

Розробка геометричної моделі нового способу доставки вогнегасних речовин в зону віддаленої пожежі

Л. М. Куценко, В. В. Ванін, А. В. Найдиш, С. Ю. Назаренко,
А. Я. Калиновський, А. Ю. Чернявський, О. В. Шоман,
В. В. Семенова-Куліш, О. Г. Поліванов, Е. М. Сивак

Запропонована геометрична модель нового способу доставки вогнегасної речовини в зону пожежі, розташованої на значній відстані. Ідея доставки основана на механічній операції метання. Для цього речовину (наприклад, вогнегасний порошок) поміщають у тверду оболонку – спеціальний контейнер. Після доставки за допомогою стартового пристрою до місця пожежі контейнер повинен вивільнити речовину, що сприятиме гасінню пожежі.

У відомому способі віддаленої доставки вогнегасної речовини використовується пневматична гармата з контейнером циліндричної форми. В процесі доставки циліндр повинен обертатися навколо своєї осі для забезпечення стійкості руху. Розкручування циліндра при його проходженні дулом гармати виконує спеціальна турбіна. При функціонуванні турбіни виникають складнощі регулювання розподілу потоків стисненого повітря. Крім того, потрібно слідкувати за герметичністю пневматичної частини гармати.

У новому способі доставки використовується контейнер у вигляді двох рознесених вантажів, подібний спортивній гантелі. Ініціювання руху гантелі здійснюється завдяки одночасній дії вибухових імпульсів, спрямованих на кожний її вантаж заздалегідь розрахованим чином. В результаті утворюється обертково-поступальний рух контейнера. Для опису динаміки руху гантелі визначено лагранжіан, а також складено та розв'язано систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду. Наведено приклади моделювання траєкторій руху центрів мас вантажів гантелі з урахуванням опору повітря.

Запропонований спосіб планується покласти в основу нової технології пожежогасіння. Про це свідчить нова схема запуску гантелі за допомогою вибухових імпульсів зарядів двох піропатронів. Одержані результати дозволяють оцінити необхідні для метання величини вибухових імпульсів, а також оцінити відповідні значення відстаней доставки гантелі

Ключові слова: геометричне моделювання, гантелеподібна форма контейнеру, рівняння Лагранжа другого роду, обертково-поступальний рух контейнера

1. Вступ

Масштабні пожежі, що сталися в останні роки довели необхідність переозброєння підрозділів пожежної охорони якісно новою технікою. Проблема ліквідації масштабних пожеж пов'язана з двома ключовими моментами – розробкою високоефективних вогнегасних речовин, а також із способами їх доставки в зону горіння. І якщо успіхи у розробках фізико-хімічних складів сучасних во-

вогнегасних речовин не викликають сумнівів, то способи їх доставки в зону горіння ще необхідно удосконалювати. У виняткових випадках доставку вогнегасних засобів здійснюють з повітря літаком чи вертольотом, а також застосовуючи важку техніку типу "пожежні танки". Але такі засоби доставки вогнегасних речовин є не оперативними і надто коштовними.

Частіше доставка на велику відстань вогнегасних засобів здійснюється за допомогою пристрою для метання типу пневматичної гармати. Для цього речовину (вогнегасний порошок) поміщають у спеціальну тверду оболонку – контейнер, який після його доставки до місця пожежі повинен зруйнуватися і вивільнити речовину і цим сприяти гасінню пожежі. Відомим прикладом такого способу є стволові установки контейнерної доставки вогнегасних речовин на віддалену відстань. За формою контейнер подібний циліндру, який доставляється в зону пожежі пневматичною гарматою як стартовим пристроєм. В процесі польоту контейнер для стійкості його руху повинен обертатися навколо своєї осі. Для розкручування контейнера при проходженні в стволі гармати використовують спеціальну турбіну. Вона повинна бути достатньо потужною, щоб за короткий час розкрутити масивний контейнер.

В запропонованому способі контейнер має вигляд гантелі – тобто двох ронесених (на невелику відстань) вантажів, сполучених стержнем. В процесі доставки для стійкості руху гантель повинна обертатися в межах вертикальної площини навколо свого центра мас. Ініціювання руху гантелі здійснюється завдяки направленій дії зарання розрахованих вибухових імпульсів двох піропатронів. Цим забезпечується обертово-поступальний рух контейнера. Звідси слідує, що "запуск" обертання гантелі реалізується простіше, порівняно з наданням обертання циліндру турбіною пневматичної гармати. При цьому вибухівка оформлена у вигляді піропатрона або піроболта. Ці пристрої безпечно застосовуються в космічній техніці. Їх конструкції можна обрати прототипами розробки піротехнічних засобів запропонованого способу.

На актуальність розробки геометричної моделі нового способу віддаленої доставки вогнегасної речовини у оболонці гантелеподібної форми вказує наступне. Стартовий пристрій матиме простішу (порівняно з пневматичною гарматою) конструкцію і не потребуватиме зусиль та коштів для підтримки його в робочому стані. У якості рушіїв використовуються не дорогі піропатрони (у порівнянні з системою пневматики). Контейнер має рухатися до кінця польоту в межах вертикальної площини, обертаючись навколо свого центру мас. Це дозволить використати енергію обертання для руйнування контейнера наприкінці польоту від удару об перепону і вивільнення вогнегасної речовини. Розглянута концепція може скласти основу перспективної технології пожежогасіння з новим способом доставки вогнегасних речовин на значну відстань.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

До масштабних відносять клас пожеж, які характеризуються великими площами займання та значними тепловими випромінюваннями. Ці фактори змушують вживати заходи по ліквідації пожежі з великих відстаней. Масштабні пожежі, крім загальновідомих лісових, виникають на складах і сховищах заво-

дів, територіях підприємств із горючими та вибухонебезпечними речовинами, на об'єктах аеродромів, нафто- і газовидобутку та енергетичних установок, тощо [1, 2]. У особливих випадках застосовується пожежна авіація.

Пожежна авіація призначена для гасіння лісових та інших масштабних пожеж за допомогою вогнегасних рідин та вогнегасних бомб. А також для розпилення реагентів на хмари з метою штучного викликання опадів над зоною горіння.

Робота [3] присвячена теоретичним питанням віддаленого способу гасіння пожеж. Для дистанційного пожежогасіння застосовуються вогнегасні ракети [4], вибухові ударні хвилі [5, 6], а також використовуються «пожежні танки» [7].

Перелічені засоби віддаленої доставки вогнегасної речовини застосовуються у виняткових випадках. Більш розповсюдженим є спосіб пожежогасіння з використанням пневматичних гармат. У роботі [8] розглянуто особливості застосування пневматичних гармат. Аналіз використання вогнегасних речовин та способів їх доставки для цілей пожежогасіння зроблено в роботі [9]. В роботах [10, 11] висвітлено питання попередньої підготовки для застосування дистанційного гасіння пожеж. В роботі [12] здійснено дослідження характеру небезпек, які необхідно враховувати при розгортанні пожежної техніки. Роботи [13, 14] присвячені визначенню параметрів вогнегасної ефективності викиду порошкових сумішей з контейнерів при дистанційному гасінні пожеж.

Прототипом запропонованого способу доставки контейнерів можна вважати використання для цієї мети пневматичної гармати [15, 16]. Наведено дослідження, пов'язані з конструктивними особливостями стволової установки. Розглянуто рушії, завдяки яким здійснюється метання циліндричних контейнерів з вогнегасною речовиною безпосередньо в зону пожежі. При цьому досить добре досліджена механіка вогнегасної дії порошкових складів при їх викиді в результаті руйнування контейнера надлишковим тиском, що створюється продуктами детонації вибухових речовин [17]. При попаданні в зону горіння під дією внутрішніх сил контейнер розривається, звільняючи інертні продукти детонації і порошок складу.

Показано, що в процесі доставки для стійкості руху згідно основ балістики циліндр повинен обертатися навколо своєї осі. У артилерії обертання близького за конструкцією снаряда виникає після його переміщення нарізними канавками ствола. Це задає початкове аксіальне обертання снаряда при виході на зовнішню балістичну траєкторію. Завдяки гіроскопічному ефекту рух снаряда стабілізується. У пневматичних гармат початковий імпульс обертання циліндричному контейнеру надає спеціальна турбіна [15, 16]. Але залишилися невирішеними питання, зв'язані з надійністю пристрою для рівномірного розподілу в турбіні потоку повітря на чотири напрямки. Кожний з напрямків подає стиснене повітря в одну із чотирьох камер турбіни. Стиснене повітря стимулює поступальний і обертаний рух контейнера під час його переміщення в стволі гармати. Крім вимог рівномірного розподілу потоку стисненого повітря виникають вимоги щодо забезпечення герметичності пневматичної частини гармати. Недотримання цих вимог призводить до недостатньої ступені розкрутки масивного контейнера. Тому на прикінцевій фазі польоту циліндричний контейнер може втратити енергію обертання. Плануючий політ контейнера утруднює його руйнування

при досягненні зони пожежі. І вивільнення вогнегасної речовини може не відбутися. Тому контейнери для пневматичних гармат потрібно додатково забезпечити вибуховими речовинами для їх руйнування. Це ускладнює конструкцію і підвищує небезпеку у разі їх використання. Причиною цього можуть бути об'єктивні труднощі, зв'язані з забезпеченням необхідної енергії обертання циліндричного контейнера під час його запуску пневматичною гарматою.

Варіантом подолання відповідних труднощів може бути розробка принципово іншого способу доставки вогнегасної речовини у контейнері. Саме такий підхід було вперше описано у роботі [18], однак там не наведено обґрунтування способу.

У новому способі доставки використовується контейнер, який за формою подібний спортивній гантелі. Суттєвим є те, що контейнер складається з двох рознесених вантажів. Ініціювання руху гантелі здійснюється завдяки одночасній дії направлених вибухових імпульсів, спрямованих на кожний її вантаж заздалегідь розрахованим чином. В результаті одержимо обертово-поступальний рух контейнера. Для опису динаміки руху гантелі визначено лагранжіан, а також складено та розв'язано систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду. Наведено приклади моделювання траєкторій руху центрів мас вантажів гантелі з урахуванням опору повітря.

Дослідження обертово-поступального руху гантелі в межах вертикальної площини можна віднести до задач технічної механіки. Вони присвячені розрахункам динаміки твердого тіла з рухомою точкою центра мас. Для розв'язання такого класу задач використовується теорема Кьоніга [19]. В роботі [20] наведено приклад застосування теореми. Теорема Кьоніга дозволяє виразити кінетичну енергію системи через кінетичну енергію центра мас. Для інженерних розрахунків більш зручними є наближені методи. В даній роботі наведено графоаналітичне моделювання траєкторії руху гантелі з врахуванням опору повітря. При цьому використовуються два поняття траєкторії. Розрахункової – яка одержується в результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду, та теоретичної – яка одержується в результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь руху точкової маси, випущеної під кутом до горизонту. Поняття теоретичної траєкторії характеризується, в тому числі, і коефіцієнтом опору повітря. В результаті поєднання зазначених понять траєкторії руху гантелі та її компонентів одержано з врахуванням опору повітря. При складанні математичних моделей металевих машин в даній роботі параметри задаються в умовних одиницях.

Наведено приклади моделювання траєкторій центрів мас вантажів гантелі та центрів мас всієї гантелі в процесі її обертово-поступального переміщення. А також зображення окремих фаз обертання гантелі в польоті. Одержані результати дозволяють оцінити відстані доставки гантелеподібного контейнера з врахуванням коефіцієнта опору повітря залежно від величин вибухових імпульсів. Все це дозволяє стверджувати, що доцільним буде проведення дослідження, присвяченого розробці нового способу віддаленої доставки вогнегасної речовини в зону пожежі. На початковому етапі такі дослідження вирішено проілюструвати на геометричній моделі.

Отже, в результаті огляду літературних джерел [1–20] були виявлені питання, ще не досліджені іншими авторами, що дозволило сформулювати наступний напрямок досліджень. Запропонувати новий спосіб доставки до віддаленої зони загоряння вогнегасної речовини у гантелеподібному контейнері. Причому, контейнер має здійснювати обертово-поступальні рухи до кінця польоту в межах вертикальної площини.

3. Мета та задачі дослідження

Метою дослідження є розробка геометричної моделі нового способу доставки в зону віддаленої пожежі вогнегасної речовини у твердій оболонці гантелеподібної форми.

Для досягнення мети необхідно вирішити наступні задачі:

– обґрунтувати розрахунки способів метання вантажів на великі відстані на прикладах двох варіантів механізмів требушет;

– змодельовати обертово-поступальний рух у вертикальній площині контейнерів гантелеподібної форми з врахуванням опору повітря – він дозволить використати енергію обертання для руйнування контейнерів наприкінці польоту і вивільнення вогнегасної речовини;

– запропонувати схему стартового пристрою для реалізації обертово-поступального руху контейнерів гантелеподібної форми, при цьому рушіями мають бути вибухові імпульси двох піропатронів, спрямовані на вантажі гантелі.

4. Геометричні моделі металевих установок типу требушет як засобів доставки вантажів на великі відстані

Перед викладом основного матеріалу розглянемо дві геометричні моделі металевих установок, основаних на схемі дії механізму типу требушет [21–23]. Металеві машини требушет використовувалися в древні часи як засоби доставки масивних вантажів на великі відстані. В основному це були пристрої для руйнування стін середньовікових замків. Їх намагалися розташовувати на відстанях, недосяжних для стріл лучників цього замка. Для забезпечення ефективної динаміки варіантів механізму требушет необхідно розрахувати значення параметрів його елементів. Це здійснено в рамках механіки Лагранжа, де враховуються кінетична і потенціальна енергії системи. В результаті розв'язання складеного рівняння Лагранжа другого роду одержано шукану траєкторію переміщення вантажу на праці, що дозволяє наближено визначити відстань доставки корисного вантажу.

4. 1. Геометрична модель механізму требушет, коли транспортний засіб є вантажем противаги

В роботах [24, 25] описано модель мобільної металеві установки типу требушет, призначеної для запуску (катапультивання) безпілотних літальних апаратів. Аналогічну металеву установку можна використати і для доставки вогнегасної речовини в зону віддаленої пожежі. Особливість конструкції механізму полягає у використанні у якості противаги транспортного засобу, на якому закріплена металеві установка. Це сприяє мобільності всієї системи метання,

яка компактно згортається й може перевозитися транспортним засобом по дорогах загального користування. Для розгортання установки у робочий стан необхідно встановити металеві опори і закріпити на них важіль требушета у вигляді "коромисла". За допомогою електричної лебідки необхідно підняти задню частину транспортного засобу – тобто створити противагу на короткому кінці зазначеного важеля (рис. 1). Схема конструкції требушет складається з важеля довжиною l_1+l_2 . До нього шарнірно прикріплено важіль довжиною l_3 (який позначає пращу) і довжиною l_4 (позначає важіль кріплення противагу). До важелів у вузлових точках закріплені вантажі з масами m_1 (автомобіль) і m_2 (контейнер з вогнегасною речовиною). При цьому маса m_1 буде на декілька порядків більшою порівняно з масою m_2 . Для визначеності нехай контейнер матиме сферичну форму. При миттєвому опусканні транспортного засобу контейнеру з вогнегасною речовиною буде надано прискорення для метання [26].

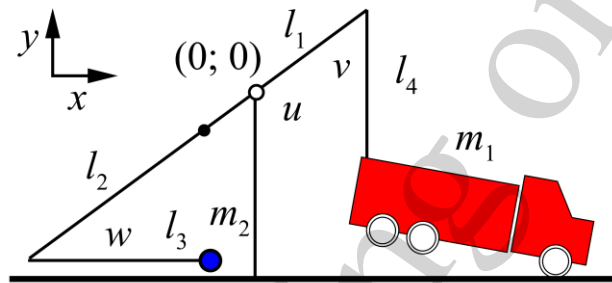


Рис. 1. Схема металеві установка типу требушет, поєднаної з транспортним засобом

На рис. 1 позначено обрані узагальнені координати механізму требушет – кути $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$. Для опису динаміки требушет використаємо вирази для кінетичної T і потенціальної P енергій [21–23]:

$$\begin{aligned}
 T = & -m_2 l_3^2 \frac{du}{dt} \frac{dw}{dt} - m_2 l_3 l_2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \cos \psi + \\
 & + m_1 l_4^2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + 0.5 m_1 l_1^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 0.5 m_2 l_2^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - \\
 & - m_1 l_4 l_1 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \cos \varphi - m_1 l_4 l_1 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \cos \varphi + \\
 & + m_2 l_3 l_2 \frac{du}{dt} \frac{dw}{dt} \cos \psi + 0.5 m_2 l_3^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \\
 & 0.5 m_2 l_3^2 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + 0.5 m_1 l_4^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 0.5 m_1 l_4^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 ;
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$P = -m_1 l_1 g \cos u + m_2 l_2 g \cos u - \\ m_2 l_3 g (\cos u \cos w + \sin u \sin w) + \\ m_1 l_4 g (\cos u \cos v - \sin u \sin v).$$

Тут $u(t)$ – функція в часі зміни кута відхилення від вертикалі важеля довжиною L_1+L_2 , $v(t)$ – функція зміни кута між важелями довжинами L_4 і L_1+L_2 , $w(t)$ – функція зміни кута між важелями довжинами L_3 і L_1+L_2 , $g=9,81$.

З використанням лагранжіану $L=T-P$ нами одержано систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду у такому вигляді:

$$\begin{aligned} & -m_1 l_1 g \sin u + m_2 l_2 g \sin u - m_2 l_3 g \sin u + m_2 l_3 g \cos u \sin w + m_1 l_4 g \sin u \cos v + \\ & + m_1 l_4 g \cos u \sin v - m_1 l_1^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + m_1 l_4 l_1 \frac{d^2 v}{dt^2} \cos v m_1 l_4 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \sin v + 2 m_1 l_1 l_4 \frac{d^2 u}{dt^2} \cos v - \\ & - 2 m_1 l_1 l_4 \frac{du}{dt} \sin v - m_2 l_2^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 2 m_2 l_2 l_3 \frac{d^2 u}{dt^2} \cos w - 2 m_2 l_2 l_3 \frac{du}{dt} \frac{dw}{dt} \sin w - \\ & - m_2 l_2 l_3 \frac{d^2 w}{dt^2} \cos w m_2 l_2 l_3 \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \sin w - m_2 l_3^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + m_2 l_3 \frac{d^2 w}{dt^2} - m_1 l_4^2 \frac{d^2 v}{dt^2} - m_1 l_4^2 \frac{d^2 u}{dt^2} = 0; \\ & m_2 l_2 l_3 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \sin w - m_2 l_3 g \cos u \sin w + m_2 l_3 g \sin u \cos w - m_2 l_2 l_3 \frac{d^2 u}{dt^2} \cos w + \\ & + m_2 l_3^2 \frac{d^2 u}{dt^2} - m_2 l_3^2 \frac{d^2 w}{dt^2} = 0; \\ & m_1 l_1 l_4 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \sin v + m_1 l_4 g \cos u \sin v + m_1 l_4 g \sin u \cos v + m_1 l_1 l_4 \frac{d^2 u}{dt^2} \cos v - \\ & m_1 l_4^2 \frac{d^2 u}{dt^2} - m_1 l_4^2 \frac{d^2 v}{dt^2} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Систему рівнянь (2) розв'язано чисельно за допомогою методу Рунге-Кутти у середовищі Maple з такими початковими умовами: $u(0)$, $v(0)$, $w(0)$ – початкові значення кутів відхилення важелів; $Du(0)$, $Dv(0)$, $Dw(0)$ – початкові швидкості зміни кутів відхилення. Тут і далі згідно синтаксису мови maple вираз, наприклад, $Dw(0)$, означає значення похідної функції $w(t)$ в момент часу $t=0$. Використовуючи знайдені наближені розв'язки для функцій $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$ (позначимо їх, відповідно, $U(t)$, $V(t)$ і $W(t)$), в декартовій системі координат xOy траєкторії переміщення вантажу необхідно будувати за формулами:

$$x(t) = -l_2 \sin(U(t)) + l_3 \sin(U(t) - W(t));$$

$$y(t) = l_2 \cos(U(t)) - l_3 \cos(U(t) - W(t)). \quad (3)$$

Тобто для певних проміжків часу t за допомогою формул (3) можна визначити миттєві координати корисного вантажу в вертикальній площині, де маємо систему декартових координат xOy .

У вертикальній площині з системою декартових координат xOy за допомогою формул (3) будемо початкову фазу траєкторії переміщення контейнера перед доставкою його в зону пожежі.

Для тестового прикладу обрано такі значення параметрів. Маса автомобіля $m_1=4000$; маса контейнера $m_2=50$; значення параметрів: $l_1=0.65$; $l_2=4.2$; $l_3=2.5$; $l_4=1.5$; значення початкових умов $u(0)=\pi/2-2$; $Du(0)=0$; $v(0)=2$; $Dv(0)=0$; $w(0)=\pi/8$; $Dw(0)=0$, $g=9,81$. Межі часу інтегрування системи рівнянь (2) $0 < t < 1.25$ (всі значення в умовних одиницях).

На рис. 2 наведено фазові траєкторії для функцій узагальнених координат - кутів $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$. На рис. 3 наведено графіки швидкостей зміни цих кутів. Аналіз фазових траєкторій дозволяє з'ясувати деякі кількісні оцінки процесу катапультивання вантажу. А саме, максимальне значення швидкості зміни кута $w(t)$ дорівнюватиме $w=80$ умовних величин, що можна вважати швидкістю контейнера в момент відриву від праці. Тоді ж екстремальної швидкості досягне і зміна кутів $u(t)$ і $v(t)$.

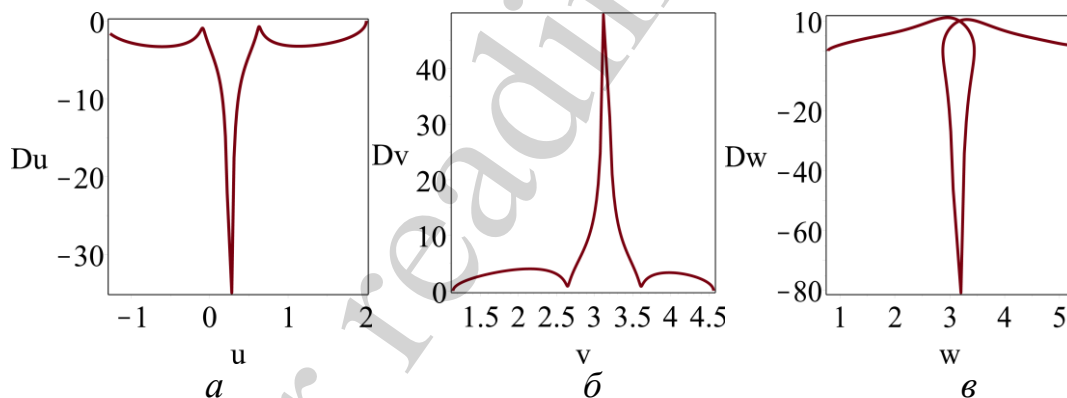


Рис. 2. Фазова траєкторія для параметра: $a - u(t)$; $b - v(t)$; $v - w(t)$

Визначимо момент часу, коли контейнер набуде максимальної швидкості. Для цього необхідно побудувати графік залежності в часі швидкості зміни кута w . На рис. 3, в зображено відповідний графік, з якого видно, що максимальна швидкість зміни кута w відбудеться при $t=0,62$, що є рекомендованим моментом відриву контейнера.

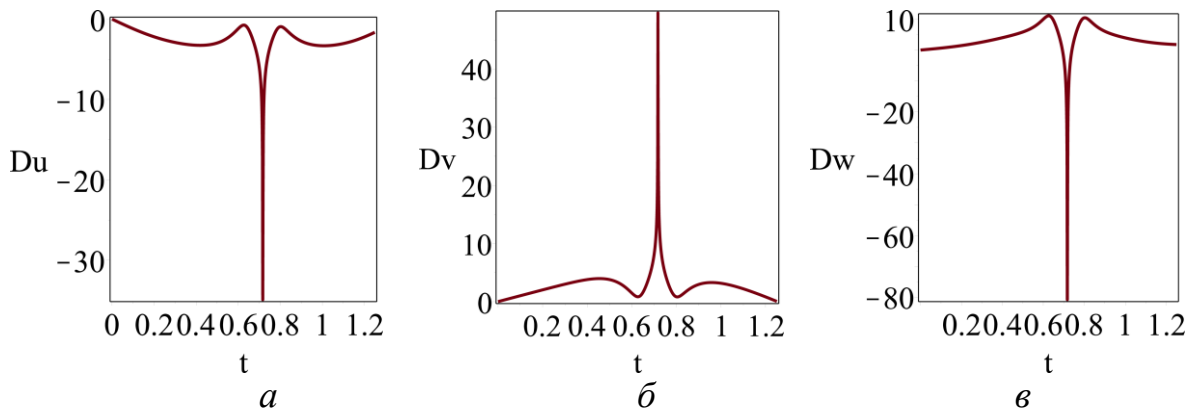


Рис. 3. Графік зміни швидкостей кутів у часі: $a - u(t)$; $б - v(t)$; $в - w(t)$

Також можна проілюструвати деякі якісні оцінки процесу катапультивання контейнера, у тому числі і визначення кута його вильоту після від'єднання від праці. Для цього було складено програму побудови кадрів анімаційного фільму схеми дії требушет. На рис. 4, a – $в$ наведено окремі фази переміщення його елементів. На рис. 4 також зображено траєкторію руху центру маси контейнера. В роботі [40] наведено комп'ютерну анімаційну схему катапультивання контейнера за допомогою транспортного засобу як противаги.

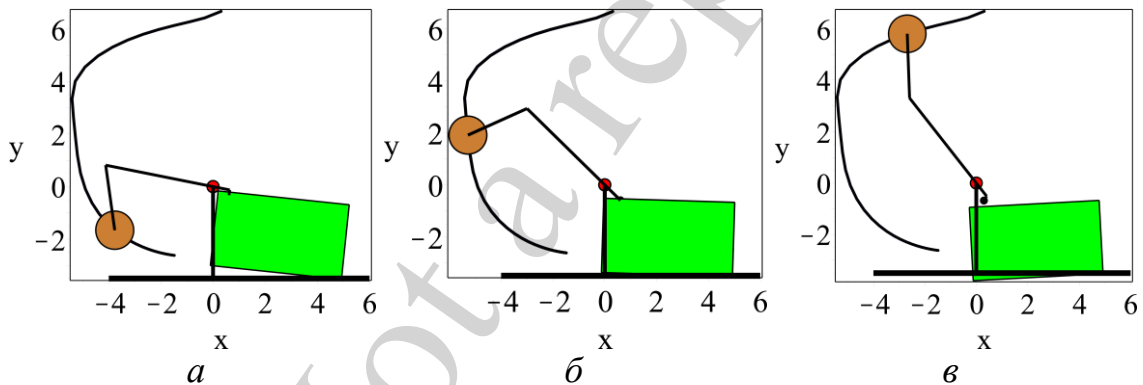


Рис. 4. Одержані зображення: a – положення елементів після старту, $б$ – поточна фаза метання; $в$ – фаза перед моментом відриву вантажу

Параметри требуше були підібрані так, що кінцева фаза траєкторії руху центру маси контейнера має прямолінійний вигляд (рис. 4). Завдяки цьому можна визначити кут вильоту контейнера в момент від'єднання від праці. Для цього слід врахувати координати прикінцевих точок траєкторії руху центру мас контейнера.

4. 2. Геометрична модель механізму требушет з вертикальним переміщенням вантажу противаги

Наведемо схему іншої металної установки, яка відрізняється від традиційної конструкції требушет. Головна відмінність полягає у переміщенні ванта-

жу протизваги вертикально донизу в процесі метання (рис. 5). Розглянутий механізм в літературі одержав назву «Floating-Arm Trebuchet» [27–30].

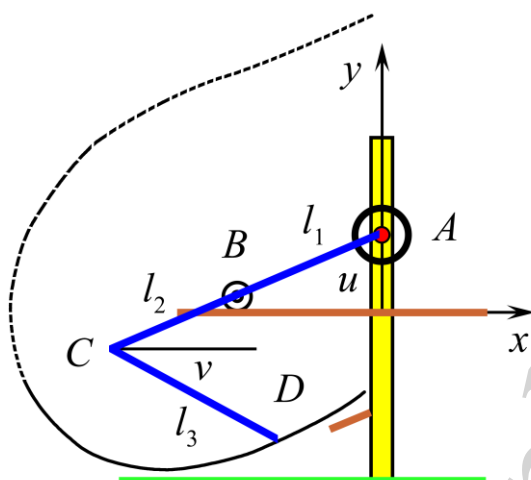


Рис. 5. Схема метального механізму Floating-Arm Trebuchet

Конструкція складається з головного важеля довжиною $l_0=l_1+l_2$, до якого шарнірно прикріплено важіль (або канатна праця) довжиною l_3 . До важелю у вузловій точці A закріплено вантаж протизваги масою m_1 , а в точці D закріплено вантаж контейнера для метання масою m_3 . Масу m_1 обирають на декілька порядків більшою відносно маси m_3 . Протизвага з точкою A повинна рухатися вздовж напрямних під дією гравітації вертикально донизу. При цьому колесо, закріплене на важелі в точці B повинно перекинутися по горизонтальній планці конструкції. Тоді корисному вантажу m_3 надасться прискорення, яке і спричинить ефект метання після його відокремлення від праці.

На рис. 5 зображено систему декартових координат Oxy . В якості узагальнених координат оберемо кути u і v . Вони визначатимуть функції зміни кутів в часі. А саме, зміни кута $u(t)$ відхилення від вертикалі важеля довжиною l_1+l_2 . А також зміни кута $v(t)$ між горизонталлю і важелем довжиною l_1+l_2 . При цьому позначені точки визначені [27] координатами: $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$; $C(x_3, y_3)$; $D(x_4, y_4)$, де

$$x_1 = 0; \quad y_1 = l_1 \cos u;$$

$$x_4 = -l_1 \sin u; \quad y_4 = 0;$$

$$x_2 = x_4 - l_2 \sin u; \quad y_2 = y_4 - l_2 \cos u; \tag{4}$$

$$x_3 = x_2 - l_3 \cos v; \quad y_3 = y_2 - l_3 \sin v;$$

$$x_b = x_4 - 0.5(l_2 - l_1) \sin u;$$

$$y_b = -0.5(l_2 - l_1) \cos u;$$

$$l_0 = l_1 + l_2.$$

Тоді для опису динаміки Floating-Arm Trebuchet необхідно використати вирази для кінетичної T і потенціальної P енергій [27]:

$$T = 0.5m_1\dot{y}_1^2 + 0.5m_3(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) + 0.5(l_0(l_1^2 - l_1l_2 + l_2^2)\dot{u}^2); \quad (5)$$

$$P = 9.81(m_1y_1 + m_3y_3 + l_0y_b).$$

За допомогою лагранжіану $L=T-P$ нами складено систему рівнянь Лагранжа другого роду. З причини громіздкості її тут не наводимо. Зазначену систему розв'язуємо чисельно за допомогою методу Рунге-Кутти в середовищі математичного процесора maple. Початкові умови: u_0, v_0 – початкові значення кутів відхилення важелів; $Du(0), Dv(0)$ – початкові швидкості зміни кутів відхилення. Знайдені наближені розв'язки для функцій $u(t)$ і $v(t)$ позначимо як $U(t)$ і $V(t)$, відповідно. Це можуть бути вирази у вигляді maple-кодів. Тоді траєкторію переміщення вантажу в декартовій системі координат xOy необхідно будувати за формулами:

$$x_4 = -l_1 \sin U - l_2 \sin U + l_3 \cos V;$$

$$y_4 = -l_2 \cos U - l_3 \sin V. \quad (6)$$

Наведемо тестовий розрахунок моделі Floating-Arm Trebuchet з параметрами $m_1=2000; m_2=50; l_1=3; l_2=2,57; l_3=3,6$ і з початковими умовами $u(0)=\text{Pi}/4; Du(0)=0; v(0)=0; Dv(0)=0$. Всі величини в умовних одиницях.

На рис. 6 наведено функціональні залежності від часу швидкості зміни кутів $u(t)$ і $v(t)$. На рис. 7 зображено фазові траєкторії для кутів $u(t)$ і $v(t)$. Аналіз графіків дозволяє з'ясувати, що максимальну швидкість зміни кута $u(t)$ досягне при значенні $t=1,1$ і $u=3,4$. В цей момент швидкість зміни кута v буде максимальною (біля 12,5 умовних одиниць), що дозволить набутти корисному вантажу максимальної швидкості в момент відриву від праці.

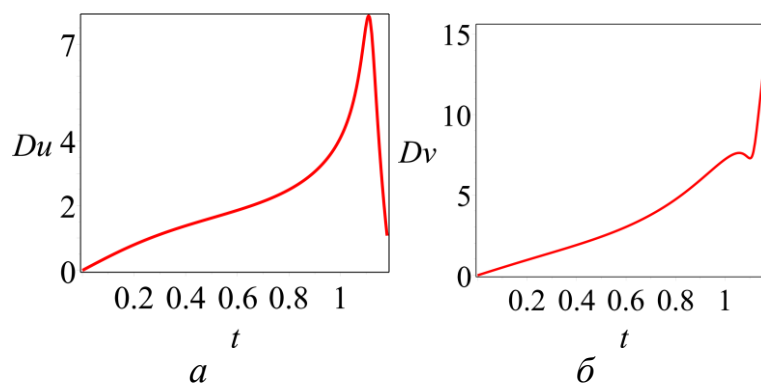


Рис. 6. Графіки залежності швидкості для: $a - u(t)$; $b - v(t)$

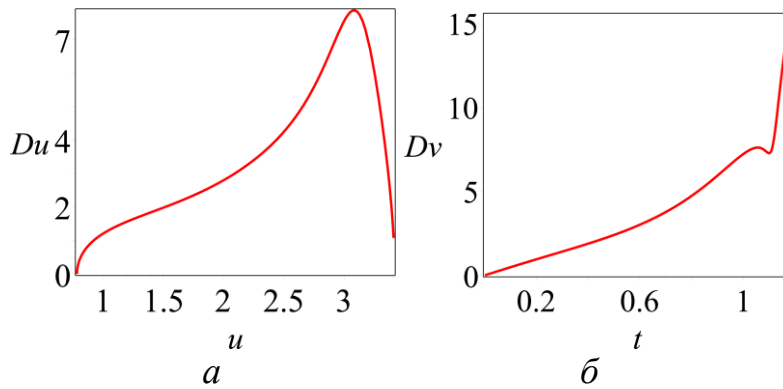


Рис. 7. Фазова траєкторія для параметра: $a - u(t)$; $b - v(t)$

На рис. 8 зображено побудовану траєкторію руху центру мас контейнера. За допомогою складеної програми створено [40] анімаційний фільм дії Floating-Arm Trebuchet, деякі кадри якого наведено на рис. 9.

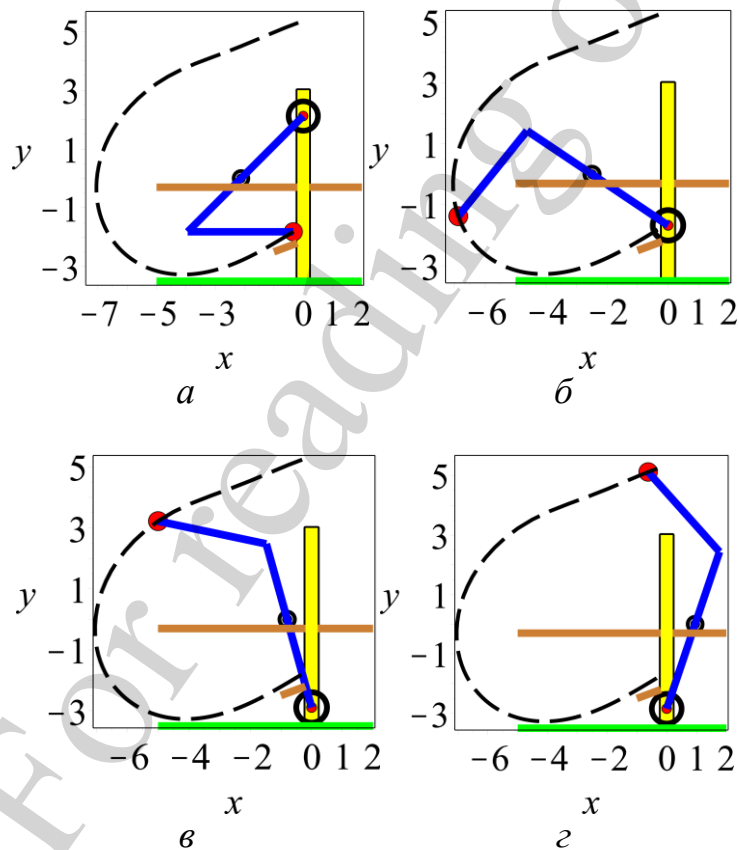


Рис. 8. Одержані зображення фаз метання: $a -$ початкової; $b -$ поточної; $v -$ прикінцевої; $z -$ в момент відриву вантажу

Звертаємо увагу на те, що конструкція Floating-Arm Trebuchet зручна для транспортування, адже вантаж противаги можна зафіксувати на вертикальних напрямних. У якості противаги можна використовувати ємність з водою.

Механізми типу трєбушет не використовуються на практиці реального пожежогасіння. Але ідеї, закладені в їх конструкції, можуть бути корисними і ре-

алізуватися при створенні нових металевих механізмів, що і було продемонстровано в цьому підрозділі.

5. Моделювання у вертикальній площині обертово-поступального руху контейнерів гантелеподібної форми.

Для забезпечення стійкості руху гантелі у вертикальній площині необхідно надати їй обертово-поступальне переміщення. Це можна досягти завдяки двом вибуховим імпульсам, направлених на вантажі гантелі заранне розрахованими напрямками.

В загальному випадку це задача динаміки твердого тіла з рухомим центром мас. Цей клас задач розв'язується на основі теореми Кьоніга [19]. Приклад такого розв'язання наведено в роботі [20]. В роботі [33] наведені деякі розрахунки, пов'язані з рухом гантелі.

Для інженерних розрахунків застосовують наближені методи. Варіант графоаналітичного метода розглянуто в даному розділі.

5.1. Геометрична модель переміщення об'єкта гантелеподібної форми за умови ініціювання його руху подібно маятниковій аналогії

Виникнення руху гантелі пояснимо з використанням маятниковій аналогії. Для цього розглянемо математичний маятник довжиною h з вантажем A , підвішеного до нерухомого вантажу B . Нехай у певний момент маятникового коливання вантаж B відокремиться від кріплення. Тоді маятник позбудеться зв'язку з нерухою точкою кріплення. Його рух нагадуватиме переміщення гімнаста, який здійснює кульбіт з поперечини. В результаті відокремлення новоутворений об'єкт з двома рознесеними вантажами здійснюватиме рух у вигляді комбінації поступального з обертальним переміщеннями. При чому, новоутворений об'єкт продовжуватиме рух в межах площини коливань маятника. В момент відриву кріплення об'єкт дослідження формально перестає бути маятником. Тому точку кріплення будемо називати точкою відліку. Через наявність вантажів, приєднаних до кінців маятника, таку конструкцію доцільно назвати терміном гантель (або гантелеподібний об'єкт), обравши за основу образ спортивної гантелі.

Розглянемо гантель, до складу якої входить невагомий стержень та два вантажі масами m_1 і m_2 на його кінцях. Відстань між центрами мас вантажів дорівнює h . Нехай в декартовій системі координат Oxy рухома точка відліку має координати $x=u(t)$ і $y=v(t)$. Центр мас першого вантажу суміщений з рухою точкою відліку. Стержень виконує обертові коливання навколо точки відліку завдяки зміні величині кута $w(t)$.

Ставиться задача розробити геометричну модель переміщення гантелі в межах вертикальної площини Oxy залежно від параметрів гантелі та початкових умов. Зазначимо, що умови, які сприяли виникненню руху гантелі, крім "маятникових" можуть бути і "вибуховими". Тобто рух гантелі може виникнути завдяки вибуховим імпульсам, спрямованими на центри мас вантажів гантелі. Про це мова піде далі. В основу покладено спосіб обчислень, подібний описаному в роботах [31, 32].

Розглянемо декартові координати Ox вертикальної площини, на якій має переміщуватися гантель. Узагальненими координатами руху вважатимемо кут $w(t)$, утворений віссю стержня з віссю Oy , а також координати зміщення $u(t)$ і $v(t)$ точки відліку (рис. 9).

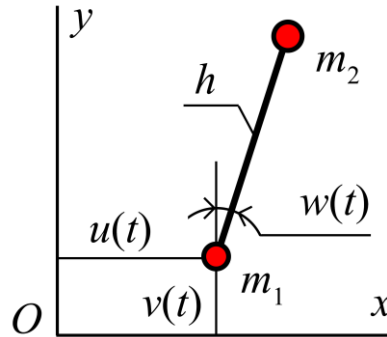


Рис. 9. Стержень з рухомою точкою відліку

Запуск руху стержня здійснюється завдяки дії імпульсу $m_2 Dw(0)$, наданого куту відхилення $w(t)$. Тобто куту відхилення $w(t)$ надано початкову швидкість $Dw(0)$. Вектор напрямку надання швидкостей співпадає з напрямком дії імпульсу пристрою на центр мас другого вантажу, направлено перпендикулярно осі гантелі. З врахуванням наданого імпульсом миттєвої швидкості $Dw(0)$, гантель далі має рухатися за інерцією. Для запуску руху гантелі одночасно з діями імпульсу $m_2 Dw(0)$ можуть одночасно діяти і імпульси $m_1 Du(0)$ і $m_1 Dv(0)$, спрямовані на точку відліку з координатами $(u(t), v(t))$. Тобто точці відліку можна надати початкові швидкості $Du(0)$ або $Dv(0)$ у напрямках відповідних координат Ox або Oy . Значення всіх величин в умовних одиницях.

Для опису динаміки переміщення гантелі з рухомою точкою відліку необхідно скласти та розв'язати систему рівнянь Лагранжа другого роду. За основу взято лагранжиан для математичного маятника. До узагальненої координати – кута відхилення маятника – ще необхідно додати дві узагальнені координати у вигляді у вигляді функцій опису руху точки відліку.

Спочатку за допомогою узагальнених координат обчислюємо «віртуальні» координати точки відліку:

$$x(t) = h \sin(w(t)) + u(t);$$

$$y(t) = h \cos(w(t)) - v(t); \tag{7}$$

За умови відсутності дисипативних сил опис руху гантелі на вертикальній площині можна обчислити за допомогою лагранжіана $L=T-P$. Вирази для кінетичної і потенціальної енергій мають вигляд ($g=9.81$):

$$T = \frac{m_1}{2} \left(\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right) + \frac{m_2}{2} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right); \quad (8)$$

$$P = -yg(2m_1 + m_2).$$

За допомогою лагранжіана $L=T-P$ опис руху гантелі одержано у вигляді системи з трьох диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду відносно функцій $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$.

$$m_2 h \cos(w) \frac{d^2 u}{dt^2} + m_2 h^2 \frac{d^2 w}{dt^2} + m_2 h \sin(w) \frac{d^2 v}{dt^2} + gh \sin(w)(2m_1 + m_2) = 0; \quad (9)$$

$$m_2 h \sin(w) \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + hm_2 \cos(w) \frac{d^2 w}{dt^2} + (m_1 + m_2) \frac{d^2 u}{dt^2} = 0;$$

$$hm_2 \cos(w) \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + hm_2 \sin(w) \frac{d^2 w}{dt^2} + (m_1 + m_2) \frac{d^2 v}{dt^2} + g(2m_1 + m_2) = 0.$$

При розв'язанні системи рівнянь (9) слід враховувати основні параметри гантелі. А саме, її довжину h та значення мас вантажів m_1 і m_2 . А також початкові умови: значення початкових зміщень точки відліку та кута відхилення $u(0)$, $v(0)$, $w(0)$. До цього необхідні значення початкових швидкостей, наданих точці зміщення та кута відхилення $Du(0)$, $Dv(0)$, $Dw(0)$.

З врахуванням відповідних початкових умов систему рівнянь Лагранжа другого роду розв'язано методом Рунге-Кутти в середовищі математичного пакету `maple`. Одержані наближені розв'язки позначено символами $U(t)$, $V(t)$, $W(t)$, які можуть мати вигляд послідовності `maple`-кодів. В обраний на площині системі координат Oxy з використанням наближених розв'язків визначаємо координати центрів мас вантажів гантелі в момент часу t . Для цього використовуємо вирази (7), формально замінивши там малі літери на великі: u на U , v на V , w на W .

Враховуючи обчислені координати центрів мас вантажів гантелі як функції в часі, було складено програму побудови кадрів комп'ютерної анімації процесу руху гантелі. На сайті [40] можна ознайомитися з варіантами комп'ютерних анімацій.

Далі наведемо приклади виконання програми. Однаковими для них будуть параметри гантелі $h=2$; $m_1=1$ і $m_2=1$. Нагадаємо, що згідно синтаксису мови `maple` вираз, наприклад, $Dw(0)$ означає значення похідної функції $w(t)$ в момент часу $t=0$. Варіанти обчислень будуть відрізнятися початковими умовами. Попередньо зазначмо, що побудувати траєкторії переміщення вантажів гантелі можливо при довільних значеннях миттєвих швидкостей $Dw(0)$ і $Du(0)=10$ як поча-

ткових умов. Наприклад, на рис. 10 наведено траєкторію руху для значень $Dw(0)=18$ і $Du(0)=13.5$.

Недолік траєкторії, побудованої з довільними значеннями миттєвих швидкостей полягає у її несиметричності відносно половини дистанції польоту гантелі. Це призведе до порушення рівномірності обертів гантелі, про що свідчить нерегулярна форми фазової траєкторії для узагальненої координати $v(t)$ (рис. 11). Тому в подальшому будемо зображувати траєкторії переміщення гантелі сумісно з відповідною фазовою траєкторією.

Приклад 1. $h=2$; $m_1=1$ і $m_2=1$. На рис. 12–16 зображені траєкторії переміщення вантажів гантелі при різних значеннях початкових умов. Щоб не завантажувати рисунок умовно буде позначено лише одне миттєве положення гантелі.

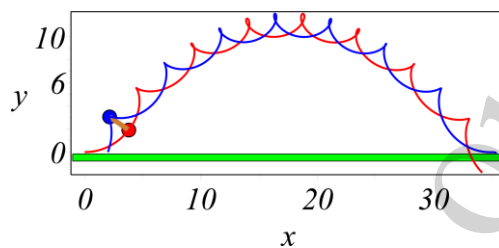


Рис. 10. Траєкторії руху для початкових умов: $w(0)=\pi/2$; $Dw(0)=18$; $u(0)=0$; $Du(0)=13.5$; $v(0)=0$; $Dv(0)=0$; $T=2.5$

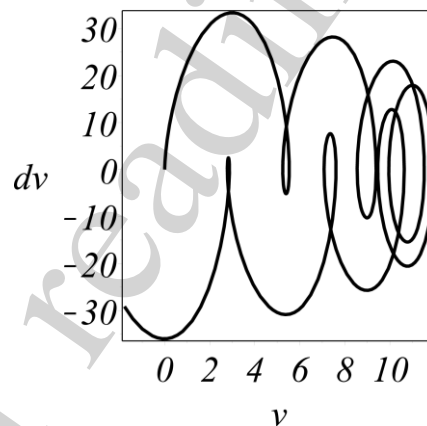


Рис. 11. Фазові траєкторії для узагальненої координати $v(t)$, яка відповідає значенням $Dw(0)=18$ і $Du(0)=13.5$.

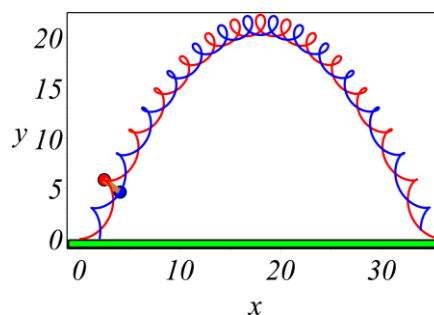


Рис. 12. Навісні траєкторії руху для початкових умов: $w(0)=\pi/2$; $Dw(0)=25$; $u(0)=0$; $Du(0)=10$; $v(0)=0$; $Dv(0)=0$; $T=3.4$

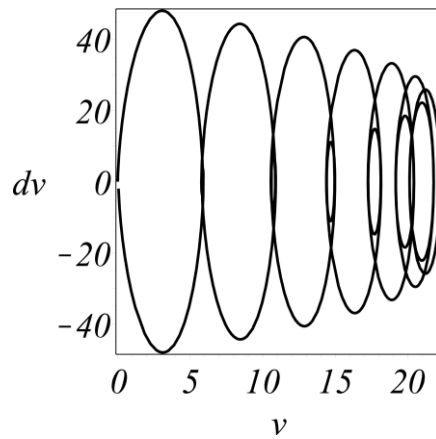


Рис. 13. Фазові траєкторії для узагальненої координати $v(t)$, яка відповідає значенням $Dw(0)=25$ і $Du(0)=10$

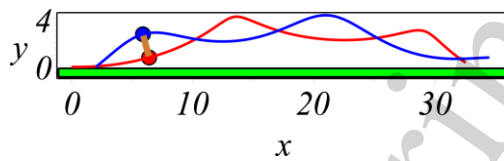


Рис. 14. Настільні траєкторії руху для початкових умов: $w(0)=\pi/2$; $Dw(0)=10$; $u(0)=0$; $Du(0)=25$; $v(0)=0$; $Dv(0)=0$; $T=1.4$

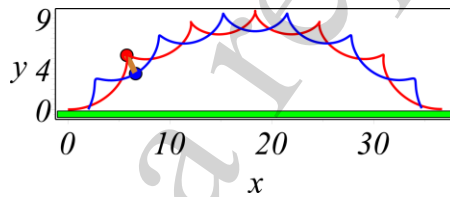


Рис. 15. Траєкторії руху для початкових умов: $w(0)=\pi/2$; $Dw(0)=16$; $u(0)=0$; $Du(0)=16$; $v(0)=0$; $Dv(0)=0$; $T=2.17$

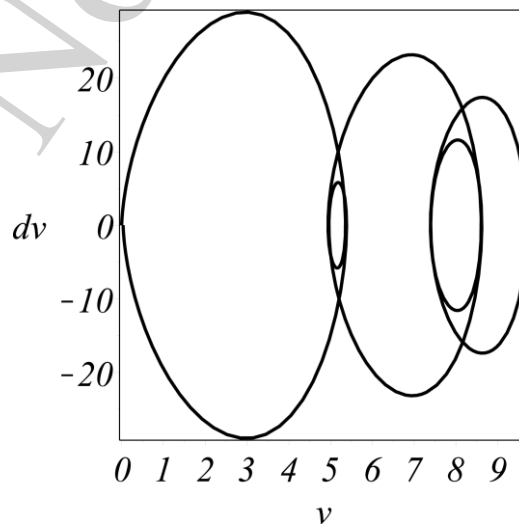


Рис. 16. Фазові траєкторії для узагальненої координати $v(t)$, яка відповідає значенням $Dw(0)=16$ і $Du(0)=16$

Результати прикладу 1 дозволяють зробити такі висновки:

1. Переміна місцями значень миттєвих швидкостей $Dw(0)=25$ і $Du(0)=10$ призводить до переходу від навісного до настільного способу доставки гантелі з різною кількістю її обертань.

2. Доставити гантель на відстань, наведену у прикладі 1, можливо і за умови однакових значень миттєвих швидкостей $Dw(0)=16$ і $Du(0)=16$.

3. Аналіз фазової траєкторії для узагальненої координати $v(t)$ дозволяє оцінити швидкості переміщення гантелі.

Приклад 2. Для параметрів $h=4$; $m_1=1$ і $m_2=1$ на рис. 17 зображено траєкторію руху гантелі з трьома однаковими початковими умовами – миттєвими швидкостями 9.25 умовних величин. Відповідна цьому випадку фазова траєкторія узагальненої координати $v(t)$ наведена на рис. 18.

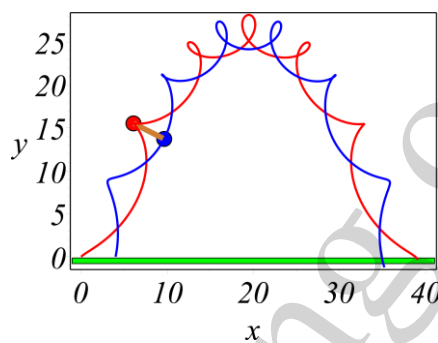


Рис. 17. Траєкторії руху для початкових умов $w(0)=\pi/2$; $Dw(0)=9.25$; $u(0)=0$; $Du(0)=9.25$; $v(0)=0$; $Dv(0)=9.25$

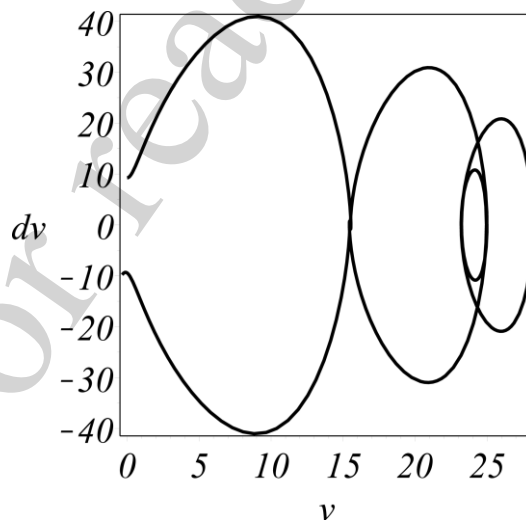


Рис. 18. Фазова траєкторія функції $v(t)$, що відповідає значенням $Dw(0)=Du(0)=Dv(0)=9.25$

В розглянутих прикладах наведено геометричне моделювання руху гантелі як переміщення двох окремих рознесених вантажів (кінцевих точок математичного маятника). Це не зовсім стосується поняття гантелі як єдиного цілого геометричного об'єкта. Було визначено траєкторії переміщення лише центрів мас вантажів.

Траєкторію переміщення центру масі всієї гантелі в цілому можна визначити посередньо за допомогою центрів мас вантажів. Все це впливає на адекватність геометричного моделювання впливу опору повітря на траєкторію переміщення всієї гантелі. Щоб позбутися цього недоліку необхідно визначити кінетичну і потенціальну енергії гантелі в цілому. Тоді рознесені вантажі будуть поєднані енергетично. Це приведе до більш адекватного комп'ютерного моделювання переміщення гантелі. І що головне - адекватного реагування на ініціювання її руху за допомогою вибухових імпульсів піропатронів, дія яких направлена на кінцеві точки гантелі. В тому числі - переміщення з врахуванням опору повітря.

5. 2. Розробка геометричної моделі обертово-поступального переміщення гантелі в просторі з врахуванням опору повітря

Наведемо варіант розрахунку, коли рознесені вантажі гантелі при русі будуть пов'язані між собою у вигляді гантелі як об'єкта. В цьому випадку будуть визначені траєкторії переміщення центрів мас вантажів і центру масі всієї гантелі в цілому. Це позитивно позначиться на адекватність геометричного моделювання впливу опору повітря на траєкторію переміщення всієї гантелі. У тому числі – і для різних значень мас вантажів гантелі.

За основу оберемо спосіб моделювання переміщення в межах вертикальної площини гантелі, який описано в роботах [34, 35] як поєднання в цілому двох рознесених мас вантажів. На рис. 19 зображено схему початкового положення гантелеподібного контейнера в системі координат Oxy . Контейнер складається з двох вантажів масами m_1 і m_2 , сполучених невагомим стержнем. Центр масі першого вантажу розташований в початку координат. Центр масі другого вантажу розташований на осі Ox на відстані h від першого (рис. 19).

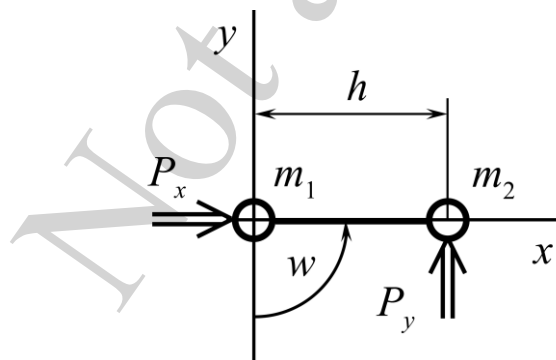


Рис. 19. Схема гантелеподібного контейнера

У якості узагальнених оберемо координати $x(t)$ і $y(t)$ першого вантажу, а також кут $w(t)$, який вісь гантелі утворює з від'ємною частиною осі Oy . Вважатимемо, що на масу m_1 діє вибуховий імпульс P_x , а на масу m_2 – одночасно з попереднім діє імпульс P_y . За допомогою символів початкове положення гантелі визначається так: $x(0)=0$; $Dx(0)=P_x$; $y(0)=0$; $Dy(0)=0$; $w(0)=0$; $Dw(0)=P_y$. Тут і далі всі величини в умовних одиницях ($g=9.81$). Опір повітря на даному етапі не враховується.

За допомогою узагальнених координат обчислюємо «віртуальні» координати центрів мас: для першого та другого вантажу, а також всієї гантелі в цілому:

$$x_1 = x(t); \quad y_1 = y(t);$$

$$x_2 = x(t) + h \sin w; \quad y_2 = y(t) - h \cos w; \quad (10)$$

$$x_C = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / (m_1 + m_2);$$

$$y_C = (m_1 y_1 + m_2 y_2) / (m_1 + m_2);$$

Для опису обертового руху гантелі використаємо лагранжіан $L=T-P$, де кінетична і потенціальна енергії обчислюються так [34, 35]:

$$T = 0.5m_1 \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) + 0.5m_2 \left(\frac{dx}{dt} + h \cos(w) \frac{dw}{dt} \right)^2 + \\ + 0.5m_2 \left(\frac{dy}{dt} + h \sin(w) \frac{dw}{dt} \right)^2; \quad (11)$$

$$P = m_1 y g + m_2 g (y - h \cos(w)). \quad (12)$$

Лагранжіан дозволяє скласти систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду відносно узагальнених координат $x(t)$, $y(t)$ і $w(t)$:

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 x}{dt^2} - h m_2 \sin(w) \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + h m_2 \cos(w) \frac{d^2 w}{dt^2} = 0;$$

$$g \sin(w) + \cos(w) \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{d^2 w}{dt^2} + \sin(w) \frac{d^2 y}{dt^2} = 0; \quad (13)$$

$$(m_1 + m_2) \left(g + \frac{d^2 y}{dt^2} \right) + h m_2 \cos(w) \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 + h m_2 \sin(w) \frac{d^2 w}{dt^2} = 0.$$

Розв'язувати систему рівнянь (13) будемо чисельним методом Рунге-Кутти в середовищі Maple. В якості значень параметрів оберемо відстань h між центрами мас вантажів; маси вантажів m_1 і m_2 , а також значення початкових умов $x(0)=0$; $y(0)=0$ і $w(0)=\pi/2$. Варіювати будемо значеннями миттєвих швидкостей $Dx(0)$; $Dy(0)$ і $Dw(0)$.

В результаті розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо в часі t наближені вирази для значень кута $W(t)$, а також для координат

першого вантажу $X(t)$ і $Y(t)$. Ці вирази можуть бути представлені у вигляді послідовності maple -операторів у формулах (10) для обчислення «віртуальних» координат центрів мас.

Наведемо послідовність графоаналітичного моделювання траєкторії руху гантелі з врахуванням опору повітря. При цьому будуть використані два поняття траєкторії.

Розрахунковою траєкторією назвемо слід переміщення центра мас всієї гантелі. Вона одержана як результат розв'язання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду, оснований на кінетичній і потенціальній енергіях руху.

Теоретичною траєкторією назвемо криву, одержану в результаті розв'язання системи диференціальних рівнянь руху точки, випущеної під кутом до горизонту. Вона характеризується такими основними параметрами: масою m точки, кутом A та швидкістю V_0 вильоту точки, а також, що головне, коефіцієнтом K опору повітря.

Зв'язок зазначених траєкторій розкривається в послідовності таких кроків.

Крок 1. За умови визначення лагранжіану після розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду будуємо дві траєкторії руху центрів мас обох вантажів гантелі, а також будуємо розрахункову траєкторію руху центру мас гантелі в цілому. При цьому вважаємо, що опір повітря відсутній, тобто коефіцієнт опору повітря $K=0$.

Крок 2. Одержане зображення розрахункової траєкторії центру мас гантелі дозволяє наближено визначити кут A вильоту гантелі, а також дальність d її польоту. Тут застосовується графічний спосіб досліджень.

Крок 3. За допомогою складеної maple -програми формуємо теоретичну траєкторію точкового вантажу, і використовуючи її аналітичний опис визначаємо (наближено) стартову швидкість V_0 вильоту гантелі. Тут застосовується аналітичний спосіб досліджень.

Крок 4. Далі слід здійснити формальну заміну – розрахункову траєкторією переміщення центру мас гантелі замінити на теоретичну траєкторію точкового вантажу і використати її особливість реагування на вплив коефіцієнту опору повітря.

Крок 5. Пов'яжемо координати центрів мас вантажів гантелі з відповідними координатами теоретичної траєкторії точкового вантажу. Оскільки теоретична траєкторія буде реагувати на зміну коефіцієнта K опору повітря, то на це зреагують і центри обох вантажів гантелі. В результаті цього одержимо траєкторію руху вантажів гантелі з врахуванням опору повітря.

Проілюструємо цю послідовність дій на прикладі. Значення всіх параметрів представлено в умовних величинах. Параметри підібрано навмисно перебільшено для зручності ілюстрацій графічних зображень.

Наведемо пояснення алгоритму «п'яти кроків». Нехай маємо гантель довжиною $h=5$ і з однаковими масами $m_1=25$ і $m_2=25$. Необхідно оцінити відстань, на яку можна доставити гантель при значеннях коефіцієнта опору повітря $K=5$ або $K=10$. Ініціювати рух гантелі будемо з такими початковими умовами: $x(0)=0$; $Dx(0)=8.23$, $y(0)=0$; $Dy(0)=0$ і $w(0)=\text{Pi}/2$, $Dw(0)=8.23$.

В результаті розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду будуюмо розрахункову траєкторію для значення $K=0$ коефіцієнта опору повітря, а також траєкторії руху центрів мас обох вантажів гантелі (рис. 20).

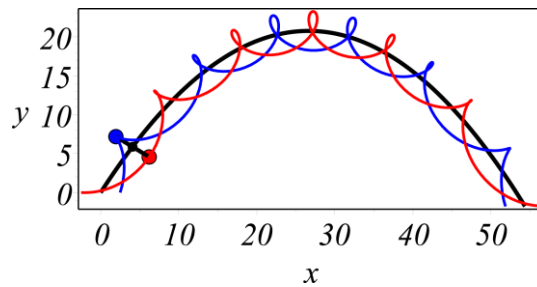


Рис. 20. Траєкторії руху центрів мас вантажів в усієї гантелі (час польоту 4,2 сек)

Відповідна цьому випадку для значення $K=0$ коефіцієнта опору повітря фазова траєкторія узагальненої координати $v(t)$ наведена на рис. 21. Її форма вказує на симетричність траєкторій центрів мас відносно середини дистанції доставки гантелі

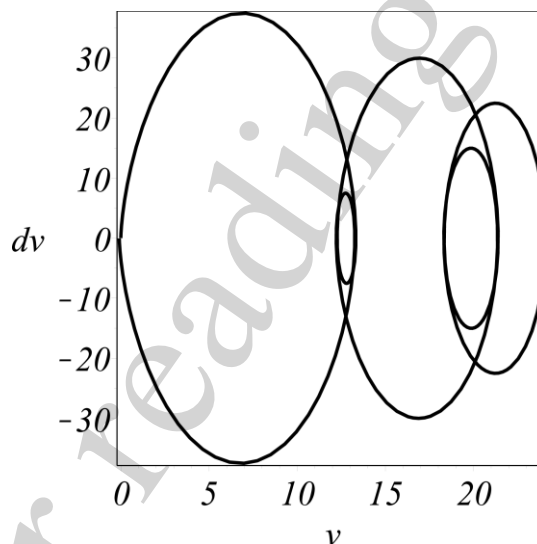


Рис. 21. Фазова траєкторія функції $y(t)$, що відповідає значенням $Dw(0)=Dx(0)=8.23$

Розрахункова траєкторія дозволяє наближено оцінити дальність польоту гантелі ($d=52$), а також кут її вильоту ($A=1.2$ rad). Оцінку величини кута здійснено за допомогою спеціально розробленої програми.

Для обчислення швидкості V_0 вильоту гантелі використаємо відомий [36, 37] опис теоретичної траєкторії польоту фізичної точки масою M з коефіцієнтом K опору повітря

$$X = \frac{V_0 M \cos A \left(-1 + \exp\left(-\frac{K t}{M}\right) \right)}{K}; \quad (14)$$

$$Y = -M \times \frac{Mg \left(\exp\left(-\frac{K t}{M}\right) \right) + V_0 K \sin A \left(\exp\left(-\frac{K t}{M}\right) \right) + gK t - Mg - V_0 K \sin A}{K^2}.$$

Тут $M=m_1+m_2$ – маса контейнера; A – кут метання, rad.

За допомогою складеної програми визначаємо теоретичну траєкторію польоту фізичної точки (рис. 22). Для цього обчислюємо (наближено) швидкість V_0 вильоту гантелі за умови, що розрахункова траєкторія (рис. 20) і теоретична траєкторія (рис. 22) не відрізнятимуться на процент значення наближення вздовж осі Oy . В розглянутому прикладі маємо $V_0=24$ умовних одиниць.

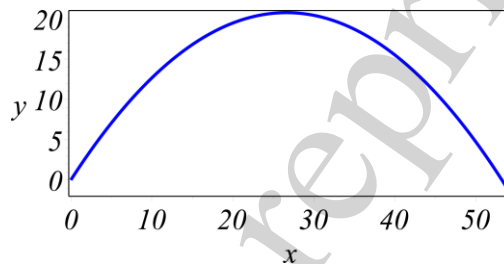


Рис. 22. Теоретична траєкторія польоту фізичної точки

Далі необхідно розрахункову траєкторією переміщення центру мас гантелі замінити на теоретичну траєкторію точкового вантажу. Тому що на форму останньої впливає коефіцієнт опору повітря. Для цього пов'яжемо координати центрів мас вантажів гантелі з відповідними координатами теоретичної траєкторії точкового вантажу.

Вирази для обчислення координат (X_1, Y_1) першого вантажу залежно від координат (X_C, Y_C) центра мас гантелі мають вигляд

$$X_1 = X_C + \frac{hm_2 \sin W}{m_1 + m_2}; \quad Y_1 = Y_C - \frac{hm_2 \cos W}{m_1 + m_2}, \quad (15)$$

Тут m_1 і m_2 – значення мас вантажів. Координати (X_2, Y_2) другого вантажу можна обчислити за формулами

$$X_2 = X_1 - h \sin W; \quad Y_2 = Y_1 + h \cos W; \quad (16)$$

В результаті зазначених дій одержимо зображення траєкторій переміщення вантажів гантелі для значень $K=10$ і $K=15$ коефіцієнтів опору повітря (рис. 23, 24).

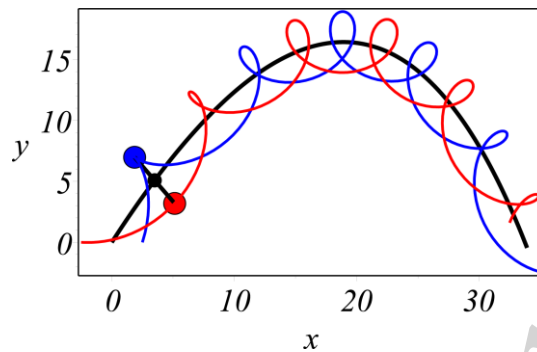


Рис. 23. Траєкторії переміщення гантелі для значення $K=10$ (час польоту 3,7 сек)

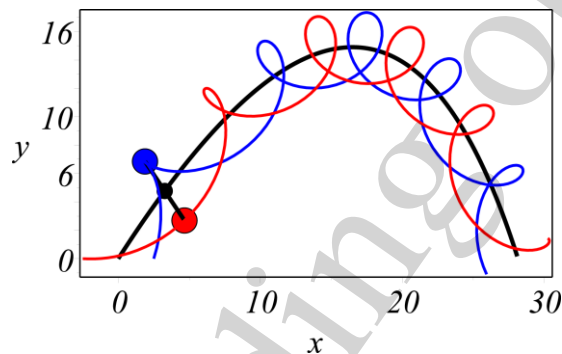


Рис. 24. Траєкторії переміщення гантелі для значення $K=15$ (час польоту 3,5 сек)

Отже, при значеннях обох вибухових імпульсів піропатронів 8.23 умовних одиниць і значеннях коефіцієнта опору повітря $K=0$; $K=5$ або $K=10$ одержано такі оцінки відстаней доставки гантелі: 52, 42 і 33 умовні величини. При цьому кут вильоту гантелі біля 45 градусів, а швидкість вильоту – 24 умовна величина.

Вище було розглянуто приклад, де значеннях обох вибухових імпульсів піропатронів і маси вантажів однакові. В подальших прикладах необхідно обрати різноманітні основні значення параметрів і переконатися, що зміни їх величин не призводять до протиріч.

Приклад 1. Значеннях обох вибухових імпульсів піропатронів однакові, а маси вантажів різні. Маємо $h=5$ з масами $m_1=25$ і $m_2=50$. Ініціювати рух гантелі будемо з такими початковими умовами: $x(0)=0$; $Dx(0)=16$, $y(0)=0$; $Dy(0)=0$ і $w(0)=\pi/2$, $Dw(0)=16$. На рис. 25–27 наведено результати геометричного моделювання.

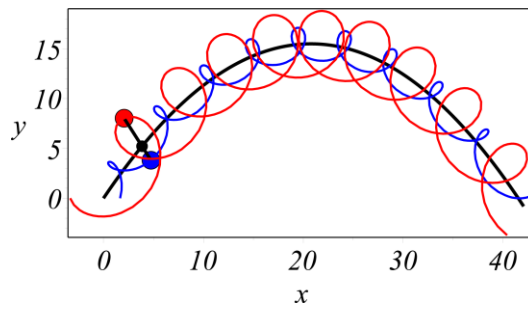


Рис. 25. Траєкторії переміщення гантелі для значення $K=0.05$ (час польоту 3,6 сек)

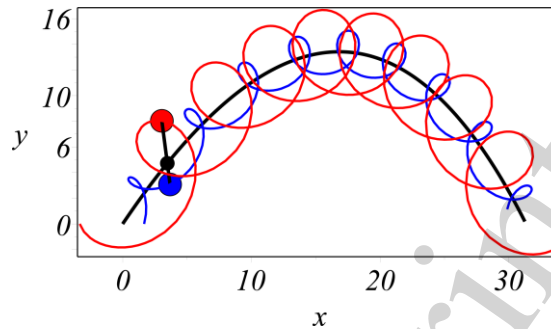


Рис. 26. Траєкторії переміщення гантелі для значення $K=10$ (час польоту 3,3сек)

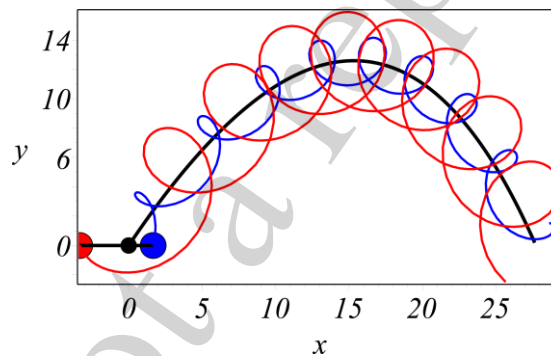


Рис. 27. Траєкторії переміщення гантелі для значення $K=15$ (час польоту 3,2 сек)

Отже, при значеннях обох вибухових імпульсів піропатронів 16 умовних одиниць і значеннях коефіцієнта опору повітря $K=0.05$; $K=5$ або $K=10$ одержано такі оцінки відстаней доставки гантелі: 42, 32 і 28 умовні величини. При цьому кут вильоту гантелі біля 44.8 градусів, а швидкість вильоту – 21 умовна величина. В разі геометричного моделювання при тих же значеннях, але з масами $m_1=50$ і $m_2=25$ одержимо результати, аналогічні попереднім.

Приклад 2. Значеннях обох вибухових імпульсів піропатронів різні, а маси вантажів однакові. Маємо $h=5$ з масами $m_1=50$ і $m_2=50$. Ініціювати рух гантелі будемо з такими початковими умовами: $x(0)=0$; $Dx(0)=16$, $y(0)=0$; $Dy(0)=0$ і $w(0)=\pi/2$, $Dw(0)=8.24$. На рис. 28–30 наведено результати геометричного моделювання.

На рис. 31–33 показано траєкторії гантелі для тих же значень параметрів, але коли взаємно замінити величини вибухових імпульсів піропатронів

$Dx(0)=8.24$ і $Dw(0)=16$. Що цікаво, час польоту і відстані доставки погоджуються з попередніми випадками.

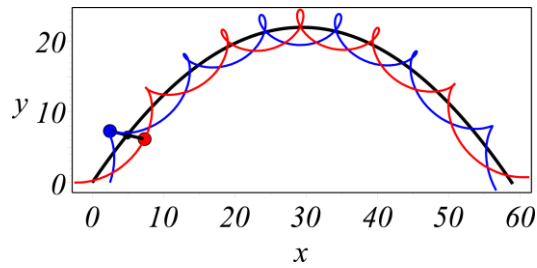


Рис. 28. Траєкторії переміщення гантелі для значення $K=0.05$ (час польоту 4,24 сек)

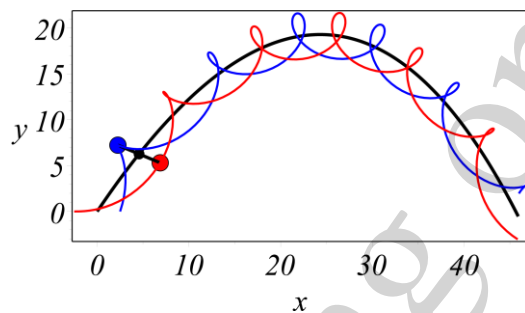


Рис. 29. Траєкторії переміщення гантелі для значення $K=10$ (час польоту 4 сек)

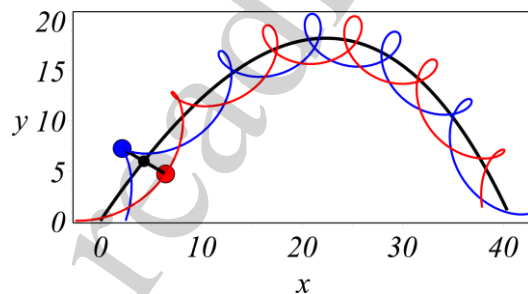


Рис. 30. Траєкторії переміщення гантелі для значення $K=15$ (час польоту 3.8 сек)

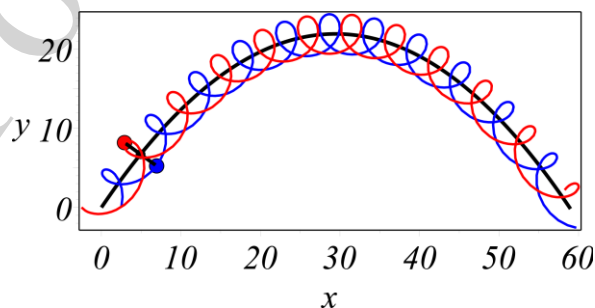


Рис. 31. Траєкторії переміщення гантелі для значення $K=0.05$ (час польоту 4,24 сек)

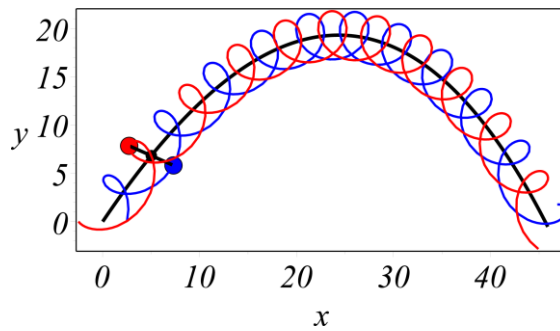


Рис. 32. Траєкторії переміщення гантелі для значення $K=10$ (час польоту 4 сек)

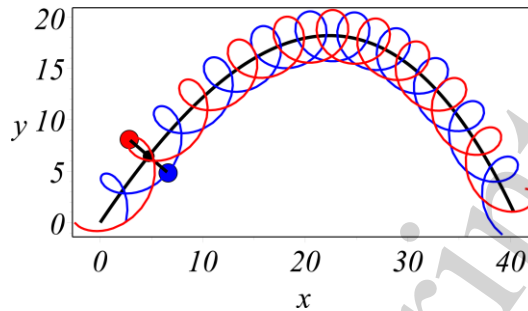


Рис. 33. Траєкторії переміщення гантелі для значення $K=15$ (час польоту 3.8 сек)

Отже, для мас $m_1=50$ і $m_2=50$ при значеннях вибухових імпульсів $dx(0)=16$ і $dw(0)=8.24$ умовних одиниць одержано наступне. При значеннях коефіцієнта опору повітря $K=0.05$; $K=10$ або $K=15$ одержано відповідні оцінки відстаней доставки гантелі: 60, 48 і 42 умовні величини. При цьому кут вильоту гантелі біля 45 градусів, а швидкість вильоту – 25 умовна величина. В разі взаємної заміни вибухових імпульсів піропатронів $Dx(0)=8.24$ і $Dw(0)=16$ при тих же значеннях одержимо відстані і часи доставки аналогічні попереднім. Відмінність полягає у більшій кількості обертів, які зробить гантель під час польоту. Значна частота обертання гантелі спричинить появу сигналу типу сирени, що сприятиме безпеці дій.

Приклад 3. Дослідимо вплив на траєкторії руху довжини гантелі h з врахуванням коефіцієнта опору повітря $K=15$ з масами $m_1=50$ і $m_2=50$. Ініціювати рух гантелі будемо з такими початковими умовами: $x(0)=0$; $Dx(0)=27$, $y(0)=0$; $Dy(0)=0$ і $w(0)=\pi/2$, $Dw(0)=5$. На рис. 34–36 наведено результати геометричного моделювання.

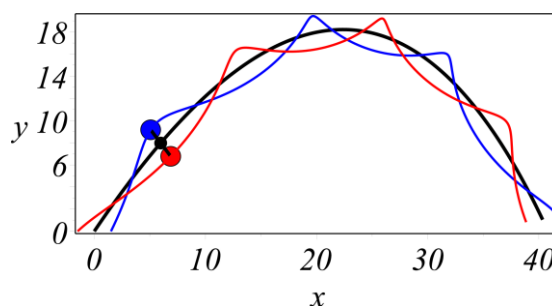


Рис. 34. Траєкторії переміщення гантелі для значення $h=3$ (час польоту 3,8 сек)

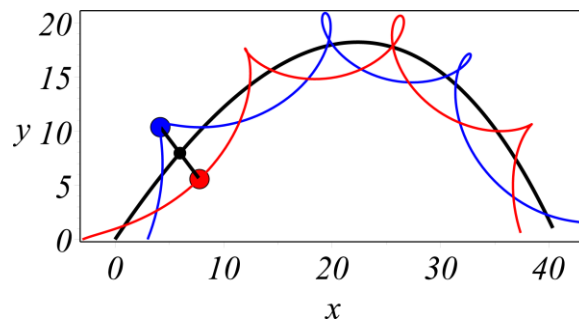


Рис. 35. Траєкторії переміщення гантелі для значення $h=6$ (час польоту 3,8 сек)

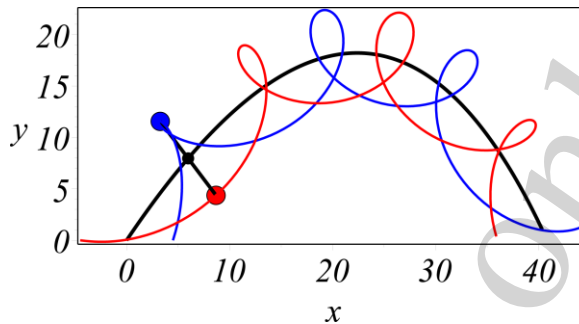


Рис. 36. Траєкторії переміщення гантелі для значення $h=9$ (час польоту 3,8 сек)

Отже, для мас $m_1=50$ і $m_2=50$, при значеннях вибухових імпульсів піропатронів $Dx(0)=27$ і $Dw(0)=5$ умовних одиниць одержано наступне. При значенні коефіцієнта опору повітря $K=15$ умовних величини показано, що незалежно від довжини гантелі відстань доставки і час польоту будуть однаковими. А саме – відстань 40 умовних величин, а час польоту – 3.8 сек. При цьому кут вильоту гантелі біля 45 градусів, а швидкість вильоту – 25 умовних величин.

5.3. Схема стартового пристрою для реалізації обертово-поступального руху контейнерів гантелеподібної форми

Стартовий пристрій призначений для ініціювання переміщення гантелі у просторі в межах вертикальної площини. Вважатимемо, що вантажі гантелі мають сферичні форми. Рухами руху пропонується використовувати вибухові імпульси піротехнічних пристроїв. Вибухову речовину бажано оформити у вигляді піропатрона (піроболта), спроможного створити спрямований вибуховий імпульс наперед заданої величини [38, 39]. Для цього необхідно передбачити у конструкції стартового пристрою затвори для кріплення піропатронів, а також спрямування вибухових імпульсів піропатронів на центри мас вантажів гантелі. На рис. 37 наведено схему стартової установки [18]. Вона має вигляд металевого кута з двома отворами, які показані в перетині вертикальною площиною.

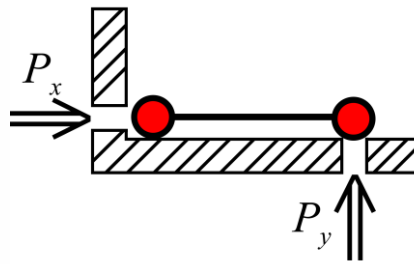


Рис. 37. Схема стартової установки у перетині нормальною площиною

Перед стартом гантель встановлюється на відповідні отвори. За допомогою одночасної дії вибухових імпульсів піропатронів утворюються імпульси P_x і P_y і гантель починає рухатись у вертикальній площині. Її рух матиме поступально-обертний вигляд і в польоті гантель обертатиметься навколо центра мас. Позначення умовних величин вибухових імпульсів піропатронів з врахуванням початкових умов, розглянутих вище, прийнято такі: $P_x = Dx(0)$ і $P_y = Dw(0)$. Щільність прилягання до отворів сферичних поверхонь вантажів гантелі забезпечується масами вантажів.

На рис. 38 наведено етапи старту гантелі та її польоту у просторі. Показані траєкторії руху центрів мас двох вантажів, а також траєкторію руху центру мас всієї гантелі в цілому. Анімацію процесу старту можна переглянути на сайті [40].

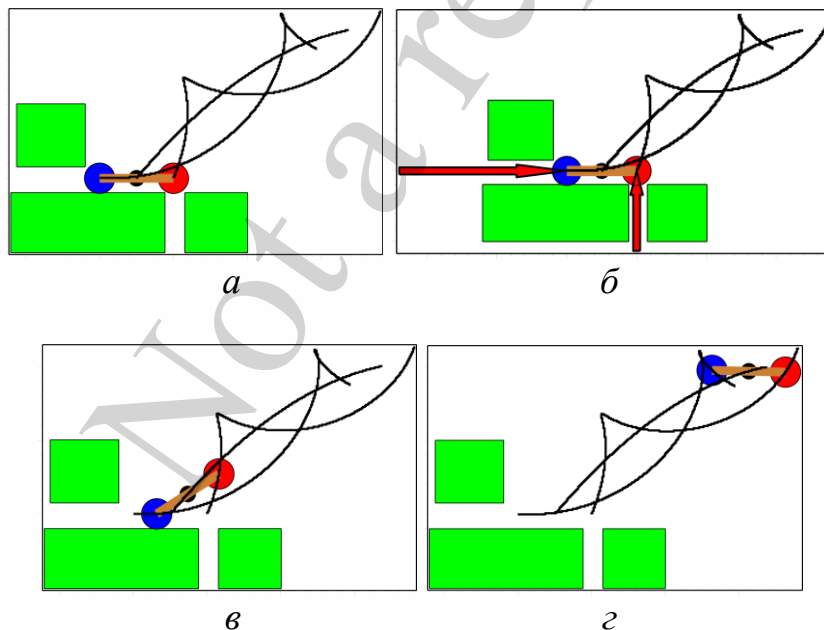


Рис. 38. Схематичні етапи старту гантелі: *а* – початкове положення гантелі; *б* – стрілками показані напрямки вибухових імпульсів піропатронів; *в* – початкова фаза польоту; *г* – поточна фаза польоту

Схему стартової установки можна модифікувати. Наприклад, виконавши її для трьох типів розмірів гантель. Для цього на горизонтальній частині схеми необхідно зробити три отвори, що відповідають довжинам трьох типів гантель.

Також необхідно сконструювати спеціальні затвори для піропатронів, які забезпечать безпеку використання стартової установки.

Зазначимо, що для такого стартового пристрою нема необхідності вкладати кошти в забезпечення його постійної готовності для доставки вогнегасної речовини на відстань. Крім того, такий пристрій не потребує тривалого розгортання, що особливо важливо для оперативних дій пожежних.

6. Обговорення результатів комп'ютерного моделювання руху гантелеподібного контейнера з врахуванням опору повітря

Запропонований спосіб віддаленої доставки вогнегасної речовини, упаковану в оболонку гантелеподібної форми, може скласти основу нової технології пожежогасіння. Про це свідчить нова схема запуску гантелі за допомогою вибухових імпульсів зарядів двох піропатронів.

Отримані результати можна пояснити можливістю застосувати варіаційний принцип Лагранжа до розрахунку механічних конструкцій з урахуванням кінематичних зв'язків та використанням енергії механічної системи. Моделювати рух гантелі з врахуванням опору повітря вдалося на базі поєднання результатів розв'язання двох системи диференціальних рівнянь. А саме, Лагранжа другого роду та рівнянь руху точкової маси, випущеної під кутом до горизонту. В роботі це реалізовано у вигляді алгоритму з п'яти кроків.

Для впровадження розглянутого способу в реальну практику протипожежних дій необхідно розв'язати наступні головні питання.

1. Обрати вид вибухової речовини і розробити заходи по її безпечній експлуатації. Вибухову речовину бажано оформити у вигляді піропатрона (піроболта), спроможного створити спрямований вибуховий імпульс наперед заданої величини.

2. Обрати матеріал для виготовлення корпусу гантелі. Він повинен бути міцним і протидіяти руйнуванню під час старту. А з іншого боку – який би легко руйнувався в зоні пожежі внаслідок удару або під впливом її температури.

3. Обрати ефективні вогнегасні речовини для доставки в зону пожежі у якості наповнювачів оболонок контейнера. Серед таких речовин можуть бути вогнегасний порошок, твердий двоокис вуглецю й металоорганічні з'єднання, екологічно чистий хладон, тощо.

4. Розробити зручну для використання конструкцію стартового пристрою для віддаленої доставки контейнера з вогнегасною речовиною. Розглянути можливість створення їх "батареї" – тобто поєднання декількох стартових пристроїв.

5. Розробити апаратну реалізацію далекоміра для визначення відстані до пожежі з одночасним обчисленням необхідних величин вибухових імпульсів для забезпечення доставки вогнегасної речовини на цю відстань.

6. Провести усестороннє випробування способу доставки речовини в оболонках гантелеподібної форми, що дозволить «відчути» допустимі розміри контейнерів і стартової установки. Це допоможе коректно перейти від умовних величин, що використовувались при розрахунках роботи, до реальних фізичних величин.

Труднощі розвитку досліджень в цьому напрямку пов'язані, в основному, з питаннями застосування вибухових речовин як основи способу доставки вогне-

гасної речовини до віддаленої зони пожежі. Істотним недоліком застосування вибухових речовин є підвищена небезпека при використанні снарядів з пороховими зарядами. Тому вважалось, що напрямок розвитку доставки вогнегасних речовин на віддалені відстані, несе погрозу вражаючих факторів при розриві або руйнуванні снаряда. Але такі загрози можна суттєво зменшити, коли у якості вибухових пристроїв використовувати піропатрони або піроболти, конструкції яких довели надійність і безпечність в космічних впровадженнях. Але в майбутньому доцільно розвивати розглянутий підхід у напрямку застосування інших можливих рушіїв. Наприклад – пневморушіїв чи гідрорушіїв, де б використовувалися стиснене повітря або стиснена рідина. Цікавими виглядають розробки і у напрямку електромагнітних рушіїв. В цьому бачиться шлях подальших досліджень.

7. Висновки

1. Спосіб розрахунків метання вантажів на великі відстані пояснено на прикладах двох варіантів механізмів требушет: коли вантажем противаги є транспортний засіб, а також коли противага переміщується вертикально. Для побудови траєкторії руху центра маси вантажу необхідно визначити лагранжیان, на його базі скласти та розв'язати систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду відносно функцій узагальнених координат. Траєкторію руху об'єкта утворять координати точок окремих одержаних розв'язків системи рівнянь.

2. Запропоноване графоаналітичне моделювання траєкторії обертово-поступального руху гантелі на базі поєднання результату розв'язання двох системи диференціальних рівнянь. А саме – Лагранжа другого роду та руху точкової маси, випущеної під кутом до горизонту. Це дозволило моделювати рух гантелі з врахуванням опору повітря. Одержано оцінки дальності польоту гантелі залежно від величин вибухових імпульсів піропатронів як засобів ініціювання її руху. Наприклад, для мас $m_1=50$ і $m_2=50$ при значеннях вибухових імпульсів $dx(0)=16$ і $dw(0)=8.24$ умовних одиниць маємо таке. При значеннях коефіцієнта опору повітря $K=0.05$; $K=5$ або $K=10$ одержано відповідні оцінки відстаней доставки гантелі: 60, 52 і 45 умовні величини. При цьому кут вильоту гантелі біля 45 градусів, а швидкість вильоту – 25 умовних величин. Обертово-поступальний рух контейнера дозволить використати енергію обертання для його руйнування наприкінці польоту і вивільнення вогнегасної речовини.

3. Запропоновано схему стартового пристрою для надання обертово-поступального руху контейнеру гантелеподібної форми. При цьому рушіями мають бути вибухові імпульси двох піропатронів, спрямовані на вантажі гантелі. Побудовані кадри комп'ютерної анімації руху гантелі [40] переконують в адекватності геометричної моделі способу доставки гантелеподібного об'єкта.

Література

1. Захматов, В. Д. (2011). Перспективные современные разработки техники для тушения лесных пожаров. Пожаровзрывобезопасность, 20 (2), 47–59.

2. Арцибашев, Е. С., Гусев, В. Г. (2002). Авиационные способы борьбы с лесными пожарами в условиях радиационного загрязнения радионуклидами. Гомель: АН Беларуси, 190.
3. Roponen, J. (2015). Simulating artillery fire in forest environment. Aalto University, 58.
4. Dullum, O. S., Fulmer, K., Jenzen-Jones, N. R., Lincoln-Jones, C., Palacio, D. G.; Jenzen-Jones, N. R. (Ed.) (2017). Indirect Fire: A technical analysis of the employment, accuracy, and effects of indirect-fire artillery weapons. Perth: Armament Research Services (ARES), 93.
5. Баланюк, В. М. (2016). Пожежогасіння серіями ударних хвиль. Проблеми пожежної безпеки, 40, 26–34.
6. Говаленков, С. В., Дубинин, Д. П. (2009). Применение взрывного способа для борьбы с лесными пожарами. Системи обробки інформації, 2 (76), 135–139.
7. Модернізована пожежна машина ГПМ-54-01. URL: <https://www.tank.lviv.ua/ua/productions/details/gpm5401>
8. Kovalev, O. O., Kalinovsky, A. Y., Polivanov, O. G. (2019). Development of individual aspects of container method of fire extinguishing. Fire Safety, 34, 35–42. doi: <https://doi.org/10.32447/10.32447/20786662.34.2019.06>
9. Ларін, О. М., Кривошей, Б. І., Поліванов, О. Г. (2018). Аналіз використання вогнегасних речовин та способів їх доставки для цілей пожежогасіння. Комунальне господарство міст, 7 (146), 146–150. doi: <https://doi.org/10.33042/2522-1809-2018-7-146-146-150>
10. Kovalenko, R., Kalynovskyi, A., Nazarenko, S., Kryvoshei, V., Grinchenko, E., Demydov, Z. et. al. (2019). Development of a method of completing emergency rescue units with emergency vehicles. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 4 (3 (100)), 54–62. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.175110>
11. Larin, O., Morozov, O., Nazarenko, S., Chernobay, G., Kalynovskyi, A., Kovalenko, R. et. al. (2019). Determining mechanical properties of a pressure fire hose the type of «Т». Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 6 (7 (102)), 63–70. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.184645>
12. Калиновський, А. Я., Коваленко, Р. І. (2017). Статистичне дослідження характеру небезпечних подій, які виникають в місті Харкові. Комунальне господарство міст, 135, 159–166.
13. Хілько, Ю. В., Мелещенко, Р. Г. (2017). Визначення параметрів вогнегасної ефективності викиду порошкових сумішей з контейнерів. Проблеми пожежної безпеки, 41, 196–200.
14. Сакун, О. В. (2018). Динамічні навантаження в газодетонаційних установках метання контейнерів з вогнегасники речовинами. Проблеми надзвичайних ситуацій, 27, 93–103.
15. Царев, А. М., Жуйков, Д. А. (2007). Механика действия перспективных огнетушащих составов в установках пожаротушения стволового типа контейнерной доставки методом метания. Известия Самарского научного центра РАН, 2, 458–464.

16. Царев, А. М., Жуйков, Д. А. (2007). Вопросы внешней баллистики полета контейнера для доставки огнетушащих составов в контейнерах методом метания с применением установок пожаротушения стволового типа. Известия Самарского научного центра РАН, 9 (3), 786–795.
17. Каришин, А. В., Царев, А. М., Жуйков, Д. А., Яковлев, Г. Г. (2007). Решение проблемы эффективности тушения пожаров с применением стволовых установок контейнерной доставки огнетушащих веществ. Пожаровзрывобезопасность, 16 (3), 72–82.
18. Куценко, Л. М., Калиновський, А. Я., Поліванов, О. Г. (2020). Геометричне моделювання способу метання для боротьби з пожежами. Прикладна геометрія та інженерна графіка, 98, 94–103. doi: <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2020.98.94-103>
19. Бабаєв, О. А., Кришталь, В. Ф. (2015). Теоретична механіка-3. Загальні теореми динаміки та елементи аналітичної механіки. К.: НТУУ “КПІ”, 82.
20. Егоров, А. Д., Потапова, И. А. (2020). Теорема Кёнига: Простой пример. doi: <http://doi.org/10.13140/RG.2.2.36728.39684>
21. Siano, D. B. (2013). Trebuchet Mechanics. URL: <http://www.algobeautytreb.com/trebmath356.pdf>
22. Mosher, A. (2009). A Mathematical Model for a Trebuchet. URL: [https://classes.engineering.wustl.edu/2009/fall/ese251/presentations/\(AAM_13\)Trebuchet.pdf](https://classes.engineering.wustl.edu/2009/fall/ese251/presentations/(AAM_13)Trebuchet.pdf)
23. Rutan, S., Wieczorec, B. (2005). Modern Siege Weapons: Mechanics of the Trebuchet. URL: <https://mse.redwoods.edu/darnold/math55/DEProj/sp05/bshawn/presentation.pdf>
24. Balazs, G. (2016). Mobile launching trebuchet for UAVS. 30-th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences. Daejeon, 1–7.
25. Balazs, G. (2015). UAV innovatív indítása – korszerű megoldás a közepkörből. Repulastudományi közlemények, 3, 37–50. URL: http://www.repulastudomany.hu/folyoirat/2015_3/2015-3-03-0229_Gati_Balazs.pdf
26. Куценко, Л. М., Семків, О. М., Калиновський, А. Я., Піксасов, М. М., Сухарькова, О. І. (2017). Геометричне моделювання мобільної установки для запуску безпілотних літальних апаратів. ScienceRise, 12, 57–62. doi: <https://doi.org/10.15587/2313-8416.2017.117920>
27. Bell, G. (2015). What is the ‘best’ trebuchet? URL: <http://grahambell.com.au/wpcontent/uploads/2017/11/GBellTrebuchetPaper2.pdf>
28. Higginbotham, S. (2014). Trebuchet Analysis. URL: <https://dokumen.tips/download/link/analysis-of-trebuchet>
29. Constans, E. (2017). A Lagrangian Simulation of the Floating-Arm Trebuchet. The College Mathematics Journal, 48 (3), 179–187. doi: <https://doi.org/10.4169/college.math.j.48.3.179>
30. How to Simulate a Trebuchet Part 3: The Floating-Arm Trebuchet. URL: http://www.benchtophybrid.com/How_to_Simulate_a_Trebuchet_Part3.pdf
31. Куценко, Л. М., Семків, О. М., Запольський, Л. Л. (2020). Модель розкриття чотириланкової стержневої конструкції з рухомою точкою відліку.

Сучасні проблеми моделювання, 17, 47–53. doi: <https://doi.org/10.33842/2313-125x/2019/17/47/53>

32. Куценко, Л. М., Запольський, Л. Л. (2018). Геометричне моделювання переміщення в невагомості чотириланкового маятника з рухомою точкою кріплення. Вісник Херсонського національного технічного університету, 3 (66), 153–158.

33. Mass matrix. Rotating dumbbell. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Mass_matrix

34. Rostamian, R. (2018). A Guided Tour of Analytical Mechanics with animations in MAPLE. Department of Mathematics and Statistics UMBC, 111.

35. Rostamian, R. (2018). MATH 490: Special Topics in Mathematics Analytical Mechanics. Fall 2018 Course information. URL: <https://userpages.umbc.edu/~rostantia/2018-09-math490/>

36. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Законы подобия. URL: https://lawbooks.news/informatika_961/dvijenie-tela-broshennogo-pod-uglom-gorizontu-69582.html

37. Движение тела в поле тяжести с учётом сопротивления воздуха. URL: <https://glebgrenkin.blogspot.com/2014/03/blog-post.html>

38. Буянова, Л. В., Журавлёв, Е. И. (2015). Методика проектирования пиротехнических устройств систем отделения. Инженерный вестник, 7, 56–62.

39. Пиротехническое устройство для создания ударных воздействий. URL: <https://findpatent.ru/patent/239/2394217.html>

40. Куценко, Л. М., Калиновський, А. Я., Поліванов, О. Г. (2020). Анімаційні ілюстрації до статті "Комп'ютерне моделювання нової технології віддаленої доставки засобів гасіння пожеж". URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/10860>