UIN IMAM BONJOL PADANG

MAp Journal
Mathematics & Applications

Web : ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/MAp
Email : map_journal@uinib.ac.id

KESTABILAN TITIK KESEIMBANGAN MODEL DUA PEMANGSA SATU MANGSA DENGAN KRITERIA ROUTH-HURWITZH

STABILITY OF THE EQUILIBRIUM POINT OF TWO PREDATORS ONE PREY MODEL WITH ROUTH-HURWITZH CRITERIA

Andi Susanto[1§], Budi Rudianto[2]

[1]Program Studi Matematika FST UIN Imam Bonjol Padang, Indonesia [andisusanto@uinib.ac.id]
[2]Program Studi Matematika FMIPA Universitas Andalas Padang, Indonesia [budialbarqy@fmipa.unand.ac.id]

Received Mei 2020; Accepted Juni 2020; Published Juni 2020;

Abstrak

Tulisan ini membahas kestabilan titik equilibrium model dua pemangsa satu mangsa dengan mengunakan kriteria kestabilan Routh-Hurtwizt. Simbiosis komensalisme diasumsikan berlaku di antara dua pemangsa. Studi kepustakaan adalah metode yang digunakan dalam menghasilkan tulisan ini. Model dua pemangsa satu mangsa mempunyai dua titik equilibrium yaitu $Eq_1:\left(\frac{x}{\theta\beta(\alpha-1)},\frac{u}{\beta(\alpha-1)},0\right)$ tidak stabil dan $Eq_2:\left(\frac{y}{\rho w},\left[\frac{x}{u\theta R^*}-\frac{w}{u\gamma}\ln\left(\alpha-\frac{x}{\beta\theta R^*}\right)\right]^{-1},\frac{1}{w}\left[u-\left(\frac{x\rho w}{\theta y}\right)C^*\right]\right)$ yang stabil lokal.

Kata Kunci : Kriteria Routh-Hurwizth, Titik Equilibrium, Kestabilan

Abstract

This paper discusses the stability of the equilibrium point of two predator one prey model using the Routh-Hurtwizt criteria. Commensalism symbiosis is assumed to apply to predators. The findings in this study resulted from a literature review.This model is known to have two equilibrium points, namely unstable $Eq_1:\left(\frac{x}{\theta\beta(\alpha-1)},\frac{u}{\beta(\alpha-1)},0\right)$ *and local stable* $Eq_2:\left(\frac{y}{\rho w},\left[\frac{x}{u\theta R^*}-\frac{w}{u\gamma}\ln\left(\alpha-\frac{x}{\beta\theta R^*}\right)\right]^{-1},\frac{1}{w}\left[u-\left(\frac{x\rho w}{\theta y}\right)C^*\right]\right)$.

Keywords : *Routh- Hurwizth Criteria, Equilibrium Point, Stability*

1. Pendahuluan

Pemodelan matematika merupakan suatu alat yang digunakan oleh matematikawan dalam memahami perilaku atau fenomena alam dengan bahasa simbol dalam rangka melaksanakan tugasnya sebagai khalifah dimuka bumi. Salah satu fenomena alam yang banyak di aplikasikan dalam kehidupan manusia adalah hubungan (simbiosis) perilaku seperti rantai makanan antara dua populasi yaitu pemangsa dan mangsa [3,4,11].

Model pemangsa-mangsa merupakan contoh bagaimana matematikawan memahami fenomena alam dengan memperhatikan hubungan perilaku antara pemangsa dan mangsa, secara biologi hubungan ini harus tetap terjaga dengan seimbang sehingga kelangsungan hidup suatu species tertentu dapat bertahan atau *survive*.

Hubungan paling sederhana antara pemangsa dan mangsa di ajukan oleh Lotka dan Volterra pada tahun tahun 1920 secara terpisah [3,4,7,11]. Model ini berasumsi mangsa memiliki cadangan makanan berlebih dan pemangsa diberi makan oleh mangsa. Dalam suatu ekosistem yang komplek khususnya dalam rantai makanan, tentu yang terlibat bukan hanya satu mangsa dan satu pemangsa, bisa saja pemangsa memakan lebih dari satu mangsa atau ada beberapa pemangsa yang memangsa satu mangsa tertentu. Disisi lain hubungan sesama pemangsa atau simbiosis perlu juga diperhatikan, bisa saja hubungan antar pemangsa yang terjadi adalah mutualisme, komensalisme atau parasitisme.

Model pemangsa mangsa yang mempertimbangkan hubungan sesama pemangsa atau simbiosis ini diajukan oleh A.J.Mullen tahun 1984 dalam jurnal Mathematical Biosciences[9]. Mullen mengemukakan simbiosis yang terjadi antar pemangsa berpengaruh pada pemangsaan mangsa, dalam tulisannya Mullen menyatakan simbiosis yang terjadi adalah komensalisme, yaitu hubungan satu pemangsa diuntungkan dan pemangsa yang lain tidak dirugikan.

Model pemangsa mangsa disajikan dalam bentuk sistem persamaan differensial nonlinear, sering disebut sistem nonlinear. Dalam Boyce, 1992 [2], menyatakan bahwa tidak semua sistem nonlinear dapat diselesaikan seperti sistem linear, padahal dalam banyak terapan pemodelan matematika justru ditemukan dalam bentuk sistem nonlinear. Dalam membahas sistem terapan matematikawan justru tertarik pada solusi kualitatif dibanding solusi kuantitatif seperti solusinya ada untuk t menuju takhingga, stabilitas sistem, solusinya terbatas atau tidak, perioditas sistem dan sebagainya [1,5,6,7,10].

Salah satu cara mempelajari sistem nonlinear adalah dengan melakukan pelinearan di titik-titik tertentu solusinya. Menurut Finizio dan Ladas yang diterjemahkan oleh Widiarti Santoso [7], pelinearan adalah menghampiri sistem persamaan differensial nonlinear dengan suatu sistem persamaan differensial linear. Pelinearan ini dilakukan di sekitar titik-titik solusinya yaitu titik equilibrium. Sistem baru yang terbentuk disebut sistem hampir linear [1,5,6,7,10].

Salah satu kajian dalam sistem hampri linear yang banyak dibahas adalah kestabilan sistem, Kestabilan dalam bahasa sederhana diartikan sebagai suatu keadaan respon dari sistem dimana setiap gangguan yang diberikan pada sistem akan cepat hilang atau menuju nol. Salah satu teori kestabilan yang terkenal adalah yang dikemukakan oleh E.J Routh dan A. Hurwitzh [9,10,11,12,13,14]. Teori ini memanfaatkan koefisien persamaan karakteristik, untuk menyatakan bahwa akar-akar karakteristik bernilai negatif, yang menjadi kriteria stabilitas suatu sistem.

Tujuan dari tulisan ini adalah menyajikan perluasan model Lotka – Volterra yang diasumsikan hubungan dua pemangsa adalah komensalisme, menyajikan sistem hampir linearnya, menemukan titik keseimbangannya (titik equilibrium) dan menyajikan stabilitas titik equilibrium tersebut.

2. LandasanTeori

Pemodelan matematika dengan menggunakan sistem persamaan differensial nonlinear hampir tak dapat dihindarkan, terutama untuk mengambarkan laju perubahan yang dipengaruhi waktu.

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

dengan $x \in E \subset R^n$ dan $f : E \subset R^n \to R^n$ fungsi kontinu pada E. Sistem (1) disebut juga sistem mandiri karena secara eksplisit tidak bergantung waktu. Berikut diberikan definisi tentang penyelesaian sistem (1) dan ketunggalan penyelesaiannya.

Definisi 2.1. [5] *Diberikan* $E \subseteq R^n$, *dengan* E *himpunan terbuka dan* $f \in C^1(E)$, $i = 1,2,...,n$. *Dengan* $C^1(E)$ *merupakan himpunan semua fungsi diferensiabel kontinu pada E. Vektor* $x(t)$ *disebut penyelesaian Sistem (1) pada interval terbuka I jika* $x(t)$ *diferensiabel pada* I *dan* $\dot{x} = f(x(t))$ *untuk setiap* $t \in I$, $x(t) \in E$.

Teorema 2.1. [5] *Diberikan* $E \subset R^n$, E *himpunan terbuka. Jika* $f \in C^1(E)$, $i = 1,2,...,n$ *dan* $x_0 \in E$, *maka terdapat* $a > 0$ *sehingga masalah nilai awal* $\dot{x} = f(x(t))$ *dengan* $x(0) = x_0$ *mempunyai penyelesaian tunggal* $x(t)$ *pada interval* $[-a, a]$.

Perilaku penyelesaian dapat di pelajari di titik equilibrium dengan *Linearisasi*. Linearisasi adalah menghampiri persamaan differensial nonlinear dengan persamaan differensial linear.

Definisi 2.2. [5] *Titik* $x^* \in R^n$ *disebut titik equilibrium Sistem (1) jika* $f(x^*) = 0$.

Definisi 2.3. [5] *Diberikan fungsi* $f = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$ *pada Sistem (1) dengan* $f_i \in C^1(E)$, $i = 1,2,...,n$. *Matriks*

$$J(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2}$$

dinamakan matriks Jacobian dari f *di titik* x.

Definisi 2.3. [1,5,6,7,10] *Diberikan matriks Jacobian* $J(f(x))$ *pada Persamaan (2). Sistem persamaan diferensial linear*

$$\dot{x} = J(f(x^*))x \tag{3}$$

disebut linearisasi Sistem (1) di sekitar titik equilibrium x^*.

Sistem (3) dapat digunakan mempelajari kestabilan sistem (1) jika titik equilibrium hiperbolik. Berikut diberikan definisi titik equilibrium hiperbolik.

Definisi 2.4. [1,5,6,7,10] *Titik ekuilibrium* x^* *disebut titik equilibrium hiperbolik dari Sistem (3) jika tidak ada nilai eigen dari* $J(f(x^*))$ *yang mempunyai bagian real nol.*

Salah satu perilaku penyelesaian sistem (3) yang menarik dipelajari adalah perilaku kestabilan di titik equilibrium berikut diberikan teorema kestabilan titik equilibrium.

Teorema 2.2. [9,10,11,12,13,14] *Diberikan matriks Jacobian* $J(f(x^*))$ *dari Sistem (3) dengan nilai eigen* λ.

a. *Jika semua bagian real nilai eigen matriks* $J(f(x^*))$ *berharga negatif, maka titik equilibrium* x^* *dari Sistem (3) stabil asimtotik lokal.*

b. *Jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks* $J(f(x^*))$ *yang bagian realnya positif, maka titik ekuilibrium* x^* *dari Sistem (3) tidak stabil.*

Sifat kestabilan sistem (3) hampir sepenuhnya bergantung dari nilai eigen, berikut diberikan cara menentukan tanda nilai eigen dengan memanfaatkan koefisien persamaan karakteristiknya.

Definisi 2.5. [9,10,11,12,13,14]

Diberikan

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix},$$

adalah matriks Hurwitz dari polinomial $a_0 \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0$.

Definisi 2.6. [9,10,11,12,13,14]

Determinan matriks Hurwitz tingkat ke-k adalah

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$,\ldots,\Delta_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix},$$

$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$.

Teorema 2.3. [9,10,11,12,13,14]

Pembuat nol dari polinomial

$$a_0 \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika semua determinan tingkat ke-k dari matriks H bernilai positif.

Sehingga menurut kriteria Routh-Hurwitzh dalam teorema 3, untuk suatu k disebutkan bahwa titik keseimbangan (x^*, y^*, z^*) stabil jika dan hanya jika (untuk $k = 2, 3, 4$),

$k = 2 \quad b_1 > 0,\ b_2 > 0$

$k = 3 \quad b_1 > 0,\ b_3 > 0,\ b_1 b_2 > b_3$

$k = 4 \quad b_1 > 0,\ b_3 > 0,\ b_4 > 0,$

$\qquad b_1\, b_2\, b_3 > b_3^2 + b_1^2\, b_4$

Untuk persamaan

$$a_0 \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

kriteria Routh-Hurwitzh disajikan dalam teorema berikut :

Teorema 2.4. [9,10,11,12,13,14].

Misalkan A, B, C bilangan real, bagian real dari setiap akar-akar karakteristik persamaan karakteristik,

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

adalah negatif jika dan hanya jika A, B, C positif dan AB > C.

Bukti.

Misalkan :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C$$
$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3),$$

maka berdasarkan hubungan antara akar-akar dan koefisien dari suku banyak diperoleh :

$A = -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$

$B = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3$

$C = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

Perhatikan dua kasus berikut :

Kasus 1 : Akar karakteristik λ_1 real, λ_2 dan λ_3 kompleks.

Misalkan : $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b + ci$, $\lambda_3 = b - ci$

dengan a, b, c semuanya bilangan real, maka :

$$A = - a - 2b$$
$$B = 2ab + b^2 + c^2$$
$$C = - a (b^2 + c^2)$$

($\Rightarrow$) Misalkan a dan b negatif, akan dibuktikan bahwa A, B, C positif dan $AB > C$

Karena a dan b negatif, maka nilai A, B, C adalah positif. Selanjutnya, perhatikan bahwa :

$$C - AB = - a (b^2 + c^2) - (- a - 2b)$$
$$(2ab + b^2 + c^2)$$
$$= 2b (a^2 + 2 ab + b^2 + c^2)$$

Karena a dan b negatif, maka $C - AB < 0$ sehingga $AB > C$.

($\Leftarrow$) Misalkan A, B, C positif dan $AB > C$, akan dibuktikan bahwa a dan b negatif.

Dan diketahui bahwa $C = - a (b^2 + c^2) > 0$, maka haruslah $a < 0$. Kemudian dari bentuk :

$$AB - C > 0$$
$$-2b (a^2 + 2 ab + b^2 + c^2) > 0$$
$$-2b ((a + b)^2 + c^2) > 0$$

maka haruslah $b < 0$.

Kasus 2 : Semua akar karakteristiknya bilangan real.

Misalkan $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b$, $\lambda_3 = c$, dengan a, b, c $\varepsilon\ \Re$, maka diperoleh :

$$A = - a - b - c$$
$$B = ab + ac + bc$$
$$C = - abc$$

($\Rightarrow$) Misalkan a,b,c negatif akan dibuktikan bahwa A,B,C positif dan $AB > C$. Dengan a, b, c negatif maka A, B, C akan positif. Selanjutnya, untuk

$$AB - C = (-a-b-c) (ab + ac + bc) - (-abc)$$
$$= -b (a^2 + c^2) - a (b^2 + c^2) - 2abc.$$

Karena a, b, c negatif maka $AB - C > 0$ sehingga $AB > C$.

($\Leftarrow$) Misalkan A B C positif dan $AB > C$, akan dibuktikan, bahwa a,b,c negatif.

Karena $C = - abc > 0$, maka terdapat dua kemungkinan yaitu :

1. a, b, c semuanya negatif.
2. Salah satunya bernilai negatif dan yang lainnya positif.

Pada kemungkinan kedua, misalkan $a < 0$ dan $b,c > 0$. Dan diketahui bahwa $-a = A + b + c$, maka, diperoleh,

$$B = a (b+c) + bc$$
$$= - (A + b + c) (b+ c) + bc$$
$$= -A (b+ c) - b^2 - c^2 -bc < 0$$

Ini kontradiksi dengan premis bahwa B harus positif. Ini berarti kemungkinan kedua tidak berlaku, sehingga kemungkinan pertama yang harus berlaku. Jadi terbukti bahwa a, b, c semuanya harus negatif. Dari kedua kasus di atas, lengkaplah bukti teorema ini.

3. Hasil Dan Pembahasan

Perhatikan dua spesies, dan misalkan salah satu spesies dari spesies itu, disebut ***mangsa***, mempunyai persediaan makanan berlebih sedangkan spesies lainnya disebut ***pemangsa***, diberi makan oleh spesies yang pertama. Kajian matematika mengenai ekosistem semacam ini diperkenalkan oleh ***Lotka dan Volterra*** dalam pertengahan tahun 1920 secara terpisah [7]. Misalkan P(t) dan Q(t) masing-masing menyatakan banyaknya spesies mangsa dan pemangsa pada saat *t*.

Jika spesies terpisah satu sama lain, mereka akan berubah dengan laju berbanding lurus dengan jumlah yang ada, yaitu :

$$\frac{dp}{dt} = ap \tag{4}$$

$$\frac{dq}{dt} = -cq \tag{5}$$

Dalam persamaan (4) di atas, $a > 0$ karena populasi mangsa mempunyai persediaan makanan berlebihan dan karena itu bertambah banyak, sedangkan pada persamaan (5) $-c<0$ karena, populasi pemangsa tidak mempunyai makanan jadi berkurang jumlahnya.

Tetapi telah dimisalkan bahwa kedua populasi berinteraksi sedemikian sehingga, populasi pemangsa memangsa populasi mangsa. Sehingga dapat diasumsikan bahwa, jumlah yang memangsa besarnya tiap satuan waktu berbanding lurus dengan p dan q, yaitu pq. Jadi populasi mangsa akan berkurang jumlahnya sedangkan pemangsa akan bertambah jumlahnya, pada laju yang berbanding lurus dengan pq. Sehingga kedua populasi yang berinteraksi memenuhi sistem persamaan diferensial taklinear :

$$\frac{dp}{dt} = ap - bpq \tag{6}$$

$$\frac{dq}{dt} = -cq + dpq \tag{7}$$

Pada persamaan (6) b adalah konstanta positif, yang didefinisikan sebagai efisiensi pemangsaan pemangsa. Dan pada persamaan (7) d adalah suatu konstanta positif yang didefinisikan sebagai efisiensi interaksi mangsa sebagai makanan oleh mangsa.

Untuk perluasan model, ini misalkan ada satu spesies pemangsa lagi yang juga memangsa p, misalkan z, maka seperti dengan pemangsa q maka pemangsa z akan berubah memenuhi persamaan diferensial taklinear berikut:

$$\frac{dz}{dt} = -ez + fpz \tag{8}$$

karena pemangsa z juga memangsa p maka, laju perubahan p akan berubah dengan pemangsaan z memenuhi persamaan diferensial taklinear berikut:

$$\frac{dp}{dt} = ap - bpq - fpz \tag{9}$$

sehingga bila persamaan (7), (8), (9) digabungkan diperoleh suatu sistem persamaan diferensial taklinear berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= p(a - bq - fz) \\ \frac{dq}{dt} &= q(-c + dp) \\ \frac{dz}{dt} &= z(-e + fp) \end{aligned} \tag{10}$$

dengan penulisan ulang, model interaksi dua pemangsa-satu mangsa sistem (10) dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= R(u - vC - wH) \\ \frac{dC}{dt} &= C(\theta vR - x) \\ \frac{dH}{dt} &= H(\rho wR - y) \end{aligned} \tag{11}$$

dengan,

R = banyaknya mangsa

H = banyaknya pemangsa inang

C = banyaknya pemangsa yang komensalis terhadap H (diasumsikan)

u = tingkat pertumbuhan mangsa R

v = tingkat pemangsaan pemangsa C

w = tingkat pemangsaan pemangsa H

θ = efisiensi konversi C

ρ = efisiensi konversi H

x = tingkat kematian pemangsa C

y = tingkat kematian pemangsa H

$R, C, H \geq 0$ dan $u, v, w, \theta, \rho, x, y > 0$

Interaksi antar pemangsa C dan H dalam model ini adalah komensalisme. Dalam hal ini C bersifat komensalis terhadap H, artinya dengan interaksi ini, C memperoleh keuntungan dan H sebagai inang tidak dirugikan atau diuntungkan. Sedangkan C dipengaruhi oleh H dengan tingkat pemangsaan pemangsa C yang didefinisikan sebagai :

$$v = \beta\left(\alpha - e^{-\gamma\frac{H}{C}}\right).$$

Dengan konstanta $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Efisiensi konversi C yaitu θ, adalah besarnya perkembangbiakan pemangsa komensalisme dengan memangsa satu mangsa. Sedangkan efisiensi konversi H yaitu ρ, adalah besarnya perkembangbiakan pemangsa inang dengan memangsa satu mangsa. Kemudian x adalah tingkat kematian C, artinya jika banyaknya pemangsa komensalisme sebesar C maka pertumbuhannya akan berkurang sebesar xC. Sedangkan y adalah tingkat kematian H artinya, jika banyaknya pemangsa inang sebesar H maka pertumbuhannya akan berkurang sebesar yH [9].

Selanjutnya akan diberikan titik keseimbangan dari persamaan (11), titik keseimbangan (R^*, C^*, H^*) didapatkan dengan membuat :

$$\frac{dR}{dt} = 0, \frac{dC}{dt} = 0, \frac{dH}{dt} = 0$$

Sehingga diperoleh :

$$R^*(u - vC^* - wH^*) = 0 \qquad (12)$$

$$C^*(\theta vR^* - x) = 0 \qquad (13)$$

$$H^*(\rho wR^* - y) = 0 \qquad (14)$$

diketahui bahwa :

$$v = \beta\left(\alpha - e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\right)$$

dan $C^* \neq 0$, sehingga pada persamaan (13) diperoleh :

$$\theta vR^* - x = 0$$

Selanjutnya andaikan $R^* = 0$, maka menurut persamaan di atas diperoleh $x = 0$, ini kontradiksi dengan asumsi bahwa $x > 0$. Sehingga haruslah $R^* \neq 0$. Berdasarkan uraian di atas, maka terdapat dua kasus :

Kasus 1 : $(u - vC^* - wH^*) = 0$, $(\theta vR^* - x) = 0$ *dan* $H^* = 0$

Kasus 2 : $(u - vC^* - wH^*) = 0$, $(\theta vR^* - x) = 0$ *dan* $(\rho wR^* - y) = 0$

Berdasarkan dua kasus di atas diperoleh hasil yang disajikan dalam teorema berikut;

Teorema 3.1. *Sistem persamaan diferensial nonlinear (11) mempunyai dua titik keseimbangan yaitu :*

1. $Eq_1 : \left(\frac{x}{\theta\beta(\alpha-1)}, \frac{u}{\beta(\alpha-1)}, 0\right)$

2. $Eq_2 : \left(\frac{y}{\rho w}, \left[\frac{x}{u\theta R^*} - \frac{w}{u\gamma}\ln\left(\alpha - \frac{x}{\beta\theta R^*}\right)\right]^{-1}, \frac{1}{w}\left[u - \left(\frac{x\rho w}{\theta y}\right)C^*\right]\right)$

Selanjutnya akan disajikan sistem hampir linear dari persamaan(11) yaitu persamaan :

$$f(R,C,H) = R(u - vC - wH)$$

$$g(R,C,H) = C(\theta vR - x)$$

$$j(R,C,H) = H(\rho wR - y)$$

Bentuk persamaan diferensial yang dilinearkan dengan membentuk matriks Jacobi berikut :

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial f(R,C,H)}{\partial R} & \frac{\partial f(R,C,H)}{\partial C} & \frac{\partial f(R,C,H)}{\partial H} \\ \frac{\partial g(R,C,H)}{\partial R} & \frac{\partial g(R,C,H)}{\partial C} & \frac{\partial g(R,C,H)}{\partial H} \\ \frac{\partial j(R,C,H)}{\partial R} & \frac{\partial j(R,C,H)}{\partial C} & \frac{\partial j(R,C,H)}{\partial H} \end{pmatrix}$$

dengan,

$$\begin{aligned} f(R,C,H) &= R(u-vC-wH) \\ &= Ru - vRC - wRH \\ &= Ru - \beta(\alpha - e^{-\gamma\frac{H}{C}})RC - wRH \end{aligned}$$

Dengan menggunakan turunan parsial maka diperoleh :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial f(R,C,H)}{\partial R} \\ &= u-\beta\left(\alpha - e^{-\gamma\frac{H}{C}}\right)C - wH \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{\partial f(R,C,H)}{\partial C} \\ &= -R\beta\left(\alpha - \left(1+\gamma\frac{H}{C}\right)e^{-\gamma\frac{H}{C}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= \frac{\partial f(R,C,H)}{\partial H} \\ &= -R\left(\beta\gamma e^{-\gamma\frac{H}{C}} + w\right) \end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} g(R,C,H) &= C(\theta vR - x) \\ &= \theta vRC - Cx \\ &= \theta\beta(\alpha - e^{-\gamma\frac{H}{C}})RC - Cx \end{aligned}$$

Dengan menggunakan turunan parsial maka diperoleh :

$$\begin{aligned} a_{21} &= \frac{\partial g(R,C,H)}{\partial R} \\ &= C\theta\beta\left(\alpha - e^{-\gamma\frac{H}{C}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= \frac{\partial g(R,C,H)}{\partial C} \\ &= \theta\beta R\left(\alpha - \left(1+\gamma\frac{H}{C}\right)e^{-\gamma\frac{H}{C}}\right) - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{23} &= \frac{\partial g(R,C,H)}{\partial H} \\ &= \theta R\beta\gamma e^{-\gamma\frac{H}{C}} \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk,

$$\begin{aligned} j(R,C,H) &= H(\rho wR - y) \\ &= H\rho wR - Hy \end{aligned}$$

Dengan menggunakan turunan parsial diperoleh :

$$a_{31} = \frac{\partial j(R,C,H)}{\partial R} = H\rho w$$

$$a_{32} = \frac{\partial j(R,C,H)}{\partial C} = 0$$

$$a_{33} = \frac{\partial j(R,C,H)}{\partial H} = \rho wR - y$$

Maka matriks Jacobi yang diperoleh dari sistem persamaan (1), (2), (3) adalah :

$$J=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Dengan a_{11}, a_{12} , ..., a_{33} secara berturut-turut diberikan pada persamaan di atas. Matriks Jacobi ini disebut sistem hampir linear dari persamaan (11).

Berikutnya kestabilan persamaan (11) disekitar titik keseimbangannya di berikan dalam teorema berikut ;

Teorema 3.2. *Persamaan (11) Model dua pemangsa satu mangsa mempunyai satu titik equilibrium yang tidak stabil yaitu*

$$Eq_1 : \left(\frac{x}{\theta\beta(\alpha-1)}, \frac{u}{\beta(\alpha-1)}, 0\right)$$

Dan satu titik keseimbangan yang stabil lokal yaitu ;

$$Eq_2 : \left(\frac{y}{\rho w}, \left[\frac{x}{u\theta R^*} - \frac{w}{u\gamma}\ln\left(\alpha - \frac{x}{\beta\theta R^*}\right)\right]^{-1}, \frac{1}{w}\left[u - \left(\frac{x\rho w}{\theta y}\right)C^*\right]\right)$$

Bukti.

Perhatikan titik keseimbangan kasus 1 (Eq_1) : (R^*, C^*, H^*) dengan :

$$R^* = \frac{x}{\theta\beta(\alpha-1)}, C^* = \frac{u}{\beta(\alpha-1)}, H^* = 0$$

Pelinearan sistem persamaan diferensial pada titik keseimbangan Eq_1 menghasilkan matriks Jacobi :

$$J_{T_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{(R^*,C^*,H^*)}$$

Dengan a_{ij} seperti berikut ini :

$$a_{11} = u - \beta\left(\alpha - e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\right)C^* - wH^*$$

Dengan mensubstitusikan nilai R^*, C^*, H^* diperoleh :

$$a_{11} = u - \beta(\alpha-1)\frac{u}{\beta(\alpha-1)} = 0$$

$$a_{12} = -\beta R^*\left(\alpha - \left(1+\gamma\frac{H^*}{C^*}\right)e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\right)$$

Dengan mensubstitusikan nilai R^*, C^*, H^* maka diperoleh :

$$a_{12} = -\frac{x\beta}{\theta\beta(\alpha-1)}(\alpha-1) = -\frac{x}{\theta}$$

$$a_{13} = -R^*\left(\gamma\beta e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}} + w\right)$$

Dengan mensubstitusikan nilai R^*, C^*, H^* maka diperoleh :

$$a_{13} = -\frac{x}{\theta\beta(\alpha-1)}(\beta\gamma + w) = -\frac{x(\beta\gamma + w)}{\theta\beta(\alpha-1)}$$

$$a_{21} = C^*\theta\beta\left(\alpha - e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\right)$$

Dengan mensubstitusikan nilai C^*, H^* maka diperoleh :

$$a_{21} = \frac{u\theta\beta}{\beta(\alpha-1)}(\alpha-1) = u\theta$$

$$a_{22} = \theta\beta R^*\left(\alpha - \left(1+\gamma\frac{H^*}{C^*}\right)e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\right) - x$$

Dengan mensubstitusikan nilai R^*, C^*, H^* maka diperoleh :

$$a_{22} = \frac{x\theta\beta}{\theta\beta(\alpha-1)}(\alpha-1) - x = 0$$

$$a_{23} = \gamma\beta\theta R^* e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}$$

Dengan mensubstitusikan nilai R^*, C^*, H^* maka diperoleh :

$$a_{23} = \frac{x\theta\beta\gamma}{\theta\beta(\alpha-1)} = \frac{x\gamma}{\alpha-1}$$

$$a_{31} = H^*\rho w$$

Dengan mensubstitusikan nilai H^* maka diperoleh :

$$a_{31} = 0,\ a_{32} = 0,\ a_{33} = \rho w R^* - y$$

Dengan mensubstitusikan nilai R^* maka diperoleh :

$$a_{33} = \frac{\rho w x}{\theta\beta(\alpha-1)} - y$$

Dan persamaan karakteristik diperoleh dari persamaan :

$$\left|J_{T_1} - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -\lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$\lambda^3 - a_{33}\lambda^2 - a_{12}a_{21}\lambda + a_{12}a_{21}a_{33} = 0$$

Berdasarkan Kriteria kestabilan Routh-Hurwitzh, kestabilan akan terjadi jika syarat di bawah ini dipenuhi :

$-a_{33} > 0$

$a_{12}a_{21}a_{33} > 0$

$(-a_{33})(-a_{12}a_{21}) > a_{12}a_{21}a_{33}$

Akan tetapi ini tidak mungkin terpenuhi karena :

$a_{33}\, a_{12}a_{21} - a_{12}a_{21}a_{33} = 0$

Dengan demikian sistem persamaan (11) tidak stabil pada titik keseimbangan Eq_1.

Selanjutnya kestabilan di titik keseimbangan Eq_2 : (R^*, C^*, H^*) dengan :

$$R^* = \frac{y}{\rho w}$$

$$C^* = \left[\frac{x}{u\theta R^*} - \frac{w}{u\gamma}\ln\left(\alpha - \frac{x}{\beta\theta R^*}\right)\right]^{-1}$$

$$H^* = \frac{1}{w}\left(u - \left(\frac{x\rho w}{\theta y}\right)C^*\right)$$

Pelinearan sistem persamaan diferensial pada titik keseimbangan Eq_2 menghasilkan matriks Jacobi berikut :

$$J_{T_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{(R^*,C^*,H^*)}$$

dengan,

$$a_{11} = u - \beta\left(\alpha - e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\right)C^* - wH^*$$

Dengan mensubstitusikan nilai $e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}$ dan nilai H^* maka diperoleh :

$$a_{11} = 0.$$

Untuk a_{12} dan a_{13} karena nilai C^* terpaut pada nilai R^* dan H^* terpaut pada nilai C^* maka a_{12} dan a_{13} ditulis dalam bentuk :

$$a_{12} = -R^*\beta\left(\alpha - \left(1 + \gamma\frac{H^*}{C^*}\right)e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\right)$$

$$a_{13} = -R^*\left(\beta\gamma e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}} + w\right)$$

$$a_{21} = C^*\theta\beta\left(\alpha - e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\right)$$

Dengan mensubstitusikan nilai $e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}$ dan kemudian nilai v maka diperoleh :

$$a_{21} = C^*\theta v$$

$$a_{22} = \theta\beta R^*\left(\left(\alpha - e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\right) - \gamma\frac{H^*}{C^*}e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\right) - x$$

Dengan mensubstitusikan nilai $e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}$ dan kemudian nilai R^* maka diperoleh :

$$a_{22} = -\theta R^*\beta e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\gamma\frac{H^*}{C^*}$$

Untuk nilai a_{23} , a_{31} dan a_{32} diperoleh berikut ini :

$$a_{23} = \theta R^*\beta\gamma e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}$$

$$a_{31} = H^*\rho w$$

$$a_{32} = 0$$

Untuk nilai a_{33} dengan mensubstitusikan nilai R^* maka diperoleh :

$$a_{33} = \rho w\frac{y}{\rho w} - y = 0$$

Dan persamaan karakteristik diperoleh dari persamaan :

$$\left|J_{T_2} - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$\lambda^3 - a_{22}\lambda^2 - (a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31})\lambda + a_{31}(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}) = 0$$

Sehingga berdasarkan kriteria Routh-Hurwitzh, kondisi kestabilan akan terjadi jika syarat di bawah ini terpenuhi :

$$-a_{22} > 0$$

$a_{31}(a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23})>0$

$(-a_{22})(-(a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}))>a_{31}(a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23})$

Berikut ini diperiksa kondisi di atas pada titik keseimbangan Eq_2.

Untuk kondisi a_{22} perhatikan bahwa,

$$a_{22}=-\theta R^*\beta e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\gamma\frac{H^*}{C^*}$$

Karena *θ, R*, β, γ, H*, C** dan fungsi eksponen selalu positif, maka $a_{22}<0$, atau $-a_{22}>0$, sehingga kondisi a_{22} terpenuhi.

Untuk kondisi $a_{31}(a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23})>0$, perhatikan bahwa,

$$a_{31}=H^*\rho w$$

$$a_{13}=-R^*\left(\beta\gamma e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}+w\right)$$

$$a_{23}=\theta R^*\beta\gamma e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}$$

Karena *ρ, w, θ, R*, β, γ, H*, C** dan fungsi eksponen selalu positif, maka $a_{31}>0$, $a_{13}<0$ dan $a_{23}>0$.

Selanjutnya, klaim

$$a_{12}=-R^*\beta\left(\alpha-\left(1+\gamma\frac{H^*}{C^*}\right)e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\right)$$

adalah negatif.

Bukti klaim.

Dari hubungan H^* dan C^* diketahui bahwa :

$$\frac{H^*}{C^*}=\left(-\frac{1}{\gamma}\right)\ln\left(\alpha-\frac{x\rho w}{\beta\theta y}\right).$$

atau

$$\gamma\frac{H^*}{C^*}=-\ln\left(\alpha-\frac{x\rho w}{\beta\theta y}\right)$$

Jika kedua ruas ditambah dengan satu maka diperoleh :

$$1+\gamma\frac{H^*}{C^*}=1-\ln\left(\alpha-\frac{x\rho w}{\beta\theta y}\right)$$

Selanjutnya jika kedua ruas dikalikan dengan $e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}$, maka diperoleh : (22)

$$\left(1+\gamma\frac{H^*}{C^*}\right)e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}=\left(1-\ln\left(\alpha-e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\right)\right)e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}$$

dan diketahui bahwa :

$$e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}=\alpha-\frac{x\rho w}{\beta\theta y}$$

Misalkan

$$e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}=\alpha-\frac{x\rho w}{\beta\theta y}=q$$

maka persamaan di atas dapat ditulis :

$$\left(1+\gamma\frac{H^*}{C^*}\right)e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}=(1-\ln(q))q$$

Selanjutnya, perhatikan fungsi :

$$p(q)=(1-\ln(q))q$$

Nilai maksimum fungsi p terjadi jika $p'(q)=0$ yaitu:

$$\begin{aligned}p(q)&=q-q\ln q\\ p'(q)&=1-(\ln q+1)\\ &=1-\ln q-1\\ &=-\ln q\end{aligned}$$

maka $p'(q)=-\ln q=0$ atau

$-\ln q=0$,

dengan menggunakan sifat logaritma maka diperoleh $q=1$. Sehingga untuk setiap q, maka $p(q)\le 1$. Sehingga,

$$\left(1+\gamma\frac{H^*}{C^*}\right)e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\le 1$$

Kemudian berdasarkan kriteria agar H^*, C^* ada yaitu $\alpha>1$, maka bentuk

$$\alpha-\left(1+\gamma\frac{H^*}{C^*}\right)e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}$$

Akan bernilai positif, dengan demikian a_{12} negatif.

Karena $a_{22}a_{13}$ bernilai positif, $-a_{12}$ a_{23} bernilai positif dan a_{31} positif, maka

$a_{31}(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}) > 0$

jadi kondisi $a_{31}(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}) > 0$ terpenuhi.

Sedangkan kondisi terakhir akan berlaku jika,

$a_{22}(a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31}) - a_{31}(a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}) > 0$

atau

$a_{12}(a_{21}a_{22} + a_{23}a_{31}) > 0$

Karena a_{12} bernilai negatif, maka kondisi di atas akan berlaku jika, $(a_{21}a_{22} + a_{23}a_{31}) < 0$

atau

$$C^*\theta v\left(-\theta R^*\beta e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}\gamma\frac{H^*}{C^*}\right) + \theta R^*\beta\gamma e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}H^*\rho w < 0$$

atau

$$\beta\gamma\theta H^* R^* e^{-\gamma\frac{H^*}{C^*}}(\rho w - \theta v) < 0$$

Karena β, γ, θ, H^*, R^* dan fungsi eksponen selalu positif, maka ketaksamaan di atas berlaku jika,

$\theta v > \rho w$

Sementara itu, pada T_2, $\theta v = \dfrac{x\rho w}{y}$

Sehingga kondisi akan terpenuhi jika,

$\dfrac{x\rho w}{y} > \rho w$ atau, $x > y$.

Dengan demikian, sistem persamaan (11) stabil di sekitar titik keseimbangan Eq_2, jika dan hanya jika $x > y$.

4. Kesimpulan Dan Saran

Berdasarkan hasil di atas dapat disimpulkan bahwa model dua mangsa satu mangsa yang di asumsikan simbiosis komensalisme terjadi di antara pemangsa memiliki satu titik keseimbangan yang tidak stabil yaitu $Eq_1 : \left(\dfrac{x}{\theta\beta(\alpha-1)}, \dfrac{u}{\beta(\alpha-1)}, 0\right)$, satu titik keseimbangan yang stabil lokal yaitu

$$Eq_2 : \left(\frac{y}{\rho w}, \left[\frac{x}{u\theta R^*} - \frac{w}{u\gamma}\ln\left(\alpha - \frac{x}{\beta\theta R^*}\right)\right]^{-1}, \frac{1}{w}\left[u - \left(\frac{x\rho w}{\theta y}\right)C^*\right]\right)$$

Kajian dalam tulisan ini dapat disempurnakan dengan menampilkan simulasi menggunakan data yang tersedia sesuai bidang aplikasi dalam rekayasa. Simulasi data dan menampilkan potret phase dari solusi dapat membantu menyempurnakan tulisan ini.

5. Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kepada guru saya bapak Budi Rudianto yang telah membantu memberikan masukan dan kritikan pada penulisan ini.

Daftar Pustaka

[1] Arrowsmith, D.K., Place, C.M., 1992, *Dynamical System Differential Equations, Maps and Chaotic Behaviour*, Chapman & Hall, London.

[2] Boyce, W. E & DePrima R.C. 1992, ”*Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem”*, 5th edition, Jhon Wiley & Sons.

[3] Brauer, F. and Castilo-Chavez, C., 2001, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer-Verlag, Inc., New York.

[4] Haberman, Richard., 1977, Mathematical Models, mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic flow, Prentice Hall, New jersey.

[5] Khalil, H. Hassan., 2002, *Nonlinear System*, Third Edition, Prentice Hall, New Jersey.

[6] Kocak, H. dan Hole, J. K., 1991. *Dynamic and Bifurcation,* Springer – Verlag. New York.

[7] Ladas, Finizio. 1988, *"Persamaan Difensial Biasa dengan Penerapan Modern"*. Terjemahan. Dra. Widiarti Santoso. Edisi II. Erlangga. Jakarta.
[8] Luenberger, D. G., 1979, *Introduction to Dynamical System Theory, Model and Application*, John Willey & Son, Inc., Canada
[9] Mullen, A. J. 1984, "*Autonomic Tuning of a Two Predator-One Prey System Via Commensalism"*. Mathematical Biosciences.
[10] Olsder, G. J, 1994, *Mathematical System Theory*, Delft University of Technology, Netherlands
[11] Pielow, E.C. 1977, *"Mathematical Ecology"*. A. Wiley-Interscience Publication. John Wiley and Sons. New York.
[12] Perko, L., 1991, *Differential Equations and Dynamical System*, Springer-Verlag, New York.
[13] Verhulst, F., 1990, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical System*, Springer-Verlag, Germany.
[14] Wiggins, S., 1990, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, Springer-Verlag, New York