

Fatigue vibratoire des processus stochastiques, générés par les machines tournantes et modèle de fiabilité probabiliste associé

B. COLIN^a

a. Nexter Systems, 11 Allées des Marronniers, 78022 Versailles Cedex

Résumé :

Les processus aléatoires de contrainte relevés sur les structures mécaniques des machines tournantes sont à structure non gaussienne. En effet, ces derniers sont logiquement composés d'un processus périodique déterministe, centré sur les harmoniques de la fréquence de rotation du rotor, et sur lequel vient en général se superposer un processus aléatoire à moyenne nulle de nature gaussienne. Ces processus aléatoires sont alors couramment appelés processus aléatoires Composites Sinus plus Bruit (C_S+B) ou Multi-Sinus plus Bruit.

L'objectif de l'article est donc de présenter dans un premier temps les fondements mathématiques des modèles de fatigue vibratoire, adaptés ou non à cette nature spécifique de processus et couramment utilisés dans l'industrie. Puis dans un deuxième temps, les modèles probabilistes proposés seront comparés entre eux, afin d'en étudier leur degré de similitude et de conservatisme. Sur la base de la théorie de S.O Rice, associée au cas d'un processus aléatoire composite Sinus plus Bruit à bande étroite, un modèle analytique exact de fatigue vibratoire composite Sinus plus Bruit est alors proposé et discuté.

Abstract :

Stochastic processes of stress measured on the mechanical structures of rotating machines are with non-Gaussian processes. Indeed, the latter are logically composed of a deterministic periodic process, centered on the harmonics of the rotational frequency of the rotor, and on which usually comes to superimpose a random process with Gaussian characteristic. These stochastic processes are usually called Composite Sine plus Random Noise (C_S+R) or Multi-Sine plus Random Noise.

The objective of this article is to initially present the mathematical expressions of the vibratory fatigue, adapted or not adapted to this specific nature of process and usually used in industry. Then in the second time, the probabilistic models suggested will be compared between them, in order to study of it their degree of similarity and conservatism. On the basis of theory of S.O Rice, associated the case of a narrow band stochastic process with composite Sine plus Random Noise characteristics, an exact analytical model of composite Sine plus Random vibratory fatigue is proposed and discussed.

Mots clefs : Processus stochastique, Gaussien et Non Gaussien, Machine Tournante, Fatigue vibratoire des processus composite Sinus plus Bruit ou Multi-Sinus plus Bruit.

1. Introduction

Les processus aléatoires de contrainte relevés sur les structures mécaniques des machines tournantes sont à structure non gaussienne [1], et nécessitent donc d'utiliser des démarches de dimensionnement probabiliste, adaptées à sa nature spécifique.

De ces considérations techniques, le dimensionnement des structures à la fatigue vibratoire ne peut donc plus se faire à partir des théories probabilistes classiques, développées historiquement dans le cadre des processus stationnaires, ergodiques et gaussiens, et largement répandues dans les outils de conception EF (Eléments Finis) [2]. Ainsi sur la base des travaux développés par l'auteur dans le cadre du dimensionnement des structures mécaniques, soumises aux excitations vibratoires produites par les véhicules chenillés [3], une approche analytique et numérique de la fatigue vibratoire, induites par ce type de processus composite Sinus plus Bruit est proposée. Dans un premier temps, le modèle probabiliste des extrema locaux, restreint au cas des processus aléatoires à bande étroite est exposé [4] et comparé au cas des approches gaussiennes à iso-énergie. Cette approche statistique des maxima locaux est ensuite utilisée, pour aborder favorablement la statistique des dommages partiels générés par de tels processus, qui sont de nature à déterminer la durée de vie moyenne des structures, en s'appuyant sur les lois de Miner et de Basquin, couramment utilisées par les ingénieurs mécaniciens, dans l'industrie.

Dans un deuxième temps, les fondements mathématiques des modèles de fatigue vibratoire, adaptés à la nature probabiliste non-gaussienne de ce type de processus composite Sinus plus Bruit, seront exposés. Puis en final, les modèles probabilistes proposés seront comparés entre eux, afin d'en étudier leur degré de similitude et de conservatisme. Sur la base de la théorie de Rice, associé au cas des processus composite Sinus plus Bruit à bande étroite, un modèle statistique de fatigue vibratoire de ces processus composites Sinus plus Bruit est alors proposé et discuté.

2. Processus aléatoire de contrainte composite Sinus plus Bruit

Comme présenté en introduction, on se place dans le cas des processus aléatoires composites Sinus plus Bruit à bande étroite, décrits par la théorie de Rice [5], dont on va définir l'expression aléatoire du processus de contrainte $x(t, \xi)$ de durée de sollicitation T donnée. Ce processus aléatoire de contrainte composite $x(t, \xi)$ à bande étroite est donc composé par la somme d'un processus aléatoire gaussien à bande étroite $b(t, \xi)$ avec un processus sinusoïdal $s(t, \xi)$, tous deux supposés stationnaires et ergodiques. Compte tenues des considérations techniques exposées précédemment, le processus aléatoire gaussien $b(t, \xi)$ est ici supposé de valeur efficace égale à σ et centré sur la fréquence f_0 , pour satisfaire l'hypothèse de bande étroite retenue au niveau du processus aléatoire composite Sinus plus Bruit. De même, le processus aléatoire sinusoïdal $s(t, \xi)$ est ici d'amplitude constante S et de fréquence f_0 , pour respecter là encore l'hypothèse de bande étroite du processus aléatoire composite Sinus plus Bruit considéré.

De ce fait l'expression du processus composite $x(t, \xi)$ à bande étroite, stationnaire et ergodique est donc :

$$x(t, \xi) = b(t, \xi) + s(t, \xi) \quad (1)$$

$$b(t, \xi) = \eta_c(t, \xi) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \eta_s(t, \xi) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \quad (2)$$

Où $\eta_c(t, \xi)$ et $\eta_s(t, \xi)$ sont deux processus aléatoires gaussiens à bandes larges et de valeurs efficaces σ .

$$s(t, \xi) = S \cdot \sin[2\pi f_0 t + \varphi_0(\xi)] \quad (3)$$

Où : S représente l'amplitude sinusoïdale crête de valeur constante,
 $\varphi_0(\xi)$ représente la phase à l'origine du processus sinusoïdal, distribuée de façon uniforme dans l'intervalle $[0, 2\pi]$,

f_0 représente la fréquence du processus sinusoïdal.

3. Densité de probabilité des maxima locaux du processus aléatoire composite Sinus plus Bruit, à bande étroite

Le dimensionnement des structures mécaniques à la fatigue vibratoire, soumises à un processus d'excitation aléatoire a été largement discuté par un grand nombre d'auteurs, dans le cas des processus aléatoires gaussiens, qu'ils soient à bandes étroites ou à larges bandes [6], [7] et [8].

Par contre, peu d'auteurs se sont intéressés au cas des processus aléatoires, à caractère composite, constitués d'un processus aléatoire périodique superposé à un processus aléatoire gaussien à bande large. Ceci est principalement dû au fait que les développements analytiques sous-jacents sont laborieux et peu répandus dans la littérature spécialisée, voire inexistantes. Devant la complexité importante de cette problématique, on se propose donc de se restreindre volontairement au cas des processus aléatoires composites Sinus plus Bruit à bandes étroites, constitués comme défini précédemment d'une contrainte sinusoïdale, superposée à une contrainte aléatoire à bande étroite, de fréquence moyenne f_0 proche de la fréquence sinusoïdale du phénomène tournant considéré.

Ainsi pour aborder favorablement le dimensionnement à la fatigue vibratoire des structures, soumises à un tel processus aléatoire de contrainte composite Sinus plus Bruit à bande étroite $x(t, \xi)$, il convient tout d'abord de pouvoir établir la loi de densité de probabilité des maxima locaux d'un tel processus de contrainte. Et pour ce faire, on montre qu'il est alors possible de s'appuyer favorablement sur l'expression analytique de l'enveloppe $z(t, \xi)$ de ce processus à bande étroite $x(t, \xi)$.

De ces considérations techniques, il ressort que le modèle analytique de l'enveloppe du processus aléatoire composite à bande étroite considéré est accessible en utilisant la théorie des signaux analytiques et donc des enveloppes complexes [9], au travers de la Transformation d'Hilbert. C'est d'ailleurs, en s'appuyant sur ce principe que l'expression de la densité de probabilité des maxima locaux des processus aléatoires composites Sinus plus Bruit à bandes étroites a été établie en 1992 par l'auteur [10].

Le processus enveloppe $z(t, \xi)$ est donc introduit par l'expression analytique suivante, à savoir :

$$x(t, \xi) = z(t, \xi) \cdot \cos[2\pi f_0 t + \phi_x(t, \xi)] \quad (4)$$

Cette expression analytique découle de l'hypothèse « bande étroite » réalisée pour le cas des processus aléatoires composites Sinus plus Bruit, que l'on considère centrés sur la fréquence moyenne f_0 . On peut alors montrer que les processus aléatoires d'enveloppe $z(t, \xi)$ et de phase à l'origine $\phi_x(t, \xi)$ du processus composite $x(t, \xi)$ sont alors conjointement liés par le modèle probabiliste suivant :

$$\begin{cases} p_{z\phi_x}(z, \phi_x) = \frac{z}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\left[\frac{z^2+S^2}{2\sigma^2}\right]} \cdot e^{\frac{z\cdot S}{\sigma^2} \cdot \sin(\phi_x - \phi_0)} \\ \text{avec } z > 0 \text{ et } \phi_x \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad (5)$$

3.1. Modèle analytique de Rice

En intégrant la densité de probabilité conjointe $p_{z\phi_x}(z, \phi_x)$ par rapport à la variable aléatoire $\phi_x(\xi)$, il est désormais possible de définir l'expression analytique de la densité de probabilité marginale des maxima locaux du processus aléatoire composite $x(t, \xi)$. Tous calculs faits, on obtient :

$$\begin{cases} p_z(z) = \frac{z}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \exp(-a_0^2) \cdot I_0\left(\frac{z\cdot S}{\sigma^2}\right) \\ \text{pour } z \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Où σ^2 représente la variance du processus de contrainte aléatoire gaussien à bande étroite $b(t, \xi)$ et où S représente l'amplitude du processus aléatoire sinusoïdal $s(t, \xi)$, de fréquence f_0 . Le coefficient adimensionnel a_0^2 représente quant à lui la sévérité du processus composite Sinus plus Bruit $x(t, \xi) = s(t, \xi) + b(t, \xi)$, puisqu'il représente le carré du rapport des valeurs efficaces Sinus sur Bruit, dénommé également (SNR : Signal-to-Noise Random) dans la littérature anglo-saxonne.

$$a_0^2 = \frac{S^2}{2\sigma^2} \quad (7)$$

Cette densité de probabilité des maxima locaux est donc composée du produit de deux fonctions analytiques simples, à savoir :

$$\begin{cases} p_z^{RAY}(z) = \frac{z}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \\ \text{et } h(a_0^2, a) = \exp(-a_0^2) \cdot I_0(a) \text{ avec } a = z\cdot S / \sigma^2 \\ \text{et où } I_0(a) \text{ représente la fonction de Bessel modifiée de première espèce} \\ \text{d'ordre zéro et d'argument } a \end{cases} \quad (8)$$

La fonction de Bessel modifiée de première espèce, d'ordre zéro, $I_0(x)$, présentée à la Figure 1 suivante, a pour forme analytique [11] l'expression suivante, à savoir :

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \exp(x \cdot \cos \theta) \cdot d\theta \quad (9)$$

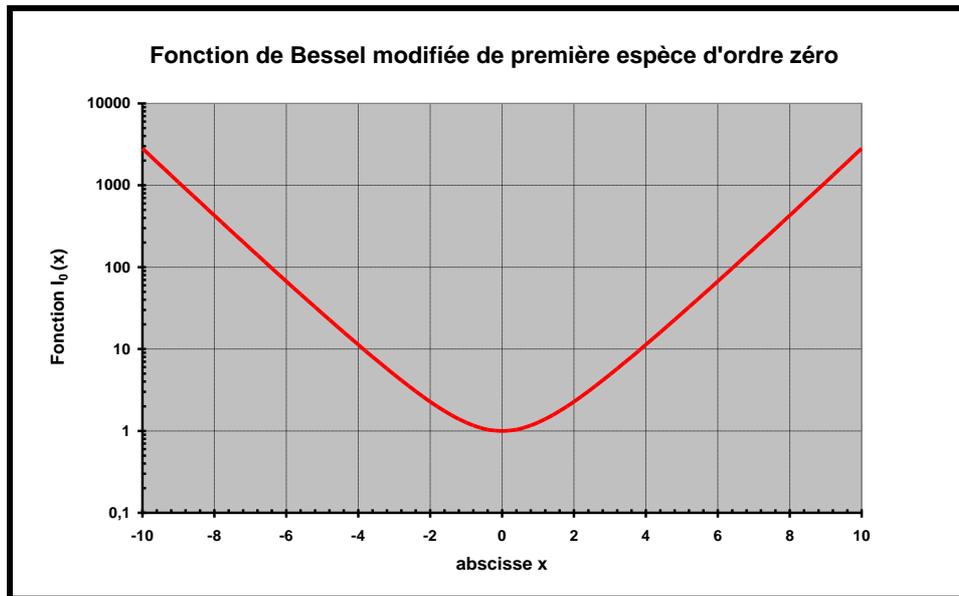


Figure 1 : Fonction de Bessel modifiée de première espèce, d'ordre zéro, $I_0(x)$

La densité de probabilité $p_z^{RAY}(z)$ représente la distribution de Rayleigh relative au cas des processus aléatoires gaussien à bande étroite et $h(a_0^2, a)$ représente la fonction multiplicative relative au cas des processus à bandes étroites Sinus plus Bruit. Cette densité de probabilité $p_z(z)$, définie par l'expression (6), est dénommée également dans la littérature loi de Rice du nom de son auteur Stephen O. Rice (1907-1986). Cette dernière est issue de ses travaux sur la communication radio [12], sachant que cette loi de probabilité est effectivement une généralisation de la loi de Rayleigh utilisée pour décrire le comportement d'un signal radio qui se propage selon plusieurs chemins avant d'être reçu par une antenne radar.

3.2. Expression adimensionnelle de la loi de Rice

Dans l'optique de mieux cerner le comportement de la loi de Rice, il convient de présenter cette dernière sous sa forme adimensionnelle (Figure 2), en rapportant l'amplitude aléatoire $z(\xi)$ de l'enveloppe $z(t, \xi)$ à la valeur efficace σ du processus aléatoire gaussien $b(t, \xi)$. La variable aléatoire adimensionnelle est donc notée $\eta(\xi) = Z(\xi) / \sigma$ et conduit à l'expression adimensionnelle de Rice suivante :

$$\begin{cases} p_\eta(\eta) = \eta \cdot \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \cdot \exp(-a_0^2) \cdot I_0\left(\eta \cdot \sqrt{2 \cdot a_0^2}\right) \\ \text{pour } \eta \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

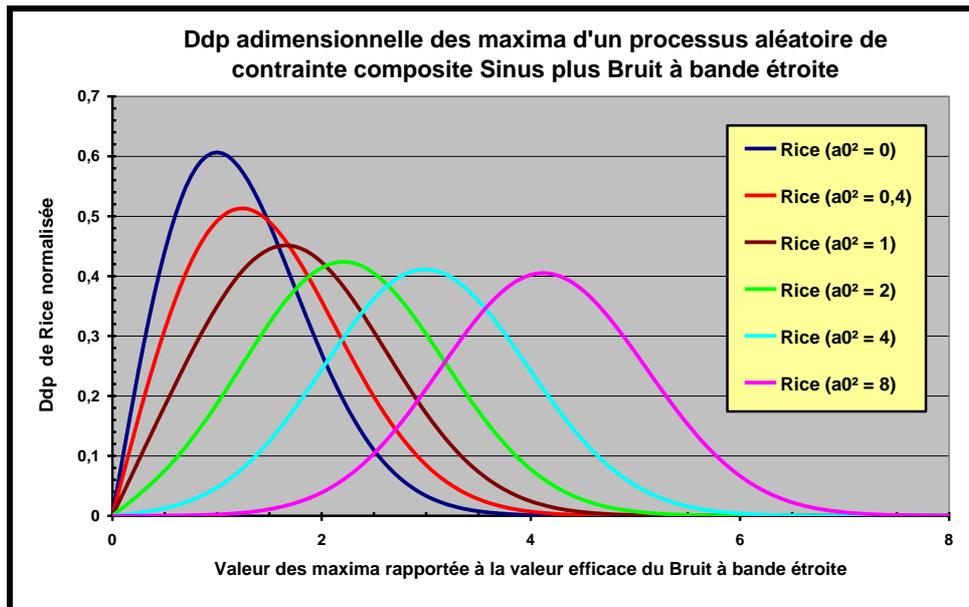


Figure 2 : Loi de Rice normalisée (d.d.p des maxima locaux d'un p.a composite Sinus plus Bruit à bande étroite)

A ce stade, il est important de constater que l'ensemble de la distribution de Rice se décale sur la droite (vers les valeurs élevées des maxima normalisés), lorsque le coefficient adimensionnel a_0^2 du processus composite $x(t, \xi)$ augmente.

3.3. Expression du mode de la loi de Rice

Par définition, le mode d'une loi de densité de probabilité $p_z(z)$ donnée correspond à l'abscisse z_1 du maximum de cette loi. La valeur du mode z_1 est ici ramenée à un coefficient adimensionnel a_1 , en posant :

$$a_1 = \frac{z_1 \cdot S}{\sigma^2} \quad (11)$$

En s'appuyant sur la dérivée première de la loi de Rice $p_z(z)$ définie par l'expression(6), dont on recherche la racine z_1 pour trouver la valeur du mode, on obtient l'équation analytique suivante :

$$\left. \frac{d[p_z(z)]}{dz} \right|_{z=z_1} = \begin{cases} \left\{ \left[\frac{1}{\sigma^2} - \left(\frac{z_1}{\sigma^2} \right)^2 \right] \cdot I_0(a_1) - \frac{S \cdot z_1}{\sigma^4} \cdot I_1(a_1) \right\} \cdot e^{-\frac{z_1^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-a_1^2} = 0 \\ \frac{1}{\sigma^4} \cdot \left\{ [\sigma^2 - z_1^2] \cdot I_0(a_1) - S \cdot z_1 \cdot I_1(a_1) \right\} \cdot e^{-\frac{z_1^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-a_1^2} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{avec } a_1 = \frac{S \cdot z_1}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad a_0^2 = \frac{S^2}{2 \cdot \sigma^2}$$

La valeur du mode adimensionnel $a_1 = \frac{z_1 \cdot S}{\sigma^2}$ s'obtient donc par une résolution numérique (voir expression 13 suivante), permettant de tracer (voir Figure 3) cette dernière en fonction du coefficient adimensionnel a_0^2 :

$$\begin{cases} [\sigma^2 - z_1^2] \cdot I_0(a_1) - S \cdot z_1 \cdot I_1(a_1) = 0 \\ \text{avec } a_1 = S \cdot z_1 / \sigma^2 \end{cases} \quad (13)$$

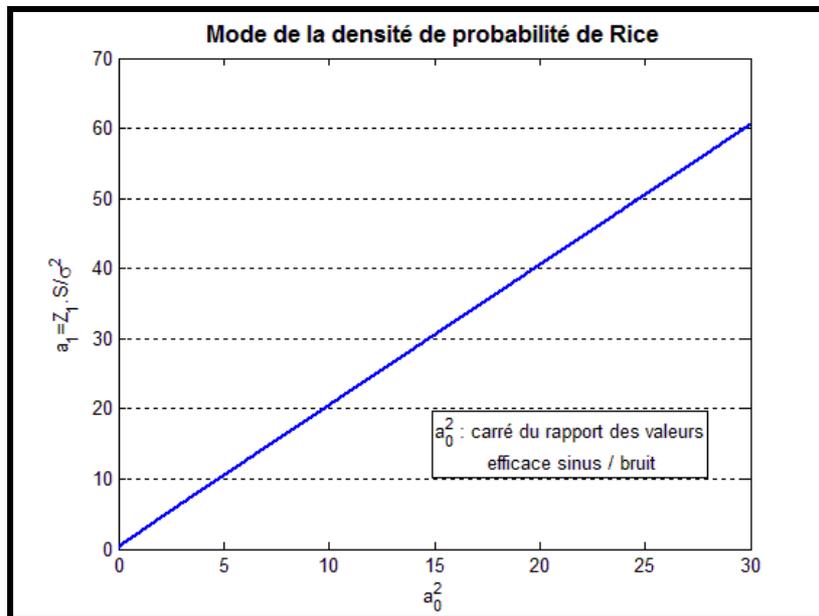


Figure 3 : Mode adimensionnel $a_1 = \frac{z_1 \cdot S}{\sigma^2}$ de la loi de Rice (d.d.p des maxima locaux d'un p.a composite Sinus plus Bruit à bande étroite)

La Figure 3 permet de mettre en évidence une relation linéaire entre le mode adimensionnel $a_1 = \frac{z_1 \cdot S}{\sigma^2}$ et le coefficient adimensionnel a_0^2 (carré du rapport des valeurs efficaces Sinus sur Bruit, associé au p.a composite), conduisant à écrire que :

$$\begin{aligned} a_1 &\approx 2 \cdot a_0^2 \quad \text{soit } z_1 \approx S \quad \forall a_0^2 \neq 0 \\ z_1 &= \sigma \quad \text{pour } a_0^2 = 0 \quad \text{et donc } S = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

De ce fait, on montre donc que le maxima local le plus probable d'un processus aléatoire de contrainte composite Sinus plus Bruit à bande étroite se situe autour de la valeur d'amplitude S du processus sinusoïdal $s(t, \xi)$, quelle que soit $a_0^2 \neq 0$.

4. Taux d'endommagement par fatigue moyen, associé au cas d'un processus aléatoire composite Sinus plus Bruit à bande étroite

Connaissant désormais l'expression analytique de la loi de densité de probabilité des maxima locaux d'un processus aléatoire de contrainte composite à bande étroite (voir relation 6), il devient possible d'estimer le taux moyen d'endommagement par fatigue produit par un tel processus sur une structure mécanique, dont le comportement en fatigue est décrit par sa courbe de Wölher moyenne.

4.1. Loi de Basquin analytique

Les courbes reliant le nombre de cycles à rupture, N , au niveau de contrainte alterné d'amplitude, S , sont largement utilisées par les concepteurs pour le dimensionnement des structures mécaniques. Les courbes dites « S-N » ou « courbes de Wöhler » sont généralement obtenues par des essais à fréquence constante (de l'ordre de la dizaine de Hertz) et sous contraintes sinusoïdales à amplitude constante [13]. Plusieurs courbes peuvent être tracées, en fonction de la probabilité de rupture $p\%$ considérée. Dans la pratique, la courbe de Wöhler est généralement donnée pour une probabilité de rupture égale à 50% (d'où la notion d'endommagement moyen estimé). On utilise habituellement trois modèles pour représenter analytiquement cette courbe de Wöhler, à savoir :

1. Le modèle de Basquin qui décrit uniquement la partie centrale de la courbe de Wöhler, appelée généralement zone d'endurance limitée où la rupture est atteinte après un nombre limité de cycles,
2. Le modèle de Strohmeier qui décrit la partie centrale de la courbe de Wöhler, ainsi que son asymptote finale (prise en compte possible de la limite de fatigue des matériaux) qui correspond à la zone d'endurance illimitée (zone de sécurité) de la courbe de Wöhler,
3. Le modèle de Bastenaire qui décrit la totalité de la courbe de Wöhler, prenant en compte notamment le comportement oligocyclique des matériaux (zone de fatigue plastique du matériau), associé à des amplitudes de contrainte élevées, supérieures à la limite d'élasticité du matériau,

Dans le cadre de la Fatigue vibratoire, on considère que l'état de contrainte dans les structures reste dans la zone intermédiaire de la courbe de Wöhler (fatigue d'endurance limitée), sans passer toutefois en dessous de la limite de fatigue des matériaux, de façon à pouvoir raisonner avec le modèle de Basquin classique qui est représenté par une droite dans un diagramme log-log. On peut donc la modéliser par l'expression analytique suivante :

$$N \cdot S^b = c \quad (15)$$

où b et c sont des constantes matériau

4.2. Fréquence moyenne et nombre de maxima du processus aléatoire de contrainte composite Sinus plus Bruit, à bande étroite

La fréquence moyenne d'un processus aléatoire stationnaire, notée f_M , correspond par définition au taux moyen de passages par zéro à pente positive ou négative du processus considéré $x(t, \xi)$ [1]. Sous l'angle analytique, l'obtention de cette fréquence moyenne est obtenue en résolvant l'intégrale suivante, à savoir (« zéro crossing problem ») :

$$f_M = \frac{1}{2} \cdot \int_{\dot{z}=-\infty}^{\dot{z}=\infty} |\dot{z}| \cdot p_{z\dot{z}}(z=0, \dot{z}) \cdot d\dot{z} \quad \text{en (Hz)}$$

où $p_{z\dot{z}}(z, \dot{z})$ correspond à la d.d.p conjointe
du $p.a$ enveloppe $z(t, \xi)$ et de sa dérivée première $\dot{z}(t, \xi)$. (16)

Comme le processus aléatoire composite Sinus plus Bruit $x(t, \xi)$ est un processus stationnaire à bande étroite, de fréquence f_0 , on peut d'emblée écrire que la fréquence

moyenne du processus composite f_M est égale à la fréquence f_0 . De ce fait, il n'est donc pas utile de passer par le calcul de la densité de probabilité conjointe $p_{z\dot{z}}(z, \dot{z})$ de l'enveloppe $z(t, \xi)$, dont l'expression de la densité de probabilité marginale est fournie à la relation (6). On obtient donc tout simplement l'expression triviale :

$$f_M = f_0 \quad \text{en (Hz)} \quad (17)$$

4.3. Taux moyen d'endommagement par fatigue du processus aléatoire de contrainte composite Sinus plus Bruit à bande étroite

En s'appuyant sur une technique de comptage de cycles d'endommagement de type « Peak-Valley », ainsi que sur la loi de cumulation des dommages par fatigue partiels de type Miner [14], il est possible d'écrire simplement et sous forme probabiliste, le taux moyen d'endommagement par fatigue $E[\bar{D}]$, à savoir [15] :

$$E[\bar{D}]_{PV} = \frac{f_M}{c} \cdot \int_{z=0}^{+\infty} z^b \cdot p_z(z) dz \quad \text{en (Hz)}$$

où $p_z(z)$ représente la d.d.p des maxima du p.a de contrainte composite Sinus plus Bruit à bande étroite, noté $z(t, \xi)$ (18)
 et où f_M représente la fréquence moyenne du p.a $z(t, \xi)$
 et où les paramètres b et c sont des constantes matériau (Wöhler)

En injectant l'expression (6) dans l'expression (18) précédente, on obtient l'écriture intégrale suivante de $E[\bar{D}]_{PV}^{C-S+B}$ pour un processus aléatoire Composite Sinus plus Bruit à bande étroite :

$$E[\bar{D}]_{PV}^{C-S+B} = \frac{f_M}{c} \cdot \frac{\exp(-a_0^2)}{\sigma^2} \cdot \int_{z=0}^{+\infty} z^{b+1} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{z \cdot S}{\sigma^2}\right) dz \quad (19)$$

Comme discuté précédemment, la fonction $I_0(x)$ représente la fonction de Bessel modifiée de première espèce, d'ordre zéro, dont l'expression sous forme de série est :

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{k! \cdot \Gamma(k+1)} \quad (20)$$

En injectant l'expression (20) précédente dans l'expression intégrale (19), on obtient tous calculs faits :

$$E[\bar{D}]_{PV}^{C-S+B} = \frac{f_M}{c} \cdot \exp(-a_0^2) \cdot (2\sigma^2)^{b/2} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a_0^2)^k}{k! \cdot \Gamma(1+k)} \cdot \int_{u=0}^{+\infty} u^{b/2+k} \cdot \exp(-u) \cdot du \quad (21)$$

Par ailleurs, en s'appuyant sur la définition intégrale de la fonction Gamma $\Gamma(x)$ [16], présentée dans l'expression (22) qui suit, il est possible d'obtenir une expression simple sous forme d'une série infinie du taux moyen d'endommagement par fatigue d'un processus aléatoire Composite Sinus plus Bruit $E[\bar{D}]_{PV}^{C-S+B}$, à savoir :

$$E[\bar{D}]_{pv}^{C-S+B} = \frac{f_M}{c} \cdot \exp(-a_0^2) \cdot (2 \cdot \sigma^2)^{\frac{b}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (a_0^2)^k \cdot \frac{\Gamma(1+k + \frac{b}{2})}{k! \cdot \Gamma(1+k)} \quad (22)$$

$$\text{avec } \Gamma(x) = \int_{t=0}^{+\infty} t^{x-1} \cdot \exp(-t) \cdot dt$$

En analysant la forme de cette série infinie, contenue dans l'expression précédente (22), il est possible de reconnaître une forme de série hypergéométrique [17], qui dans le cas présent correspond à la fonction hypergéométrique confluyente ${}_1F_1(a; b; z)$, peu connue des ingénieurs mécaniciens en fatigue vibratoire et par contre très répandue dans le domaine du traitement du signal en communication et en détection radar.

$${}_1F_1(a; b; z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \cdot \frac{z^n}{n!} \quad (23)$$

$$\text{avec pour symbole de pochhammer } (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

Cette série hypergéométrique confluyente est parfois dénommée, série hypergéométrique généralisée de Gauss et est appelée fonction de Kummer dans la littérature spécialisée. Elle est d'ailleurs gouvernée par la transformation de Kummer suivante :

$${}_1F_1(a; b; z) = \exp(z) \cdot {}_1F_1(b-a; b; z) \quad (24)$$

En injectant les expressions (23) et (24) dans l'expression (22), il est alors possible d'établir deux expressions simples du taux moyen d'endommagement par fatigue d'un processus aléatoire Composite Sinus plus Bruit $E[\bar{D}]_{pv}^{C-S+B}$, à savoir :

$$E[\bar{D}]_{pv}^{C-S+B} = \frac{f_M}{c} \cdot \exp(-a_0^2) \cdot (2 \cdot \sigma^2)^{\frac{b}{2}} \cdot \Gamma(1 + \frac{b}{2}) \cdot {}_1F_1(1 + \frac{b}{2}; 1; a_0^2) \quad (25)$$

Ou :

$$E[\bar{D}]_{pv}^{C-S+B} = \frac{f_M}{c} \cdot (2 \cdot \sigma^2)^{\frac{b}{2}} \cdot \Gamma(1 + \frac{b}{2}) \cdot {}_1F_1(-\frac{b}{2}; 1; -a_0^2) \quad (26)$$

Les expressions (25) et (26) correspondent aux modèles analytiques vrais de fatigue vibratoire, associés aux cas des processus aléatoires composites Sinus plus Bruit à bande étroite, dans lesquels on reconnaît le modèle analytique de fatigue vibratoire sous contrainte aléatoire gaussienne à bande étroite, pondéré par la fonction multiplicative ${}_1F_1(-\frac{b}{2}; 1; -a_0^2)$.

5. Comparaison entre le modèle Composite Sinus plus Bruit et le modèle sommation des effets individuels Sinus et Aléatoire

Ne disposant pas d'outils de calculs de fiabilité mécanique dans le domaine des processus aléatoires des machines tournantes, les concepteurs se réfugient derrière des méthodes approchées, qui dans certains cas peuvent s'avérer dangereuses, de part leurs caractères non conservatifs. Un des réflexes couramment retenu par les ingénieurs concepteurs en fatigue vibratoire, consiste à utiliser le principe de superposition des chargements dynamiques, fréquemment répandu dans le domaine déterministe, mais qui pose un problème de

conservatisme bien connu en dimensionnement stochastique, comme on va le montrer ci-après.

De ces considérations techniques, il convient dans le cas présent de comparer le modèle de fatigue vibratoire établi au paragraphe 4 précédent $E[\bar{D}]_{pv}^{C-S+B}$ et adapté à la nature Composite Sinus plus Bruit des processus « machine tournante », avec celui de la sommation des effets individuels Sinus et Aléatoire $(E[\bar{D}]_{pv}^S + E[\bar{D}]_{pv}^B)$.

5.1. Taux moyen d'endommagement par fatigue du processus aléatoire de contrainte gaussien à bande étroite

En posant $(a_0^2 = 0)$ dans l'expression (26) du modèle composite, on retrouve le cas des processus aléatoire Gaussien à bande étroite, qui conduit à écrire [2], [6] :

$$E[\bar{D}]_{pv}^B = \frac{f_M}{c} \cdot (2 \cdot \sigma^2)^{\frac{b}{2}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{b}{2}\right) \quad (27)$$

5.2. Taux moyen d'endommagement par fatigue du processus aléatoire de contrainte sinusoïdale

En posant $(a_0^2 = +\infty)$ dans l'expression (26) du modèle composite, on retrouve le cas des processus aléatoire sinusoïdaux, qui conduit à écrire [18] :

$$E[\bar{D}]_{pv}^S = \frac{f_M}{c} \cdot S^b = \frac{f_M}{c} \cdot (2 \cdot \sigma^2)^{\frac{b}{2}} \cdot (a_0^2)^{\frac{b}{2}} \quad (28)$$

5.3. Modèle de sommation des effets individuels

En s'appuyant sur les expressions (27) et (28) précédentes, on obtient donc le modèle de sommation des effets individuels suivant^o:

$$E[\bar{D}]_{pv}^S + E[\bar{D}]_{pv}^B = \frac{f_M}{c} \cdot (2 \cdot \sigma^2)^{\frac{b}{2}} \cdot \left[\Gamma\left(1 + \frac{b}{2}\right) + (a_0^2)^{\frac{b}{2}} \right] \quad (29)$$

5.4. Comparaison entre le modèle Composite Sinus plus bruit et le modèle de sommation des effets individuels

En s'appuyant sur les expressions (25), (26) et (29) précédentes, on obtient donc le modèle de comparaison $R_D^1(a_0^2, b)$ suivant, où (a_0^2) correspond au coefficient adimensionnel mesurant le caractère composite Sinus plus Bruit du processus « machine tournante » et où (b) représente le paramètre de la pente de Wöhler du matériau ou matériel considéré. Plus précisément, le paramètre adimensionnel (a_0^2) correspond au carré du rapport des valeurs efficaces du processus sinusoïdal $s(t, \xi)$ et du processus aléatoire $b(t, \xi)$, supposé gaussien et à bande étroite.

De ces considérations techniques, il ressort qu'un processus aléatoire composite Sinus plus Bruit de valeur (a_0^2) élevée correspond physiquement à un phénomène tournant très important devant le bruit de fond aléatoire du processus « machine tournante ». Dans le cas contraire, un

processus de valeur (a_0^2) faible correspond physiquement à un phénomène tournant noyé dans le bruit de fond du processus composite considéré.

L'expression analytique du modèle de comparaison est alors la suivante :

$$R_D^1(a_0^2, b) = \frac{E[\bar{D}]_{pv}^{C-S+B}}{E[\bar{D}]_{pv}^S + E[\bar{D}]_{pv}^B} = \frac{\exp(-a_0^2) \cdot \Gamma(1 + \frac{b}{2}) \cdot {}_1F_1(1 + \frac{b}{2}; 1; a_0^2)}{\Gamma(1 + \frac{b}{2}) + (a_0^2)^{\frac{b}{2}}} \quad (30)$$

$$\text{où : } R_D^1(a_0^2, b) = \frac{\Gamma(1 + \frac{b}{2}) \cdot {}_1F_1(-\frac{b}{2}; 1; -a_0^2)}{\Gamma(1 + \frac{b}{2}) + (a_0^2)^{\frac{b}{2}}}$$

Ce modèle de comparaison est ensuite tracé en fonction du paramètre adimensionnel (a_0^2) et paramétré en fonction du paramètre b qui selon les cas pratiques varie dans une plage relativement importante, $3 < b < 22$, conformément à la littérature spécialisée [19] et [20].

- $3 < b < 6$: Cas des équipements électroniques [19]. Dans le cadre de travaux récents, menés sur les soudures de composants électroniques CMS et BGA, on confirme que de telles problématiques sont gouvernées en fatigue vibratoire par une plage $4 < b < 6$.
- $6 < b < 10$: Cas des structures mécaniques en alliage d'aluminium [18], [20].
- $10 < b < 15$: Cas des structures mécaniques en acier [18], [20].
- $20 < b < 25$: Cas des structures mécaniques en magnésium [18], [20].

Dans le domaine des spécifications d'essais vibratoires, couvrant le processus de qualification des équipements intégrés sur des produits industriels du Secteur Civil ou Militaire [20], il est d'usage de retenir $b=4$ pour la qualification des équipements de nature électronique, $b=5$ pour la qualification des équipements de nature optronique et $b=8$ pour des équipements de nature mécanique.

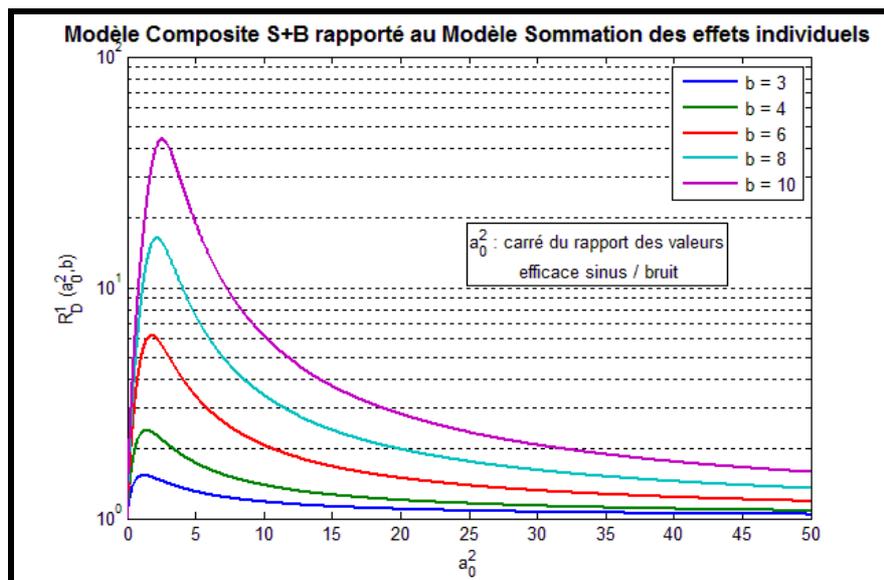


Figure 4 : Modèle Composite Sinus plus Bruit rapporté au modèle de sommation des effets individuels pour $b=3, 4, 6, 8, 10$.

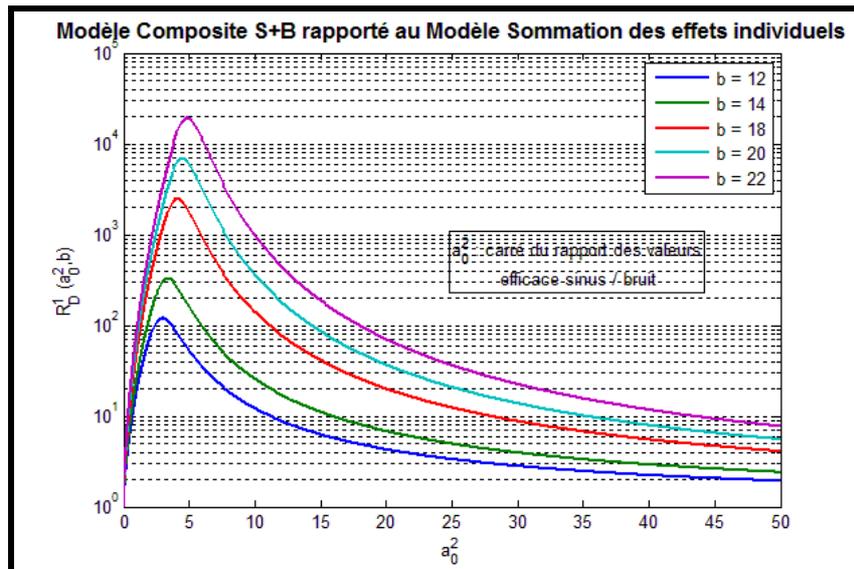


Figure 5 : Modèle Composite Sinus plus Bruit rapporté au modèle de sommation des effets individuels pour $b=12, 14, 18, 20, 22$.

D'après les Figures 4 et 5 précédentes, on constate donc que le modèle de sommation des effets individuels est non conservatif pour estimer la durée de vie des structures soumises à un processus composite de type « machine tournante ». Et ceci est valable quel que soit le paramètre adimensionnel (a_0^2) et quelle que soit la pente de Wöhler du matériau ou matériel considéré, sachant que plus le paramètre b augmente et plus le risque de sous-dimensionnement en fiabilité mécanique est grand, lorsque l'approche par sommation des effets individuels est utilisée. La plage de valeurs (a_0^2) comprises entre 1 et 10 est particulièrement sensible, tant le sous-dimensionnement en fatigue vibratoire est présent.

6. Comparaison entre le modèle Composite Sinus plus Bruit et le modèle aléatoire Gaussien à « Iso-Energie »

La deuxième méthode de calculs approchée en fatigue vibratoire sur de tels processus aléatoires de « machine tournante », consiste à traiter le caractère composite Sinus plus Bruit par le modèle spectrale classique de DSP (Densité Spectrale de Puissance), couramment utilisé par les concepteurs, dans la mesure où les outils de calculs d'aujourd'hui [2] sont dotés des méthodes spectrales de fatigue vibratoire à caractère gaussien, dont la théorie est éprouvée et largement répandue dans les ouvrages spécialisés [6].

Dans la pratique, les concepteurs utilisent donc les fondements mathématiques des processus aléatoires Gaussiens à large bande, en appliquant une équivalence énergétique entre le processus aléatoire de contrainte composite Sinus plus Bruit $x(t, \xi)$ défini par (1) et un processus aléatoire gaussien $b_e(t, \xi)$, équivalent en terme de valeur efficace. Ceci se traduit par les relations analytiques suivantes, à savoir :

$$x(t, \xi) = b(t, \xi) + s(t, \xi) = b_e(t, \xi) \quad (31)$$

Où : $b_e(t, \xi)$, processus aléatoire gaussien « Iso-Energie » de valeur efficace équivalente σ_e , dont l'expression est définie par la relation triviale qui suit.

$$\sigma_e^2 = \frac{S^2}{2} + \sigma^2 = \sigma^2 \cdot (1 + a_0^2) \quad (32)$$

6.1. Taux moyen d'endommagement par fatigue du processus aléatoire de contrainte aléatoire gaussien à « Iso-Energie »

Le processus aléatoire gaussien $b_e(t, \xi)$ équivalent à « Iso-Energie », étant à bande étroite et centré sur la fréquence moyenne f_M des processus aléatoires Sinus $s(t, \xi)$ et Bruit $b(t, \xi)$, il ressort que l'expression analytique du taux moyen d'endommagement par fatigue associé à $b_e(t, \xi)$ est, en s'appuyant sur (27) et (32) :

$$E[\bar{D}]_{pv}^{B-IE} = \frac{f_M}{c} \cdot (2 \cdot \sigma^2)^{\frac{b}{2}} \cdot (1 + a_0^2)^{\frac{b}{2}} \cdot \Gamma(1 + \frac{b}{2}) \quad (33)$$

6.2. Comparaison entre e modèle Composite Sinus plus bruit et le modèle Aléatoire à « Iso-Energie »

En s'appuyant sur les expressions (25), (26) et (33) précédentes, on obtient donc le modèle de comparaison $R_D^2(a_0^2, b)$ suivant, où (a_0^2) correspond au coefficient adimensionnel mesurant le caractère composite Sinus plus Bruit du processus « machine tournante » et où (b) représente le paramètre de la pente de Wöhler du matériau ou matériel considéré.

Comme présenté au paragraphe 5.4 précédent, le paramètre adimensionnel (a_0^2) correspond au carré du rapport des valeurs efficaces du processus sinusoïdal $s(t, \xi)$ et du processus aléatoire $b(t, \xi)$, supposé gaussien et à bande étroite. Et le paramètre b représentant la pente de la courbe de Wöhler, est une fois encore retenu dans l'intervalle $[3, 22]$, qui couvre l'ensemble des problèmes traités couramment dans l'industrie mécanique (dimensionnement en fatigue des structures [6] et/ou spécification d'essais en environnement mécanique [20]).

$$R_D^2(a_0^2, b) = \frac{E[\bar{D}]_{pv}^{C-S+B}}{E[\bar{D}]_{pv}^{B-IE}} = \frac{\exp(-a_0^2) \cdot {}_1F_1(1 + \frac{b}{2}; 1; a_0^2)}{(1 + a_0^2)^{\frac{b}{2}}} \quad (34)$$

$$\text{où : } R_D^2(a_0^2, b) = \frac{{}_1F_1(-\frac{b}{2}; 1; -a_0^2)}{(1 + a_0^2)^{\frac{b}{2}}}$$

Comme dans le paragraphe 5.4 précédent, on se propose de réaliser les Figures 6 et 7 décrivant le modèle de comparaison $R_D^2(a_0^2, b)$ pour respectivement le cas $3 < b < 10$ et le cas $10 < b < 22$. Contrairement à l'approche simplifiée de sommation des effets individuels, l'approche simplifiée par traitement DSP à « Iso-Energie » s'avère très conservatrice et donc très sur-dimensionnant en terme de durée de vie et donc de fiabilité mécanique.

Et ceci est valable quel que soit le paramètre adimensionnel (a_0^2) et quelle que soit la pente de Wöhler du matériau ou matériel considéré, sachant que plus le paramètre b augmente et plus le risque de surdimensionnement en fiabilité mécanique est grand, lorsque l'approche par traitement DSP à « Iso-Energie » est utilisée. Compte tenu que ce risque de surdimensionnement croit de façon continue avec (a_0^2) , il s'avère que cette approche n'est pas

économiquement efficace à utiliser pour optimiser les concepts de structures mécaniques des secteurs industriels (moteurs, offshore, éolien, etc...) concernés.

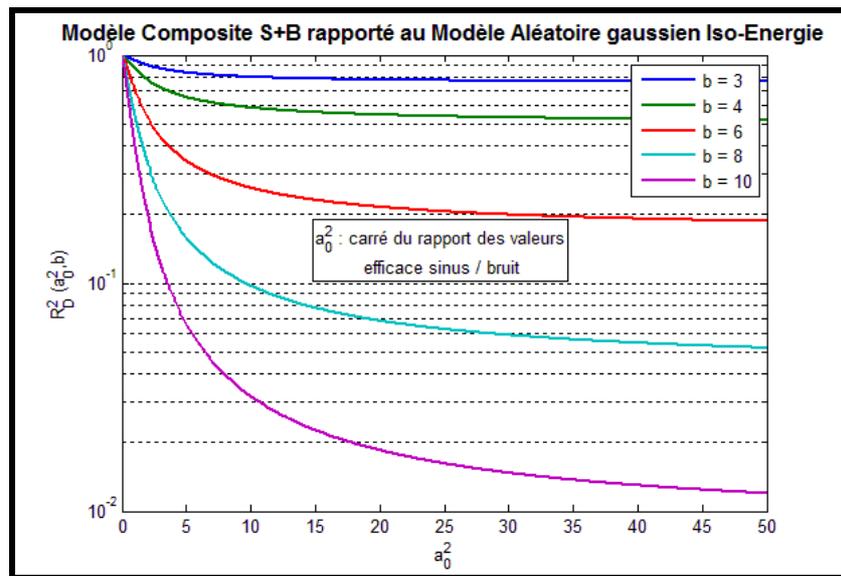


Figure 6 : Modèle Composite Sinus plus Bruit rapporté au modèle aléatoire gaussien « Iso-Energie » pour $b=3, 4, 6, 8, 10$.

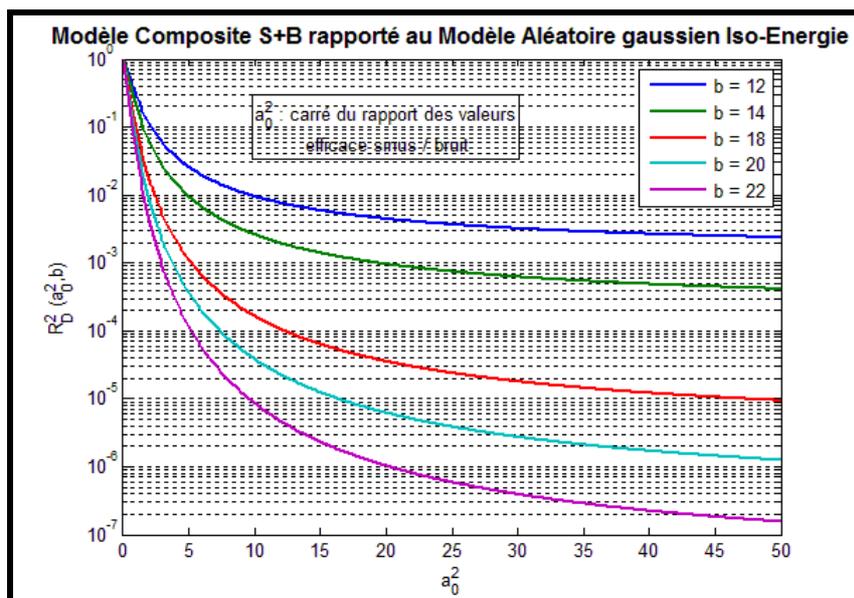


Figure 7 : Modèle Composite Sinus plus Bruit rapporté au modèle aléatoire gaussien « Iso-Energie » pour $b=12, 14, 18, 20, 22$.

7. Conclusion

Ce travail montre que les approches simplifiées (Somme des effets individuels et Traitement DSP à Iso-Energie) sont inadaptées pour dimensionner ou spécifier les essais de validation des structures et équipements, soumis à des processus d'excitation aléatoire composite Sinus plus Bruit de type « machine tournante ». Dans le cas particulier, des processus aléatoires composites Sinus plus Bruit à bande étroite, un modèle de fiabilité mécanique analytique a été présenté, permettant de dimensionner au juste nécessaire les produits, soumis à de tels processus composites.

Le caractère restrictif bande étroite présent dans ce modèle analytique peut être favorablement levé par des études en cours, et qui feront l'objet de présentations futures.

Références

- [1] J.S Bendat, Principles and Applications of Random Noise Theory, John Wiley & Sons, 1958.
- [2] MSC/FATIGUE V8 User Manual, MSC Corporation, Los Angeles, CA, 1998.
- [3] B. Colin, Tracklayers : a complex vibration environment, Institute of Environmental Sciences, 1990.
- [4] B. Colin, Statistiques des valeurs extrêmes des processus stochastiques, générés par les machines tournantes et modèle de fiabilité probabiliste associé, 21ème Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, 26 au 30 Août 2013.
- [5]°S. Rice, Mathematical analysis of random noise, Bell System Technical Journal Vol 24, pp. 98-108, July 1944.
- [6]°A. Preumont, Random Vibration and Spectral Analysis, Kluwer Academics Publishers, 1994.
- [7]° P.H Wirshing & T.L. Paez & K. Ortiz, Random Vibration, Theory and Practice, John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [8]°SAMCEF User Manual 9-1, Random Vibrations Spectral, Module Fatigue, Samtech, January 2002.
- [9] F. de Coulon, Théorie et traitement des signaux, Dunod, Chapitre 7, 1984.
- [10] B. Colin, Spectres des réponses extrêmes d'un environnement sinus plus bruit, Mécaniques Matériaux Electricité n°446, Octobre-Novembre, 1992.
- [11] A. Angot, Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications, Masson, pp. 390-394, 1982.
- [12]° S.O Rice, Mathematical Analysis of Random Noise, Bell System Technical Journal, vol.23, 1944.
- [13] H.P. Lieurade, Estimation des caractéristiques de résistance et d'endurance en fatigue-La fatigue des matériaux et des structures, Collection Université de Compiègne, C. Bathias, JP. Bailon, Les presses de l'Université de Montréal, 1980.
- [14] M.A. Miner, J.Appl. Mecha. 67 (1945) A159-A164.
- [15] B. Colin, Approche stochastique de la Fatigue Vibratoire : Comparaison entre les méthodes Peak-Valley et RainFlow Counting, Revue de la Métallurgie, Vol. 109 (4), pp. 217-247.
- [16]°I.B. Bronstein & K.A. Semendiaev, Aide mémoire de Mathématiques, Edition Eyrolles, 1982.
- [17]°Larry C. Andrews, Special functions of Mathematics for Engineers, Second Edition, Chapitre 10, The Confluent Hypergeometric Functions, McGraw-Hill, 1992.
- [18]°DGA, Essais Généraux en environnement des matériels GAM EG13, Annexe Générale Mécanique, Juin 1988, Annexe 1, Dommage par robustesse et par fatigue d'un système mécanique à 1d.d.l soumis à une excitation sinusoïdale.
- [19]°J. De Winne, Equivalence of fatigue damage caused by vibrations, Institute of Environmental Sciences, 1986, Proceedings.
- [20]°AFNOR, X50-144-Fascicules 1 à 6, Démonstration de la tenue aux environnements- Conception et réalisation des essais en environnement