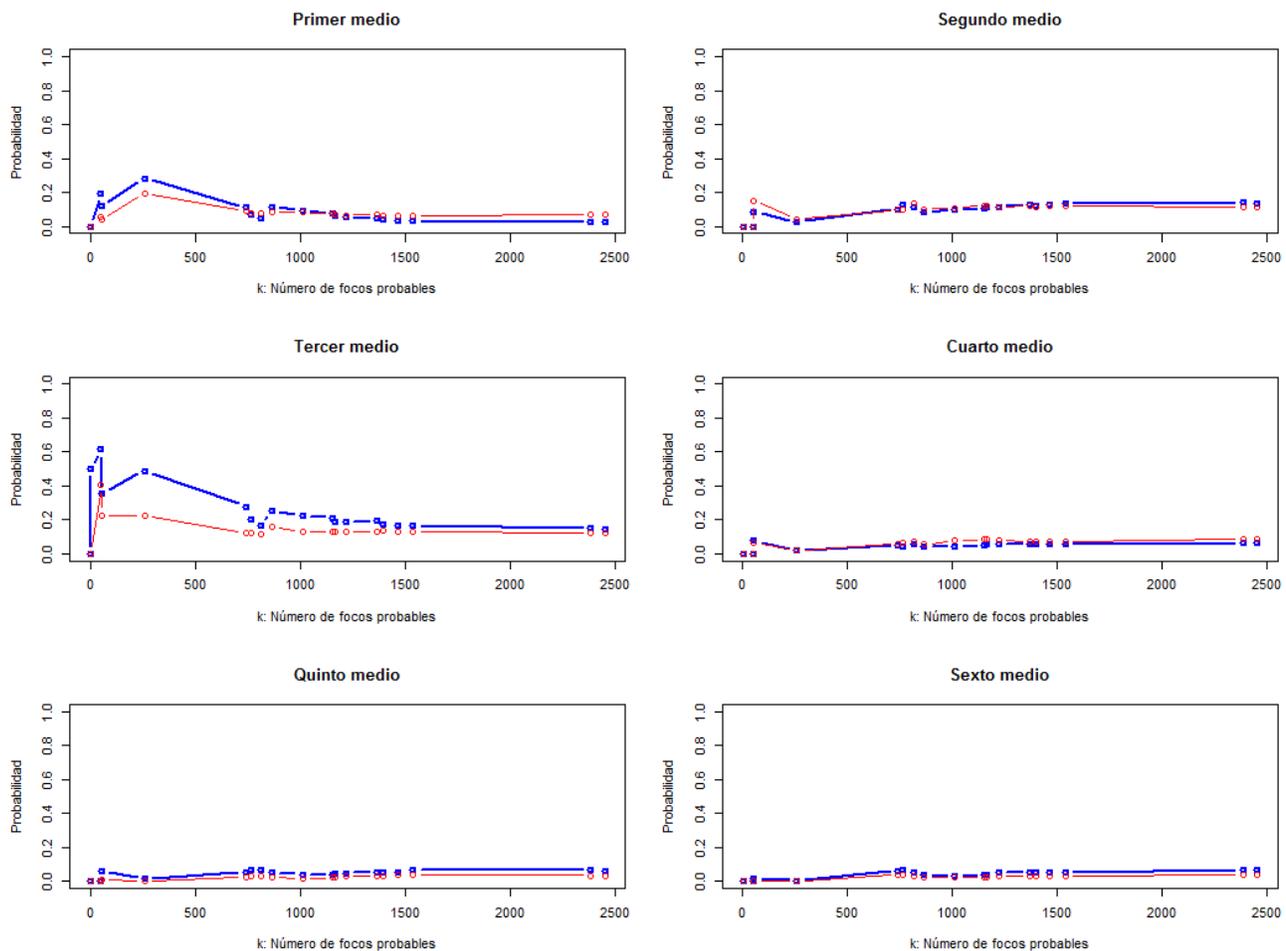
semejante para ambos tipos de ondas en todos los medios exceptuando en el tercer medio.



**Figura 4-18.:** Convergencia de los valores esperados de las velocidades representados por las líneas azul y roja discontinuas para las ondas P y S respectivamente. Las líneas continuas indican los valores del modelo de RSNC modificado.

**Tabla 4-10.:** Modelo de velocidad *Esperado* para  $w$ .

Medio	Intervalo de profundidad [km]	$E[V_p]$ [km/s]	$E[V_s]$ [km/s]	$E[V_p/V_s]$
1	[0, 4)	4.422852	2.341955	1.94339
2	[4, 25)	6.036503	3.320738	1.875049
3	[25, 32)	6.612509	3.671138	1.830492
4	[32, 40)	7.768704	4.347172	1.806829
5	[40, 100)	7.927507	4.566145	1.742107
<i>Half-space</i>	[100, <i>half-space</i> )	8.059697	4.636312	1.743513



**Figura 4-19.:** Convergencia en probabilidad de los modelos de velocidad *Esperados*. En color azul la convergencia del valor esperado para la onda P y en rojo para la onda S.

# 5. Discusión, conclusiones y recomendaciones

## 5.1. Discusión y conclusiones

La cantidad de tiempos de arribo considerados condiciona la cantidad mínima necesaria de focos posibles,  $\Lambda$ , o puntos iniciales, para obtener focos probables. Se observó que para  $\Lambda = 1000$ , ningún foco posible fue seleccionado como probable considerando 22 tiempos de arribo de 16 estaciones. Mientras que para  $\Lambda = 10000$ , sí se seleccionaron focos posibles como probables, lo cual limitó la capacidad de análisis de la convergencia de las sucesiones de variables aleatorias. Por esta razón, para el proceso de validación únicamente se consideraron tres estaciones disminuyendo la capacidad del método para seleccionar focos probables de manera más precisa. Lo anterior sugiere que la posterior validación pudo haber sido mucho más clara y contundente.

A pesar que las ondas sísmicas pueden recorrer varios kilómetros en un segundo, considerar tiempos de arribo y modelos de velocidad aleatorios no genera estimaciones de parámetros hipocentrales absurdos, inconsistentes o incoherentes con los modelos geodinámicos y sismo-tectónicos. A diferencia de los métodos de ubicación de hipocentros tradicionales, la presente propuesta metodológica genera estimaciones más precisas o de longitud de intervalo de confianza más cortos como se muestra en las tablas **4-5** a **4-8**, los cuales son menores a la unidad, es decir, pueden ser medidos en metros. También, estas estimaciones mostraron ser consistentes y menos sensibles a los valores de los tiempos de arribo y modelos de velocidad.

Las tablas **4-4** y **4-10** muestran que la presente propuesta metodológica tiene la capacidad de resolver el problema conjunto Hipocentro-Modelo de Velocidad considerando un solo evento sísmico y tres estaciones. Esto permite obtener información del interior de la Tierra en lugares donde hay una baja cobertura de red estaciones sismológicas, inclusive si dicho lugar no cuenta con un modelo de velocidad propio. Se destaca que al igual que el método propuesto por [Kissling, 1988] para construir modelos de velocidad unidimensionales, la representatividad del modelo de velocidad obtenido por la presente propuesta (Tabla **4-10**) puede mejorar si se aumenta el número de eventos sísmicos y estaciones. Por eso, el modelo de velocidad obtenido debe entenderse como información sobre los medios perturbados por los rayos sísmicos del evento sísmico que se encuentran bajo las tres estaciones consideradas.

El ejercicio de comparar resultados particulares de dos metodologías diferentes como se presentó en el capítulo de Resultados no necesariamente tiene sentido, pues no es posible conocer ni observar los parámetros hipocentrales reales ni la estructura del interior de la Tierra. Entonces, no es posible establecer que solución representa mejor la realidad. Pero sí es importante analizar y discutir las diferencias en los supuestos de cada metodología y las implicaciones que sus procedimientos tienen sobre los resultados obtenidos.

En primer lugar, el análisis de incertidumbre y subjetividad del presente método en las secciones 3.1 y 3.2 requieren un tiempo considerable para incorporar los datos de las señales sísmicas e información *a priori* en la determinación de los parámetros las distribuciones de las variables aleatorias que modelan los tiempos de arribo y modelos de velocidad aleatorios. Pero a diferencia de los demás métodos, los resultados o estimaciones de los parámetros hipocentrales y modelos de velocidad, no se ven afectados por la subjetividad y sesgo de selección del modelo de velocidad ni los tiempos de arribo generados por un intérprete, dado que el método de Markov Monte Carlo permite analizar tendencias de un gran número de soluciones generadas por la combinación de diferentes escenarios plausibles y no una solución particular cuya veracidad no puede ser contrastada con otras soluciones, evitando así, la estimaciones incoherentes con el fenómeno natural. Adicionalmente, el supuesto o condición de tiempos de arribo seleccionados *libres de error* de los métodos convencionales son una condición inviable por problemas de instrumentación e interpretación de datos, haciendo que obtener una solución plausible sea difícil de obtener. Por su parte, la presente metodología modela el comportamiento de la incertidumbre y análisis de múltiples escenarios y sus soluciones, las cuales pueden ser validadas empíricamente.

El análisis y modelado del comportamiento de la incertidumbre mediante variables aleatorias aumenta la estabilidad de las soluciones al evaluar la frecuencia con la que intervalos de valores de parámetros solucionan apropiadamente el problema en cuestión. Entonces, considerar funciones de densidad de probabilidad asimétricas para modelar la incertidumbre de los tiempos de arribo es una alternativa coherente con el fenómeno físico y los datos registrados, dado que estas permiten concentrar la mayor densidad de probabilidad en el intervalo de tiempo definido por los instantes anteriores al registro y donde se cree que se registró el tiempo arribo, y una menor densidad de probabilidad para tiempos evidentemente posteriores al registro de tiempos de arribo. También, facilitan el modelamiento de la incertidumbre de las rapidezces de los medios que componen la región  $\mathbf{w}$ .

La linealización del problema inverso para estimar la ubicación de hipocentros o resolver el problema conjunto Hipocentro-Modelo de Velocidad considerada por [Kissling, 1988], [Thurber and Kissling, 2000], [Lomax et al., 2000] y [Stein and Wysession, 2009] genera resultados en menor tiempo pues la exigencia computacional disminuye con el proceso de line-

lización, aunque si los tiempos de arribo seleccionados y el *modelo inicial* que proponen los autores no es apropiado, puede requerir una gran cantidad de *incrementos* alargando el tiempo necesario para encontrar una solución, o simplemente generar un resultado inadecuado. Además, métodos como *grid search* o *grid-based* descritos en [Thurber and Kissling, 2000], pueden generar resultados atribuibles a máximos o mínimos locales y no globales si el *modelo inicial* es inadecuado. La presente propuesta no requiere de un *modelo inicial*, pues el método para simular focos posibles presentado en la sección 3.3 es una alternativa que permite modelar creencias o incorporar información externa relevante sobre la posible ubicación del foco mediante variables aleatorias y sus funciones de densidad de probabilidad, haciendo que el *modelo inicial* pase de ser un punto en  $\mathbf{w}$  a un muestreo aleatorio de tamaño arbitrario,  $\Lambda$ , en todo  $\mathbf{w}$  o región donde el evento fue registrado. Se evitan entonces, resultados atribuibles a máximos o mínimos locales y no globales. Adicional a lo anterior, los *modelos iniciales* también requieren de un valor para el tiempo de origen, lo que puede aumentar considerablemente la complejidad de los procesos de cálculo, mientras que la presente propuesta selecciona puntos en el espacio considerando tiempos de viaje, y luego resta estos tiempos de viaje a los tiempos de arribo para obtener información sobre el tiempo de origen, generando así, valores coherentes con los modelos físicos y datos considerados. De esta forma, información *a priori* y los datos registrados pueden tener una relación directa con las leyes naturales que gobiernan el fenómeno natural bajo estudio.

Siempre existirán dudas sobre los parámetros hipocentrales y la representatividad del modelo de velocidad, pero la validación del modelo propuesto usando convergencia en probabilidad de las sucesiones de variables aleatorias que representan los parámetros hipocentrales y modelos de velocidad seleccionados en cada uno de los ciclos del proceso iterativo, permite establecer que por más que los modelos de velocidad y tiempos de arribo sean aleatorios, los valores esperados de los parámetros hipocentrales y de los modelos de velocidad tendrán un comportamiento asintótico convergente. Esta propiedad de convergencia de la solución del problema Hipocentro-Modelo de Velocidad no solo prueba la fortaleza o estabilidad de las soluciones, también la coherencia de la modelación de la incertidumbre y la veracidad de la información proporcionada por los cálculos realizados.

Sin lugar a dudas, los modelos tridimensionales son mucho más apropiados para lugares de alta complejidad geológica, pero estos son difíciles de construir. Por esta razón, para lugares de alta complejidad geológica donde únicamente sea posible construir modelos unidimensionales, se considera mucho más apropiado representar dicha complejidad geológica con variables aleatorias que permitan relacionar alta complejidad con alta variabilidad sin perder información geológica relevante. Esto último, es destacable en la presente propuesta, pues según [Taboada et al., 2000] y [Cediel et al., 2003], la región considerada al interior de  $\mathbf{w}$  es una región de alta variabilidad geológica y complejidad estructural, condiciones que también explican adecuadamente los valores esperados de los cocientes de variables aleatorias de las

velocidades de las ondas P y S,  $E[V_p/V_s]$ , en la tabla **4-10**, los cuales sugieren que al interior de la corteza o profundidades menores a 40 *km*, la alta complejidad estructural y variabilidad geológica hacen que las ondas S disminuyan la magnitud de su velocidad debido a la presencia de fallas geológicas y contenido de fluidos. Por otro lado, las trayectorias de los rayos sísmicos en los medios infrayacentes al *Moho*<sup>1</sup> (profundidades estimadas para el sur del país entre 30 y 40 *km* según [Ojeda and Havskov, 2001].), sugieren que la razón de velocidades de ondas P y S se acercan lentamente al valor teórico  $\sqrt{3} = 1.732051$  definido para un sólido de Poisson. La presencia de discontinuidades puede disminuir considerablemente a profundidades mayores a la del *Moho* [Turcotte and Schubert, 2002], pero la presencia de fluidos por procesos magmáticos en zonas de subducción [Winter, 2013] y la presencia de volcanes en la región explican adecuadamente la disminución en la magnitud de la velocidad de la onda S y el aumento el comportamiento de las razones de velocidad en función de la profundidad.

Los valores esperados de las variables aleatorias que representan las velocidades probales para **w** presentados en la tabla **4-10** son de menor magnitud con respecto a los valores del modelo modificado de la RSNC de la tabla **3-1**. Esta diferencia puede ser generada por la información suministrada por los demás eventos sísmicos considerados por [Ojeda and Havskov, 2001], quienes también consideraron una región mucho más amplia. Los valores esperados de las variables aleatorias en la tabla **4-10** únicamente dan información sobre las velocidades promedio por donde viajaron los rayos sísmicos del evento sísmico considerado en la ilustración, y no sobre las rocas por fuera de estas trayectorias. En otras palabras, el análisis de las variables aleatorias del modelo de velocidad probabilístico definido por velocidades plausibles seleccionadas, también permite evaluar las características mecánicas de los medios o rocas que pertenecen a las trayectorias de los rayos sísmicos estudiados, contrario al método del diagrama de Wadati descrito en [Lay and Wallace, 1995a] que genera un solo valor de razón de velocidades bajo cada estación considerando múltiples eventos sísmicos.

Las dudas sobre la representatividad del modelo de velocidad seleccionado y la validez de la solución obtenida se resuelven al considerar la forma probabilística del problema inverso y funciones de densidad de probabilidad para los parámetros del evento sísmico. Esto permite calcular la probabilidad de que cierto intervalo de valores para los parámetros del fenómeno físico ocurran o sean observados, pasando de la duda al cálculo de probabilidad.

Los modelos de velocidad probabilísticos propuesto en la presente metodología conservan la geometría plano paralela del modelo de velocidad determinístico considerado, pero esta geometría también podría ser aleatoria considerando por ejemplo la cantidad y profundidad de las interfaces con dos variables aleatorias. También, para regiones de alta complejidad estructural, la geometría plano paralela podría ser reemplazada por superficies polinómicas

---

<sup>1</sup>Discontinuidad de Mohorovicic la cual indica la transición de la corteza al manto litosférico [Turcotte and Schubert, 2002].

con coeficientes aleatorios y de un orden mayor a uno. Aumentando el costo computacional considerablemente. Aunque los resultados podrían ser muy prometedores pues los métodos tradicionales realizan esta tarea a través del ensayar diferentes modelos arbitrarios los cuales son seleccionados por el criterio de RMS mínimo<sup>2</sup>

Los teoremas sobre la profundidad del foco de Cinna Lomnitz [Lomnitz, 1982] y [Lomnitz, 2006] son coherentes con las varianzas de la sucesión de variables aleatorias de la profundidad del foco  $\{Z_k\}$ , pero una consecuencia de la convergencia en probabilidad es que a pesar que reiteradas estimaciones de la profundidad serán diferentes entre si, el conjunto de estimaciones converge en probabilidad a un parámetro o valor a medida que el proceso de estimación es repetido o que el número de focos  $k$  tiende al infinito. Por esta razón, es importante considerar la forma probabilística del problema inverso para obtener estimaciones plausibles y evitar valores determinísticos que pueden contener un sesgo de gran magnitud. Finalmente, la tabla 4-9 presenta el origen espacial y temporal más probable del evento sísmico en consideración, obtenido al solucionar el problema conjunto Hipocentro-Modelo de Velocidad.

## 5.2. Recomendaciones

Resolver problemas inversos no lineales implica un alto costo computacional el cual puede demandar una gran cantidad de tiempo, por eso se recomienda contar con tecnología apropiada que permita realizar adecuadamente los procesos descritos por el algoritmo del modelo propuesto.

También, el algoritmo de la propuesta metodológica puede ser optimizado al considerar una función de densidad condicional para los modelos de velocidad  $\{\mathbf{V}_{P_j}\}$  y  $\{\mathbf{V}_{S_j}\}$  que garantice que  $0 \leq \mathbf{v}_S < \mathbf{v}_P$ , y así evitar reglas de rechazo aceptación y configuraciones absurdas de velocidad.

Por último, se recomienda para futuras investigaciones no asumir independencia entre las variables aleatorias que representan los parámetros hipocentrales,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{T}$ , respectivamente. Dado que, diferentes condiciones geológicas sugieren dependencia entre estas variables aleatorias, o al menos entre dos de estas. Entonces, se recomienda modelar la dependencia de las variables aleatorias  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{T}$  usando funciones cópula.

---

<sup>2</sup>Abreviatura de *Root mean square* el cual es una medida de la diferencia entre los resultados teóricos y experimentales.

# A. Anexo: Mecánica del medio continuo

La mecánica del medio continuo es el área de la mecánica que estudia *esfuerzos* en sólidos, líquidos y gases y la deformación o flujo de estos tipos de materiales [Malvern, 1969]. El adjetivo de **continuo** hace referencia a una simplificación del objeto de estudio al descartar al descartar la estructura molecular de la materia, y al asumir que el objeto de estudio no posee espacios ni vacíos en su interior. Por tanto, se asume que el objeto es perfectamente continuo.

Este supuesto permite que las diferentes funciones matemáticas que pueden modelar el objeto sean continuas. Consecuentemente, estas funciones también pueden ser diferenciables. Permitiendo definir diferentes características como el esfuerzo o la deformación en cualquier punto del objeto. Entonces, las teorías de elasticidad, plasticidad y mecánica de fluidos pueden ser abordadas a partir del cálculo.

Existen tres características fundamentales del medio:

**Continuidad:** Un material es continuo si llena completamente el espacio o volumen que este ocupa, sin dejar lugar a poros o espacios vacíos en él. Además, si sus propiedades se pueden describir con funciones continuas.

**Homogeneidad:** Un material homogéneo tiene propiedades idénticas en todos los puntos del espacio que ocupa.

**Isotropía:** Un material es isotrópico con respecto a ciertas propiedades si estas son las mismas en todas las direcciones.

## A.1. Anexo: Tensores cartesiano

**Tensores como operadores lineales de vectores:** En un espacio tridimensional un vector puede ser descrito como una flecha con magnitud igual a la longitud del vector, y la dirección paralela a la del vector. Aunque los tensores no tienen una representación geométrica simple, estos surgen como entidades físicas cuyas componentes son los coeficientes de la relación lineal entre vectores [Malvern, 1969].

### A.1.1. Tensores

Las fuerzas se pueden clasificar como fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo, o fuerzas internas que actúan entre dos partes del cuerpo. Las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo libre cualquiera se clasifican en mecánica del medio continuo como:

- **Fuerzas de cuerpo:** actúan sobre los elementos del volumen o masa al interior de un cuerpo, como por ejemplo la fuerza gravitacional. Este tipo de fuerza tienen unidades de fuerza por unidad de volumen o masa.
- **Fuerzas superficiales:** Son fuerzas de contacto que actúan sobre un la superficie o fronteras de cuerpo libre. Este tipo de fuerzas tienen unidades de fuerza por unidad de área sobre la que estas fuerzas actúan.

Las fuerzas de cuerpo que actúan sobre un volumen infinitesimal  $dV$  de un cuerpo, se denotan por el vector  $\mathbf{b}$ . Entonces, la fuerza de cuerpo sobre el volumen  $dV$  es  $\rho \mathbf{b} dV$ , con componentes rectangulares  $\rho \mathbf{b}_k dV$ , y  $\rho$  densidad de masa por unidad de volumen.

El vector suma de todas las fuerzas de cuerpo que actúan sobre  $V$  está dada por la integral sobre el volumen,

$$\int_V \rho \mathbf{b} dV = \mathbf{i}_k \int_V \rho \mathbf{b}_k dV = \mathbf{i} \int_V \rho \mathbf{b}_x dV + \mathbf{j} \int_V \rho \mathbf{b}_y dV + \mathbf{k} \int_V \rho \mathbf{b}_z dV \quad (\text{A-1})$$

En general, el vector  $\mathbf{b}$  puede variar espacial y temporalmente.

La fuerza superficial por unidad área, vector de esfuerzo o *tracción* será denotada por el vector  $\tau$ ; la fuerza ejercida a lo largo de un elemento de superficie  $dS$  es  $\tau dS$ . Entonces, el vector suma de las a través de la porción finita  $S$  de una superficie de frontera está dada por la integral sobre la superficie

$$\int_S \tau dS = \mathbf{i}_k \int_S \rho \tau_k dS = \mathbf{i} \int_S \tau_x dS + \mathbf{j} \int_S \tau_y dS + \mathbf{k} \int_S \tau_z dS \quad (\text{A-2})$$

**Componentes del esfuerzo:** El vector de esfuerzo sobre un plano arbitrario con vector normal  $\hat{\mathbf{n}}$  sobre un punto puede ser expresado en términos de tres vectores de esfuerzos  $\tau^k$ , con  $k = 1, 2, 3$ . Estos tres vectores son una representación del tensor de esfuerzo  $\tau$  sobre un punto. La función vectorial lineal que asocia con cada argumento del vector unitario  $\hat{\mathbf{n}}$  el vector tracción  $\tau(\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}}\tau$  que actúa a través de la superficie con vector normal  $\hat{\mathbf{n}}$ .

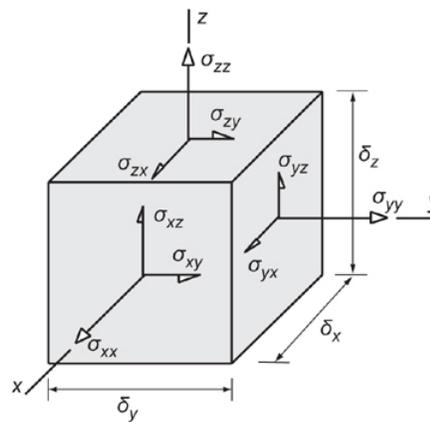
### A.1.2. Análisis de esfuerzo y deformación

En esta sección se derivan las ecuaciones de movimiento para un medio isotrópico y elástico, en términos del desplazamiento de partículas que lo componen. Luego, se muestra como estos desplazamientos generan dos tipos de ondas que se propagan a través del sólido [Kolsky, 1963]. Estas dos ondas son conocidas como compresiva y cortante, y el movimiento

de las partículas en la onda compresiva es paralelo a la dirección de propagación, mientras que para la onda cortante el movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de la propagación.

### Esfuerzo y deformación

Los esfuerzos sobre un elemento de superficie de un sólido no necesariamente son aplicados perpendicularmente a dicha superficie, por eso, dicho esfuerzo tiene componentes normales y tangenciales sobre esta superficie. De manera más general, los esfuerzos que actúan sobre tres planos normales a estos ejes, generan nueve componentes de esfuerzos.



**Figura A-1.:** Componentes de los esfuerzos que actúan sobre un paralelepípedo rectangular infinitesimal. Modificado [Kolsky, 1963].

al considerarse este paralelepípedo infinitesimal, cuyas caras son normales a los componentes de los esfuerzos horizontales  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ , y vertical  $\sigma_{zz}$ . Además, se puede observar que para el estado de equilibrio  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ , de tal manera el estado de esfuerzos se puede representar con seis componentes únicamente.

### Ley de Hooke

Esta ley describe la relación experimental entre la deformación y la fuerza aplicada dentro del régimen elástico. Dicho en otras palabras, esta ley establece que

- 1 Cuando la carga o esfuerzo aumenta, la deformación medida aumenta proporcionalmente.
- 2 Cuando el esfuerzo disminuye, la deformación observada disminuye de forma proporcional.
- 3 Cuando el esfuerzo es reducido a cero, no hay deformación observable.

Los resultados experimentales son válidos para gran parte de sólidos rígidos, y a partir de esto se realizó un razonamiento inductivo a la *Ley General de Hooke sobre la proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación*. La forma general de esta ley se expresa como [Kolsky, 1963]:

*Cada uno de los seis componentes del esfuerzo sobre cualquier punto de un cuerpo son una función lineal de los seis componentes de la deformación sobre este punto.*

Aunque no existe una prueba formal sobre esta ley, la declaración anterior es válida dentro de los límites de comportamiento elástico del cuerpo en estudio. Luego, esta ley se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= c_{11}\epsilon_{xx} + c_{12}\epsilon_{yy} + c_{13}\epsilon_{zz} + c_{14}\epsilon_{yz} + c_{15}\epsilon_{zx} + c_{16}\epsilon_{xy} \\
 \sigma_{yy} &= c_{21}\epsilon_{xx} + c_{22}\epsilon_{yy} + c_{23}\epsilon_{zz} + c_{24}\epsilon_{yz} + c_{25}\epsilon_{zx} + c_{26}\epsilon_{xy} \\
 \sigma_{zz} &= c_{31}\epsilon_{xx} + c_{32}\epsilon_{yy} + c_{33}\epsilon_{zz} + c_{34}\epsilon_{yz} + c_{35}\epsilon_{zx} + c_{36}\epsilon_{xy} \\
 \sigma_{yz} &= c_{41}\epsilon_{xx} + c_{42}\epsilon_{yy} + c_{43}\epsilon_{zz} + c_{44}\epsilon_{yz} + c_{45}\epsilon_{zx} + c_{46}\epsilon_{xy} \\
 \sigma_{zx} &= c_{51}\epsilon_{xx} + c_{52}\epsilon_{yy} + c_{53}\epsilon_{zz} + c_{54}\epsilon_{yz} + c_{55}\epsilon_{zx} + c_{56}\epsilon_{xy} \\
 \sigma_{xy} &= c_{61}\epsilon_{xx} + c_{62}\epsilon_{yy} + c_{63}\epsilon_{zz} + c_{64}\epsilon_{yz} + c_{65}\epsilon_{zx} + c_{66}\epsilon_{xy}
 \end{aligned} \tag{A-3}$$

donde los coeficientes  $c$  representan las constantes elásticas del material. Considerando que sólidos isotrópicos únicamente, los valores de los coeficientes deben ser independientes del sistema coordenado seleccionado. Luego, el sistema se puede reducir a dos constantes denotadas por  $\lambda$  y  $\mu$ , conocidas como parámetros de *Lamé*, de tal manera que

$$\begin{aligned}
 c_{12} &= c_{13} = c_{21} = c_{23} = c_{31} = c_{32} = \lambda, \\
 c_{44} &= c_{55} = c_{66} = \mu, \\
 c_{11} &= c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu
 \end{aligned} \tag{A-4}$$

y los otro 24 coeficientes son cero. De esta manera, los componentes de los esfuerzos en la ecuación (refeqB.3) pueden ser escritos como

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \lambda\Delta + 2\mu\epsilon_{xx} \\
 \sigma_{yy} &= \lambda\Delta + 2\mu\epsilon_{yy} \\
 \sigma_{zz} &= \lambda\Delta + 2\mu\epsilon_{zz} \\
 \sigma_{yz} &= \mu\epsilon_{yz} \\
 \sigma_{zx} &= \mu\epsilon_{zx} \\
 \sigma_{xy} &= \mu\epsilon_{xy}
 \end{aligned} \tag{A-5}$$

donde la dilatación  $\Delta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$ , representa el cambio de volumen o tamaño. Luego, se definen cuatro constantes elásticas conocidas como módulo de Young,  $E$ , razón de Poisson,  $\nu$ , módulo volumétrico  $\kappa$ , y módulo de rigidez,  $\mu$ , el cual es idéntico al parámetro de *Lamé*

[Kolsky, 1963]. El módulo de Young puede ser definido como la razón del esfuerzo aplicada y la fracción desplazada de un sólido sujeto a esfuerzo constante. Entonces, si el eje  $x$  se toma paralelo a un eje de un sólido, y  $\sigma_{xx}$  es el único esfuerzo considerado y aplicado sobre el sólido haciendo que los otros cinco componentes de esfuerzo sean cero, se tiene que,

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_{xx} + \lambda(\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) \quad (\text{A-6})$$

y su respectiva deformación,  $\epsilon_{xx}$  puede ser expresada como:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{xx} \quad (\text{A-7})$$

Análogamente, para  $\epsilon_{yy}$  y  $\epsilon_{zz}$ ,

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{xx} \quad (\text{A-8})$$

Luego, el módulo de Young  $E$  está dado por  $\sigma_{xx}/\epsilon_{xx}$ , entonces,

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (\text{A-9})$$

Por otro lado, la razón de Poisson,  $\nu$ , se define como una razón de deformaciones donde no se considera ningún tipo de esfuerzo, entonces esta es representa la contracción lateral y la extensión lateral del sólido o espécimen cuyas caras laterales se consideran libres. Consecuentemente, la razón de Poisson puede ser descrito como  $\nu = -\epsilon_{yy}/\epsilon_{xx}$ , y en términos de parámetros de *Lamé*:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (\text{A-10})$$

Además de lo anterior, el módulo volumétrico  $\kappa$  se define como la razón entre la presión aplicada  $P$  y el cambio de volumen cuando el sólido está sujeto a una compresión hidrostática. Entonces, bajo estas condiciones

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= -P \\ \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

de tal manera que

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\frac{P}{3\lambda + 2\mu} \quad (\text{A-12})$$

El cambio de volumen está dado por

$$-(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) = -\Delta \quad (\text{A-13})$$

Luego,

$$\kappa = \lambda + \frac{2\mu}{3} \quad (\text{A-14})$$

Por último, el modulo de cizalla o de rigidez  $\mu$ , puede ser calculado a partir de los últimos tres términos de (A-5) dependiendo del plano que contienen los vectores de esfuerzo y deformación:

$$\mu = \frac{\sigma_{ij}}{\epsilon_{ij}} \quad (\text{A-15})$$

donde  $i = (x, y, z)$ ,  $j = (x, y, z)$  y  $i \neq j$ .

## A.2. Ondas elásticas

El fundamento físico de la propagación de un frente de onda está en la interacción de los átomos del sólido; y aunque estos son unidades *discretas*, el medio compuesto por estos átomos se asume como continuo, de tal manera que las propiedades como densidad  $\rho$ , o constantes elásticas  $K$ , son consideradas como funciones continuas que representan el comportamiento promedio de los átomos [Graff, 2012]. Cualquier cuerpo sólido está constantemente bajo la fuerza de gravedad, y si está en equilibrio, esta fuerza será compensada por otras fuerzas. Además de esto, los cuerpos sólidos no son absolutamente rígidos, pues estos pueden cambiar de tamaño y forma si se aplican fuerzas adecuadas [Love, 2013]. Estas deformaciones de tamaño y forma pueden ser revertidas si estas no son muy grandes. Esta capacidad de recuperar la forma y tamaño original es conocida como elasticidad; y los cambios en forma y tamaño son conocidos como deformaciones.

Para los sólidos, dos tipos de ondas se propagarán. El primer tipo de onda será la compresiva u onda P, la cual se propagará en la misma dirección al movimiento del frente de onda. Este comportamiento se puede observar también en los fluidos. Además de esto, los sólidos pueden transmitir esfuerzos cortantes. Consecuentemente, el segundo tipo de onda será la onda cortante u onda S, la cual genera movimientos perpendiculares a la dirección de la propagación del frente de onda [Graff, 2012]. Dicho esto, la propagación de las ondas en sólidos depende de la forma en que estos sólidos se deforman y en su posible respuesta elástica. Es decir que se asume que estos sólidos obedecen la ley de Hooke.

Por otro lado, cualquier cuerpo pueden tener energía en varias formas. Si este está en movimiento posee energía cinética, la cual depende de la distribución espacial de la masa y la velocidad de las partes de este cuerpo. Para el caso de pequeños desplazamientos, la energía cinética está dada por

$$\frac{1}{2}\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \quad (\text{A-16})$$

Además de la energía cinética molar que posee el cuerpo, este posee energía que depende de la distribución espacial de la temperatura. Esta energía se conocida como *energía intrínseca*, y es calculada en referencia a un estado en el que el cuerpo tiene un único valor de temperatura y no posee desplazamiento alguno. De esta manera, la energía total de cualquier parte del cuerpo es la suma de la energía intrínseca y la energía cinética [Love, 2013]. Dicho esto, esta sección se concentra en el estudio de la energía cinética y su relación con la elasticidad de la región  $\mathbf{w}$ .

### A.2.1. Rapidez de una onda en un sólido elástico

Las velocidades de las ondas P y S,  $v_p$  y  $v_s$ , respectivamente, dependen de las propiedades elásticas del sólido y de su densidad:

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (\text{A-17})$$

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{A-18})$$

## B. Teoría de Rayos

Esta teoría fue desarrollada para resolver problemas ópticos, o problemas que involucran un haz de luz. La adaptación a la sismología se hace para simplificar el problema de propagación de las ondas, asumiendo frecuencias que tienden al infinito en la ecuación elastodinámica [Cerveny, 2005]. De esta manera, un rayo sísmico es una trayectoria de un punto en tres dimensiones, el cual se mueve en línea recta a una rapidez definida por las características físicas del medio.

Equivalentemente, la posición final de este punto,  $(x, y, z)$ , estará dada por su posición inicial,  $(x_o, y_o, z_o)$ , más el producto de la rapidez por el tiempo de viaje,  $v \times t$ . Por ejemplo, para una esfera centrada en  $(x_o, y_o, z_o)$ , y si su radio crece a velocidad  $v$ , después de un tiempo  $t$ , su radio será igual a  $v \times t$  [Strauss, 1992]. En otras palabras, la posición final del rayo es igual a la posición final del frente de onda. De esta manera, se relaciona la solución de la propagación de la superficie o frente de onda, con el cálculo del tiempo de viaje de un rayo perpendicular al frente de onda en cuestión.

Se ha observado que problema de la propagación de ondas sísmicas considerando variaciones *suaves* de la magnitud de la velocidad en direcciones laterales y verticales de rapidez puede ser aproximado satisfactoriamente por la teoría de rayos en su componente cinemático [Yilmaz, 2001], [Cerveny, 2005], y [Aki and Richards, 2002].

### B.1. Ecuación Eikonal

La ecuación eikonal es una aproximación de la teoría de rayos a la solución de la ecuación de onda en su forma escalar. Esta solución representa frentes de onda de fase constante. La onda es propagada de un frente de onda al siguiente frente por medio de la trayectoria definida por los rayos sísmicos los cuales son siempre perpendiculares a los frentes de onda [Yilmaz, 2001].

Considere una onda plana compresiva  $u(x, y, z, t)$  en  $\mathbb{R}^3$ , que se propaga en un medio homogéneo e isotrópico a una velocidad  $v$  y frecuencia  $\omega$  [Nolet, 2012]:

$$u(x, y, z, t) = A_0 e^{(-i\omega t + ik_x x + ik_y y + ik_z z)} \tag{B-1}$$

donde  $A_0$  es la amplitud de onda,  $t$  es el tiempo de viaje, y  $k_x, k_y, k_z$ , y  $\omega$  son los términos que

indican la dualidad de la transformada de Fourier<sup>1</sup>, respectivamente. Entonces, la ecuación (B-1) es solución a la ecuación de onda tridimensional en su forma escalar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2(x, y, z)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{B-2})$$

esto puede ser comprobado al calcular las derivadas parciales de la solución del campo de onda  $u(x, y, z, t)$  dadas por la ecuación (B-1), y luego sustituirlas en la ecuación (B-2). Dando como resultado la relación de dispersión o propagación

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad (\text{B-3})$$

de la onda escalar definida por la ecuación (B-2). Dado que la ecuación (B-1) satisface esta relación, implica que es una solución válida a la ecuación de onda tridimensional en su forma escalar. En la ecuación (B-2),  $v(x, y, z)$  es la velocidad de propagación de la onda compresiva  $u(x, y, z, t)$ . Entonces, la ecuación (B-1) puede reescribirse así:

$$u(x, y, z, t) = A_0 e^{-i\omega \left[ t - \left( \frac{k_x x}{\omega} + \frac{k_y y}{\omega} + \frac{k_z z}{\omega} \right) \right]} \quad (\text{B-4})$$

de tal forma que sea posible definir una superficie para el tiempo de viaje  $T(x, y, z)$  como:

$$T(x, y, z) = \frac{k_x x}{\omega} + \frac{k_y y}{\omega} + \frac{k_z z}{\omega} \quad (\text{B-5})$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (B-4) se obtiene una expresión para una onda plana en término de la superficie de tiempo de viaje  $T(x, y, z)$ :

$$u(x, y, z, t) = A_0 e^{-i\omega [t - T(x, y, z)]} \quad (\text{B-6})$$

Ahora, se debe verificar que esta solución satisfaga la ecuación de onda tridimensional en su forma escalar definida por la ecuación (B-2). Entonces, se calculan las derivadas parciales de la ecuación (B-6) con respecto a las variables espaciales. Para  $x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_0 (i\omega) \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) e^{-i\omega [t - T(x, y, z)]} \quad (\text{B-7})$$

derivando una vez más se obtiene,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A_0 \left[ \omega^2 \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 - i\omega \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) e^{-i\omega [t - T(x, y, z)]} \quad (\text{B-8})$$

Análogamente para la variable espacial  $y$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -A_0 \left[ \omega^2 \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - i\omega \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) e^{-i\omega [t - T(x, y, z)]} \quad (\text{B-9})$$

<sup>1</sup>La propiedad de dualidad de la transformada de Fourier establece una relación de simetría entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia de una señal, es decir  $t \rightleftharpoons \omega$  [Sneddon, 1995].

y para la variable espacial  $z$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -A_0 \left[ \omega^2 \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 - i\omega \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) e^{-i\omega[t-T(x,y,z)]} \quad (\text{B-10})$$

El siguiente paso es calcular la derivada parcial con respecto al tiempo  $t$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A_0 \omega^2 e^{-i\omega[t-T(x,y,z)]} \quad (\text{B-11})$$

Sustituyendo las ecuaciones (B-8), (B-9), (B-10) y (B-8) en la ecuación (B-2), y combinando los términos reales e imaginarios se tiene que,

$$\omega^2 \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] - i\omega \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\omega^2}{v^2(x,y,z)} \quad (\text{B-12})$$

Dado que el término del lado derecho de la igualdad es real, la parte imaginaria en el lado izquierdo de la igualdad desaparece, dejando como expresión final:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{v^2(x,y,z)} \quad (\text{B-13})$$

es conocida como la *ecuación eikonal* [Yilmaz, 2001].

De esta forma se obtiene el tiempo de viaje  $T(x,y,z)$  de un rayo que pasa a través del punto  $(x,y,z)$  en un medio con velocidad  $v(x,y,z)$ . Una solución a la ecuación eikonal,  $T(x,y,z) = \text{constante}$  representa el frente de onda en un instante de tiempo. Esto implica que conemáticamente, una solución a la ecuación eikonal (B-13) debe ser también una solución a la ecuación (B-2) [Cerveny, 2005].

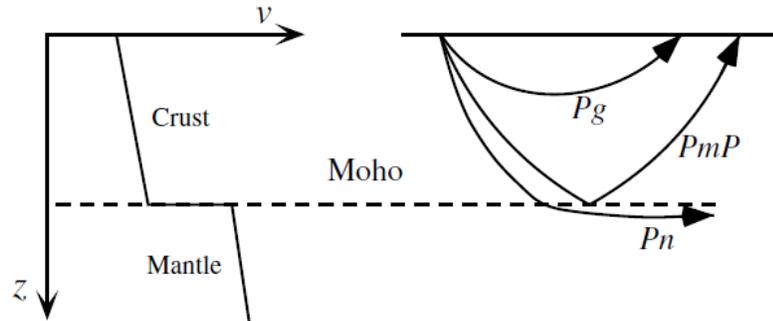
## B.2. Fases sísmicas

A grandes rasgos la Tierra puede ser subdividida en cuatro partes: Corteza, Manto, Núcleo exterior, Núcleo interior). El paso de las ondas de cuerpo P y S por estos cuatro grandes medios generado una gran cantidad de rayos reflejados y refractados llamados fases sísmicas [Shearer, 2009].

### B.2.1. Fases corticales

La corteza tiene aproximadamente  $6km$  de espesor bajo los océanos y  $30$  a  $50km$  bajo los continentes. Las velocidades aumentan abruptamente en la discontinuidad de Mohorovicic ubicado entre la corteza y el manto superior [Turcotte and Schubert, 2002]. Una onda P que únicamente viaja al interior de la corteza es conocida como  $Pg$ , mientras que una onda

reflejada desde la discontinuidad de Mohorovicic es conocida  $PmP$ . Entonces la letra  $m$  en  $PmP$  denota reflexión de la discontinuidad de Mohorovicic. Finalmente,  $Pn$  es un rayo que viaja en la parte superior del manto, tal y como lo muestra la figura (B-1):



**Figura B-1.:** Nomenclatura de fases sísmica en la Corteza para una onda P. Modificado [Shearer, 2009].

Esta figura ilustra el aumento de la velocidad en función de la profundidad, y las geometrías de los rayos de las ondas P que viajan en la Corteza y en el Manto superior.

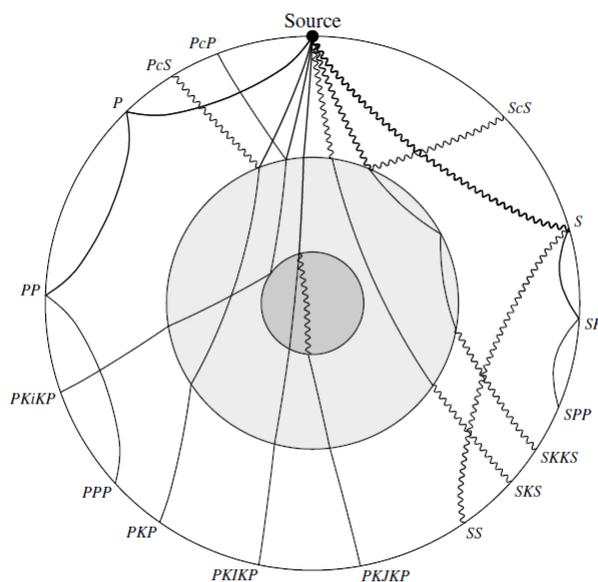
### B.2.2. Fases sísmicas para toda la Tierra

Se considera el Manto, el Núcleo externo (fluido), y el Núcleo interno (sólido). Las ondas P y S en el manto tienen la siguiente nomenclatura [Shearer, 2009]:

- P-P: Onda P en el Manto.
- K-P: Onda P en el Núcleo externo.
- I-P: Onda P en el Núcleo interno.
- S-S: Onda S en el Manto.
- J-S: Onda S en el Núcleo interno.
- c: Onda reflejada de la discontinuidad Manto-Núcleo (CMB).
- i: Onda reflejada de la discontinuidad Núcleo exterior-Núcleo interior (ICB).

Estas abreviaturas para las ondas P y S en el interior de la Tierra pueden combinarse para indicar trayectorias más complejas como lo muestra la siguiente figura(B-2). Las fases más *superficiales* son denotadas por  $PP$ ,  $PPP$ ,  $SS$ ,  $SP$ , y así sucesivamente. Mientras que para las *fases profundas* o rayos sísmicos con trayectorias *profundas*, se denotan por letras minúsculas  $p$  o  $s$ ; tales como  $pP$ ,  $sS$  y  $sP$ . Por tanto, la identificación de estas *fases profundas*

en los registros de estaciones sismológicas distantes sirven para corroborar la profundidad de eventos sísmicos lejanos.



**Figura B-2.:** Nomenclatura de fases sísmica para las ondas P y S en el Manto y Núcleo de la Tierra. Modificado [Shearer, 2009].

### B.3. El problema conjunto Hipocentro-Modelo de Velocidad

Este problema describe la dificultad para encontrar la ubicación del foco de un terremoto, partiendo del hecho que el terremoto y la región de la Tierra donde este ocurrió y se propagó tienen parámetros desconocidos y no observables. Consecuentemente, la estimación simultánea de los parámetros del terremoto y del modelo de velocidad implica resolver dos problemas inversos pareados [Kissling, 1988].

Para solucionar alguno de estos dos problemas inversos es necesario conocer previamente los parámetros del sistema físico restante. En otras palabras, para estimar la ubicación de un foco o hipocentro es necesario conocer previamente el modelo de velocidad del interior de la Tierra, y para estimar el modelo de velocidad del interior de la Tierra es necesario conocer la ubicación de un conjunto de focos [Kissling, 1988]. Adicional a lo anterior, el conjunto de observaciones que permiten solucionar alguno de estos problemas inversos son iguales para ambos casos. Estas observaciones se componen por los registros o señales sísmicas.

# Bibliografía

- [Aki and Richards, 2002] Aki, K. and Richards, P. G. (2002). *Quantitative seismology*, volume 1.
- [Casella and Berger, 2002] Casella, G. and Berger, R. L. (2002). *Statistical inference*, volume 2. Duxbury Pacific Grove, CA.
- [Cediel et al., 2003] Cediel, F., Shaw, R. P., and Cceres, C. (2003). Tectonic assembly of the northern andean block.
- [Cerveny, 2005] Cerveny, V. (2005). *Seismic ray theory*. Cambridge university press.
- [Graff, 2012] Graff, K. F. (2012). *Wave motion in elastic solids*. Courier Corporation.
- [Grigoriu, 2013] Grigoriu, M. (2013). *Stochastic calculus: applications in science and engineering*. Springer Science & Business Media.
- [Hadamard, 1923] Hadamard, J. (1923). *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, volume 37. Yale University Press.
- [Havskov and Ottemöller, 1999] Havskov, J. and Ottemöller, L. (1999). Seisan earthquake analysis software. *Seismol. Res. Lett.*, 70(5):532–534.
- [Havskov and Ottemöller, 2010] Havskov, J. and Ottemöller, L. (2010). *Routine Data Processing in Earthquake Seismology*. Springer.
- [JCGM et al., 2008] JCGM, J. et al. (2008). Evaluation of measurement data—guide to the expression of uncertainty in measurement. *Int. Organ. Stand. Geneva ISBN*, 50:134.
- [Jeffreys, 1970] Jeffreys, H. (1970). *The Earth. Its origin, history and physical construction*.
- [Johnson et al., 1994] Johnson, N., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1994). Continuous univariate probability distributions,(vol. 1).
- [Johnson et al., 1995] Johnson, N. L., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1995). *Continuous univariate distributions, vol. 2 of wiley series in probability and mathematical statistics: applied probability and statistics*. Wiley, New York,.

- [Kennett, 2009] Kennett, B. (2009). *Seismic wave propagation in stratified media*. ANU E Press.
- [Kennett and Engdahl, 1991] Kennett, B. and Engdahl, E. (1991). Travel times for global earthquake location and phase association. *Geophysical Journal International*, 105:429–465.
- [Kissling, 1988] Kissling, E. (1988). Geotomography with local earthquake data. *Reviews of Geophysics*, 26(4):659–698.
- [Kissling et al., 1995] Kissling, E., Kradolfer, U., and Maurer, H. (1995). Velest users guide. *Int. Report, Inst. Geophys., ETH, Zurich*, pages 1–26.
- [Kolsky, 1963] Kolsky, H. (1963). *Stress waves in solids*, volume 1098. Courier Corporation.
- [Koyama, 2013] Koyama, J. (2013). *The complex faulting process of earthquakes*, volume 16. Springer Science & Business Media.
- [Kroese et al., 2014] Kroese, D. P., Brereton, T., Taimre, T., and Botev, Z. I. (2014). Why the monte carlo method is so important today. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 6(6):386–392.
- [Lay and Wallace, 1995a] Lay, T. and Wallace, T. (1995a). *Modern Global Seismology*, volume 58. International geophysics series. California, Academic Press.
- [Lay and Wallace, 1995b] Lay, T. and Wallace, T. C. (1995b). *Modern global seismology*, volume 58. Academic press.
- [Loehlin, 1998] Loehlin, J. C. (1998). *Latent variable models: An introduction to factor, path, and structural analysis*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- [Lomax et al., 2000] Lomax, A., Virieux, J., Volant, P., and Berge-Thierry, C. (2000). Probabilistic earthquake location in 3d and layered models. In *Advances in seismic event location*, pages 101–134. Springer.
- [Lomnitz, 1982] Lomnitz, C. (1982). An uncertainty principle of earthquake locations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 72(2):669–670.
- [Lomnitz, 2006] Lomnitz, C. (2006). Three theorems of earthquake location. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 96(1):306–312.
- [Love, 2013] Love, A. E. H. (2013). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge university press.
- [Malvern, 1969] Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Number Monograph.

- [Mavko, 2005] Mavko, G. (2005). Conceptual overview of rock and fluid factors that impact seismic velocity and impedance. *Retrieved*, 11(11):2012.
- [Menke and Schaff, 2004] Menke, W. and Schaff, D. (2004). Absolute earthquake locations with differential data. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 94(6):2254–2264.
- [Mosegaard and Tarantola, 1995] Mosegaard, K. and Tarantola, A. (1995). Monte carlo sampling of solutions to inverse problems. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 100(B7):12431–12447.
- [Mosegaard et al., 2002] Mosegaard, K., Tarantola, A., et al. (2002). Probabilistic approach to inverse problems. *International Geophysics Series*, 81(A):237–268.
- [Needham, 2004] Needham, J. (2004). *Science and Civilisation in China*. Cambridge University Press.
- [Nolet, 2012] Nolet, G. (2012). *Seismic tomography: with applications in global seismology and exploration geophysics*, volume 5. Springer Science & Business Media.
- [Ojeda and Havskov, 2001] Ojeda, A. and Havskov, J. (2001). Crustal structure and local seismicity in colombia. *Journal of seismology*, 5(4):575–593.
- [Rincón, 2007] Rincón, L. (2007). *Curso intermedio de probabilidad*. UNAM, Facultad de Ciencias.
- [Robert and Casella, 2013] Robert, C. and Casella, G. (2013). *Monte Carlo statistical methods*. Springer Science & Business Media.
- [Semblat et al., 2002] Semblat, J.-F., Duval, A.-M., and Dangla, P. (2002). Seismic site effects in a deep alluvial basin: numerical analysis by the boundary element method. *Computers and geotechnics*, 29(7):573–585.
- [Shearer, 2009] Shearer, P. M. (2009). *Introduction to seismology*. Cambridge University Press.
- [Sneddon, 1995] Sneddon, I. N. (1995). *Fourier transforms*. Courier Corporation.
- [Stein and Wysession, 2009] Stein, S. and Wysession, M. (2009). *An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure*. John Wiley & Sons.
- [Strauss, 1992] Strauss, W. A. (1992). *Partial differential equations*. John Wiley & Sons New York, NY, USA.
- [Taboada et al., 2000] Taboada, A., Rivera, L. A., Fuenzalida, A., Cisternas, A., Philip, H., Bijwaard, H., Olaya, J., and Rivera, C. (2000). Geodynamics of the northern andes: Subductions and intracontinental deformation (colombia). *Tectonics*, 19(5):787–813.

- [Tarantola, 1987] Tarantola, A. (1987). Inverse problems theory, methods for data fitting and model parameter estimation, 181-188.
- [Tarantola, 2005] Tarantola, A. (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. SIAM.
- [Tarantola and Valette, 1982] Tarantola, A. and Valette, B. (1982). Inverse problems= quest for information. *J. geophys*, 50(3):150–170.
- [Thurber and Kissling, 2000] Thurber, C. H. and Kissling, E. (2000). Advances in travel-time calculations for three-dimensional structures. *MODERN APPROACHES IN GEOPHYSICS*, 18:71–100.
- [Turcotte and Schubert, 2002] Turcotte, D. and Schubert, G. (2002). *Geodynamics*, 456 pp. Cambridge Univ. Press, New York.
- [Winter, 2013] Winter, J. D. (2013). *Principles of igneous and metamorphic petrology*. Pearson Education.
- [Yilmaz, 2001] Yilmaz, Ö. (2001). *Seismic data analysis: Processing, inversion, and interpretation of seismic data*. Society of exploration geophysicists.