

# Analyse limite de matériaux poreux ductiles ayant une matrice de Mohr-Coulomb : un monde semé d'embûches

**K. Anoukou<sup>a</sup>, F. Pastor<sup>b</sup>, P. Dufrenoy<sup>c</sup>, J. Pastor<sup>d</sup>, D. Kondo<sup>e</sup>**

- a. Laboratoire de Mécanique des Solides, UMR 7649, CNRS, Ecole Polytechnique  
91128 Palaiseau Cedex, [kokou.anoukou@yahoo.fr](mailto:kokou.anoukou@yahoo.fr)
- b. Athénée royal Victor-Horta, rue de la Rhétorique, 16, Bruxelles, Belgium,  
[franck.pastor@skynet.be](mailto:franck.pastor@skynet.be)
- c. Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR8107, CNRS, Université de Lille,  
[philippe.dufrenoy@univ-lille1.fr](mailto:philippe.dufrenoy@univ-lille1.fr)
- d. Laboratoire LOCIE, UMR 5271 CNRS, université de Savoie, 73376 Le Bourget du  
Lac, France, [joseph.pastor@univ-savoie.fr](mailto:joseph.pastor@univ-savoie.fr)
- e. Institut Jean Le Rond d'Alembert, UMR 7190 CNRS, Université Pierre et Marie  
Curie, 4 place Jussieu, F-75005 Paris, France, [djimeddo.kondo@upmc.fr](mailto:djimeddo.kondo@upmc.fr)

## Résumé :

*La présente étude vise à étudier les effets spécifiques d'une matrice de Mohr-Coulomb sur la résistance des matériaux poreux ductiles. A cette fin, on met en oeuvre une approche cinématique d'analyse limite sur une sphère creuse avec une matrice parfaitement plastique de Mohr-Coulomb. Celle-ci est soumise à des conditions aux limites axisymétriques de taux de déformation uniforme au bord. Après une analyse minutieuse et discussion des conditions d'admissibilité plastique associées au critère de Mohr-Coulomb, nous dérivons une forme paramétrique explicite du critère de résistance macroscopique. Cette dernière montre une dépendance aux trois invariants du tenseur de contraintes. Une deuxième partie de l'étude est consacrée à une analyse limite numérique du modèle de la sphère creuse et son utilisation pour l'évaluation des résultats théoriques. À cette fin, une approche mixte (mais entièrement cinématique) originale a été élaborée. On en déduit des bornes supérieures (approche cinématique), puis, à l'aide d'une approche statique numérique, des bornes inférieures. Ces bornes sont utilisées pour évaluer et valider les résultats théoriques établis. Les effets de l'angle de frottement ainsi que ceux de la porosité sont illustrés.*

## Abstract :

*The present study aims at investigating the specific effects of Mohr-Coulomb matrix on the strength of ductile porous materials by using a kinematic limit analysis approach.*

*To this end, we consider a hollow sphere model with a rigid perfectly plastic Mohr-Coulomb matrix, subjected to axisymmetric uniform strain rate boundary conditions. After a careful analysis and discussion of the plastic admissibility condition associated to the Mohr-Coulomb criterion, we derive a parametric closed-form expression of the macroscopic strength criterion. The later explicitly shows a dependence on the three stress invariants. A second part of the study is devoted to a numerical Limit Analysis of a hollow sphere model with a Mohr-Coulomb matrix and its use for assessment of theoretical results. To this end, an original mixed (but fully kinematic) approach dedicated to the general Mohr-Coulomb axisymmetric problem was elaborated. The computed numerical upper and lower bounds are used to assess and validate the theoretical results. Effects of the the friction angle as well as that of the porosity are illustrated.*

**Mots clefs : Matériaux poreux ductiles, matrice de Mohr-Coulomb, analyse limite, problème de minimisation**

**Résumé étendu :** Dans l'esprit de l'approche par analyse limite initialement proposée par Gurson (1977) pour des matériaux avec une matrice obéissant au critère de Von Mises, nous considérons un modèle de sphère creuse, mais ici avec une matrice parfaitement plastique rigide dont le critère est celui de Mohr-Coulomb. Cette sphère creuse est soumise à des conditions aux limites axisymétriques de taux de déformation uniforme au bord. S'appuyant sur une famille de champs de vitesse d'essai (contenant trois paramètres) conforme aux mécanismes spécifiques de déformation plastique en jeu, nous formulons d'abord rigoureusement le problème de minimisation sous contrainte qui résulte de l'analyse limite. Puis nous établissons une solution à ce problème, ce qui permet de déterminer la dissipation macroscopique. Le critère de résistance macroscopique s'obtient alors au moyen d'un procédé s'appuyant sur le Lagrangien associé aux Conditions usuelles de Kuhn-Tucker. En raison des spécificités de la matrice de Coulomb (notamment la dépendance vis à vis de tous les invariants du tenseur de contraintes), une analyse minutieuse et la discussion des conditions d'admissibilité plastique (qui, dans le cas d'espèce, requiert la connaissance du signe des composantes principales du tenseur taux de déformation) sont nécessaires. La procédure proposée conduit en pratique à une expression analytique sous forme paramétrique du critère de résistance macroscopique. De manière remarquable, ce dernier montre une dépendance aux trois invariants du tenseur de contraintes macroscopique, avec un certain nombre de spécificités. Dans le cas particulier d'un angle de frottement égal à zéro (cas d'une phase solide de Tresca), l'expression du critère se réduit à celle récemment établie par Cazacu et al. (2015) pour le matériau poreux correspondant. Pour être complet, nous avons également explicité la règle d'écoulement plastique macroscopique et la loi d'évolution de la porosité qui dépend des trois invariants du taux de déformation. À des fins de validation, une analyse limite numérique complète du modèle de la sphère creuse est ensuite réalisée. Les principes de base de l'approche statique d'analyse lim-

ite sont d'abord rappelés. Dans le cadre de la présente étude, une adaptation d'un code statique antérieur a été effectuée. Une approche mixte (mais entièrement cinématique) originale a été élaborée avec spécifiquement un champ de vitesse quadratique associé à l'élément fini triangulaire. Malgré le moins bon conditionnement inhérent à la modélisation axisymétrique, le code mixte conique final s'est révélé très efficace, permettant de prendre en compte des maillages très raffinés. Après une première validation dans le cas de chargements isotropes, pour lequel la solution exacte est connue, des bornes numériques (inférieures et supérieures) du critère de résistance macroscopique sont fournis. Celles-ci sont utilisées pour évaluer et valider pleinement les résultats fournis par l'analyse théorique. Les effets de l'angle de friction ainsi que ceux de la porosité sont illustrés.

Considérant des chargements axisymétriques ( $\Sigma_x = \Sigma_y$ ), les efforts généralisés sont composés, dans un système de coordonnées cartésiennes (avec une base orthonormée  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ ), de:

$$\Sigma_m = \frac{1}{3} (2\Sigma_x + \Sigma_z), \quad \Sigma_{gps} = \Sigma_x - \Sigma_z \quad (1)$$

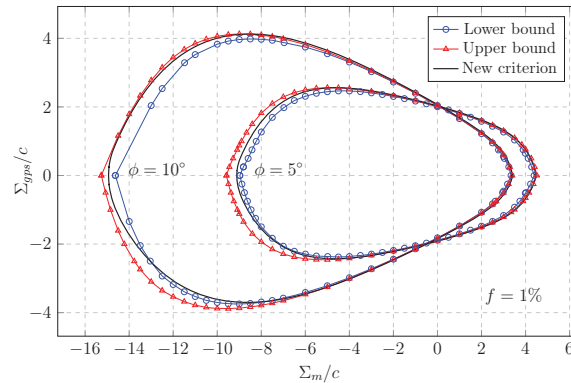


Fig. 1 Matériau de Mohr-Coulomb poreux: comparaison des prédictions du critère établi aux bornes numériques pour une porosité de  $f = 0.01$  et différentes valeurs de l'angle de frottement interne  $\phi = 5$  degrés,  $\phi = 10$  degrés et  $\phi = 25$  degrés.

Sur la figure 1 sont affichés les effets de l'angle de frottement. Les résultats sont normalisés par la cohésion  $c$  de la matrice. De façon générale, un accord remarquable est obtenu entre la théorie et les bornes numériques. On notera en particulier que le type de dissymétrie observé pour les surfaces de résistance s'interprète comme une signature de la dépendance du critère microscopique de la matrice des second et troisième invariants du déviateur de contraintes.

## Références

- [1] K. Anoukou, F. Pastor, P. Dufrenoy, D. Kondo, Limit analysis and homogenization of porous materials with Mohr-Coulomb matrix. Part I: theoretical formulation, *Under revision, Journal of the Mechanics and Physics of Solids* (2015)
- [2] Cazacu, O., Revil-Baudard, B., Chandola, N., Kondo, D., New analytical criterion for porous solids with Tresca matrix under axisymmetric loadings, *Int. J. Solids Struct.* 51, 861–874, 2014.
- [3] Gurson, A.L., Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth  
part I: yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Journal of Engineering and Materials Technology*, 99, 2–15, 1977.
- [4] F. Pastor, J. Pastor, D. Kondo, Numerical Limit Analysis and plasticity criterion of a porous Coulomb material with elliptic cylindrical voids, *CR Mecanique*, 343, 199–209, 2015.
- [5] J. Pastor, Ph. Thoré, F. Pastor, Limit analysis and numerical modeling of spherically porous solids with Coulomb and Drucker-Prager matrices, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234, 2162-2174, 2010.
- [6] F. Pastor, K. Anoukou, J. Pastor, D. Kondo, Limit analysis and homogenization of porous materials with Mohr-Coulomb matrix. Part II: Numerical bounds and assessment of the theoretical model, *Under revision, Journal of the Mechanics and Physics of Solids* (2015)