

# Diferentes métodos para la obtención de la proyección ortogonal sobre un hiperplano definido por $n$ puntos en un espacio euclídeo de dimensión $n$

*Different methods of orthogonal projection onto a hyperspace defined by  $n$  points in a Euclidean space of dimension  $n$*

Juan Flaquer<sup>1</sup>

Recibido: Mayo 2015

Aceptado: Agosto 2015

**Resumen.-** El presente artículo plantea nueve diferentes métodos de proyección ortogonal sobre un hiperespacio definido por puntos. Los métodos presentados se han implementado en el lenguaje MATLAB. Se han hecho comparaciones de tiempo y de precisión numérica tomando uno de ellos de referencia. Se ha puesto énfasis especial en un método basado en la inversión, comentando sus posibilidades y aportando demostraciones que justifican los pasos intermedios.

**Palabras clave:** Proyecciones ortogonales; Hiperespacios; Métodos Numéricos; MATLAB.

*Summary.-* This article presents nine different methods of orthogonal projection onto a hyperspace defined by points. These methods have been implemented in MATLAB language. Comparisons have been made of numerical precision and cpu times, taking one of them as a reference. It has placed special emphasis on an inversion's method with comments to its potential and some demonstrations that justify the intermediate steps used.

**Keywords:** Orthogonal projections; Hyperspace; Numerical Methods; MATLAB.

**1. Introducción.-** Este escrito presenta e implementa una colección de nueve métodos para proyectar ortogonalmente un punto  $s$  sobre un hiperplano  $h$ , definido éste de modo único por  $n$  puntos en un espacio euclídeo  $E$  de dimensión  $n$ . Los  $n$  puntos son independientes desde el punto de vista afín, esto es, fijado uno de ellos, los vectores que lo trasladan hacia los demás forman una lista vectorial linealmente independiente.

El artículo analiza de modo especial un método (octavo método) basado en la inversión respecto de  $s$  de los puntos que definen  $h$ , y compara entre sí los resultados obtenidos por los diferentes métodos, desde el punto de vista, tanto del tiempo de cálculo como del error cometido, relativo a uno de ellos (quinto método), variando el tamaño del problema y eligiendo datos aleatorios. Si el método de referencia no fuera el resultado más aproximado, lo que en realidad se estaría estudiando es la dispersión de resultados respecto del de referencia.

La implementación se ha hecho utilizando las funciones que aporta MATLAB™ R2014a., con un ordenador cuyas características son:

---

<sup>1</sup> TECNUN, Universidad de Navarra, San Sebastián, España, [jflaquer@tecnun.es](mailto:jflaquer@tecnun.es)

Procesador: Intel Core 2 Quad CPU Q8400 @ 2.66 GHz 2.67 GHz  
 Memoria instalada: 4,00 GB  
 Sistema Operativo: 64-bit

El objetivo del artículo es mostrar el alcance de los diferentes métodos en unas ejecuciones experimentales de ejemplos aleatorios, de menor a mayor tamaño, de modo que ayude al lector a la elección del método más adecuado en una ejecución concreta.

**2. Planteo del problema.-** Un hiperplano  $h$  de un espacio euclídeo  $E$  de dimensión  $n$  es un subespacio de  $E$  de dimensión  $n-1$ . Una lista de  $n$  puntos  $q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n$  de  $E$  define de modo único un hiperplano  $h$  de  $E$  si y sólo si la lista de  $n-1$  vectores traslación

$$u_1 = \overrightarrow{q_j q_1}, u_2 = \overrightarrow{q_j q_2}, \dots, u_{j-1} = \overrightarrow{q_j q_{j-1}}, u_j = \overrightarrow{q_j q_{j+1}}, \dots, u_{n-1} = \overrightarrow{q_j q_n}$$

es una lista linealmente independiente en el espacio  $V$  de traslaciones de  $E$ , con  $q_j$  un punto cualquiera seleccionado de la lista inicial. Esta lista es una base del subespacio vectorial de traslaciones de  $h$ .

Denominando con  $B$  la base del sistema de referencia que se haya seleccionado para el espacio de puntos  $E$ , y si denotamos con la misma notación al vector  $u_j$  que a la matriz columna formada por las componentes de  $u_j$  en la base  $B$ , la afirmación anterior significa que la matriz

$$H = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_j \ \dots \ u_{n-1}],$$

de tamaño  $n \times (n-1)$ , formada por las  $n-1$  columnas  $u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_{n-1}$ , es de rango máximo por columnas. Nótese que las columnas  $u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_{n-1}$  forman una base de  $R(H)$ . Se usa aquí la notación  $R(H)$  para representar el subespacio imagen de  $H$ , el cual está generado por las columnas de  $H$ , esto es, formado por todas las combinaciones lineales de las citadas columnas.

Los puntos  $x$  de  $h$  resultan de trasladar un punto  $x_0$  cualquiera de  $h$  (punto de paso) mediante los vectores traslación aportados por  $R(H)$ . Se puede escribir  $h = x_0 + R(H)$  y también  $x = x_0 + u$ , para  $u = \overline{x_0 x} \in R(H)$ .

Se define la proyección ortogonal de un punto  $s$  de  $E$  sobre el hiperplano  $h$  como el punto  $q$  de  $h$  cuya distancia a  $s$  es mínima. Se sabe que la proyección ortogonal  $q$  de  $s$  sobre  $h$  existe y es única.

El problema planteado es el siguiente: Conocidos un hiperplano  $h$ , por  $n$  puntos  $q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n$ , que lo definen de modo único, y el punto  $s$ , hallar la proyección ortogonal  $q$  de  $s$  sobre  $h$ .

Sin pérdida de generalidad, desde el punto de vista de la comparación entre métodos, se puede suponer que el último punto  $q_n$  coincide con el origen  $O$  del sistema de referencia y que los vectores  $u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_{n-1}$ , base de  $R(H)$ , son los que trasladan el origen  $O = q_n$  en los puntos  $q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_{n-1}$ . (Ver Figura 1).

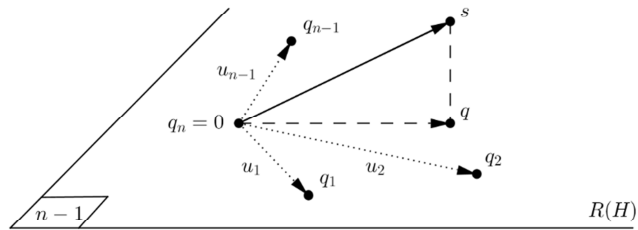


Figura 1.- Proyección ortogonal sobre la imagen de H

Este modo de proceder tiene una ventaja: se identifica un punto cualquiera con el vector que traslada el origen a ese punto. Trataremos indistintamente los puntos, vectores y columnas que los representan.

En lo que sigue vamos a considerar una colección de nueve métodos que resuelven el problema planteado.

**3. Proyección ortogonal mediante la eliminación Gaussiana de un sistema de rango máximo por filas (Primer método).**- Una ecuación implícita normalizada  $a^T x = 0$  del hiperplano  $h$  que pasa por el origen está definida por un vector no nulo  $a$ , de norma unidad, esto es  $a^T a = 1$ , que debe cumplir también las  $n-1$  identidades  $a^T q_i = 0$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ; estas proceden de obligar a que los  $n-1$  puntos  $q_i$  pertenezcan a  $h$ . Las identidades citadas son equivalentes a las  $n-1$  identidades  $q_i^T a = 0$ , por lo que  $a$  debe ser solución del sistema homogéneo  $Ax = 0$ , siendo  $A$  la matriz de tamaño  $(n-1) \times n$  y de rango máximo por filas, definida mediante

$$A = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \dots \\ q_{n-1}^T \end{bmatrix} = H^T.$$

Si denotamos con  $B$  la submatriz cuadrada de  $A$  formada por sus  $n-1$  primeras columnas, aquella también será de rango máximo por filas, existiendo, por ser cuadrada, su inversa. Si ahora denotamos con  $c$  la última columna de  $A$  y con  $w'$  la solución única de  $Bx' = -c$  se tendrá que la columna ampliada

$$w = \begin{bmatrix} w' \\ 1 \end{bmatrix}$$

será una solución no nula de  $Ax = 0$ . Basta con dividir  $w$  por su norma para hallar el vector normalizado

$$a = w / \|w\|.$$

Una vez obtenido el vector  $a$ , la proyección ortogonal  $q$  de  $s$  sobre  $h$  se puede obtener como diferencia de  $s$  y la proyección ortogonal  $\pi_s$  del vector  $s$  sobre  $N(A)$ , (Se usa aquí la notación  $N(A)$  para representar el núcleo de  $A$ , esto es el subespacio vectorial de las soluciones de la ecuación  $Ax = 0$ ), por lo que

$$q = s - (a^T s)a.$$

(Ver Figura 2).

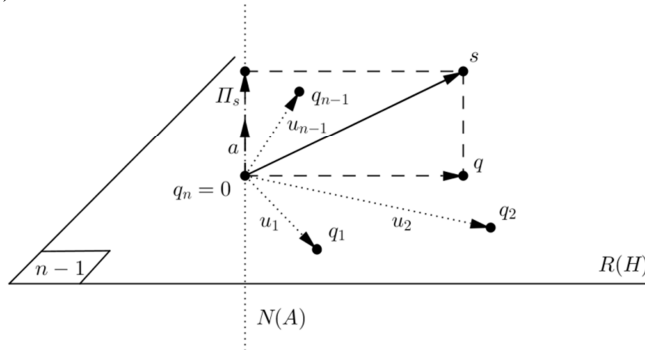


Figura 2.- Obtención de  $a$ , vector normalizado ortogonal a  $R(H)$

**4. Proyección ortogonal mediante la eliminación Gaussiana general de un sistema homogéneo de rango máximo por filas (Segundo método).**- Este método parte de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \dots \\ q_{n-1}^T \end{bmatrix} = H^T$$

del método anterior. Resolviendo el sistema homogéneo  $Ax = 0$  por eliminación Gaussiana, se obtienen las soluciones de la forma  $x = a\lambda$ , con  $a$  un vector normalizado base de  $N(A)$ . Una vez obtenido el vector  $a$ , se siguen los mismos pasos que en el método anterior. (Ver Figura 2).

**5. Proyección ortogonal mediante la matriz de Gram (Tercer método).**- Se busca un punto  $q = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j u_j$  de  $h$  de modo que el vector  $q-s$  sea ortogonal a todos los vectores  $u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_{n-1}$  base del subespacio  $F$  de vectores traslación del hiperplano  $h$ . Esto es,

$$u_i^T (q - s) = 0, i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$$

Operando, se tiene

$$u_i^T \left( \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j u_j - s \right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} (u_i^T u_j) \beta_j = u_i^T s, i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$$

Denotando con  $g_{ij} = u_i^T u_j$  el elemento genérico de una matriz  $G$ , construida a tal efecto (la matriz de Gram) y siendo  $u_i^T s$  el elemento genérico de una matriz columna  $c$ , formada por los términos de la derecha de las anteriores ecuaciones, las componentes  $\beta_j$  de  $q$  se pueden hallar resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$G \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = c$$

que tiene solución única, por ser  $G$  una matriz regular, con las que se obtiene inmediatamente  $q$  gracias a

$$q = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j u_j$$

**6. Proyección ortogonal mediante el método de Gram-Schmidt modificado (Cuarto método).**- Se trata de proyectar ortogonalmente  $s$  sobre  $R(H)$ , siendo  $H = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_j \ \dots \ u_{n-1}]$ , hallando previamente una base ortonormal  $w_1, w_2, \dots, w_j, \dots, w_{n-1}$  de  $R(H)$ . Para ello vamos a usar el método de Gram-Schmidt modificado, que sigue el siguiente algoritmo:

```

for j = 1: n - 1
    wj ← uj
    for i = 1: j - 1
        rij ← wiTwj
        wj = wj - rijwi
    end i
    rjj ← ||wj||
    wj ← wj/rjj
end j

```

con el fin de obtener la citada base ortonormal. La proyección ortogonal  $q$  buscada viene dada por

$$q = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j w_j,$$

siendo

$$\alpha_j = w_j^T s, \text{ para } j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

El algoritmo de Gram\_Schmidt modificado<sup>[1]</sup> es numéricamente menos sensible a los errores de redondeo que el método simple original. Además, en algunos ejemplos extremos, el método original llega a perder la ortogonalidad del resultado.

**7. Proyección ortogonal mediante el uso de la matriz de proyección ortogonal sobre  $R(H)$  (Quinto método).**- La proyección ortogonal  $q$  de  $s$  sobre  $R(H)$  se puede obtener mediante la matriz de proyección ortogonal  $P = HH^+$ , siendo  $H^+$  la pseudoinversa de  $H$ . En nuestro caso, por ser  $H$  una matriz de rango máximo por columnas, la matriz  $H^T H$  tiene inversa, y se tiene que

$$H^+ = (H^T H)^{-1} H^T$$

de donde la proyección ortogonal  $q$  viene dada por

$$q = Ps = HH^+s = H(H^T H)^{-1} H^T s.$$

Utilizando MATLAB se usa la función *pinv* para hallar  $H^+$  (inversa de *Moore-Penrose*) y no se calcula directamente por la fórmula anterior, para evitar invertir la matriz  $H^T H$  que puede tener problemas de mal condicionamiento. Este método, al basarse en la descomposición en valor singular de  $H$ , resulta estable cuando el rango es máximo por columnas, por lo que lo tomaremos como referencia en los cálculos obtenidos.

**8. Proyección ortogonal mediante la descomposición QR de H (Sexto método).**- La proyección ortogonal buscada  $q$  de  $s$  es el resultado de multiplicar  $H$  por la solución  $\hat{x}$  de mínimos cuadrados de  $Hx = s$ , donde  $x$  es la incógnita del sistema. En nuestro caso  $\hat{x}$  es la solución única del sistema de ecuaciones normales  $H^T Hx = H^T s$ . Haciendo la descomposición  $QR$  de  $H$ , resulta que  $Q$  es una matriz cuyas columnas forman una base ortonormal de  $R(H)$ , verificando  $Q^T Q = I$ ; de otra parte,  $R$  es una matriz triangular superior regular, y por lo tanto, existe  $R^{-1}$ . La matriz de las ecuaciones normales toma la forma

$$H^T H = (QR)^T (QR) = R^T (Q^T Q) R = R^T R$$

y la columna de términos independientes

$$H^T s = (QR)^T s = R^T Q^T s$$

por lo que el sistema de ecuaciones normales pasa a ser

$$R^T R x = R^T Q^T s$$

y ya que  $R^T$  también es regular, por serlo  $R$ , se tiene definitivamente

$$R x = Q^T s$$

que es un sistema de matriz triangular superior, el cual se resuelve por sustitución hacia atrás. Una vez obtenida la solución  $\hat{x}$  se halla inmediatamente la proyección ortogonal  $q$  mediante  $q = H\hat{x}$ . Las ecuaciones normales presentan inestabilidades cuando el problema está mal condicionado.

**9. Proyección ortogonal mediante la descomposición en valor singular (Séptimo método).**- Vamos a encontrar un hiperplano  $h$  de ecuación  $(x - c)^T u = 0$ , donde  $c$  es un punto de paso y  $u$  un vector normal a  $h$ , de norma unidad, que minimice la suma de distancias cuadráticas de los puntos  $q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n$  que definen  $h$ , esto es,

$$\min_{c, \|u\|=1} \sum_{i=1}^n ((q_i - c)^T u)^2$$

cuya solución para  $c$  es

$$c = 1/n \sum_{i=1}^n q_i$$

esto es, el punto medio.

Construida la matriz  $A = [q_1 - c \quad q_2 - c \quad \dots \quad q_n - c]$ , si  $A = U\Sigma V^T$  es la descomposición en valor singular de  $A$ , se puede probar que el problema de minimización planteado es equivalente a

$$\min_{\|u\|=1} \|A^T u\|_2^2$$

que da como solución para  $u$

$$u = U(:, n),$$

la última columna de la matriz  $U$ .

Conocida la ecuación  $(x - c)^T u = 0$  de  $h$ , es trivial proyectar el punto  $s$  ortogonalmente sobre  $h$ :

$$\begin{aligned} x &= s + \lambda u \\ (s + \lambda u - c)^T u &= 0 \\ \lambda &= (c - s)^T u \end{aligned}$$

Obteniendo definitivamente

$$q = s + \lambda u$$

Este método es claramente estable respecto a pequeñas perturbaciones en los datos de entrada.

**10. Proyección ortogonal mediante la inversión de los puntos que definen  $h$  (Octavo método).**- Presentamos en este apartado el método, basado en la obtención de las imágenes de los puntos  $q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n$ , que definen de modo único el hiperplano  $h$ , respecto del centro de inversión  $s$ , no perteneciente a  $h^{[5]}$ . A las citadas imágenes, las vamos a denotar con  $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_n$ , respectivamente, de modo que

$$p_j = s + \frac{1}{\|q_j - s\|^2} (q_j - s)$$

con  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

El punto  $p_j$ , junto con el vector no nulo  $a_j = q_j - s$ , definen un hiperplano  $h_j$  que pasa por  $p_j$  y está orientado por  $a_j$ , con  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . La intersección de los citados hiperplanos origina un único punto  $p$  (cuestión que se demuestra con los Teoremas 3 y 4 del Anexo) y que se puede obtener resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \dots \\ a_n^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a_1^T p_1 \\ a_2^T p_2 \\ \dots \\ a_n^T p_n \end{bmatrix}.$$

Se demuestra también en el anexo (Teorema 5) que los puntos  $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_n$ , el punto  $p$  así obtenido y el centro de inversión  $s$  se hallan todos en la hiperesfera  $S$  que es la inversa del hiperplano  $h$  respecto de  $s$ .

La Figura 3 ilustra la situación para el caso  $n = 2$ .

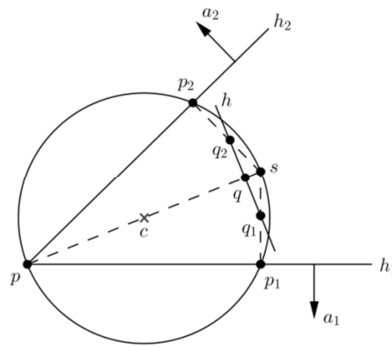


Figura 3.- Proyección ortogonal mediante la inversión

La proyección ortogonal  $q$  buscada de  $s$  sobre  $h$  se puede obtener como el inverso del punto  $p$  respecto del centro de inversión  $s$ , esto es,

$$q = s + \frac{1}{\|p - s\|^2} (p - s)$$

Es  $p$  el punto más alejado de  $s$  en la hipersfera  $S$ , por lo que  $q$ , inverso de  $p$ , será el punto más próximo a  $s$  en  $h$ , esto es, la proyección ortogonal de  $s$  sobre  $h$ .

Las expresiones en las que aparece la inversión pueden dar problemas de errores absolutos cuando la norma de  $p - s$  es pequeña, agravados por el cuadrado de la norma.

**11. Proyección ortogonal mediante la resolución de las ecuaciones normales usando la descomposición de Cholesky (Noveno método).**- Las ecuaciones normales son de la forma

$$(H^T H)x = H^T s$$

Si hacemos la descomposición de Cholesky de  $H^T H$

$$H^T H = LL^T$$

con  $L$  triangular inferior regular, el sistema a resolver es

$$(LL^T)x = H^T s$$

$$L(L^T x) = H^T s$$

$$Lw = c, \text{ con } w = L^T x \text{ y } c = H^T s$$

La resolución de  $Lw = c$  es inmediata, por sustitución hacia adelante, seguida de la resolución de  $L^T x = w$  por sustitución hacia atrás, obteniendo la solución de mínimos cuadrados  $\hat{x}$  de la que se obtiene la proyección  $q$  buscada como  $q = H\hat{x}$ .

La descomposición de Cholesky puede dar inestabilidades cuando el problema está mal condicionado, esto es, cuando es alto el número de condición de la matriz  $H^T H$  del sistema a resolver: pequeñas perturbaciones relativas en los valores de esa matriz pueden originar grandes perturbaciones relativas en los valores del resultado.



**12. Resultados experimentales.-** Se toma como método de referencia en el resultado el quinto método, esto es, el que calcula la proyección utilizando la pseudoinversa. Se usará su resultado como referencia en el cálculo de los errores de los diferentes métodos, como ya se indicó. Normalmente no se tiene el resultado exacto, pues, salvo un ejemplo preparado de antemano, con precisión infinita en los datos, del que se conoce con total precisión el resultado de la proyección ortogonal, uno se debe contentar con una buena aproximación. Las propiedades de la svd, al transformar la matriz original con matrices ortogonales, avalan la citada elección; si el problema está muy mal condicionado las transformaciones ortogonales no lo agravan, aunque en este caso los resultados no son fiables. En este caso se mide la dispersión de los resultados de los métodos respecto al tomado como referencia.

Se procede a una ejecución de los programas escritos en MATLAB para cada uno de los métodos y para matrices  $H$  de tamaños  $n \times (n - 1)$  de rango máximo por columnas, cuyos elementos se han elegido aleatoriamente, con valores en el intervalo  $\left[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}\right]$ , tomando  $M = 50$  y  $n$  variando de 100 a 3000, con un paso de 100. El vector  $s$  que se proyecta toma valores aleatorios con el mismo criterio.

En la Figura 4 se muestra el tiempo en segundos de *cpu* calculado para los nueve métodos analizados. Se observa el buen comportamiento de los métodos: 1°, 8°, 6° y 9°, con un comportamiento intermedio de los métodos 2°, 5° y 7° y peor comportamiento de los métodos 3° y 4°, todo ello referido al tiempo de *cpu* en función del tamaño del problema, notándose especialmente a partir de  $n = 2500$ .

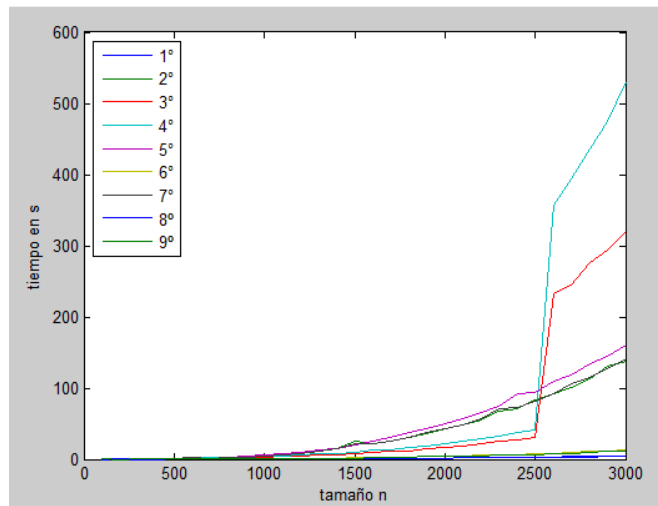


Figura 4.- Tiempos versus tamaño

La Figura 5 hace referencia a los errores relativos en la norma euclídea de las soluciones obtenidas, tomando como solución, si fuera la solución exacta, la alcanzada por el método 5°. Se deduce el muy buen comportamiento de los métodos 1°, 2°, 4°, 6° y 7° (órdenes de magnitud  $10^{-13}$ ), un comportamiento menos bueno en los métodos 3° y 9° (órdenes de magnitud  $10^{-11}$ ), con el método 8° (el de las inversiones) en último lugar (en color azul a raya discontinua). Aquí el comportamiento hace referencia al error relativo en la solución, en el rango de valores tomados para el tamaño  $n$  del problema. Aparentemente hay una gran discrepancia visual con el método octavo, pero los órdenes de magnitud son del orden de  $10^{-9}$ .

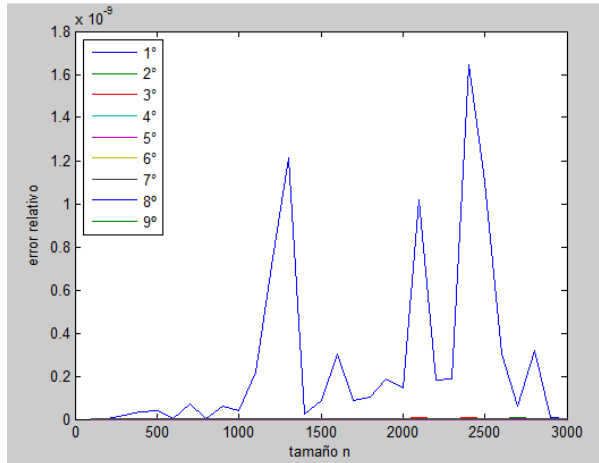
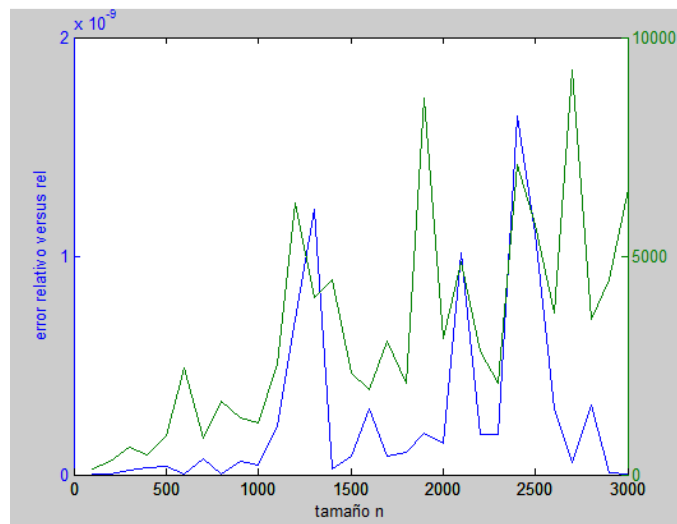


Figura 5.- Errores relativos versus tamaño

Se observa una cierta correlación entre el cociente  $\sigma_1/\sigma_{n-1}$  de los valores singulares mayor y menor de  $H$  (en color verde suave) en algunos picos de la gráfica de errores correspondiente al método de las inversiones (en color azul) (Ver Figura 6), para aquellas matrices que corresponden a un problema peor condicionado. De todos modos la dispersión relativa en los resultados, en función del tamaño, es pequeña (recordemos que son del orden de  $10^{-9}$ ).

Un problema se dice que está mal condicionado cuando una pequeña perturbación en los datos conduce a una gran perturbación en el resultado, y bien condicionado cuando a pequeñas perturbaciones en los datos se obtienen pequeñas perturbaciones en los resultados. Normalmente en el cálculo matricial se trabaja con perturbaciones relativas más que con perturbaciones absolutas.

Figura 6.- Errores relativos y  $\sigma_1/\sigma_{n-1}$ 

**13. Un ejemplo de aplicación.-** Se sabe que los diagrama de Voronoi permiten teselar el espacio euclídeo  $n$ -dimensional de puntos, fijados  $N$  puntos del espacio (puntos de Voronoi), en regiones convexas (regiones de Voronoi), las cuales están formadas por los puntos más cercanos a los puntos dados.

Un problema dual es el de la triangularización de Delaunay que permite obtener pirámides  $n$ -dimensionales partiendo de los puntos de Voronoi, las cuales teselan una determinada región del espacio, de modo que los centros de las hiperesferas circunscritas a las citadas pirámides son los vértices de las regiones de Voronoi.

Las caras de las citadas pirámides están en hiperplanos definidos cada uno de ellos por  $n - 1$  vértices.

La triangularización de Delaunay se usa, entre otras aplicaciones prácticas, en el modelado de sólidos en Gráficos por Computador.

En ocasiones puede interesar la obtención de las proyecciones ortogonales de un punto interior de una de tales pirámides a sus caras, con lo que obtendríamos inmediatamente lo que dista el citado punto de las mismas.

Un ejemplo numérico concreto en dos dimensiones:

Partiendo de los 5 puntos de Voronoi (puntos en azul de la Figura 7), cuyas coordenadas  $x$ ,  $y$  en el plano de puntos son las columnas de la matriz

$$XY = \begin{matrix} 0.4115 & 0.1006 \\ 0.6770 & 0.8261 \\ 0.8577 & 0.5362 \\ -0.6912 & 0.8979 \\ 0.4494 & -0.1319 \end{matrix}$$

se obtiene la triangularización de Delaunay (cuatro triángulos en color azul de la Figura 7) cuya conectividad (referida a la numeración de los puntos de Voronoi) está dada por la matriz

$$tri = \begin{matrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

Cada fila representa un triángulo. De otra parte, las regiones de Voronoi están delimitadas por los segmentos de color rojo en la misma Figura 7. Los vértices de las regiones de Voronoi son los circuncentros de los triángulos de Delaunay.

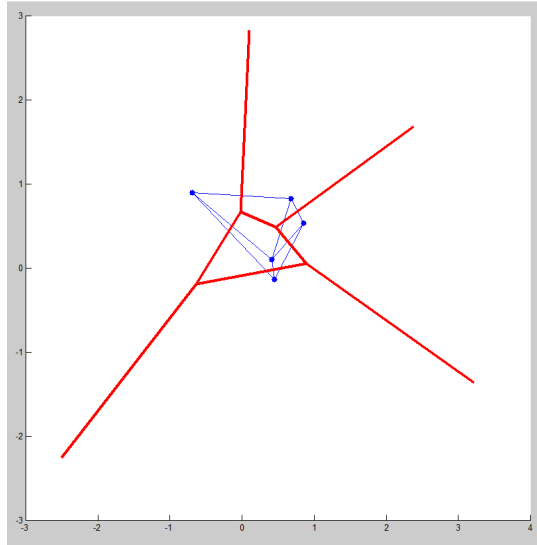


Figura 7.- Ejemplo de Voronoi en 2D

Nos podrían interesar por ejemplo las distancias de los vértices de Voronoi (interiores al triángulo de Delaunay mayor) a los lados del citado triángulo.

**14. Un ejemplo de proyección ortogonal.-** Se considera en el espacio  $n$ -dimensional de puntos el hiperplano  $h$  que pasa por los  $n$  puntos de coordenadas, en un sistema de referencia euclídeo,

$$q_1 = (1,0, \dots, 0), q_2 = (0,2, \dots, 0), \dots, q_n = (0,0, \dots, n)$$

La proyección ortogonal del origen  $O$  sobre  $h$  evidentemente es el punto de coordenadas

$$q = \frac{1}{\text{suma}} \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

siendo

$$\text{suma} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Haciendo una traslación del sistema de referencia tomando  $q_n$ , por ejemplo, como nuevo origen, las coordenadas de los  $n$  puntos iniciales pasan a ser

$$(1,0, \dots, 0, -n), (0,2, \dots, 0, -n), \dots, (0,0, \dots, n-1, -n), (0,0, \dots, 0, 0)$$

y las coordenadas del antiguo origen a proyectar

$$(0,0, \dots, 0, -n)$$

Los  $n-1$  vectores base del espacio de traslaciones de  $h$  son en este caso

$$u_1 = (1,0, \dots, 0, -n), u_2 = (0,2, \dots, 0, -n), \dots, u_{n-1} = (0,0, \dots, n-1, -n)$$

los cuales definen la matriz de tamaño  $n \times (n - 1)$  y rango máximo por columnas siguiente

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n - 1 \\ -n & -n & \dots & -n \end{bmatrix}$$

(Recuérdese el apartado 2. Planteamiento del problema). Esta matriz constituye el punto de partida numérico de los diferentes métodos.

Al ejecutar los nueve métodos, con  $n=1000$ , se obtienen los siguientes resultados, para cada método:

	Tiempos en s.	Errores absolutos
1.	0.1872	$0.0006 \times 10^{-10}$
2.	5.0388	$0.1144 \times 10^{-10}$
3.	7.4568	$0.4085 \times 10^{-10}$
4.	11.8405	$0.6235 \times 10^{-10}$
5.	5.4600	$0.1690 \times 10^{-10}$
6.	0.6240	$0.0189 \times 10^{-10}$
7.	4.5084	$0.0010 \times 10^{-10}$
8.	0.1716	$0.0006 \times 10^{-10}$
9.	0.4524	$0.4033 \times 10^{-10}$

En estos resultados destacan los dos métodos 1º y 8º, siendo

$$rel = \sigma_1 / \sigma_{n-1} = 2.2097 \times 10^4$$

La distancia euclídea del origen O al hiperplano h es en este caso

$$d = 0.779933790187288\dots$$

con unidades las del sistema de referencia. Nota: Se ha tomado como norma la euclídea.

**15. Conclusiones.-** El objetivo del presente del artículo ha sido presentar, en el contexto del uso de MATLAB, una colección no exhaustiva de métodos que se pueden emplear para la resolución del problema de proyección ortogonal sobre un hiperplano definido por un conjunto mínimo de puntos.

Se ha estudiado con detalle el algoritmo octavo, que utiliza las inversiones, y se ha comprobado su buen comportamiento en tiempos de *cpu*, aunque adolece de una peor precisión en los resultados debido a las operaciones de inversión. Sin embargo se ha comprobado válido en el ejemplo concreto seleccionado del que se conoce de antemano la solución.

Se han ejecutado ejemplos aleatorios de tamaño creciente con el fin de clasificar los métodos en base al costo computacional y su dispersión en la solución respecto a un método (método 5º) que se ha tomado de referencia. Se ha seguido una vía experimental.

Se añaden Anexos teóricos relativos al método octavo.

Como se ha indicado en la introducción, se ha tratado de comparar los métodos entre sí a nivel experimental. Los resultados numéricos son susceptibles de mejora, ya sea utilizando un ordenador de mayores prestaciones, ampliando la gama de casos analizados o bien optimizando al máximo el código empleado.

## 16. Anexo de demostraciones

**Teorema 1:** “La inversa de un hiperplano  $h$ , que no pasa por el centro de inversión, es una hiperesfera  $S$  que pasa por él”

*Demostración:* Sin pérdida de generalidad se puede suponer que el centro de inversión es el origen  $O$  del sistema de referencia, por lo que la transformación de inversión vendría dada por la función  $y = f(x) = \frac{1}{\|x\|^2}x$  con  $x \neq 0$ , siendo  $x$  un punto distinto del origen.

(Recuérdese la identificación que se hizo al principio de puntos y vectores).

Nota se supone que el radio de inversión es la unidad. El hiperplano  $h$  puede venir dado por la ecuación  $a^T x = d$ , con  $a$  un vector de tamaño  $n \times 1$  no nulo y  $d$  un número distinto de cero. Se tiene que  $x = \|x\|^2 x'$  y también  $\|x\| = \frac{1}{\|x'\|}$ , luego la ecuación del hiperplano  $h$  se transforma en  $a^T \|x\|^2 x' = d$ , esto es,

$$a^T x' = d \|x'\|^2.$$

Definitivamente,

$$d \|x'\|^2 - a^T x' = 0,$$

que representa una hiperesfera  $S$  que pasa por el origen.

**Teorema 2:** “La inversa de una hiperesfera  $S$ , que pasa por el centro de inversión, es un hiperplano que no pasa por él”

*Demostración:* Igual que en el teorema anterior, sin pérdida de generalidad se puede suponer que el centro de inversión es el origen  $O$  del sistema de referencia. Partimos de la hiperesfera dada por la ecuación  $d(x^T x) + a^T x = 0$ , con  $d$  un número distinto de cero y  $a$  una columna de tamaño  $n \times 1$  también no nula. Se tiene  $d \|x\|^2 + a^T x = 0$ ; efectuando la inversión  $x' = f(x)$  la ecuación se transforma en  $d \|x\|^2 + a^T \|x\|^2 x' = 0$ , esto es,

$$a^T x' - d = 0$$

la cual representa un hiperplano  $h$  que no pasa por el origen.

**Teorema 3:** “La lista de los  $n$  vectores  $a_j = q_j - s$ , con  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , es linealmente independiente. Como consecuencia la matriz  $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n]$  es una matriz regular y de ahí que también sea regular la matriz transpuesta

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \dots \\ a_n^T \end{bmatrix}.”.$$

*Demostración:* La lista de vectores  $q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_{n-1}$  es linealmente independiente. Como el punto  $s$  no pertenece a  $h$  el vector  $-s$  no es combinación lineal de la citada lista, de donde la lista

ampliada  $q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_{n-1}, -s$  sigue siendo linealmente independiente. Las operaciones de sumar el último vector  $-s$  a los anteriores son operaciones elementales que no alteran el carácter lineal de la lista, luego la nueva lista

$$q_1 - s, q_2 - s, \dots, q_j - s, \dots, q_{n-1} - s, q_n - s$$

sigue siendo linealmente independiente (recordemos que  $q_n = 0$ ).

En definitiva, la lista  $a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n$ , con  $a_j = q_j - s$ , es linealmente independiente. La consecuencia del teorema es inmediata:

**Teorema 4:** “El sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \dots \\ a_n^T \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} a_1^T p_1 \\ a_2^T p_2 \\ \dots \\ a_n^T p_n \end{bmatrix}$$

tiene solución única”

*Demostración:* En el teorema anterior se ha probado que la matriz del sistema es regular, luego la solución existe y es única. Esa solución la hemos denominado  $p$  y es el punto de intersección de los hiperplanos  $h_1, h_2, \dots, h_j, \dots, h_n$ .

**Teorema 5:** “Los puntos  $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_n$  pertenecen a la hiperesfera  $S$  que tiene como puntos diametralmente opuestos  $s$  y  $p$ ”.

*Demostración:* Vamos a denotar con  $c$  el punto medio de  $s$  y  $p$ , esto es, el centro de la hiperesfera  $S$

$$c = (p + s)/2$$

y con  $r$  el radio de la citada hiperesfera

$$r = \frac{1}{2} \|p - s\|.$$

Se tiene que la ecuación de la hiperesfera  $S$  es

$$(x - c)^T (x - c) = r^2$$

con

$$r^2 = \frac{1}{4} (p - s)^T (p - s).$$

Vamos a denotar con  $b_j$  el vector normalizado que orienta  $h_j$  de modo que  $b_j = \frac{a_j}{\|a_j\|}$ .

El punto  $p_j$  es la intersección de la recta  $r_j \equiv x = s + \lambda b_j$  con el hiperplano

$$h_j \equiv b_j^T x = b_j^T p,$$

teniendo en cuenta que  $b_j^T b_j = 1$  se deduce  $\lambda = b_j^T (p - s)$  y de ahí que

$$p_j = b_j b_j^T (p - s)$$

El punto  $p_j$  pertenece a la hiperesfera ya que cumple su ecuación. Veamos:

$$\begin{aligned}
(p_j - c)^T (p_j - c) &= \left(p_j - \frac{p+s}{2}\right)^T \left(p_j - \frac{p+s}{2}\right) = \frac{1}{4} (2p_j - p - s)^T (2p_j - p - s) \\
&= \frac{1}{4} (s - p + 2b_j b_j^T (p - s))^T (s - p + 2b_j b_j^T (p - s)) \\
&= \frac{1}{4} \left((2b_j b_j^T - I)(p - s)\right)^T \left((2b_j b_j^T - I)(p - s)\right) \\
&= \frac{1}{4} \left((p - s)^T (2b_j b_j^T - I)\right)^T (2b_j b_j^T - I)(p - s) \\
&= \frac{1}{4} (p - s)^T (p - s) = r^2
\end{aligned}$$

En el último paso se ha tenido en cuenta que la matriz  $2b_j b_j^T - I$  es ortogonal.

**Teorema 6:** “La hiperesfera  $S$  del Teorema 5 es la figura inversa del hiperplano  $h$  del citado teorema, con centro de inversión  $s$ ”.

*Demostración:* Los puntos  $p_j$  son los inversos de los puntos  $q_j$  que definen  $h$ , los cuales definirán la figura inversa de  $h$ . Hemos visto que los puntos  $p_j$  están en la hiperesfera  $S$ . Se sabe además que el inverso de un hiperplano que no pasa por el centro de inversión es una hiperesfera que pasa por el centro de inversión, precisamente  $S$  (ver Teorema 1 del Anexo).

## 17. Referencias

- [1] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [2] J. A. Brandon and A. Cowley, “A weighted least squares method for circle fitting to frequency response data,” *J. Sound and Vibrations*, vol. 83, no. 3, pp. 419-424, 1983.
- [3] D. E. Blair, *Inversion theory and conformal mapping*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000.
- [4] G. H. Golub and C. Reinsch, “Singular value decomposition and least squares solutions,” in *Handbook for Automatic Computation*, vol. 2 (Linear Algebra). New York: Springer-Verlag, pp. 134–151, 1971.
- [5] J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.
- [6] F. P. Preparata and M. I. Shamos, *Computational geometry: an introduction*. New York: Springer-Verlag, 1985.