

# Modélisation Simplifiée à 7 DDL des Vibrations Verticales des Automobiles

D.N. DUMITRIU<sup>a</sup>, V. CHIROIU<sup>a</sup>, L. MUNTEANU<sup>a</sup>

a. Institut de Mécanique des Solides de l'Académie Roumaine, 15 rue Constantin Mille, 10141 Bucarest, Roumanie ; courriel : [dumitri04@yahoo.com](mailto:dumitri04@yahoo.com), [dumitriu@imsar.bu.edu.ro](mailto:dumitriu@imsar.bu.edu.ro)

**Mots clefs : modèle 7 DDL, vibrations verticales, CARSIM, roulis, tangage.**

## Résumé étendu:

L'analyse des vibrations verticales des automobiles est importante pour les études concernant l'adhérence roue/route (afin de réduire les forces dynamiques route/pneu), le confort du conducteur et des passagers (la qualité de la conduite) et l'utilisation des amortisseurs de suspension les plus appropriés/optimaux [1,2]. Le but est donc d'améliorer le compromis entre ces deux exigences contradictoires d'améliorer, d'un part, l'adhérence roue/route et, d'autre part, le confort du conducteur et des passagers, tout en réduisant aussi les mouvements relatifs entre les parties du véhicule [2].

L'interaction dynamique verticale entre le véhicule et la route peut être simulée soit en utilisant un logiciel commercial comme CARSIM [3], soit en développant un code de calcul à partir d'un modèle simplifié à 7 DDL du véhicule [4-6]. En ce qui concerne la simulation de la route, on peut utiliser aussi bien des profils réels mesurés ou simulés [1].

Les simulations effectuées avec CARSIM, l'un des plus connus logiciels commerciaux pour simulations automobiles, sont en effet des expériences virtuelles, étant quasiment aussi précises que des expériences réelles. La version CARSIM 8.1.1 utilise un modèle 3D multi-corps assez complet de l'automobile, qui tient compte aussi bien des mouvements verticaux, latéraux et longitudinaux [3]. Ce modèle CARSIM 8.1.1 est « représenté mathématiquement par 113 équations différentielles ordinaires afin de décrire le comportement cinématique et dynamique. Ce modèle complet est composé de 32 corps, ayant 16 DDL multiples, 41 coordonnées multi-corps, 14 coordonnées auxiliaires, 16 vitesses multi-corps, 7 vitesses auxiliaires, 127 forces actives et 93 moments actifs » [3]. Dans ce travail, le logiciel complet CARSIM est utilisé pour simuler un mouvement simplifié : seul le mouvement vertical du véhicule est étudié ici, impliquant le mouvement de roulis et celui de tangage, en négligeant les mouvements dans le plan horizontal. Évidemment, pour un tel mouvement simplifié réalisé en considérant une route droite et en négligeant les dérapages latéraux et longitudinaux, CARSIM utilise seulement une partie des nombreuses DDL et coordonnées mentionnés ci-dessus.

En parallèle avec les simulations effectuées en utilisant CARSIM 8.1.1, un code de calcul a été développé à partir du modèle simplifié à 7 DDL de la dynamique verticale de l'automobile, négligeant les mouvements longitudinaux et transversaux dans le plan horizontal. Les 7 DDL du modèle simplifié représenté dans la Figure 1 sont : le déplacement vertical  $z_{CM}$  du centre de masse de la caisse automobile (masse suspendue), l'angle de roulis  $\varphi$  de la masse suspendue (autour de l'axe  $x$  passant par le centre de masse CM), l'angle de tangage  $\theta$  de la masse suspendue autour de l'axe  $y$  et les déplacements verticaux  $z_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) des centres des 4 roues (calculés évidemment par rapport à leur positions d'équilibre).

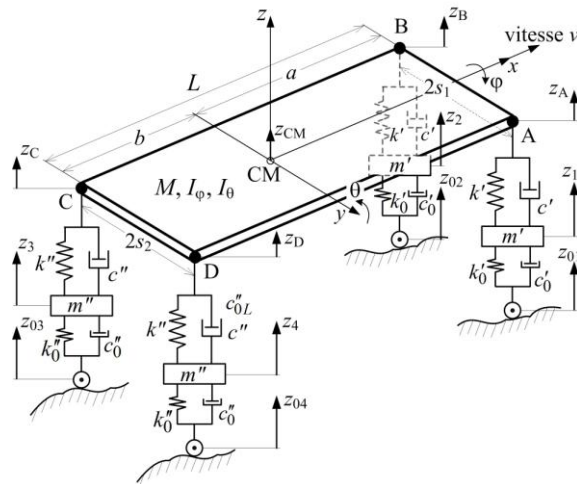


Figure 1 – Modèle simplifié 7 DDL de la dynamique verticale 3D de l'automobile [5,6]

Le modèle 7 DDL de la Figure 1 est composé de deux niveaux d'éléments élastiques et amortisseurs : un niveau primaire entre les roues et la route (caractérisé par les modules d'élasticité  $k'_0$  ou  $k''_0$  et par les coefficients d'amortissement  $c'_0$  ou  $c''_0$  des pneus) ; un deuxième niveau entre les roues et la caisse automobile qui représente la suspension de l'automobile, caractérisée par les modules d'élasticité  $k'$  ou  $k''$  du ressort de la suspension et par les coefficients  $c'$  ou  $c''$  des amortisseurs. Ici ' désigne les roues avant, tandis que '' désigne les roues arrière.

D'autres caractéristiques géométriques et inertielles du modèle 7 DDL considéré sont :  
 • empattement  $L=a+b$  ;  
 • voie avant  $2s_1$  ;  
 • voie arrière  $2s_2$  ;  
 • masse non-suspendue avant gauche/droite  $m'$  ;  
 • masse non-suspendue arrière gauche/droite  $m''$  ;  
 • masse  $M$  de la caisse automobile (masse suspendue) ;  
 • moment d'inertie de roulis  $I_\phi$  ;  
 • moment d'inertie de tangage  $I_\theta$ .

Les équations dynamiques pour le modèle simplifié 7 DDL de la Figure 1 des vibrations verticales automobiles sont obtenues de manière classique, en utilisant le formalisme Newton-Euler [4-6]. Les forces aérodynamiques ont été négligées dans notre simplification. En ce qui concerne les 2 DDL rotation de la masse suspendue, en utilisant la paramétrisation par une séquence de rotations  $x$ - $y$ - $z$  et dans le cas où le mouvement de lacet autour de l'axe  $z$  est négligé, on obtient les deux équations d'Euler suivantes concernant l'angle de roulis et celui de tangage :

$$\ddot{\phi} = \frac{(F_{2B} - F_{1A})s_1 \cos \varphi \cos \theta + (F_{3C} - F_{4D})s_2 \cos \varphi \cos \theta + 2(I_x - I_z)\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta}{I_z \sin^2 \theta + I_x \cos^2 \theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_y} [(F_{1A} + F_{2B})a \cos \theta + (F_{1A} - F_{2B})s_1 \sin \varphi \sin \theta - (F_{3C} + F_{4D})b \cos \theta + (F_{4D} - F_{3C})s_2 \sin \varphi \sin \theta - (I_\phi - I_\theta)\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta]$$

De petites différences sont observées entre ces deux équations des angles de roulis et de tangage et les équations similaires de *Demić et al.* [4]. Pour de petits angles de roulis et tangage, par exemple pour  $\varphi, \theta < 2^\circ$ , les équations ci-dessus sont identiques avec [4].

Les forces dans les points A, B, C et D où la masse suspendue est attachée aux suspensions sont :

$$F_{1A} = F_{c1} + k'(x_A - x_1) - F_{e,tampon1}, \quad F_{2B} = F_{c2} + k'(x_B - x_2) - F_{e,tampon2},$$

$$F_{3C} = F_{c3} + k''(x_C - x_3) - F_{e,tampon3}, \quad F_{4D} = F_{c4} + k''(x_D - x_4) - F_{e,tampon4},$$

où  $F_{1a}$  est la force d'amortissement dans l'amortisseur avant droite, etc. En ce qui concerne  $F_{e,tampon i}$  ( $i=1,2,3,4$ ), il s'agit des forces élastiques dans les tampons pare-chocs.

À part ces deux équations de moments suivant l'axe de roulis  $x$  et l'axe de tangage  $y$ , il y a encore une équation scalaire dynamique de la masse suspendue, celle concernant les forces sur la direction  $z$  :

$$\ddot{z}_{CM} = -\frac{1}{M}(F_{1A} + F_{2B} + F_{3C} + F_{4D})\cos\varphi\cos\theta.$$

Les autres 4 équations dynamiques scalaires du modèle 7 DDL concernent les déplacements verticaux des roues  $z_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) et sont identiques avec [4] :

$$\begin{cases} m'\ddot{z}_1 = F_{1A}\cos\varphi\cos\theta - c'_0(\dot{z}_1 - \dot{z}_{01}) - k'_0(z_1 - z_{01}); & m''\ddot{z}_2 = F_{2B}\cos\varphi\cos\theta - c'_0(\dot{z}_2 - \dot{z}_{02}) - k'_0(z_2 - z_{02}); \\ m'''\ddot{z}_3 = F_{3C}\cos\varphi\cos\theta - c'_0(\dot{z}_3 - \dot{z}_{03}) - k'_0(z_3 - z_{03}); & m'''\ddot{z}_4 = F_{4D}\cos\varphi\cos\theta - c'_0(\dot{z}_4 - \dot{z}_{04}) - k'_0(z_4 - z_{04}). \end{cases}$$

Au temps  $t$ , le profil vertical de la route sous le pneu avant droite (la rugosité de la route) est  $z_{01}(t)$ , etc. Evidemment, on a :  $z_{01}(t) = z_{04}(t + \Delta t)$  et  $z_{02}(t) = z_{03}(t + \Delta t)$ , avec  $\Delta t \cong \frac{L\cos\theta}{v}$ .

Les 7 équations différentielles du modèle 7 DDL simplifié pour les vibrations verticales des automobiles, dont 2 concernent les angles de roulis et de tangage est les autres 5 les déplacements verticaux, sont intégrées sans difficulté en Matlab [7], en utilisant la fonction ode45 basée sur des méthodes explicites Runge-Kutta d'ordre 4 et 5.

L'exemple numérique étudié concerne un automobile avec les caractéristiques suivantes :  $L = 2.578$  [m] =  $a + b$ , avec  $a = 1.016$  [m] et  $b = 1.562$  [m] ;  $M = 1.276$  [t] ;  $m' = m'' = 30.5$  [kg] ;  $I_\varphi = 0.606$  [t·m<sup>2</sup>] ;  $I_\theta = 1.523$  [t·m<sup>2</sup>] ;  $k' = k'' = 27$  [kN/m] ;  $k'_0 = k''_0 = 228$  [kN/m] (correspond à des pneus 205/55 R16) ; la force dans les amortisseurs est fonction de la vitesse du piston suivant une loi de dépendance implémentée dans la bibliothèque du logiciel CARSIM.

Les simulations sont effectuées pour une vitesse constante  $v = 10$  [km/h]. En ce qui concerne la route, on a superposé un profil aléatoire de route réelle à des sinusôides de 1 Hz, déphasés de  $\pi/2$  et d'amplitudes de 6 cm (sous les pneus gauche) et respectivement 9 cm (sous les pneus droite). Ainsi :  $z_{01}(t) = \text{profil réel} + 0.09 \cdot \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t)$  [m], respectivement  $z_{02}(t) = \text{profil réel} + 0.06 \cdot \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t + \pi/2)$  [m].

La Figure 2 présente les déplacements verticaux du centre de masse  $z_{CM}$  de la masse suspendue et des centres des roues avant droite  $z_1$  et gauche  $z_2$ , ainsi que le profil de la route  $z_{01}$  et  $z_{02}$  sous les roues avant. Les résultats sont obtenus en deux manières : avec CARSIM et en utilisant le code de calcul propre écrit en Matlab, basé sur le modèle 7 DDL. La Figure 3 présente les évolutions des angles de roulis et tangage entre 2 et 12 secondes (temps de simulation, correspondant aux distances de conduite entre 5.55 [m] et 33.33 [m], pour une vitesse constante en ligne droite de l'automobile  $v = 10$  [km/h]).

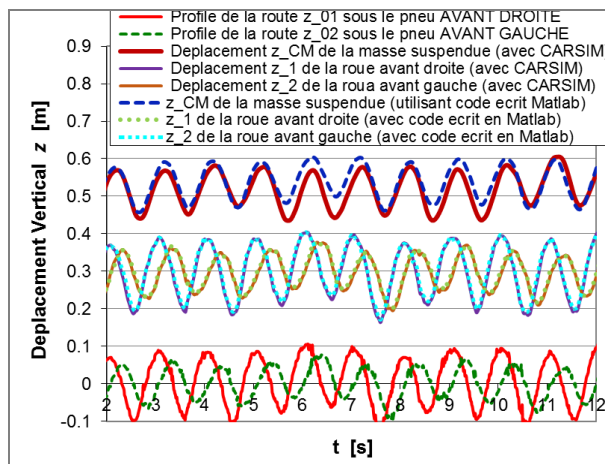


Figure 2 – Déplacements verticaux [m]

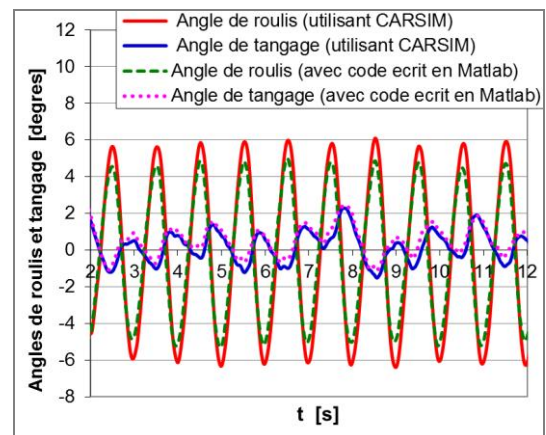


Figure 3 – Evolutions de angles de roulis et de tangage [°]

Les Figures 2 et 3 démontrent que les résultats obtenus en utilisant le code de calcul propre écrit en Matlab sont presque identiques à ceux obtenus en utilisant CARSIM. Les petites différences s'expliquent par le fait que CARSIM résout le problème de façon beaucoup plus générale, tout en permettant aussi de très petits déplacements latéraux et longitudinaux.

Puisque les simulations CARSIM peuvent être assimilées à une expérience virtuelle, les résultats obtenus valident le code de calcul développé, basé sur un modèle simplifié 7 DDL pour la dynamique verticale de l'automobile. Bien sûr, on obtient des résultats presque identiques entre CARSIM et notre code de calcul aussi en termes de vitesses, accélérations et forces agissant dans le système.

Afin de mettre en évidence les performances des suspensions, une analyse quantitative des caractéristiques en amplitudes et fréquences des déplacements verticaux de la masse suspendue et des roues a été effectuée et sera développée dans la présentation.

**Remerciements :** Les auteurs remercient l'Autorité Nationale pour la Recherche Scientifique de Roumanie (ANCS) et UEFISCDI pour leur support financier destiné à soutenir le projet de recherche PN-II-PT-PCCA-2011-3.1-0190, contrat no. 149/2012.

## Références (bibliographie sélective)

- [1] Sh. Lajqi, S. Pehan, Designs and Optimizations of Active and Semi-Active Non-linear Suspension Systems for a Terrain Vehicle, *Journal of Mechanical Engineering* 58/12 (2012) 732-743.
- [2] S. Segla, S. Reich, Optimization and comparison of passive, active, and semi-active vehicle suspension systems, 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June 18-21, 2007.
- [3] Mechanical Simulation Corporation, <http://www.carsim.com/>, CARSIM 8.1.1 software, 2012.
- [4] M. Demić, Đ. Diligenski, I. Demić, M. Demić, A method of vehicle active suspension design, *Forschung im Ingenieurwesen (Engineering Research)* 70/3 (2006) 145-158.
- [5] D.N. Dumitriu, Car vertical dynamics 3D simulator using a 7 DOF model, *Acta Technica Napocensis, Series: Applied Mathematics and Mechanics* 55/III (2012) 647-650.
- [6] D.N. Dumitriu, V. Chiroiu, L. Munteanu, Car vertical dynamics simulations using both an in-house 7 DOF model simulator and CARSIM commercial software, *U.P.B. Sci. Bull. Series D* 77/1 (2015) 77-84.
- [7] Mathworks Inc., *Matlab User's Guide*, Release 1997.

## Abstract :

*This paper concerns a simplified 7 DOF model for car vertical vibrations. The classical 7 DOF of the considered 3D vertical model are: the vertical displacement (heave)  $z_{GC}$  of the gravity center GC of the car body (sprung mass), the roll angle  $\varphi$  of the car body, the pitch angle  $\theta$  of the car body, the vertical displacement  $z_1$  of the front right wheel center (front right wheel hop), the front left wheel hop  $z_2$ , the rear left wheel hop  $z_3$  and the rear right wheel hop  $z_4$ .*

*Using the x-y-z sequence of rotations parameterization, the Euler's rotation equations concerning the roll and pitch angle are easily obtained. Small differences are observed between our car body rotation equations concerning the two angles (pitch and roll) and the same equations provided by M. Demić, Đ. Diligenski, I. Demić, M. Demić, "A method of vehicle active suspension design", *Forschung im Ingenieurwesen (Engineering Research)*, vol. 70, no. 3, 2006, pp. 145-158. Concerning the other 5 dynamics equations of the 7 DOF model, the ones concerning the vertical displacements  $z_{GC}$  and  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , no differences were observed with respect with the above-cited paper.*

*The simplified 7 DOF car vertical dynamics model, comprising two rotation equations (for pitch and roll angles) and five dynamics equations concerning vertical displacements/accelerations, were integrated/simulated in Matlab. The current results concern a case study considering a hatchback car vehicle with 1276 kg of mass (the complete car geometrical and inertial characteristics are also provided) and an off-road drive with 10 km/h speed on a quasi-sinusoidal road profile, different under left and right wheels, with amplitudes in the 5-10 cm range and frequency around 1 Hz.*

*The results obtained using the in-house 7 DOF model Matlab simulator are in very good agreement with the results provided by CARSIM (<http://www.carsim.com/>). CARSIM is a well-known 3D car dynamics commercial software/simulator which has already been validated on numerous examples, being almost as accurate as real experiments, thus it can be considered as a virtual reliable experiment.*