

# Analyse de la stabilité linéaire des solutions de double diffusion pure et de convection obtenues dans le cas d'une cavité poreuse, horizontale, saturée par un fluide binaire soumise à des flux thermiques croisés

L. Yacine <sup>a</sup>, A. Khouzam <sup>a,b</sup>, A. Mojtabi <sup>a</sup>, R. Bennacer <sup>c</sup>

a. IMFT, UMR CNRS/INP/UPS N°5502, UFR MIG, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062, Toulouse cedex, France [mojtabi@imft.fr](mailto:mojtabi@imft.fr)

b. Arts et Métiers ParisTech, 2 bd du Ronceray, Angers, France

c. ENS-Cachan Dpt GC/ LMT /CNRS UMR 8535,61, Av du Président Wilson 94235 Cachan Cedex, France [rachid.bennacer@ens-cachan.fr](mailto:rachid.bennacer@ens-cachan.fr)

...

## Résumé :

*La convection thermogravitationnelle, qui génère des variations locales de la masse volumique du fluide en fonction de la température, conduit finalement à une séparation des espèces dans la cavité. On s'intéresse dans ce travail à la séparation des espèces d'une solution binaire remplissant une cavité parallélépipédique poreuse, placée dans le champ de la pesanteur, et soumise au niveau de ses parois horizontales et verticales à des densités de flux uniformes et croisés. Nous déterminons aussi les paramètres de contrôle conduisant à la séparation optimale. En utilisant l'étude de la stabilité linéaire, on a vérifié que le nombre de Rayleigh critique linéaire,  $Ra_c$ , associé à la perte de la stabilité de la solution unicellulaire est supérieur au nombre de Rayleigh optimal,  $Ra_{opt}$ , conduisant à la séparation des constituants du mélange.*

## Abstract :

*The thermogravitational convection, which generates local variations in the density of the fluid as a function of the temperature, eventually leads to a species separation in the cavity. We are interested in this work in species separation of a binary solution filling a porous rectangular cavity, placed in the gravity field, and submitted to uniform cross heat fluxes densities. We determine as well the control parameters leading to the optimal separation. Using the linear stability analysis, it was verified that the unicellular flow found to lose its stability for linear critical Rayleigh number,  $Ra_c$ , higher than the optimal Rayleigh.*

**Mots clefs : effet Soret; milieu poreux; séparation; stabilité linéaire.**

# 1 Introduction

L'objectif générale de ce travail, est d'améliorer le procédé de séparation thermogravitationnelle des espèces d'un mélange binaire initialement homogène. On se propose d'étudier la séparation des espèces d'un fluide binaire confiné dans une cavité poreuse rectangulaire soumise à des densités de flux de chaleur croisés. On détermine également les paramètres de contrôle conduisant à la séparation optimale des constituants du mélange binaire. La stabilité linéaire de la solution unicellulaire a été étudiée pour vérifier que le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  associé à la perte de la stabilité de la solution unicellulaire est supérieur au Rayleigh optimal  $Ra_{opt}$ , conduisant à la séparation maximale et ce quel que soit la valeur des nombres sans dimension du problème à savoir le nombre de Lewis,  $Le$ , le facteur de séparation,  $\psi$  et le rapport de la cavité rectangulaire.

De nombreux travaux récents ont porté sur la séparation par diffusion thermogravitationnelle. En 2006, Elhajjar et al. [1], ont proposé une nouvelle procédure pour la séparation des espèces d'un mélange binaire confiné dans une cavité rectangulaire horizontale. Charrier-Mojtabi et al. [2] ont étudié analytiquement et numériquement la naissance de la convection thermosolutale avec prise en compte de l'effet Soret, dans une couche mince horizontale poreuse remplie d'un mélange binaire et soumise à un flux de chaleur vertical sur ces deux parois horizontales. Ouattara et al. [3] ont étudié la stabilité linéaire de la solution d'équilibre et de la solution unicellulaire dans une cellule horizontale de grande extension longitudinale remplie d'un milieu poreux saturé par un mélange binaire délimitée par deux parois de même épaisseur et de même conductivité thermique, les surfaces extérieures de ces parois sont soumises à un flux de chaleur constant. Plus récemment, Khouzam et al. [4] ont étudié un nouveau procédé permettant la séparation des espèces dans une cavité rectangulaire horizontale remplie d'un fluide binaire, chauffée par le haut ou par le bas. Les parois horizontales de la cavité sont imperméables et soumises à des températures constantes. Les autres parois sont imperméables et adiabatiques. Les parois horizontales supérieure et/ou inférieure de la cavité sont mises en mouvement avec deux vitesses horizontales de sens contraire.

## 2 Séparation des espèces

### 2.1 Modèle Mathématique

On considère une cavité de grand rapport d'aspect, soumise à des densités de flux de chaleur uniformes ( $q_1$  et  $q_2$ ) imposées au niveau des parois horizontales et verticales qui sont supposées toutes imperméables. La cavité est remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire de masse volumique  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ . La cavité considérée est représentée sur la figure.1. Il s'agit d'une enceinte rectangulaire de hauteur  $H$  et de largeur  $L$ .

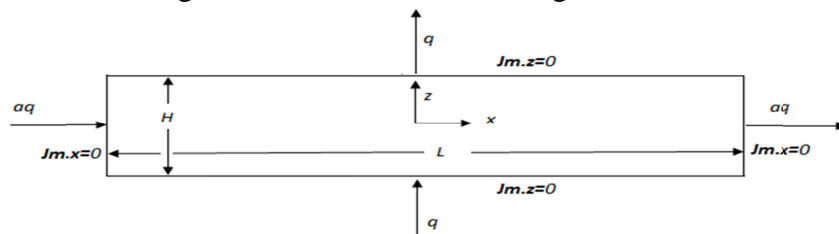


FIG.1- Schématisation de la cavité

En tenant compte de l'approximation de Boussinesq, le modèle mathématique adimensionnel associé à ce problème incluant les équations de conservation (Darcy, de l'énergie et des espèces chimiques), est écrit comme-suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} = -Ra \frac{\partial}{\partial x} [T - \psi C] \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) T = \nabla^2 T \\ \epsilon \frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) C = \frac{1}{Le} (\nabla^2 C + \nabla^2 T) \end{cases} \quad (1)$$

Le problème étudié dépend de six paramètres adimensionnel à savoir le nombre de Lewis  $Le = \alpha/D$  avec  $\alpha = \lambda^*/(\rho c)_f$  la diffusivité thermique du milieu poreux saturé, le nombre de Rayleigh thermique,  $Ra = gH^2 K \beta_T (q_1 + q_2) / (v \alpha \lambda^*)$ , où  $K$  désigne la perméabilité du milieu poreux,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $\lambda^*$  la conductivité thermique effective du milieu poreux saturé, le facteur de séparation est donné par  $\psi = -\frac{\beta_C D_T}{\beta_T D} C_0 (1 - C_0)$  où  $\beta_C$  et  $\beta_T$  désignent respectivement les coefficients d'expansion massique et thermique,  $C_0$  est la fraction massique initiale du constituant le plus lourd du mélange,  $D_T$  le coefficient de thermodiffusion et  $D$  le coefficient de diffusion isotherme, la porosité normalisée  $\epsilon = \epsilon^*(\rho c)_f / (\rho c)^*$  où  $\epsilon^*$  représente la porosité du milieu poreux,  $(\rho c)^*$  et  $(\rho c)_f$  sont respectivement la capacité thermique volumique effective et la capacité thermique volumique du fluide, le rapport des densités de flux de chaleur horizontale et verticale  $a = q_2/q_1$  et le rapport d'aspect  $A = L/H$ .

Les conditions aux limites dynamiques, thermiques et massique sont données par:

$$\begin{cases} \forall z \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]; x = \pm \frac{A}{2}: \quad \vec{V} \cdot \vec{n} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{a}{1+a} \\ \forall x \in \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right]; z = \pm \frac{1}{2}: \quad \vec{V} \cdot \vec{n} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\partial C}{\partial z} = -\frac{1}{1+a} \end{cases} \quad (2)$$

## 2.2 Solution analytique

Dans le cas d'une cavité de grande extension horizontal  $A \gg 1$ , en utilisant l'hypothèse de l'écoulement parallèle la solution du problème s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{V}(z) = u(z) \vec{e}_x; \quad T(x, z) = C_T x + f(z); \quad C(x, z) = C_S x + g(z); \quad (3)$$

Où  $C_T$  et  $C_S$  sont des constantes qui expriment respectivement les gradients de température et de fraction massique selon la direction  $x$ . En reprenant la forme de la solution (3) et les conditions aux limites (2), on obtient l'écoulement de base unicellulaire.

$$\begin{cases} u(z) = 4z\varphi_0 \\ T(x, z) = C_T x + C_T \varphi_0 \left( \frac{z^3}{3} - \frac{z}{4} \right) - \frac{z}{1+a} \\ C(x, z) = C_S x + (C_S Le - C_T) \varphi_0 \left( \frac{z^3}{3} - \frac{z}{4} \right) + \frac{z}{(1+a)} \end{cases} \quad (4)$$

$\varphi_0$  représente l'intensité de la vitesse. Son expression est donnée par:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4} Ra [C_S \psi - C_T] \quad (5)$$

La séparation, définie par la différence des fractions massiques du constituant le plus lourd entre les deux parois verticales de la cellule, est donnée par l'expression  $S = C_S A$ .

Pour déterminer l'équation donnant la valeur de  $C_S$ , on écrit que le flux massique, associé à l'espèce de fraction massique  $C$ , à travers toute section verticale de la cavité est égale à zéro à l'état stationnaire.

Ce qui conduit à l'équation algébrique suivante donnant  $C_S$  en fonction des paramètres adimensionnels du problème:  $A$ ,  $Ra$ ,  $Le$  et  $\psi$ .

$$C_S = \frac{C_T Le \varphi_0^2 - 30C_T + 5Le\varphi_0/(a+1)}{(Le^2\varphi_0^2 + 30)} \quad (6)$$

### 2.3 Valeurs optimales de la séparation

A partir de l'équation implicite du troisième degré donnant la valeur de  $C_S$ , on en déduit, en différenciant cette équation par rapport aux deux paramètres de contrôle  $a$  et  $Ra$ , les valeurs de ces deux paramètres conduisant à la séparation maximale

$$\begin{cases} a_{opt} = \pm \frac{1}{12} \frac{\sqrt{30Le}(Le-1)}{Le+1} \\ Ra_{opt} = \frac{120(1+a)^2}{(\pm 2\xi + 17Le + 12)a^2\psi + 2(\pm \xi + 6Le + 6)a^2 + 2(\pm \xi + 5Le)a\psi \pm 2\xi a + 5Le} \end{cases} \quad (7)$$

Avec l'introduction de la fonction  $\xi = \sqrt{6 \frac{Le^2(11a^2+10a+5)+6(2Le+1)a^2}{(1+a)^2}}$

On en déduit la valeur de  $C_{Smax}$  lorsque l'on remplace  $a$  et  $Ra$  par leur valeur optimale dans l'équation implicite (6):

$$C_{Smax} = -\frac{1}{12} \frac{\pm \xi(a+1) + 6a(Le-1)}{(a+1)Le} \quad (8)$$

La figure 2 représente le nombre de Rayleigh optimal donné par l'équation (7) en fonction du facteur de séparation  $\psi$  pour  $Le = 100$  et  $a = 0$ .

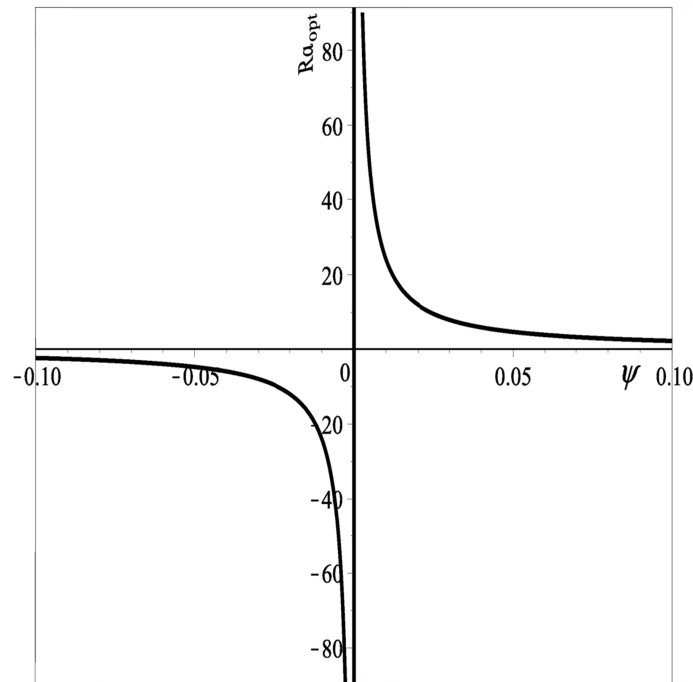


FIG.2- Rayleigh optimal en fonction du facteur de séparation pour  $a = 0$ ,  $Le = 100$

### 3 Étude de la stabilité de l'écoulement unicellulaire dans une cavité soumise à des flux de chaleur croisés

#### 3.1 Équations linéarisées

Nous avons étudié la stabilité linéaire de la solution unicellulaire afin de confirmer que l'écoulement unicellulaire conservait sa stabilité pour le nombre de Rayleigh thermique conduisant à la séparation optimale des espèces obtenue précédemment. Pour cette étude, nous écrivons les équations adimensionnelles du problème en utilisant les perturbations de la température  $\theta$ , de la fraction massique  $c$  et de la composante verticale de la vitesse  $w$ ,

$$\begin{cases} \vec{V}(x, z, t) = \vec{V}_0(x, z) + \vec{v}(x, z, t) \\ T(x, z, t) = T_0(x, z) + \theta(x, z, t) \\ C(x, z, t) = C_0(x, z) + c(x, z, t) \end{cases} \quad (9)$$

Ces perturbations sont développées en modes normaux :  $(\vec{v}, \theta, c) = [\hat{v}(z), \hat{\theta}(z), \hat{c}(z)]e^{ik_x x + \sigma t}$  où  $k_x$  est le nombre d'onde axial selon la direction infinie  $\vec{e}_x$ ,  $t$  le temps et  $\sigma$  est les valeurs propres, le symbole  $\hat{\phantom{x}}$  est utilisé pour indiquer que les composantes sont complexes. Nous écrivons  $\sigma$  sous la forme  $\sigma = \sigma_r + I\sigma_i$ , où  $\sigma_r$  est le facteur d'amplification temporelle de la perturbation et  $\sigma_i = \omega$  la pulsation, avec  $I^2 = -1$ . Ainsi, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (D^2 - k^2)\hat{w}(z) + k^2 Ra[\hat{\theta}(z) - \psi \hat{c}(z)] = 0 \\ \sigma \hat{\theta}(z) + ik\hat{\theta}(z)u_0 - \frac{1}{ik}D\hat{w}(z)\frac{\partial T_0}{\partial x} + \hat{w}(z)D(T_0) - (D^2 - k^2)\hat{\theta}(z) = 0 \\ \epsilon\sigma \hat{c}(z) + u_0 ik\hat{c}(z) - \frac{1}{ik}D\hat{w}(z)\frac{\partial C_0}{\partial x} + \hat{w}(z)\frac{\partial C_0}{\partial z} - \frac{(D^2 - k^2)}{Le}[\hat{c}(z) + \hat{\theta}(z)] = 0 \end{cases} \quad (10)$$

L'opérateur  $\mathcal{D}$  représente  $\frac{\partial}{\partial z}$  et  $k = k_x$ . Les conditions aux limites associées s'écrivent:

$$\vec{v} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial z} = 0, \quad \text{pour } z = 0, 1 \quad \forall x \quad (11)$$

Les équations linéarisées obtenues (10) avec les conditions aux limites (11) sont résolues par la méthode de Galerkin à l'ordre 5, en utilisant les fonctions d'essai suivantes:

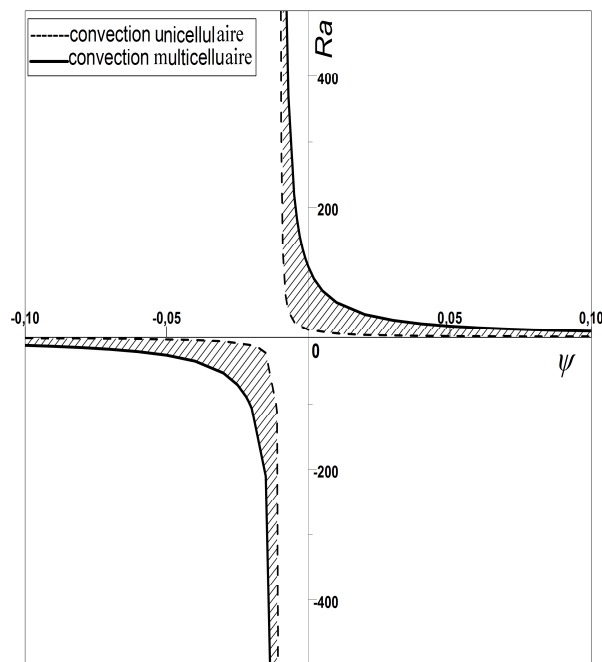
$$\begin{cases} \hat{w} = \sum_{i=1}^N a_{[i]} \left(z - \frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(z + \frac{1}{2}\right) \\ \hat{\theta} = b_{[1]} + b_{[2]} \cdot z \cdot \left(z^2 - \frac{3}{4}\right) + \sum_{i=1}^{N-2} b_{[i+2]} \left(z - \frac{1}{2}\right)^{i+1} \cdot \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 \\ \hat{c} = c_{[1]} + c_{[2]} \cdot z \cdot \left(z^2 - \frac{3}{4}\right) + \sum_{i=1}^{N-2} c_{[i+2]} \left(z - \frac{1}{2}\right)^{i+1} \cdot \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (12)$$

Les valeurs critiques du nombre de Rayleigh et du nombre d'onde ont été obtenues pour une bifurcation stationnaire et instationnaire. Il est important de caractériser l'influence du flux latéral sur la stabilité de l'écoulement monocellulaire au sein de la cavité. Pour cela, il était nécessaire de distinguer le cas de flux latéral nul ( $a = 0$ ) du cas le plus générale (flux croisés). Pour ces deux cas, les instabilités du type stationnaire et instationnaire ont été déterminées analytiquement, en fonction des paramètres régissant le problème. On note que le nombre de Rayleigh critique associé à la

bifurcation de Hopf dépend des paramètres adimensionnels  $\psi$  et  $\epsilon$ , alors que pour la transition stationnaire, il ne dépend que de  $\psi$ .

### 3.2 Étude de la stabilité de la solution de base pour un fluide binaire chauffé par le bas ou par le haut (cas particulier $\alpha = 0$ )

La séparation optimale des espèces d'un mélange binaire est obtenue pour le régime d'écoulement unicellulaire. Il est donc important de s'assurer que le  $Ra_{opt}$  obtenu, pour un  $a_{opt}$  donné, reste inférieur au nombre de Rayleigh conduisant à la perte de la stabilité de la solution unicellulaire. À cette fin, nous avons utilisé d'une part l'analyse de la stabilité linéaire de la solution d'équilibre. La perte de la stabilité de cette solution d'équilibre conduit à la naissance d'un écoulement convectif stationnaire unicellulaire. Cet écoulement unicellulaire est nécessaire pour l'obtention d'une séparation des espèces bien plus importante que celle que l'on obtiendrait par thermodiffusion pure. Il est donc important de recourir à l'analyse de la stabilité pour s'assurer que l'optimum de séparation obtenu est physiquement réalisable. L'analyse de la stabilité à l'état marginal ( $\sigma = 0$ ) pour  $Le = 100$  est présenté sur la figure.3 où le domaine hachuré représente la zone l'existence de l'écoulement unicellulaire associé au maximum de séparation, On peut remarquer que la valeur de  $Ra_{opt}$  calculée se trouve dans ce domaine.



**FIG.3-** Diagramme de stabilité de l'écoulement d'équilibre (en tirets) et l'écoulement unicellulaire (trait plein) pour  $a = 0$ ,  $Le = 100$

Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire de l'écoulement unicellulaire pour  $a = 0$  et  $Le = 203$  sont présentés sur le diagramme  $Ra_c = f(\psi)$ . (Le trait plein indique la transition stationnaire, le trait en pointillé la transition instationnaire).

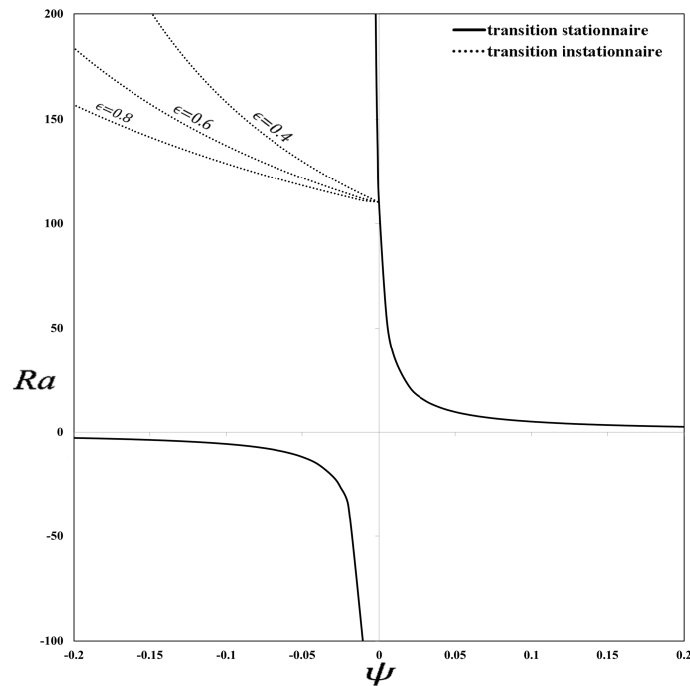
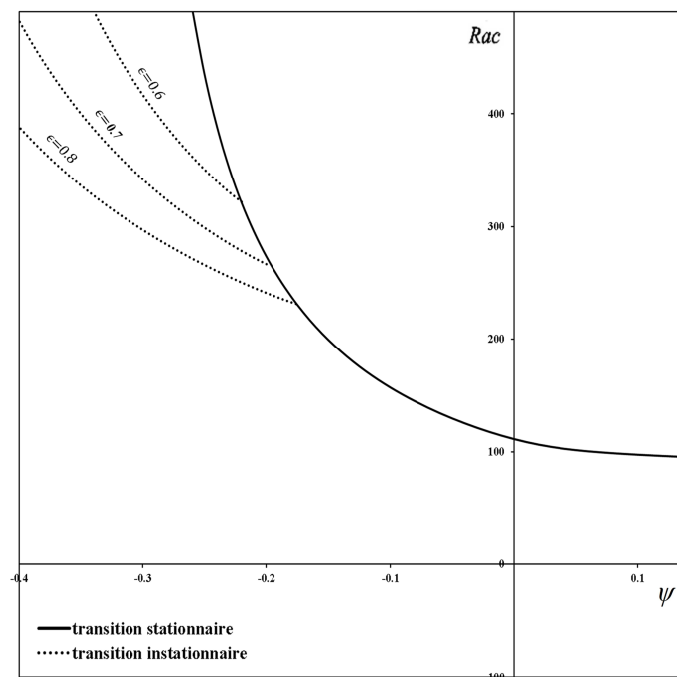


FIG.4- Diagramme de stabilité de l'écoulement unicellulaire pour  $a = 0$ ,  $Le = 203$ . Trait plein : bifurcation stationnaire, trait pointillé : bifurcation de Hopf

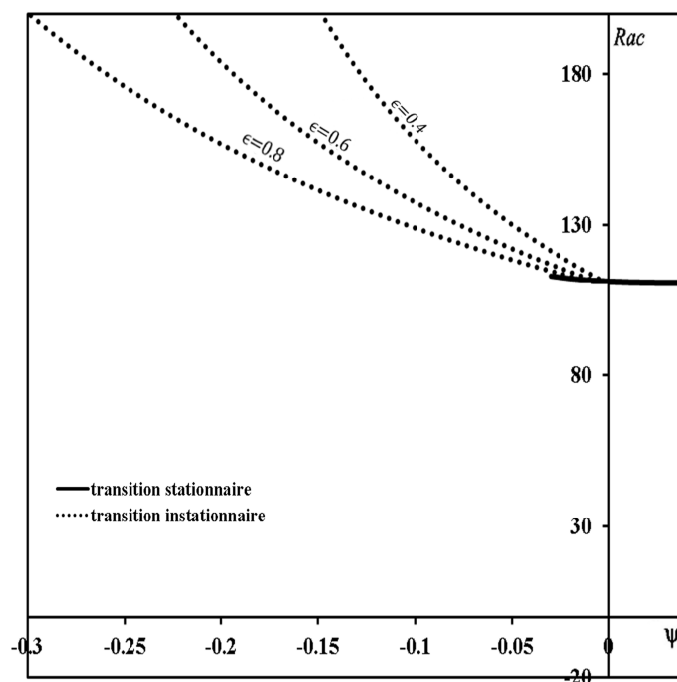
### 3.3 Étude de la stabilité linéaire de l'écoulement convectif pour une cavité soumise à des flux de chaleur croisés $a \in ]0, 1[$

Pour une cavité soumise à des densités de flux de chaleur croisés ou à une densité de flux de chaleur latérale, le régime convectif prend naissance  $\forall Ra \neq 0$ . La solution d'équilibre mécanique associée à la double diffusion pure est donc instable. On montre que le chauffage latéral a un effet stabilisant sur l'écoulement de base unicellulaire. Les figures. 5 et 6 représentent les diagrammes de stabilité pour  $Le = 2$  et  $Le = 58$ , avec un rapport des densités de flux  $a = 0,02$  et différentes valeurs de la porosité  $\epsilon$ . On note que le nombre de Rayleigh critique associé à la bifurcation de Hopf varie avec  $\psi$  et  $\epsilon$ , alors que pour la transition stationnaire, il ne dépend que de  $\psi$ .

On peut remarquer sur ces deux figures que le chauffage latéral conduit à une augmentation de la valeur critique du nombre de Rayleigh thermique. Il s'en suit que l'écoulement unicellulaire est maintenu sur une large gamme de variation du nombre de Rayleigh thermique. Mais il convient de noter que la valeur de la séparation diminue pour des valeurs élevées de  $Ra$ .



**FIG.5-** Diagramme de stabilité de l'écoulement unicellulaire pour  $a = 0.02$ ,  $Le = 2$  et pour différentes valeurs de la porosité ( $\epsilon = 0.6, 0.7, 0.8$ ). Trait plein : bifurcation stationnaire, pointillé: bifurcation de Hopf



**FIG.6-** Diagramme de stabilité de l'écoulement unicellulaire pour  $a = 0.02$ ,  $Le = 58$  et pour différentes valeurs de porosité ( $\epsilon = 0.4, 0.6, 0.8$ ). Trait plein : bifurcation stationnaire, pointillé: bifurcation de Hopf

Afin de vérifier que le nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$  associé à la perte de stabilité de la solution unicellulaire est supérieur au Rayleigh optimal  $Ra_{opt}$  dans le cas d'une cavité poreuse soumise à des flux croisés de chaleur, le tableau 1 donne une comparaison entre les deux valeurs en fonction du facteur de séparation  $\psi$  pour  $Le = 200$  et  $a = 0,02$ .



**Tab 1-** Evolution de  $Ra_{opt}$  et  $Ra_c$  en fonction du  $\psi$  pour  $Le = 200$  et  $a = 0.02$ 

| Le = 200 ; a = 2.10 <sup>-2</sup> |            |         |
|-----------------------------------|------------|---------|
| $\psi$                            | $Ra_{opt}$ | $Ra_c$  |
| 0.04                              | 1.401      | 110.659 |
| 0.03                              | 1.596      | 110.982 |
| 0.02                              | 1.853      | 111.140 |
| 0.01                              | 2.209      | 111.204 |
| -0.01                             | 3.587      | 111.275 |
| -0.02                             | 5.213      | 111.384 |
| -0.03                             | 9.540      | 111.605 |
| -0.04                             | 56.071     | 111.981 |

## Références

- [1] B. Elhajjar, A. Mojtabi, M. Marcoux, M.C. Charrier-Mojtabi, Study of thermogravitation in a horizontal fluid layer. *Comptes Rendus Mécanique* 334, 621-627, 2006.
- [2] M.C. Charrier-Mojtabi, B. Elhajjar, B. Ouattara, A. Mojtabi, P. Costeseque, Soret-driven convection and separation of binary mixtures in a porous horizontal slot submitted to a heat flux. *Comptes Rendus Mécanique* 339, 303-309, 2011.
- [3] B. Ouattara, A. Khouzam, A. Mojtabi, M.C. Charrier-Mojtabi, Analytical and numerical stability analysis of Soret-driven convection in a horizontal porous layer: the effect of conducting bounding plates. *Fluid Dynamics Research* 44, 031415-031429, 2012.
- [4] A. Khouzam, A. Mojtabi, M.C. Charrier-Mojtabi, B. Ouattara, Species separation of a binary mixture in the presence of mixed convection. *International Journal of Thermal Sciences* 73, 18-27, 2013.