Modélisation probabiliste de lois de comportement hyperélastiques

B. Staber[a], J. Guilleminot[a]

a. Laboratoire MSME, Université Paris-Est, France.
bstaber@etudiant.univ-mlv.fr, johann.guilleminot@u-pem.fr

Résumé :

Dans ce travail, on s'intéresse à la construction, par la théorie de l'information, d'une classe de potentiels hyperélastiques stochastiques satisfaisant des propriétés fondamentales associées à des théorèmes d'existence [1]. Un générateur basé sur la résolution, à partir d'un schéma numérique adaptatif [4], d'une équation différentielle stochastique d'Itô est ensuite introduit et permet d'échantillonner les potentiels hyperélastiques aléatoires ainsi construits. La méthode de modélisation probabiliste ainsi qu'une méthodologie d'identification inverse (à partir de données expérimentales) sont enfin illustrées sur des potentiels isotropes classiques tels que les potentiels de Mooney-Rivlin et d'Ogden.

Mots clefs : Hyperélasticité, modèle probabiliste, principe du maximum d'entropie, équations différentielles stochastiques

1 Introduction

Les lois constitutives des matériaux hyperélastiques dérivent d'un potentiel dont la forme algébrique, induite par des considérations phénoménologiques et physiques, dépend d'un ensemble de paramètres. Ces derniers sont typiquement déterminés au travers d'une identification inverse basée sur des données expérimentales. Or, celles-ci présentent en général une variabilité importante, notamment dans le cas de tissus biologiques ou de matériaux composites à matrice hyperélastique. Dans ce travail, on se propose de construire et de générer des modèles probabilistes pour des potentiels hyperélastiques afin de prendre en compte ces incertitudes.

2 Modélisation stochastique en hyperélasticité

La construction de modèles stochastiques pour des potentiels hyperélastiques est accomplie dans le cadre de la théorie de l'information [5], en imposant d'une part des contraintes induites par certains théorèmes d'existence [1] et d'autre part, des contraintes associées au comportement asymptotique en petites perturbations [2, 6]. On montre que dans ce cadre, les lois de probabilité de certains paramètres sont conditionnées par les réalisations des modules élastiques (dont les lois sont construites dans [3]), nécessitant entre autre la construction d'un générateur adapté. Plus spécifiquement, la simulation numérique des paramètres des potentiels hyperélastiques stochastiques nécessite la génération de variables aléatoires vectorielles non-gaussiennes à valeurs dans un sous-ensemble de $\Re^n$. Pour ce faire, l'algorithme adaptatif à pas stochastique proposé dans [4] est invoqué.

3 Illustration numérique

A titre d'exemple, nous considérons la génération du potentiel hyperélastique incompressible de Mooney-Rivlin défini, dans le cadre déterministe, par :

$$w([F]) = \alpha \left(\|[F]\|^2 - 3 \right) + \beta \left(\|\mathrm{Cof}([F])\|^2 - 3 \right) \ , \tag{1}$$

pour tout gradient de la déformation $[F]$ satisfaisant la condition d'incompressibilité, avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ afin d'assurer la polyconvexité du potentiel hyperélastique. En accord avec la théorie des petites perturbations, les paramètres α et β vérifient la condition de cohérence $\alpha + \beta = \mu/2$. Des modèles probabilistes pour les paramètres α et β sont alors construits en se basant sur la théorie de l'information et en ayant recours à un conditionnement vis-à-vis de la partie linéaire. Quelques réalisations du potentiel hyperélastique stochastique construit permettent d'obtenir plusieurs réalisations de la contrainte de Cauchy dans le cas, par exemple, d'un essai de traction simple. Sur la figure 1 sont représentés quelques intervalles de confiance de la contrainte de Cauchy pour différents jeux de paramètres contrôlant les modèles de probabilistes.

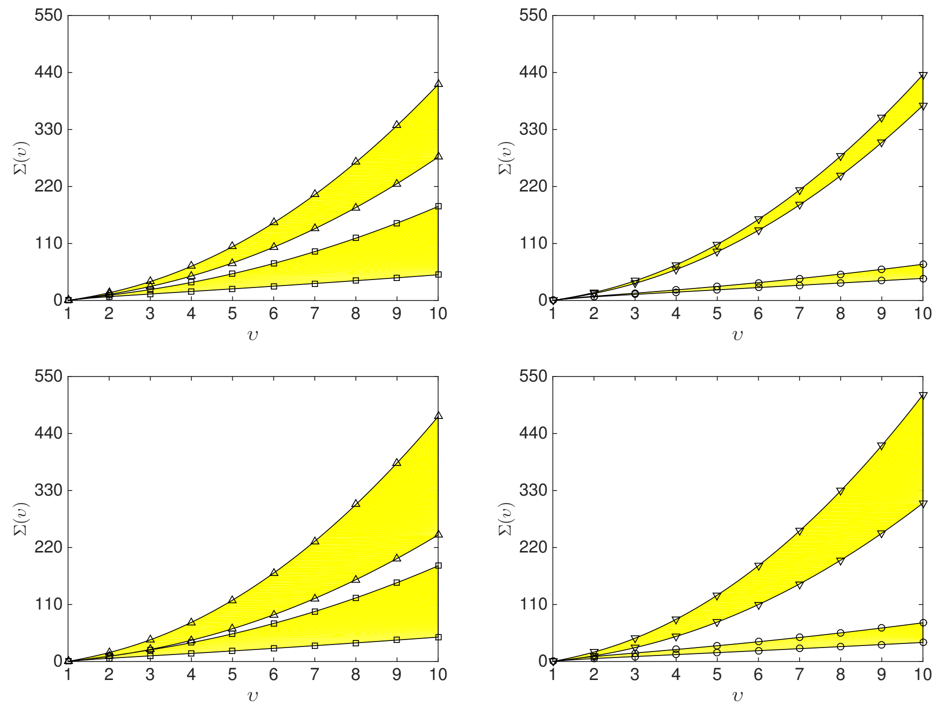

FIGURE 1 – Intervalles de confiance (à un niveau de probabilité de 0.9) de la contrainte de Cauchy aléatoire pour différentes valeurs des paramètres du modèle.

On montre enfin que la flexibilité du modèle probabiliste permet en outre de contrôler les fluctuations des parties linéaire et non-linéaire de la réponse mécanique ce qui s'avère efficace pour l'identification inverse à partir de données expérimentales.

Références

[1] J. Ball, Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, Arch. Ration. Mech. Anal., 63 (1977) 337–403.

[2] P.G. Ciarlet, Mathematical Elasticity, vol 1 : Three-Dimensional Elasticity, Elsevier Science Publishers, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[3] J. Guilleminot, C. Soize, Prior modeling and generator for non-gaussian tensor- valued random fields with symmetry properties, SIAM Multiscale Modeling & Simulation, 11 (2013) 840–870.

[4] J. Guilleminot, C. Soize, Isde-based generator for a class of non-gaussian vector-valued random fields in uncertainty quantification, SIAM J. Sci. Comput., 36 (2014) 2763–2786.

[5] E.T. Jaynes, Information theory and statistical mechanics i, Physical Review, 106 (1957) 620–630.

[6] R.W. Ogden, Non-Linear Elastic Deformations, Dover Publications, Meneola, New-York, 1987.