

## Гомогенізація різномодульних композитів при їх поздовжньому деформуванні

С. М. Гребенюк, Т. М. Смолянкова, М. І. Клименко, О. В. Кудін

*Запропоновано модель гомогенізації трансверсально-ізотропного композитного матеріалу, механічні характеристики якого при поздовжньому розтягу та стиску відрізняються між собою. На її основі отримано поздовжній модуль пружності першого роду та коефіцієнт Пуассона для різномодульного композиту. Ці показники необхідні для проектування елементів конструкцій, що виготовляються з композитів. Об'єктом дослідження є односпрямований волокнистий композит, що складається з ізотропних пружних матриці та волокна. Для визначення ефективних пружних сталей пропонується підхід, що ґрунтується на використанні умов узгодження переміщень точок гомогенованого композиту, матриці та волокна.*

*Спочатку визначаються переміщення та напруження для точок матриці та волокна при їх сумісному осесиметричному розтягу. Для розв'язання цієї задачі попередньо отримано рівняння різномодульної теорії пружності. Аналогічні компоненти напружено-деформованого стану визначаються при такому ж деформуванні циліндричної комірки з однорідного трансверсально-ізотропного композиту. Умовами узгодженості переміщень, отриманих при розв'язанні вказаних задач, є рівність осьових переміщень у довільному перерізі композиту площиною, паралельною площині ізотропії, та радіальних переміщень на поверхні комірки композиту. У результаті використання цих умов отримано формули для ефективних констант – поздовжнього модуля пружності першого роду та коефіцієнта Пуассона, що виражають ці показники через механічні характеристики матриці та волокна, а також частку волокна у об'ємі комірки композита. Аналогічні формули отримано для поздовжнього стиску.*

*Отримані ефективні пружні характеристики трансверсально-ізотропного композиту можуть бути використані при розрахунку напружено-деформованого стану виготовлених з нього елементів конструкцій. При цьому враховуються відмінності у значеннях напружень та деформацій при осьових розтягу та стиску*

*Ключові слова: гомогенізація, різномодульний трансверсально-ізотропний композит, напруження, переміщення, деформації, ефективні сталі*

### 1. Вступ

Вимоги технічного прогресу породжують необхідність створення нових конструкційних матеріалів, серед яких важливе місце займають композити. Застосування композитних матеріалів дозволяє оптимізувати техніко-експлуатаційні властивості виготовлених з них конструкцій.

Розрахунок напружено-деформованого стану волокнистого композиту як системи волокон, армованих матрицею, є неможливим з-за величезної кількості таких включень. У зв'язку з цим виникає потреба у гомогенізації композитного матеріалу. Отримані при цьому ефективні фізико-механічні характеристики використовують при проектуванні та розрахунку конструкцій, виготовлених з композитів.

У сучасній техніці набувають широкого застосування композити, фізико-механічні характеристики яких при розтягу та стиску відрізняються між собою. Такі матеріали називають різномодульними (бімодульними), оскільки їх пружні константи, що пов'язують напруження та деформації, мають при розтягу та стиску різні значення. Різнномодульний матеріал проявляє різні пружні властивості у різних напрямках у залежності від знаків головних напружень. На сьогодні ефективні характеристики різномодульних композитів визначаються шляхом статистичної обробки експериментальних даних. Такий шлях потребує значних витрат. У зв'язку з цим актуальною видається задача побудови математичних моделей для визначення ефективних характеристик різномодульних композитів. Застосування математичного моделювання дозволяє уникнути додаткових витрат на проведення експериментів. Знання ефективних пружних сталей для різномодульних композитів дозволить розв'язувати задачу визначення компонентів їх напружено-деформованого стану, що створює можливості для успішного застосування цих матеріалів на практиці. Тому дослідження, спрямовані на отримання їх ефективних механічних характеристик, є актуальними.

## **2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми**

У роботах [1–7] задача гомогенізації волокнистих композитів без врахування їх різномодульності розв'язана для матриці та волокна різних типів. Тут розглянуті композиційні матеріали з анізотропними, пластичними, в'язкопружними компонентами. Зокрема, у [1] запропоновані формули для пружних характеристик волокнистого композита з ізотропною матрицею та трансверсально-ізотропним волокном, відмінності у цих характеристиках при розтягу та стиску не враховувались. Гомогенізація в'язкопружних композитів розглянута у [2–6]. У [2] використано асимптотичний підхід до гомогенізації композитів без врахування явища різномодульності. Аналогічне спрощення застосоване у [3] при гомогенізації композитів, для описання їх в'язкопружних властивостей використано модель Кельвіна-Фойгта. У роботі [4] чисельне моделювання в'язкопружних властивостей анізотропних композитів також здійснювалось при спрощуючому припущенні про незмінність їх механічних характеристик при деформуванні розтягу та стиску. У дослідженні [5] визначено ефективний поздовжній модуль пружності для в'язкопружного трансверсально-ізотропного композиту на основі узгодження переміщень гомогенізованого композиту та його складових. Ці переміщення визначалися без врахування явища різномодульності. Публікація [6] містить огляд аналітичних мікромеханічних моделей пружнопластичних композитів, проте тут відсутні моделі, де враховуються відмінності між механічними характеристиками композитів при деформуванні розтягу та стиску. Дослідження [7] висвітлює модель асимптотичної гомогенізації композиту з врахуванням пластичних деформа-

цій його компонентів на основі варіаційного підходу. Тут теж явище різномодульності не враховувалося.

Основи класичної різномодульної теорії пружності викладені у монографії [8]. Тут наведені основні припущення та рівняння для напружено-деформованого стану однорідних матеріалів з механічними характеристиками, що відрізняються між собою при розтягу та стиску, викладені основні співвідношення різномодульної теорії пружності, що використовуються у нашій статті. У роботі [9] отримані рівняння різномодульної теорії пружності, що ґрунтуються на припущенні про сталість модуля зсуву та залежність об'ємного модуля пружності від першого інваріанта тензора напружень. Проте тут відсутнє дослідження можливостей застосування цих рівнянь для розв'язання задачі гомогенізації волокнистих композитів. У цих публікаціях розглядається однорідний різномодульний матеріал. У [10, 11] на основі експериментальних даних доводиться наявність властивості різномодульності у різних типів зернистих композитів, проте не розроблено математичні моделі, що враховують цю властивість. У [12] пропонується математична модель ізотропного різномодульного тіла, яке вважається однорідним. Її застосування для дослідження композитних матеріалів тут не розглянуто. У статті [13] досліджуються механічні властивості різномодульного залізобетону, проте не пропонуються математичні моделі для його гомогенізації. Огляд вказаних вище досліджень свідчить, що роботи, де визначаються ефективні механічні характеристики волокнистих композитів з врахуванням властивості різномодульності, на сьогодні практично відсутні. У [14] пропонується математична модель гомогенізації різномодульного трансверсально-ізотропного волокнистого композиту при поперечному деформуванні. На її основі визначено ефективний поперечний модуль пружності для різномодульного композиту при розтягу та стиску. Різнномодульність матеріалів враховується шляхом застосування відповідних моделей ізотропного та трансверсально-ізотропного матеріалів. Визначальні рівняння для них побудовано по аналогії з основними співвідношеннями різномодульної теорії пружності. У [14] визначена лише одна з п'яти пружних сталих, що визначають механічні властивості композиту для деформацій розтягу та стиску.

Здійснений аналіз публікацій щодо гомогенізації композитів свідчить про те, що нерозв'язаною залишається задача визначення всіх ефективних сталих, що характеризують різномодульні механічні властивості трансверсально-ізотропного композиту. Зокрема, відсутні формули для визначення ефективного поздовжнього модуля пружності, модуля зсуву і коефіцієнтів Пуассона для розтягу та стиску волокнистого композиту з трансверсально-ізотропними властивостями.

### **3. Мета та завдання дослідження**

Метою дослідження є визначення ефективних пружних сталих – поздовжнього модуля пружності першого роду та коефіцієнта Пуассона для різномодульного трансверсально-ізотропного волокнистого композиту. Це дасть можливість їх використання при розв'язанні практичних задач статички і динаміки деталей та конструкцій, виготовлених з різномодульних композиційних матеріалів.

Досягнення мети дослідження передбачає вирішення наступних завдань:

– розробку методики гомогенізації трансверсально-ізотропного композиту, яка враховує відмінності його механічних властивостей при поздовжньому розтягу та стиску та ґрунтується на використанні кінематичних умов узгодження переміщень точок композиту та його складових елементів;

– розв’язання допоміжних задач про визначення переміщень матриці та волокна при їх сумісному поздовжньому розтягу та стиску, а також визначення переміщень точок однорідного трансверсально-ізотропного композиту при його поздовжньому деформуванні;

– отримання формул для ефективних значень поздовжнього модуля пружності першого роду та коефіцієнта Пуассона у площині ізотропії волокнистого композиту при розтягу та стиску;

– застосування отриманих формул для гомогенізації різномодульного композиту.

#### **4. Методика гомогенізації різномодульного трансверсально-ізотропного композиту при поздовжньому розтягу та стиску**

Пропонується методика визначення ефективних пружних сталих трансверсально-ізотропного різномодульного волокнистого композиту при розтягу та стиску, що ґрунтується на застосуванні кінематичних умов узгодження переміщень композиту та його складових. Її сутність полягає у наступному.

На першому етапі розв’язуємо допоміжну задачу про деформування матриці та волокна при поздовжньому розтягу та стиску представницької комірки композиту і знаходимо їх осьові та радіальні переміщення.

На другому етапі розв’язується допоміжна задача про знаходження осьових та радіальних переміщень точок однорідного композиту при його поздовжньому розтягу та стиску.

На третьому етапі для кожного типу деформування визначаються значення ефективних пружних сталих – поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона. Поздовжній модуль пружності знаходимо, прирівнюючи осьові переміщення точок однорідного композиту та матриці (останні співпадають з осьовими переміщеннями точок волокна), отримані при розв’язанні допоміжних задач. Окремо розглядаємо випадки розтягу та стиску. Ефективні значення коефіцієнта Пуассона для розтягу та стиску знаходимо з умови рівності відповідних радіальних переміщень на поверхні комірки композиту, знайдених при розв’язанні першої та другої допоміжних задач.

Модифікація даної методики без врахування явища різномодульності була використана для гомогенізації в’язкопружних композитів у дослідженні [5].

Нехай комірка волокнистого односпрямованого композиту складається з ізотропних пружних різномодульних матриці та волокна. До складу комірки входять суцільний циліндр, що моделює волокно, та порожнистий циліндр матриці.

Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона при розтягу позначимо  $E_+$  та  $\nu_+$ , при стиску – відповідно  $E_-$  та  $\nu_-$ . У матеріалі волокна діє стале рівномірно розподілене по ньому напруження  $\sigma_+^0 > 0$  у напрямі осі  $z$ . Ця вісь співпадає з віссю циліндра, що апроксимує комірку композита. Аналогічне напруження

$\sigma_+^* > 0$ , що діє у матеріалі матриці, підберемо таким чином, щоб осьові переміщення матриці та волокна співпадали для довільного перерізу  $z = h = \text{const}$ .

У подальшому будемо використовувати основні передумови та припущення різномодульної теорії пружності, а також її основні рівняння, викладені та обґрунтовані у монографії [8]. Зокрема, припускається, що при поздовжньому осесиметричному деформуванні (розтягу або стиску) у осьовому напрямку нормальні напруження у циліндричній системі координат комірки композита є головними напруженнями (дотичні напруження дорівнюють нулю). При цьому координатні осі циліндричної системи координат є головними осями. При розтягу радіальне та тангенціальне напруження є від'ємними, а осьове напруження – додатне. При стиску знаки головних напружень змінюються на протилежні. Тому закон Гука для ізотропних компонент композиту застосовується у вигляді, аналогічному [8].

Для поздовжнього розтягу комірки композита у напрямку координати  $z$  формули закону Гука у прямій формі для ізотропного тіла матимуть вигляд:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_-} (\sigma_r - \nu_- (\sigma_\theta + \sigma_z)), \quad (1)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_-} (\sigma_\theta - \nu_- (\sigma_r + \sigma_z)), \quad (2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_+} (\sigma_z - \nu_+ (\sigma_r + \sigma_\theta)). \quad (3)$$

Виразивши напруження через деформації, отримаємо формули закону Гука у зворотній формі:

$$\sigma_r = \frac{1}{\Delta} (E_- (1 - \nu_- \nu_+) \varepsilon_r + E_- \nu_- (1 + \nu_+) \varepsilon_\theta + E_+ \nu_- (1 + \nu_-) \varepsilon_z), \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\Delta} (E_- \nu_- (1 + \nu_+) \varepsilon_r + E_- (1 - \nu_+ \nu_-) \varepsilon_\theta + E_+ \nu_- (1 + \nu_-) \varepsilon_z), \quad (5)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\Delta} (E_- \nu_+ (1 + \nu_-) \varepsilon_r + E_- \nu_+ (1 + \nu_-) \varepsilon_\theta + E_+ (1 - (\nu_-)^2) \varepsilon_z). \quad (6)$$

У формулах (4)–(6)  $\Delta = (1 + \nu_-)(1 - \nu_- - 2\nu_+ \nu_-)$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  – нормальні переміщення у напрямку координатних осей  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  циліндричної системи координат,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_z$  – лінійні деформації у напрямі цих осей.

Розбіжності між класичною та різномодульною теоріями пружності містяться лише у співвідношеннях між напруженнями та деформаціями, інші ос-

новні рівняння теорії пружності виконуються у обох випадках [8]. Розглянемо осесиметричний напружено-деформований стан циліндричного тіла під дією розтягуючого напруження  $\sigma$ , що діє у напрямку осі  $z$ . Тоді у його точках  $\sigma_z = \sigma$ ,  $\sigma_r = \sigma_r(r)$ ,  $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$ ,  $\tau_{zr} = \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0$ . Формули Коші набувають вигляду:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{du_z}{dz} = \text{const.} \quad (7)$$

Тут  $u_r$  та  $u_z$  – відповідно радіальне та осьове переміщення. Використовуючи формули закону Гука в зворотній формі і формули Коші, рівняння рівноваги

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (8)$$

запишемо у переміщеннях. Воно набуває вигляду:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \quad (9)$$

Рівняння (7)–(9) для класичної та різномодульної теорій пружності співпадають [8].

Радіальне переміщення  $u_r(r)$ , що є розв'язком рівняння (9), має вигляд:

$$u_r(r) = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r}, \quad (10)$$

де  $C_1$  та  $C_2$  – сталі, що визначаються з крайових умов.

## 5. Сумісне деформування волокна та матриці при поздовжньому розтягу

Розглянемо сумісне деформування матриці та волокна при поздовжньому розтягу. На комірку діє розтягуюча сила, що створює у її точках сталі напруження  $\sigma_+^0 > 0$  для волокна,  $\sigma_+^* > 0$  для матриці.

Запишемо переміщення, деформації та напруження для матриці та волокна, використовуючи формули Коші та закон Гука. Для матриці отримуємо рівності:

$$u_r^* = B_1 \cdot r + \frac{B_2}{r}, \quad \varepsilon_r^* = B_1 - \frac{B_2}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta^* = B_1 + \frac{B_2}{r^2}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_z^* = \frac{\sigma_+^* (1 - \nu_-^* - 2\nu_-^* \nu_+^*)}{E_+^* (1 - \nu_-^*)} - \frac{2E_-^* \nu_+^* B_1}{E_+^* (1 - \nu_-^*)}, \quad (12)$$

$$\sigma_r^* = \frac{E_-^*}{(1-\nu_-^*)} \cdot B_1 - \frac{E_-^*}{(1+\nu_-^*)} \cdot \frac{B_2}{r^2} + \frac{\nu_-^*}{(1-\nu_-^*)} \cdot \sigma_+^*. \quad (13)$$

Радіальне переміщення та напруження у точках волокна, а також лінійні деформації у цих точках, мають вигляд:

$$u_r^\circ = A_1 \cdot r, \quad \varepsilon_r^\circ = A_1, \quad \varepsilon_\theta^\circ = A_1, \quad (14)$$

$$\varepsilon_z^\circ = \frac{\sigma_+^\circ (1-\nu_-^\circ - 2\nu_-^\circ \nu_+^\circ)}{E_+^\circ (1-\nu_-^\circ)} - \frac{2E_-^\circ \nu_+^\circ A_1}{E_+^\circ (1-\nu_-^\circ)}, \quad (15)$$

$$\sigma_r^\circ = \frac{E_-^\circ}{(1-\nu_-^\circ)} \cdot A_1 + \frac{\nu_-^\circ}{(1-\nu_-^\circ)} \cdot \sigma_+^\circ. \quad (16)$$

За наявності ідеального контакту на межі розділу матриці та волокна виконуються умови неперервності нормальних складових переміщень та напружень. Зовнішня поверхня комірки композиту вільна від напружень. Тому крайові умови для задачі про сумісне деформування матриці та волокна мають вигляд:

$$\sigma_r^*(a) = \sigma_r^\circ(a), \quad u_r^*(a) = u_r^\circ(a), \quad u_z^*(h) = u_z^\circ(h), \quad \sigma_r^*(b) = 0. \quad (17)$$

Використовуючи умови (17), отримаємо систему для визначення невідомих  $A_1, B_1, B_2$  та співвідношення між  $\sigma_+^\circ$  та  $\sigma_+^*$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_-^*}{(1-\nu_-^*)} \cdot B_1 - \frac{E_-^*}{(1+\nu_-^*)} \cdot \frac{B_2}{r^2} + \frac{\nu_-^*}{(1-\nu_-^*)} \cdot \sigma_+^* = \frac{E_-^\circ}{(1-\nu_-^\circ)} \cdot A_1 + \frac{\nu_-^\circ}{(1-\nu_-^\circ)} \cdot \sigma_+^\circ, \\ B_1 \cdot a + \frac{B_2}{a} = A_1 \cdot a, \\ \frac{\sigma_+^* (1-\nu_-^* - 2\nu_-^* \nu_+^*)}{E_+^* (1-\nu_-^*)} - \frac{2E_-^* \nu_+^* B_1}{E_+^* (1-\nu_-^*)} = \frac{\sigma_+^\circ (1-\nu_-^\circ - 2\nu_-^\circ \nu_+^\circ)}{E_+^\circ (1-\nu_-^\circ)} - \frac{2E_-^\circ \nu_+^\circ A_1}{E_+^\circ (1-\nu_-^\circ)}, \\ \frac{E_-^*}{(1-\nu_-^*)} \cdot B_1 - \frac{E_-^*}{(1+\nu_-^*)} \cdot \frac{B_2}{b^2} + \frac{\nu_-^*}{(1-\nu_-^*)} \cdot \sigma_+^* = 0. \end{array} \right. \quad (18)$$

Із другого рівняння системи матимемо:

$$A_1 = B_1 + \frac{B_2}{a^2}. \quad (19)$$

З останнього рівняння системи знаходимо:

$$B_1 = \frac{1 - v_-^*}{1 + v_-^*} \cdot \frac{B_2}{b^2} - \frac{v_-^*}{E_-^*} \cdot \sigma_+^* \quad (20)$$

З врахуванням (20) умова (19) набуває вигляду:

$$A_1 = B_2 \cdot \left( \frac{f(1 - v_-^*) + (1 + v_-^*)}{a^2(1 + v_-^*)} \right) - \frac{v_-^*}{E_-^*} \cdot \sigma_+^* \quad (21)$$

Із першої рівності (17) маємо:

$$\frac{E_-^o}{(1 - v_-^o)} \cdot \left( \frac{v_-^o \sigma_+^o}{E_-^o} - \frac{v_-^* \sigma_+^*}{E_-^*} \right) = \frac{B_2}{a^2} \cdot \left( \frac{E_-^*(f - 1)}{(1 + v_-^*)} - \frac{E_-^o(f(1 - v_-^*) + (1 + v_-^*))}{(1 - v_-^o)(1 + v_-^*)} \right) \quad (22)$$

Нехай  $f = \frac{a^2}{b^2}$  – відносна об'ємна частка волокна у композиті.

З рівності (22) знаходимо:

$$B_2 = \left( \frac{v_-^o \sigma_+^o}{E_-^o} - \frac{v_-^* \sigma_+^*}{E_-^*} \right) \frac{a^2 E_-^o (1 + v_-^*)}{E_-^*(f - 1)(1 - v_-^o) - E_-^o(f(1 - v_-^*) + (1 + v_-^*))} \quad (23)$$

Введемо позначення:

$$d_1 = E_-^*(f - 1)(1 - v_-^o),$$

$$d_2 = E_-^o(f(1 - v_-^*) + (1 + v_-^*)). \quad (24)$$

Тоді

$$B_2 = \frac{v_-^o a^2 (1 + v_-^*)}{d_1 - d_2} \cdot \sigma_+^o - \frac{a^2 E_-^o (1 + v_-^*)}{d_1 - d_2} \cdot \frac{v_-^*}{E_-^*} \cdot \sigma_+^*, \quad (25)$$

$$A_1 = \frac{d_2}{d_1 - d_2} \cdot \frac{v_-^o}{E_-^o} \sigma_+^o - \frac{v_-^*}{E_-^*} \cdot \frac{d_1}{d_1 - d_2} \cdot \sigma_+^*, \quad (26)$$

$$B_1 = \frac{f v_-^o (1 - v_-^*)}{d_1 - d_2} \cdot \sigma_+^o - \frac{v_-^*}{E_-^*} \cdot \frac{(f E_-^o (1 - v_-^*) + d_1 - d_2)}{d_1 - d_2} \cdot \sigma_+^*. \quad (27)$$

З третьої рівності (17) знаходимо співвідношення між  $\sigma_0^*$  та  $\sigma_0^o$ :



$$\left( \frac{(1 - 2v_-^{\circ}v_+^{\circ} - v_+^{\circ})(d_1 - d_2)}{E_+^{\circ}(1 - v_+^{\circ})} - \frac{2v_-^{\circ}v_+^{\circ}d_2}{E_+^{\circ}(1 - v_+^{\circ})} + \frac{2fv_+^{\circ}v_+^*}{1} \right) \sigma_0^{\circ} =$$

$$= \left( \frac{(1 - 2v_-^*v_+^* - v_+^*)(d_1 - d_2)}{E_+^*(1 - v_+^*)} + \frac{2v_-^*v_+^*(fE_+^{\circ}(1 - v_+^*) + d_1 - d_2)}{E_+^*(1 - v_+^*)} - \frac{2v_-^*v_+^{\circ}d_1}{E_+^*(1 - v_+^{\circ})} \right) \sigma_0^*.$$
(28)

Позначивши

$$d_+^{\circ} = \frac{E_+^*(f - 1)(1 - v_+^{\circ} - 2v_-^{\circ}v_+^{\circ}) - E_+^{\circ}(f(1 - v_+^* - 2v_-^{\circ}v_+^*) + (1 + v_+^*))}{E_+^{\circ}},$$
(29)

$$d_+^* = \frac{E_+^*(f - 1)(1 - v_+^{\circ} - 2v_-^*v_+^{\circ}) - E_+^{\circ}(f(1 - v_+^* - 2v_-^*v_+^*) + (1 + v_+^*))}{E_+^*}.$$
(30)

Отримуємо

$$d_+^{\circ}\sigma_0^{\circ} = d_+^*\sigma_0^*.$$
(31)

Таким чином, отримано необхідні для подальшого дослідження компоненти переміщень, напружень та деформацій матриці та волокна.

## 6. Поздовжнє деформування однорідного трансверсально-ізотропного композиту

Розв'яжемо тепер аналогічну задачу для однорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, що моделює композит. Поле напружень визначається співвідношеннями:

$$\sigma_z = \sigma_0, \quad \sigma_r = 0, \quad \sigma_{\theta} = 0, \quad \tau_{zr} = \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0.$$
(32)

Для того, щоб умови рівноваги співпали для обох задач, необхідне виконання наступної умови:

$$\pi a^2 \sigma_0^{\circ} + \pi (b^2 - a^2) \sigma_0^* = \pi b^2 \sigma_0,$$
(33)

або

$$\sigma_0^{\circ} f + \sigma_0^* (1 - f) = \sigma_0.$$
(34)

З урахуванням залежності (31) матимемо:

$$\sigma_0^* = \frac{\sigma_0 d_+^\circ}{d_+^\circ + f(d_+^* - d_+^\circ)}, \quad \sigma_0^\circ = \frac{\sigma_0 d_+^*}{d_+^\circ + f(d_+^* - d_+^\circ)}. \quad (35)$$

Застосувавши умови (32), співвідношення між деформаціями та напруженнями у трансверсально-ізотропному композиті запишемо у вигляді:

$$\varepsilon_r = -\frac{\nu_{12}^+}{E_1^+} \sigma_0, \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E_1^+} \sigma_0. \quad (36)$$

Відповідно переміщення визначаються за формулами:

$$u_r(r) = -\frac{\nu_{12}^+}{E_1^+} \sigma_0 r, \quad u_z(z) = \frac{1}{E_1^+} \sigma_0 z. \quad (37)$$

з урахуванням того, що для цієї задачі мають виконуватися умови  $u_r(0) = 0$  та  $u_z(0) = 0$ .

Умовами узгодження переміщень для задачі про сумісне деформування матриці та волокна у комірці композита при її поздовжньому розтягу та задачі про поздовжній розтяг однорідної трансверсально-ізотропної комірки є рівність осьових переміщень для довільного  $z = h$  та радіальних переміщень на зовнішній поверхні комірки  $r = b$ :

$$u_r(b) = u_r^*(b), \quad u_z(h) = u_z^\circ(h) = u_z^*(h). \quad (38)$$

Друге із співвідношень (38) з урахуванням (11) та (37) запишеться у вигляді:

$$\frac{\sigma_0}{E_1^+} = \frac{\sigma_0^* (1 - \nu_-^* - 2\nu_-^* \nu_+^*)}{E_+^* (1 - \nu_-^*)} - \frac{2E_-^* \nu_+^* B_1}{E_+^* (1 - \nu_-^*)}. \quad (39)$$

## 7. Визначення ефективних пружних сталей

Враховуючи (25)–(27) та (35), отримаємо співвідношення:

$$\frac{1}{E_1^+} = \frac{1}{d_+^\circ + f(d_+^* - d_+^\circ)} \times \left( -\frac{2E_-^* \nu_+^* f \nu_-^\circ}{E_+^* (d_1 - d_2)} d_+^* + \left( \frac{(1 - \nu_-^* - 2\nu_-^* \nu_+^*)}{E_-^* (1 - \nu_-^*)} + \frac{2\nu_-^* \nu_+^* f E_-^\circ (1 - \nu_-^*) + d_1 - d_2}{(1 - \nu_-^*) E_+^* (d_1 - d_2)} \right) d_+^\circ \right). \quad (40)$$

Після перетворень отримуємо формулу для визначення поздовжнього модуля пружності композиційного матеріалу з трансверсально-ізоотропними матрицею і волокном:

$$E_1^+ = \frac{E_-^* E_+^* (1 - \nu_-^*) (d_1 - d_2) (d_+^\circ + f (d_+^* - d_+^\circ))}{2 (E_-^*)^2 \nu_+^* \nu_-^\circ f d_+^* (1 - \nu_-^*) - d_+^\circ E_+^* (1 - \nu_-^* - 2 \nu_-^* \nu_+^*) (d_1 - d_2) - k_1}, \quad (41)$$

де

$$k_1 = 2 d_+^\circ E_-^* \nu_+^* \nu_-^\circ (f E_-^\circ (1 - \nu_-^*) + d_1 - d_2).$$

Тоді, з урахуванням виразу для  $B_1$  (27), отримуємо співвідношення для коефіцієнта Пуассона  $\nu_{12}$ :

$$\nu_{12}^+ = \frac{E_+^* (1 - \nu_-^*) (2 f \nu_-^\circ E_-^* d_+^* - \nu_-^* d_+^\circ (d_1 - d_2 + 2 f E_-^\circ))}{2 (E_-^*)^2 \nu_+^* \nu_-^\circ f d_+^* (1 - \nu_-^*) - d_+^\circ E_+^* (1 - \nu_-^* - 2 \nu_-^* \nu_+^*) (d_1 - d_2) - k_1}. \quad (42)$$

Аналогічним чином, при повздовжньому стиску визначаємо:

$$E_1^- = \frac{E_-^* E_+^* (1 - \nu_+^*) (d_3 - d_4) (d_-^\circ + f (d_-^* - d_-^\circ))}{2 (E_-^*)^2 \nu_-^* \nu_+^\circ f d_-^* (1 - \nu_+^*) - d_-^\circ E_-^* (1 - \nu_+^* - 2 \nu_-^* \nu_+^*) (d_3 - d_4) - k_2}, \quad (43)$$

тут

$$k_2 = 2 d_-^\circ E_+^* \nu_-^* \nu_+^\circ (f E_+^\circ (1 - \nu_+^*) + d_3 - d_4).$$

$$\nu_{12}^- = \frac{E_-^* (1 - \nu_+^*) (2 f \nu_+^\circ E_+^* d_-^* - \nu_+^* d_-^\circ (d_3 - d_4 + 2 f E_+^\circ))}{2 (E_+^*)^2 \nu_-^* \nu_+^\circ f d_-^* (1 - \nu_+^*) - d_-^\circ E_-^* (1 - \nu_+^* - 2 \nu_-^* \nu_+^*) (d_3 - d_4) - k_2}, \quad (44)$$

$$d_3 = E_+^* (f - 1) (1 - \nu_+^\circ), \quad d_4 = E_+^\circ (f (1 - \nu_+^*) + (1 + \nu_+^*)), \quad (45)$$

$$d_-^\circ = \frac{E_-^* (f - 1) (1 - \nu_-^\circ - 2 \nu_-^\circ \nu_+^\circ) - E_-^\circ (f (1 - \nu_-^* - 2 \nu_-^\circ \nu_+^*) + (1 + \nu_-^*))}{E_-^\circ}, \quad (46)$$

$$d_-^* = \frac{E_-^* (f - 1) (1 - \nu_-^\circ - 2 \nu_+^* \nu_-^\circ) - E_-^\circ (f (1 - \nu_-^* - 2 \nu_-^* \nu_+^*) + (1 + \nu_-^*))}{E_-^*}. \quad (47)$$

Для визначення механічних властивостей трансверсально-ізотропного композиту потрібно знати значення п'яти пружних сталих: модулів пружності  $E_1$  та  $E_2$ , коефіцієнтів Пуассона  $\nu_{12}$  та  $\nu_{23}$ , а також модуля зсуву  $G_{12}$ . Визначити цю систему ефективних пружних констант можна на основі використання умов узгодження відповідних переміщень для різних типів лінійного та зсувного деформування комірки композита.

### 8. Приклад гомогенізації різномодульного композиту та аналіз отриманих результатів

За отриманими формулами (41), (42) здійснено розрахунок значень поздовжнього модуля пружності  $E_1^+$  та коефіцієнта Пуассона  $\nu_{12}^+$ . Досліджувався композит, складовими елементами якого є ізотропні матриця та волокно з такими пружними характеристиками:  $E_+^{\circ} = 60,4$  ГПа,  $\nu_+^{\circ} = 0,38$ ,  $E_-^{\circ} = 48,32$  ГПа,  $\nu_-^{\circ} = 0,342$ ,  $E_+^* = 5,55$  ГПа,  $\nu_+^* = 0,37$ ,  $E_-^* = 4,44$  ГПа,  $\nu_-^* = 0,333$ .

На рис. 1 суцільною лінією показано залежність поздовжнього модуля пружності  $E_1^+$  від об'ємного вмісту волокна у діапазоні  $f = 0,1 \dots 0,8$ . Значення коефіцієнта Пуассона  $\nu_{12}^+$  у цьому діапазоні залишаються практично сталими, незначно змінюючись у межах від 0,418 до 0,426.

Обчислимо значення поздовжнього модуля пружності  $E_1^-$  та коефіцієнта Пуассона  $\nu_{12}^-$  за формулами (43), (44) для композита з вказаними пружними характеристиками при об'ємному вмісті волокна  $f \in [0,1; 0,8]$ .

Пунктиром на рис. 1 зображено залежність поздовжнього модуля пружності при стиску  $E_1^-$  від об'ємного вмісту волокна. Значення коефіцієнта Пуассона  $\nu_{12}^-$  у цьому інтервалі зміни  $f$  знаходяться у межах від 0,297 до 0,303.

Отримані результати свідчать про те, що у випадках розтягу та стиску комірки композиту зі зростанням об'ємного вмісту волокна у трансверсально-ізотропному композитному матеріалі ефективний поздовжній модуль пружності  $E_1$  зростає за законом, близьким до лінійного. Ефективний коефіцієнт Пуассона  $\nu_{12}$  у обох випадках є близьким до сталого. При цьому величина  $E_1$  при сталих значеннях  $f$  при розтягу у середньому на 25 % перевищує відповідні значення цього показника при стиску. Значення ефективного коефіцієнта Пуассона  $\nu_{12}$  для розтягу у середньому на 40% перевищує його значення при стиску.

Зазначимо, що для випадку  $E_-^* = E_+^*$ ,  $\nu_-^* = \nu_+^*$ ,  $E_-^{\circ} = E_+^{\circ}$ ,  $\nu_-^{\circ} = \nu_+^{\circ}$  з формул (41) та (43) отримуємо формулу для миттєвого поздовжнього модуля пружності  $E_1$ , отриману у роботі [5].

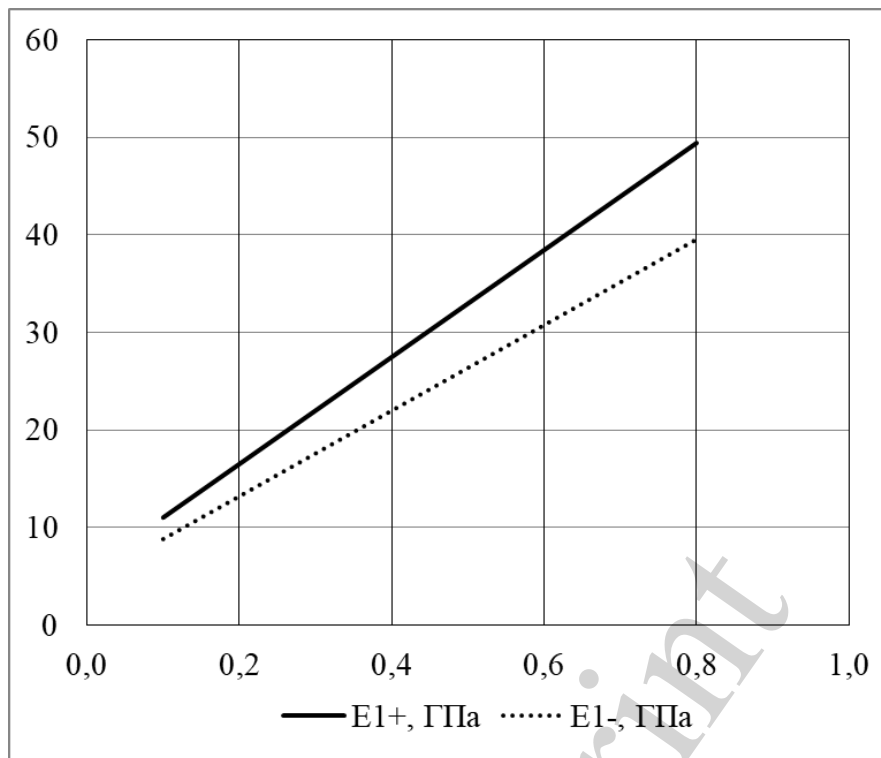


Рис. 1. Залежність поздовжніх модулів пружності  $E_1^+$  та  $E_1^-$  від об'ємного вмісту  $f$  волокна у композиті

### 9. Обговорення результатів розробки методики гомогенізації трансверсально-ізотропного композиту

Отримані формули (41)–(44) для ефективних значень поздовжнього модуля пружності та коефіцієнта Пуассона волокнистого трансверсально-ізотропного композиту, на відміну від існуючих формул ефективних сталей, дозволяють враховувати наявність відмінностей у механічних характеристиках композиційного матеріалу при поздовжньому розтягу та стиску. Їх використання дозволить вдосконалити процес проектування конструкцій, у яких використовуються трансверсально-ізотропні композитні матеріали.

При цьому слід враховувати наявність обмежень на використання отриманих аналітичних співвідношень, пов'язаних з можливістю подання композиту у вигляді однорідного матеріалу. Формули для ефективних характеристик гомогенізованого композиту адекватно відображають його механічні властивості, якщо довжина волокон є достатньо великою у порівнянні з їх діаметром. Великою повинна бути і частота армування композиту волокнами. Для більшості композитів, що використовуються на практиці, ці умови виконуються.

Дане дослідження є продовженням досліджень авторів проблематики гомогенізації волокнистих трансверсально-ізотропних композитів у напрямі визначення ефективних механічних сталей для різномодульних композитних матеріалів. Формулу для поперечного модуля пружності  $E_2$  при розтягу та стиску отримано у роботі [14]. У подальшому автори сподіваються продовжити дослідження з метою отримання системи ефективних констант, що повністю описує

механічні властивості трансверсально-ізотропного волокнистого композиту. Це передбачає знаходження ефективного модуля пружності другого роду (модуля зсуву)  $G_{12}$ , а також ефективних значень коефіцієнтів Пуассона  $\nu_{21}$  та  $\nu_{23}$  при поздовжньому розтягу та стиску. Для розв'язання даної задачі використані у даному дослідженні кінематичні умови узгодженості переміщень потрібно модифікувати для зсувного деформування комірки композиту. Крім того, перспективними напрямками дослідження гомогенізації різномодульних композитів є напрями, пов'язані з уточненням моделі композиту, наприклад, з врахуванням нелінійності його пружних властивостей, наявності пластичних та в'язкопружних властивостей композиту.

## 10. Висновки

1. Запропоновано методику гомогенізації трансверсально-ізотропного волокнистого різномодульного композиту, що ґрунтується на використанні кінематичних умов узгодження осьових та радіальних переміщень композита та його складових. Вона дозволяє отримати значення ефективних механічних характеристик композита з врахуванням їх відмінностей при розтягу та стиску.

2. Для розв'язання задачі гомогенізації різномодульного волокнистого композиту розв'язано дві допоміжні задачі: визначення переміщень матриці та волокна при їх сумісному поздовжньому розтягу та стиску та визначення переміщень точок однорідного трансверсально-ізотропного композиту при його поздовжньому деформуванні.

3. При поздовжньому розтягу та стиску для трансверсально-ізотропного різномодульного композиту отримано формули (41) і (43) для визначення ефективного поздовжнього модуля пружності першого роду та формули (42) і (44) для знаходження ефективного коефіцієнта Пуассона у площині ізотропії. Отримані формули для ефективних сталих визначають залежності цих величин від частки волокна у матеріалі композита та механічних характеристик його складових з врахуванням їх відмінностей при розтягу та стиску.

4. Формули для ефективних механічних сталей використано для гомогенізації конкретного різномодульного композиту. Дослідження різномодульного волокнистого композиту свідчить, що ефективний поздовжній модуль пружності для різних значень об'ємного вмісту волокна при розтягу у середньому приблизно на 25 % більший, ніж при стиску. Коефіцієнт Пуассона  $\nu_{12}$  при розтягу у середньому приблизно на 40 % більший, ніж у випадку стиску.

## Література

1. Kłasztorny, M., Konderla, P., Piekarski, R. (2009). An exact stiffness theory for unidirectional xFRP composites. *Mechanics of Composite Materials*, 45 (1), 77–104. doi: <https://doi.org/10.1007/s11029-009-9064-y>
2. Cruz-González, O. L., Rodríguez-Ramos, R., Otero, J. A., Bravo-Castillero, J., Guinovart-Díaz, R., Martínez-Rosado, R. et. al. (2018). Viscoelastic effective properties for composites with rectangular cross-section fibers using the asymptotic homogeni-

zation method. *Generalized Models and Non-Classical Approaches in Complex Materials* 1, 203–222. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-72440-9\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-72440-9_10)

3. Daridon, L., Licht, C., Orankitjaroen, S., Pagano, S. (2016). Periodic homogenization for Kelvin-Voigt viscoelastic media with a Kelvin-Voigt viscoelastic interphase. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 58, 163–171. doi: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.12.007>

4. Pathan, M. V., Tagarielli, V. L., Patsias, S. (2017). Numerical predictions of the anisotropic viscoelastic response of uni-directional fibre composites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 93, 18–32. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2016.10.029>

5. Grebenyuk, S., Klymenko, M., Titova, O., Boguslavskaya, A. (2015). Effective longitudinal elastic modulus of the composite with viscoelastic matrix and anisotropic fiber. *20th International Scientific Conference Mechanika*. Kaunas: Kaunas University of Technology, 96–100.

6. Wang, Y., Huang, Z. (2017). A Review of Analytical Micromechanics Models on Composite Elastoplastic Behaviour. *Procedia Engineering*, 173, 1283–1290. doi: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.12.159>

7. Zhang, L., Yu, W. (2015). Variational asymptotic homogenization of elastoplastic composites. *Composite Structures*, 133, 947–958. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.07.117>

8. Амбарцумян, С. А. (1982). Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 320.

9. Цвелоду, И. Ю. (2008). О разномодульной теории упругости. *Прикладная математика и теоретическая физика*, 49 (1), 157–164.

10. Ершова, А. Ю., Мартиросов, М. И. (2015). Экспериментальное исследование разномодульных полимерных композитов с мелкодисперсным наполнителем. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 5, 68–72.

11. Бессонов, Д. Е., Зезин, Ю. Л., Ломакин, Е. В. (2009). Разноспротивляемость зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика*, 9 (4), 9–13.

12. Пахомов, Б. М. (2017). Вариант модели изотропного разномодульного материала. *Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия «Машиностроение»*, 6, 35–45. doi: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2017-6-35-48>

13. Nassef, A. S. E., Dahim, M. A. (2016). New Bi-modular Material Approach to Buckling Problem of Reinforced Concrete Columns. *Mechanical Engineering Research*, 6 (1), 19–28. doi: <https://doi.org/10.5539/mer.v6n1p19>

14. Grebenyuk, S., Klymenko, M., Smoliankova, T., Koval, R. (2019). Effective Characteristics of the Multi-Modular Composites under Transverse Stretching. *Materials Science Forum*, 968, 511–518. doi: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/msf.968.511>