

# Étude du développement d'instabilités plastiques lors d'essais sur des plaques métalliques sollicitées biaxialement dans leur plan, en traction ou en compression

D. Jouve<sup>a</sup>

a. CEA, DAM, DIF, 91297 Arpajon, France

## Résumé :

*Lors d'essais de traction ou de compression sur des plaques métalliques sollicitées biaxialement dans leur plan se développent des instabilités plastiques. Elles limitent les déformations acceptables dans des procédés de mise en forme. En menant une Analyse Linéaire de Stabilité, nous étudions les prémices de leur développement. Nous calculons le taux de croissance de défauts de faible amplitude, symétriques et antisymétriques par rapport au plan médian de la plaque, périodiques selon les directions de sollicitation, et déterminons le mode dominant. Ce modèle 3D s'applique à des plaques d'épaisseur quelconque chargées dynamiquement, et restitue des résultats classiques pour des plaques minces sollicitées en traction statique. Il englobe la traction et la compression planes. En traction plane sur matériau ductile non visqueux, nous retrouvons le fait que les premières instabilités, qui sont aussi des instabilités de striction de grande longueur d'onde, apparaissent très peu de temps avant que la force appliquée soit maximale ; ceci est cohérent avec les observations expérimentales de Considère. Après, des modes antisymétriques de plus courte longueur d'onde viennent en compétition avec les modes symétriques.*

## Abstract :

*Plastic instabilities develop during tension and compression tests on metallic plates biaxially loaded in their plane. They limit the acceptable deformation levels during sheet forming. Carrying out a Linear Stability Analysis, we study the onset of their development. We calculate the growth rate of small symmetrical and antisymmetrical defects with respect to the median plane of the plate, periodic along the loading directions, and we determine the dominant mode. This 3D model applies to dynamic tests whatever the thickness. It retrieves classical results for thin plates statically loaded in tension. Plane tension and compression tests are two particular 2D cases of this model. In plane strain tension on ductile non viscous materials, we retrieve that the first instabilities, which are also long wavelength necking ones, arise very little time before the applied force is maximum ; this is consistent with the experimental observations of Considère. As time goes by, antisymmetric modes with shorter wavelengths compete with the symmetric ones.*

**Mots clefs : instabilités plastiques - analyse linéaire de stabilité - essais de traction et de compression - chargement biaxial - défauts symétriques et antisymétriques**

# 1 Introduction

Lors d'essais de traction ou de compression sur des plaques métalliques sollicitées biaxialement dans leur plan se développent des instabilités plastiques. Elles limitent les niveaux de déformation accessibles au cours de processus de mise en forme. L'apparition et le développement de la striction en traction a fait l'objet de très nombreuses publications, depuis les travaux pionniers de Considère (1885) [1] jusqu'à nos jours. Nombre de ces travaux concerne des tôles minces sollicitées statiquement [6][7][8][10][16][20][21][28].

Afin d'étudier les prémices du développement de ces instabilités, nous mettons en œuvre une Analyse Linéaire de Stabilité [13][14][15][20][21][22][23][31]. Nous considérons une plaque d'épaisseur quelconque sollicitée dynamiquement à vitesses constantes imposées (voir figure 1), et calculons le taux de croissance  $\theta$  de petites perturbations  $\delta\vec{x}$  des trajectoires matérielles au sein de l'écoulement moyen homogène de la plaque parfaite (cf. [31], chapitre 7)<sup>1</sup>, représentatives des instabilités. La croissance de ces perturbations est supposée exponentielle ( $\delta\vec{x} = e^{\theta t} \times \vec{F}$  (variables d'espace)). Elles sont supposées périodiques selon les directions  $x_1$  et  $x_2$  de sollicitation (on note respectivement  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les longueurs d'onde selon les axes  $x_1$  et  $x_2$ , et  $\gamma_i = 2\pi/\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ) les nombres d'onde correspondants). Elles sont symétriques ou antisymétriques par rapport au plan médian de la plaque (cf. figure 2). Nous traçons des nappes  $\theta(\gamma_1, \gamma_2)$ , et en déduisons le mode dominant, *i.e.* le couple de longueurs d'onde ( $\lambda_1^{(d)}, \lambda_2^{(d)}$ ) le plus instable, et identifions ainsi les zones où s'amorce la localisation de la déformation plastique.

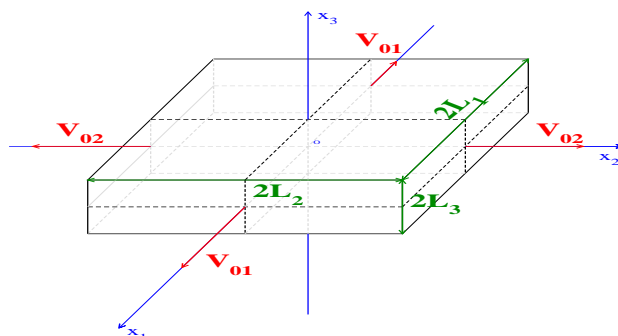


FIGURE 1 – Plaque sollicitée biaxialement en traction dans son plan, à vitesses constantes imposées

Le matériau est un métal supposé homogène, isotrope, incompressible, élastoviscoplastique. Sa limite d'élasticité  $Y$  est susceptible de varier avec la déformation plastique  $\varepsilon_p$ , la température absolue  $T$  et la vitesse de déformation plastique  $\dot{\varepsilon}_p$ . Son module de cisaillement  $G$  dépend de  $T$ . Le matériau est supposé satisfaire le critère de plasticité de Von Mises ( $\mathbf{S} : \mathbf{S} = 2Y^2/3$ ,  $\mathbf{S}$  désignant la partie déviatoire du tenseur des contraintes de Cauchy  $\Sigma$ ), et la règle de normalité. Son évolution est supposée adiabatique, et la totalité du travail de dissipation plastique convertie en chaleur. L'endommagement, la dilatation et la conduction thermiques sont négligés.

L'Analyse Linéaire de Stabilité résout les équations d'évolution du matériau, développées à l'ordre 1 en perturbation autour de l'écoulement de la plaque parfaite : équations de conservation du volume, de l'impulsion et de l'énergie, règle d'écoulement, et condition de maintien sur la surface de charge ( $\mathbf{S} : \dot{\mathbf{S}} = 2Y\dot{Y}/3$ ).

1. En milieu incompressible, la projection dans les directions  $x_1$  et  $x_2$  de sollicitation de la vitesse de chaque particule matérielle demeure constante au cours du temps. Les gradients de vitesse selon ces directions demeurent uniformes à chaque instant (mais ils évoluent au cours du temps).

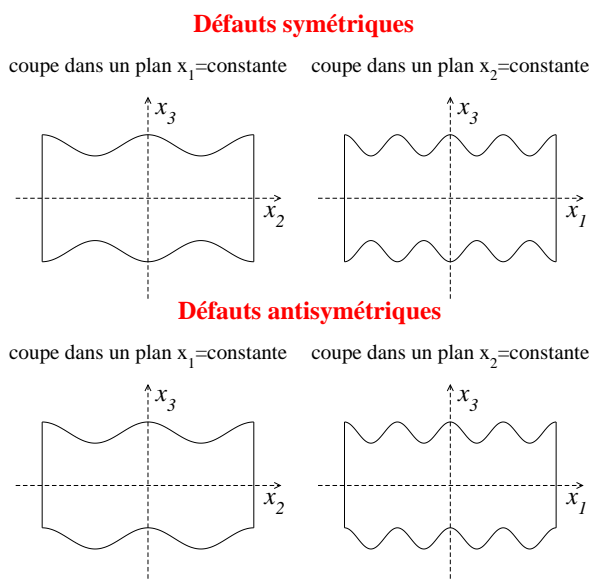


FIGURE 2 – Défauts symétriques et antisymétriques par rapport au plan médian de la plaque, périodiques selon les directions  $x_1$  et  $x_2$  de sollicitation.

L'Analyse Linéaire de Stabilité que nous avons développée est un modèle  $3D$  : elle s'applique à des plaques d'épaisseur quelconque chargées dynamiquement. En traction, lorsque les effets inertiels sont négligeables, et les effets visqueux suffisants, la longueur d'onde des défauts les plus instables est grande devant l'épaisseur, et nous retrouvons le taux de croissance de l'instabilité plastique de striction calculé par Dudzinski et Molinari dans leur Compte Rendu à l'Académie des Sciences de 1988 [20][21][32][36], dans le cadre de la théorie de la contrainte plane généralisée [4][5].

Dans cette communication, nous cherchons d'abord au paragraphe 2 le mode dominant pour différentes sollicitations, puis abordons la déformation plane en traction et en compression au paragraphe 3 (la dimension de la plaque est infinie selon une des directions de sollicitation).

## 2 Résultats principaux de notre modèle $3D$

### 2.1 Recherche des lignes de localisation de la déformation plastique

On suppose la perturbation  $\delta\vec{x}$  des trajectoires matérielles périodique selon les directions  $x_1$  et  $x_2$  de sollicitation, et que les faces sollicitées demeurent planes au cours du temps. On a par conséquent (cf. [31], chapitre 18), en coordonnées de Lagrange  $x_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) :

$$\begin{cases} \delta x_1 &= e^{\theta t} \sin(\gamma_1 x_{01}) \cos(\gamma_2 x_{02}) F_1(x_{03}) \\ \delta x_2 &= e^{\theta t} \cos(\gamma_1 x_{01}) \sin(\gamma_2 x_{02}) F_2(x_{03}) \\ \delta x_3 &= e^{\theta t} \cos(\gamma_1 x_{01}) \cos(\gamma_2 x_{02}) F_3(x_{03}) \end{cases} \quad (1)$$

avec, en posant  $L_{0i} = L_i(t_0 = 0)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) :

$$\begin{cases} \gamma_1 L_{01} = i_1 \pi & (i_1 \in \mathbf{N}) \\ \gamma_2 L_{02} = i_2 \pi & (i_2 \in \mathbf{N}) \end{cases} \quad (2)$$

Dans les zones de localisation de la déformation plastique, la perturbation  $\delta x_3$  est extrémale (voir figure 2) (on note :  $\delta x_{3,i} = \frac{\partial x_3}{\partial x_{0i}}$  ( $i = 1, 2$ )) :

$$\begin{cases} \delta x_{3,1}(x_{01}, x_{02}, \pm L_{03}) = 0 \\ \delta x_{3,2}(x_{01}, x_{02}, \pm L_{03}) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Compte tenu de la forme donnée à  $\delta \vec{x}$ , la déformation plastique se concentre dans les plans d'équations  $x_{03} = \pm L_{03}$  le long des droites d'équations :

$$\begin{cases} \gamma_1 x_{01} + \gamma_2 x_{02} = K_+ \pi & (K_+ \in \mathbf{N}) \\ \gamma_1 x_{01} - \gamma_2 x_{02} = K_- \pi & (K_- \in \mathbf{N}) \end{cases} \quad (4)$$

Le vecteur d'onde  $\vec{\gamma} = \gamma_1 \vec{e}_1 + \gamma_2 \vec{e}_2$  est orthogonal aux droites de localisation « + ». L'angle entre ces droites et l'axe  $x_2$  est égal à (voir figure 3) :

$$\psi = \arctan \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) = \arctan \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \quad (5)$$

(pour les droites de localisation « - », cet angle vaut  $-\psi$ )

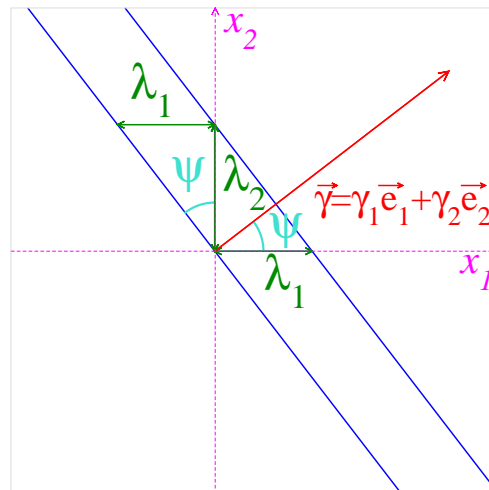


FIGURE 3 – 2 droites de localisation « + » espacées selon la direction  $x_1$  de  $\lambda_1$ , et selon la direction  $x_2$  de  $\lambda_2$

Nous illustrons la recherche du mode dominant et des zones de localisation de la déformation plastique pour différentes sollicitations et un matériau donné.

## 2.2 Le matériau d'étude

Soit un métal (fictif), dont les propriétés physiques sont les suivantes :

1. sa masse volumique est constante et vaut :  $\rho = 5000 \text{ kg/m}^3$  ;
2. sa limite d'élasticité  $Y$  suit la loi de Johnson-Cook [18], et, comme dans le modèle de Steinberg-Cochran-Guinan [17], nous supposons le ratio  $Y/G$  indépendant de la température. Nous avons donc :

$$Y(\varepsilon_p, T, \dot{\varepsilon}_p) = [A + B(\varepsilon_p + \varepsilon_i)^n] \left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right] \left[ 1 - \left( \frac{T - T_0}{T_{\text{fusion}} - T_0} \right)^m \right] \quad (6)$$

$$G(T) = G_0 \left[ 1 - \left( \frac{T - T_0}{T_{\text{fusion}} - T_0} \right)^m \right] \quad (7)$$

pour :

$$\dot{\varepsilon}_p > \dot{\varepsilon}_0 = 1 \text{ s}^{-1} \quad \text{et} \quad T_0 = 300 \text{ K} \leq T \leq T_{\text{fusion}} = 3000 \text{ K}$$

Les coefficients retenus dans les relations 6 et 7 sont donnés dans le tableau 1 ; ils sont représentatifs du comportement de métaux usuels (cf. [18], tableau 1). En particulier, la valeur de  $G_0$  permet de respecter l'ordre de grandeur du ratio  $Y/G$  pour les métaux, à savoir le pourcent.

3. sa capacité calorifique isochore  $C_v$  est constante et vaut :  $C_v = 500 \text{ J/kg/K}$

$\rho$	$A$	$B$	$\varepsilon_i$	$n$	$C$	$\dot{\varepsilon}_0$	$m$	$T_{\text{fusion}}$	$G_0$	$C_v$
$5 \text{ g/cm}^3$	$1 \text{ GPa}$	$1 \text{ GPa}$	1	0,5	0,01	$1 \text{ s}^{-1}$	1,2	$3000 \text{ K}$	$100 \text{ GPa}$	$500 \text{ J/kg/K}$

TABLE 1 – Caractéristiques du matériau

## 2.3 Mode dominant et lignes de localisation de la déformation plastique

Nous réalisons différents essais de traction et de compression sur des plaques fabriquées avec le matériau ci-dessus, d'épaisseur initiale  $2L_{03} = 2 \text{ cm}$ . Par convention, la direction  $x_1$  est la direction de contrainte principale majeure ( $|\Sigma_{11}| \geq |\Sigma_{22}|$ ). Le gradient initial de vitesse selon  $x_1$ ,  $D_{11} = V_{01}/L_{01}$ , est égal à  $10 \text{ s}^{-1}$  en valeur absolue. Entre deux essais de traction (ou de compression) selon  $x_1$ , seul diffère le taux de biaxialité  $\alpha = D_{22}/D_{11}$ .

On effectue l'analyse linéaire de stabilité à l'instant initial  $t_0 = 0$  : la déformation plastique  $\varepsilon_p$  est alors nulle, et la température supposée égale à  $305 \text{ K}$ .

### 2.3.1 Traction selon $x_1$

#### Le rétreint

De la tension uniaxiale ( $\alpha = -0,5$ ) à la traction plane ( $\alpha = 0$ )

Examinons la figure 5(a), et intéressons-nous d'abord à la tension uniaxiale ( $\alpha = -0,5$  ;  $\Sigma_{11} = Y$  ;  $\Sigma_{22} = \Sigma_{33} = 0$ ). Les seuls défauts instables sont symétriques : ce sont des strictions.

Nous avons tracé la nappe  $\theta(\gamma_1, \gamma_2)$ , et identifié le mode dominant, *i.e.* le couple  $(\gamma_1^{(d)}, \gamma_2^{(d)})$  de nombres d'onde de plus fort taux de croissance. Le vecteur d'onde  $\vec{\gamma} = \gamma_1^{(d)}\vec{e}_1 + \gamma_2^{(d)}\vec{e}_2$  associé dans le plan des directions de sollicitation est normal aux lignes d'amincissement maximum, où se concentre la déformation plastique en phase linéaire de croissance de l'instabilité. Ce sont des droites de vitesse d'extension nulle (le long de celles-ci, on a :  $D_{tt} = \partial v_t / \partial x_t = 0$ , où  $t$  désigne la direction tangente). Elles font avec la direction  $x_2$  l'angle de Hill [6] :

$$\psi_{Hill} = \arctan\left(\gamma_2^{(d)} / \gamma_1^{(d)}\right) = \arctan\left(\sqrt{-D_{22} / D_{11}}\right) \quad (8)$$

Plus on s'écarte de la déformation plane ( $\alpha = 0$ ), moins le mode dominant associé à ces modes symétriques est instable (voir figures 5(a-b), et figure 4(a)). Son orientation est donnée par l'angle de Hill (*cf.* figure 4(c)).

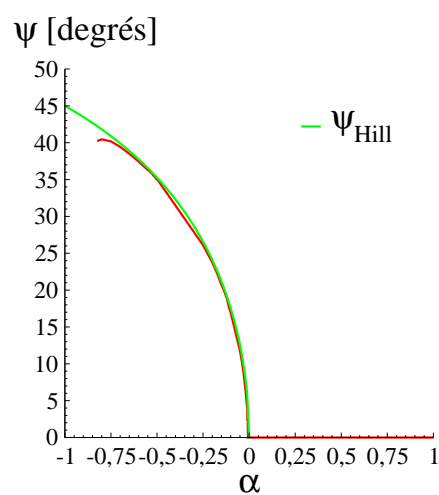
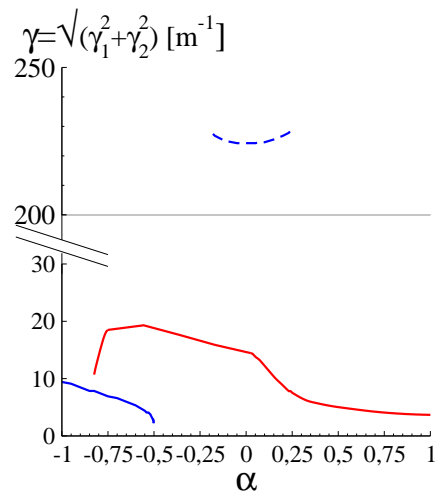
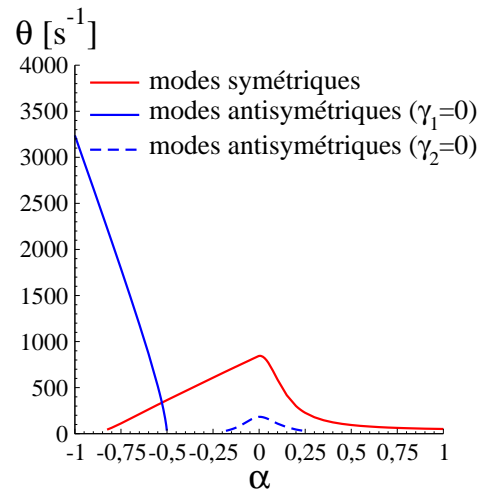
De la tension uniaxiale ( $\alpha = -0,5$ ) au cisaillement simple ( $\alpha = -1$ )

Reprenons la figure 5(a). De la traction uniaxiale selon  $x_1$  ( $\alpha = -0,5$ ) au cisaillement simple ( $\alpha = -1$  ;  $\Sigma_{11} = -\Sigma_{22} = Y/\sqrt{3}$ ), on voit apparaître des modes antisymétriques instables, qui prennent le pas sur les modes symétriques. La longueur d'onde selon la direction  $x_1$  du mode dominant associé à ces modes antisymétriques est infinie ( $\gamma_1^{(d)} = 0 \implies \lambda_1^{(d)} = \infty$ ), et la déformation plastique se concentre préférentiellement selon des droites parallèles à l'axe  $x_1$  ; la longueur d'onde  $\lambda_2^{(d)}$  est d'autant plus courte (et le nombre d'onde  $\gamma_2^{(d)}$  et le taux de croissance  $\theta^{(d)}$  d'autant plus élevés) que l'on se rapproche du cisaillement simple (*cf.* figures 4(a-b)).

#### Traction simultanément selon $x_1$ et $x_2$ (figure 5(b))

Les défauts les plus instables sont symétriques par rapport au plan médian de la plaque : ce sont des strictions. Pour  $\alpha < 1$ , la longueur d'onde selon la direction  $x_2$  de contrainte principale mineure associée au mode dominant est infinie ( $\gamma_2^{(d)} = 0 \implies \lambda_2^{(d)} = \infty$ ), et la déformation plastique se concentre le long de droites parallèles à l'axe  $x_2$ . La traction plane ( $\alpha = 0$ ) est le régime de sollicitation le plus instable<sup>2</sup>. De la traction plane ( $\alpha = 0$ ) à la traction équilibaxiale ( $\alpha = 1$ ), le mode dominant (symétrique) devient de moins en moins instable, et la longueur d'onde  $\lambda_1^{(d)}$  associée de plus en plus grande (*cf.* figure 4(b)). En traction équilibaxiale, le vecteur d'onde  $\vec{\gamma} = \gamma_1\vec{e}_1 + \gamma_2\vec{e}_2$  intervient uniquement par sa norme  $\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$  dans les équations du modèle, et les lignes de niveaux iso- $\theta$  sur la nappe  $\theta(\gamma_1, \gamma_2)$  sont des quarts de cercle centrés à l'origine, et toutes les orientations de lignes de localisation sont équiprobables. Enfin, au voisinage de la traction plane existent aussi des modes antisymétriques instables (*cf.* figures 4(a-b), 5(a-b)). Leur longueur d'onde est comparable à l'épaisseur de la plaque, et est plus courte que celle des modes symétriques instables. Du fait de la viscosité, ils ne dominent pas les modes symétriques.

2. En fait, pour être très précis, le régime de sollicitation le plus instable, tous taux de biaxialité confondus, est dans le cas présent tel que :  $\alpha \approx 0,005$

FIGURE 4 – Modes symétriques et antisymétriques les plus instables, en traction selon  $x_1$

Traction selon  $x_1$ ,  $-1 \leq \alpha = D_{22}/D_{11} \leq 0$

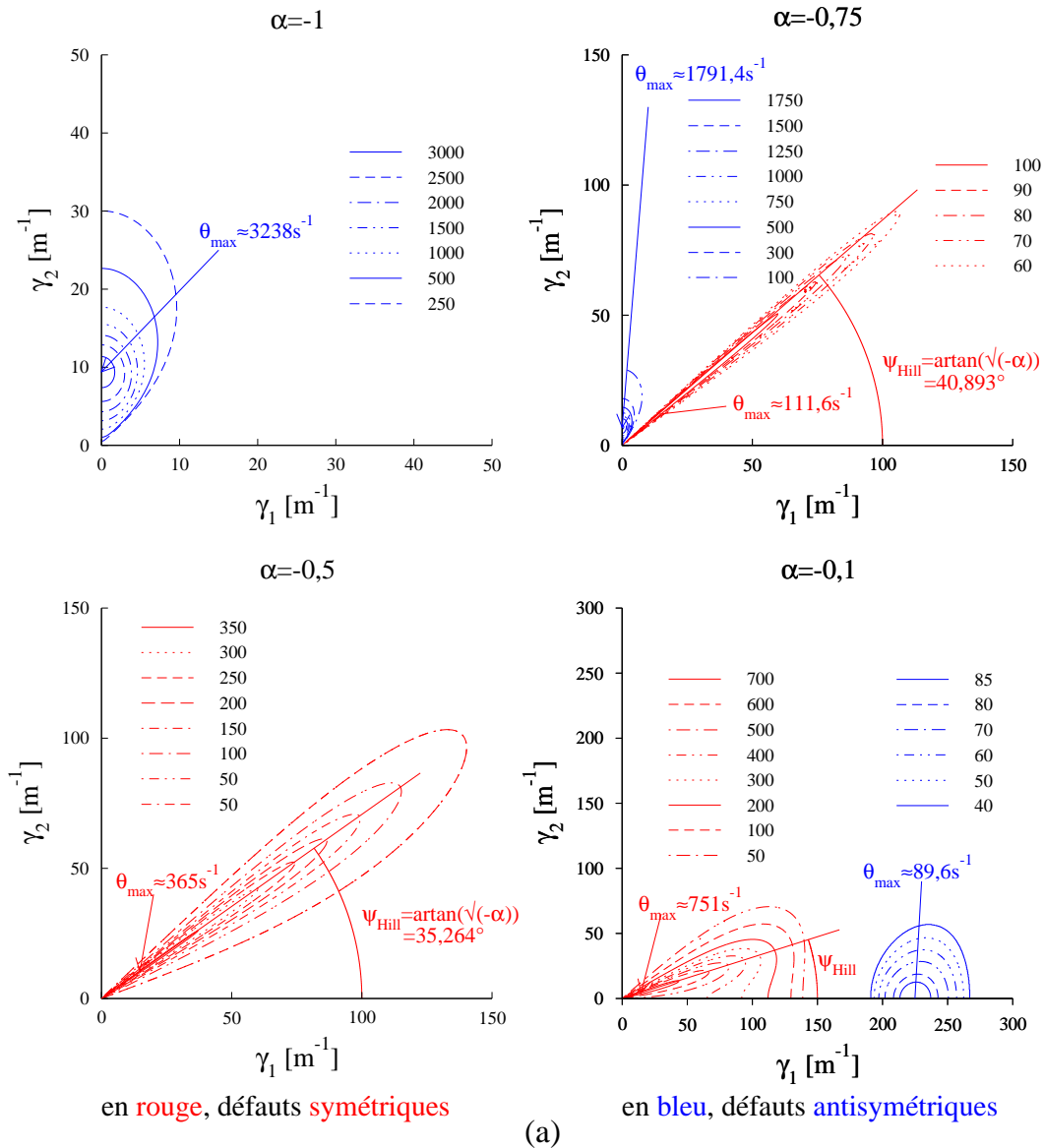


FIGURE 5 – Analyse linéaire de la stabilité de l'écoulement de plaques, sollicitées en traction selon la direction  $x_1$  de contrainte principale majeure : nappes  $\theta(\gamma_1, \gamma_2)$  (a) Traction selon  $x_1$ , compression selon  $x_2$



Traction selon  $x_1$ ,  $0 \leq \alpha = D_{22}/D_{11} \leq 1$

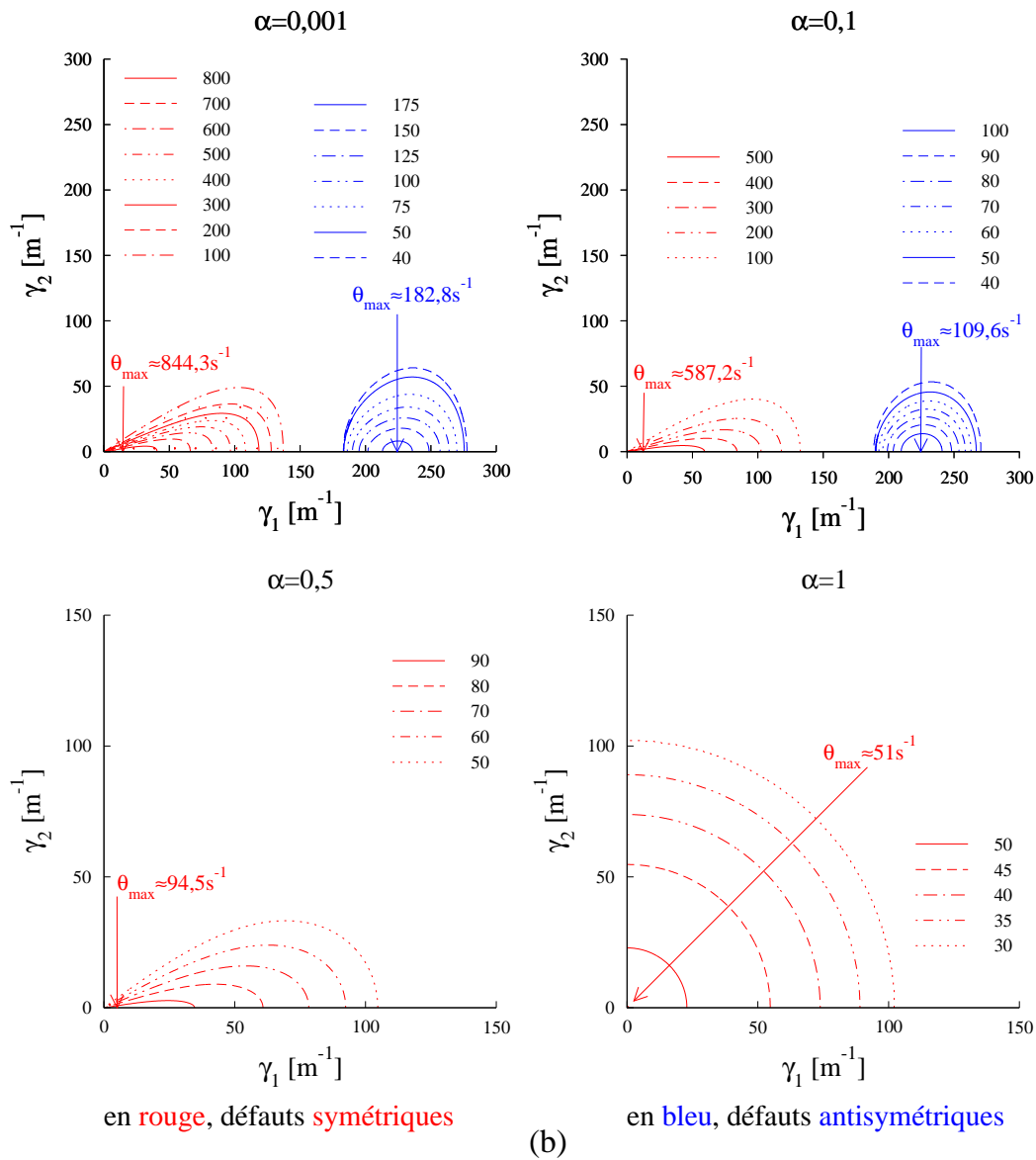


FIGURE 5 – (b) Traction simultanément selon  $x_1$  et  $x_2$

### 2.3.2 Compression selon $x_1$ (figures 6, 7)

Les défauts les plus instables sont antisymétriques par rapport au plan médian. Pour  $\alpha < 1$ , la déformation plastique se concentre préférentiellement le long de droites parallèles à la direction  $x_2$  de contrainte principale mineure ( $\gamma_2^{(d)} = 0 \implies \lambda_2^{(d)} = \infty$ ). L'écoulement est d'autant moins instable (et les droites de localisation d'autant plus espacées) que l'on s'écarte de la déformation plane<sup>3</sup>. En compression équi-biaxiale ( $\alpha = 1$ ), comme en traction équi-biaxiale, le vecteur d'onde  $\vec{\gamma} = \gamma_1 \vec{e}_1 + \gamma_2 \vec{e}_2$  intervient dans les équations du modèle uniquement par sa norme  $\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ , et les lignes de niveau iso- $\theta$  dans le plan  $(\gamma_1, \gamma_2)$  sont des quarts de cercle centrés à l'origine ; toutes les orientations de droites de localisation sont équiprobables.

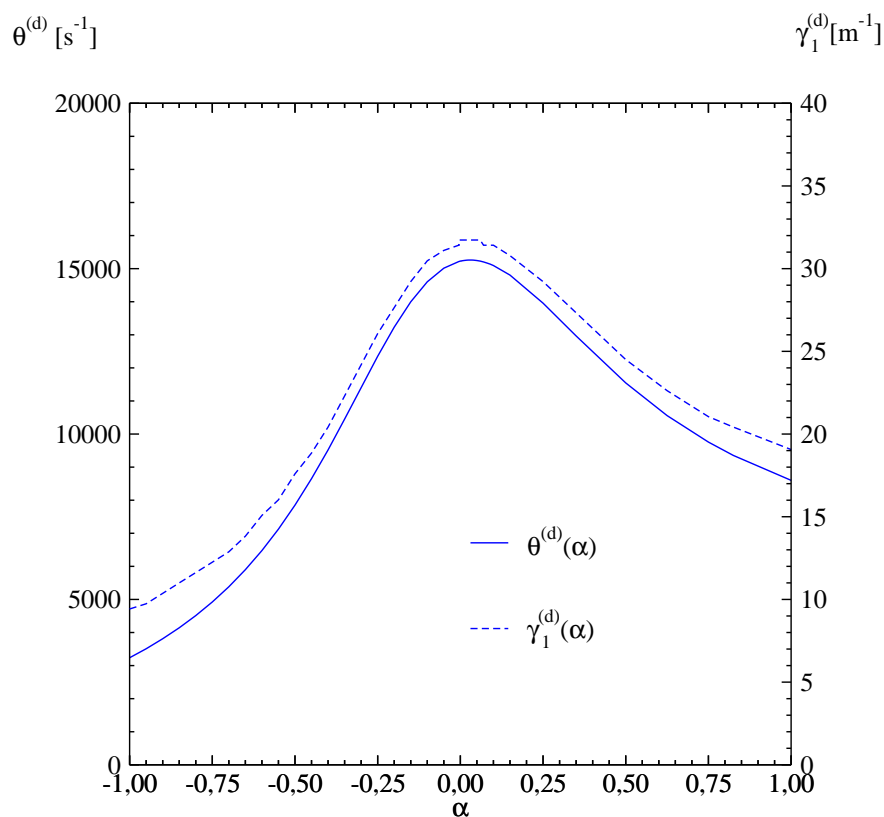
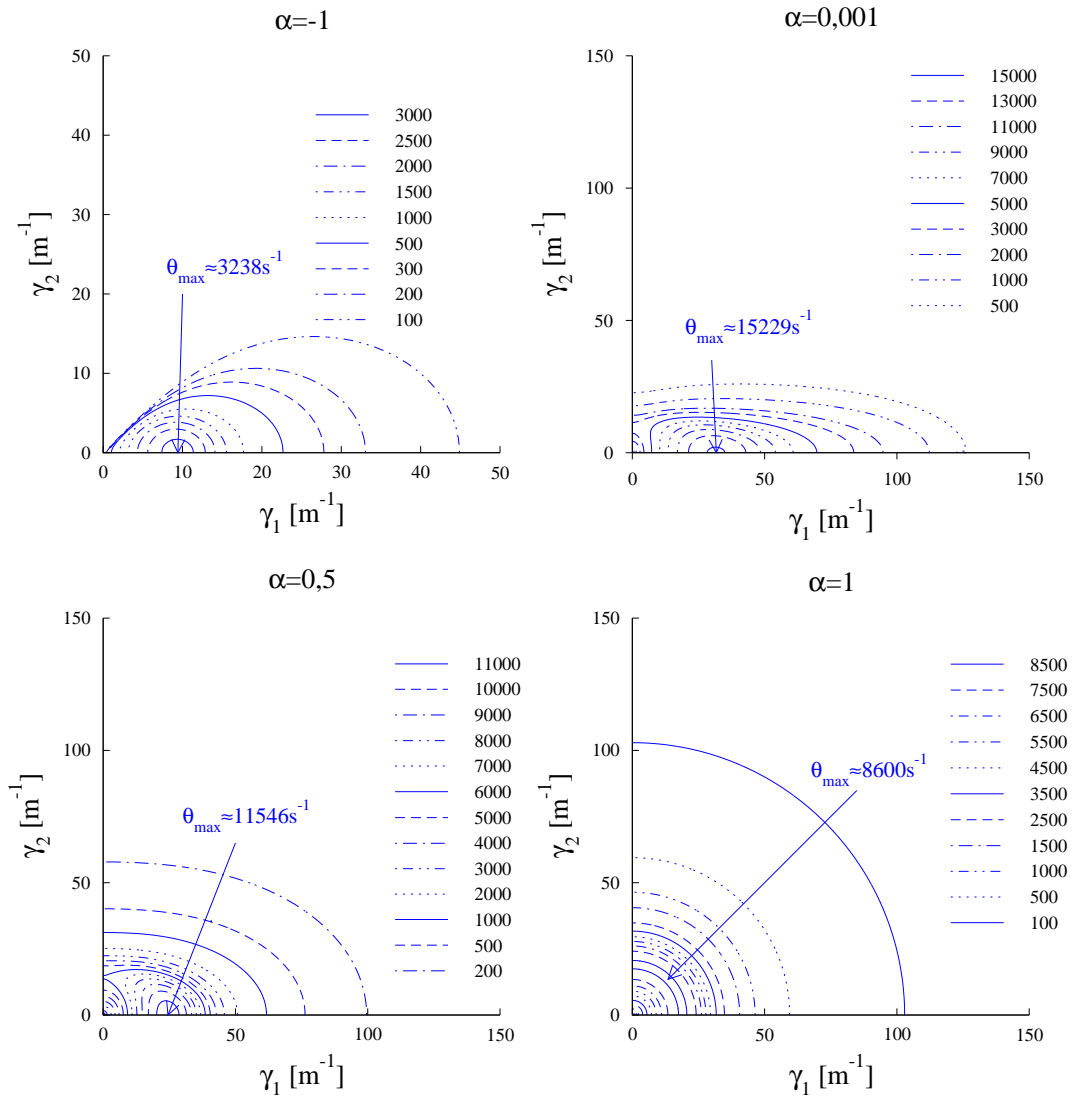


FIGURE 6 – Mode dominant en compression

3. En fait, il convient comme en traction de nuancer ; pour être très précis, le régime de sollicitation le plus instable, tous taux de biaxialité confondus, est ici tel que :  $\alpha \approx 0,03$ , mais le maximum de la courbe  $\theta^{(d)}(\alpha)$  est très plat au voisinage de la compression plane.

Compression selon  $x_1$ ,  $-1 \leq \alpha = D_{22}/D_{11} \leq 1$ Tous les défauts sont **antisymétriques**FIGURE 7 – Analyse linéaire de la stabilité de l'écoulement de plaques, sollicitées en compression selon la direction  $x_1$  de contrainte principale majeure : nappes  $\theta(\gamma_1, \gamma_2)$

### 3 La traction et la compression planes

#### 3.1 Compétition entre modes symétriques et antisymétriques

Que la plaque soit sollicitée en traction (pour des taux de biaxialité compris entre  $-0,5$  et  $1$ ) ou en compression selon la direction de contrainte principale majeure  $x_1$ , la déformation plane ( $D_{22} = 0$  : la dimension de la plaque selon la direction  $x_2$  est infinie) est le régime de sollicitation le plus instable. Il a été très étudié dans la littérature [15][22][23][26][27][29]. Il est pour nous un cas particulier de notre modèle général  $3D$ . On observe alors une compétition entre modes symétriques et antisymétriques, d'autant plus marquée que le milieu est peu visqueux. La courbe  $\theta(\gamma_1)$  présente une succession de branches, associées alternativement aux modes symétriques et antisymétriques. La première branche, dans le domaine des grandes longueurs d'onde, concerne les modes symétriques en traction, et les modes antisymétriques en compression [35]. Cette compétition a été mise en évidence par le passé, notamment par Hill et Hutchinson en traction [9], et par Young en compression [11]. Lorsque la viscosité est très faible, le mode dominant n'est pas systématiquement symétrique en traction, et antisymétrique en compression (cf. figure 8).

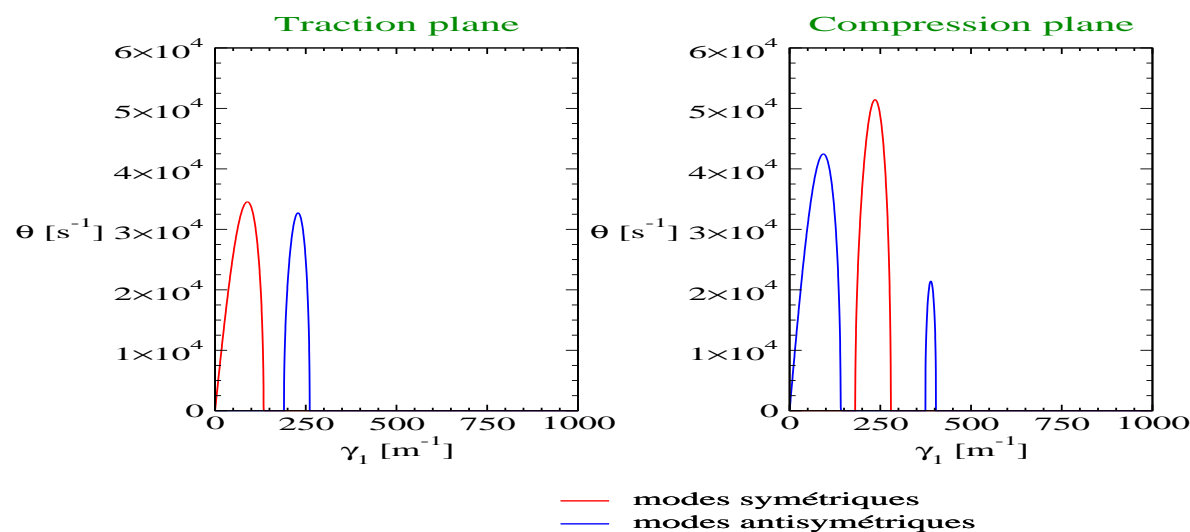


FIGURE 8 – Analyse linéaire de la stabilité de l'écoulement de deux plaques sollicitées en déformation plane, l'une en traction, l'autre en compression. Le matériau n'est pas visqueux, et les modes symétriques et antisymétriques sont en compétition. (analyse de stabilité à l'instant initial  $t_0 = 0$ ). Épaisseur :  $2L_{03} = 2\text{ cm}$  - Gradient de vitesse (en module) :  $|V_{01}|/L_{01} = 10\text{ s}^{-1}$  - masse volumique du matériau  $\rho = 5000\text{ kg/m}^3$  - contrainte d'écoulement  $Y(\varepsilon_p) = A + B(\varepsilon_p + \varepsilon_i)^n$  avec :  $A = B = 1\text{ GPa}$  ;  $n = 0,5$  ;  $\varepsilon_i = 1$  - module de cisaillement  $G = 100\text{ GPa}$  ([32], chapitre 3)

### 3.2 Les premières instabilités en traction

En traction plane sur métaux ductiles non visqueux, les premières instabilités, qui sont aussi des strictions de grande longueur d'onde, naissent très peu de temps avant que la force exercée soit maximale : ce résultat est compatible avec les observations expérimentales de Considère [1]. Ensuite, le taux de croissance du mode dominant croît, alors que diminue la longueur d'onde associée (le nombre de strictions augmente). L'instabilité se développe nettement à partir d'une valeur seuil du ratio  $\theta/\dot{\varepsilon}_p$  (typiquement 10) (cf. figure 9) [31][34].

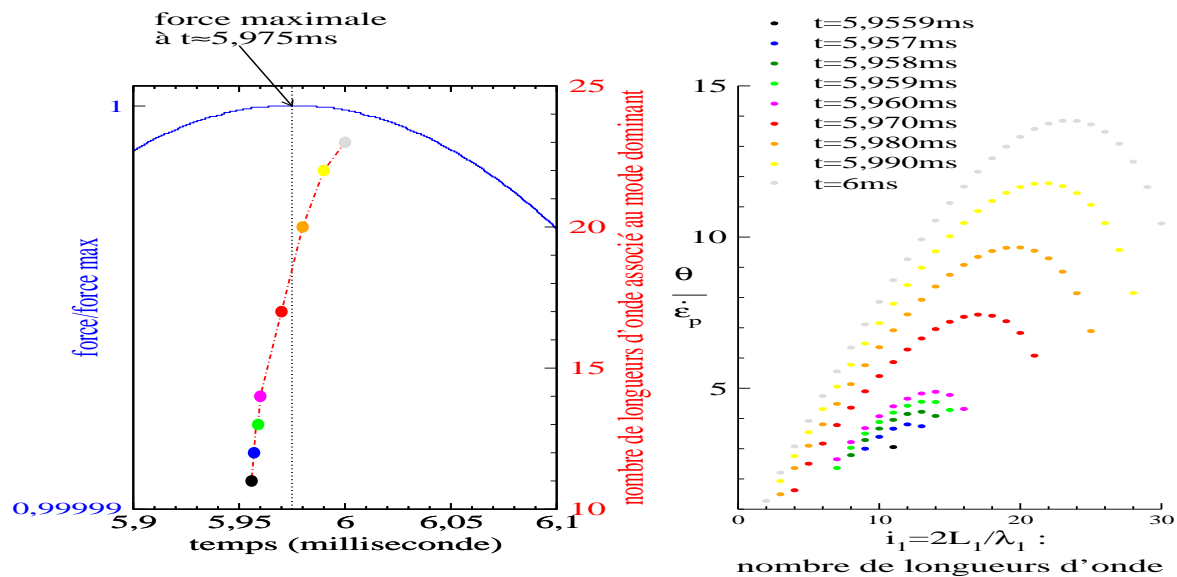


FIGURE 9 – Traction plane sur un matériau non visqueux. - Épaisseur initiale :  $2L_{03} = 2 \text{ cm}$  - Gradient initial de vitesse :  $V_{01}/L_{01} = 10 \text{ s}^{-1}$  - Matériau : *idem* figure 8, excepté  $\varepsilon_i = 0, 1$

### 3.3 Les bandes de cisaillement

En traction et en compression planes et en l'absence d'effets visqueux, notre analyse linéaire de stabilité montre que, lorsque l'effet de l'écroutissage sur l'évolution de la contrainte d'écoulement  $Y(\varepsilon_p, T)$  ne l'emporte plus suffisamment sur celui de l'adoucissement thermique, *i.e.* lorsque la variation relative de  $Y$  pour un incrément de déformation plastique  $\delta\varepsilon_p$  satisfait l'inégalité (on pose :  $Y'_\alpha = \partial Y/\partial\alpha$  ( $\alpha = \varepsilon_p, T$ )) :

$$\frac{\delta Y}{Y \delta \varepsilon_p} = \frac{Y'_{\varepsilon_p}}{Y} + \frac{Y'_T}{\rho C_v} < \frac{3}{a} \times \left[ \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{3}}} - 1 \right] \approx \frac{a}{4} \text{ en posant : } a = \frac{Y}{G} \quad (9)$$

des défauts symétriques et antisymétriques de longueur d'onde arbitrairement courte se développent avec un taux de croissance infini [31][32]. En revanche, nous ne sommes pas parvenus à prédire analytiquement la dépendance spatiale de telles perturbations. Nous constatons simplement que cette condition de perte de l'existence d'une longueur d'onde minimale de développement des instabilités (longueur de coupure) coïncide avec celle d'apparition instantanée de réseaux infiniment denses de bandes de cisaille-

ment inclinées à  $45^0$  de l'axe de sollicitation, mise en évidence par l'analyse de bifurcation de Hill et Hutchinson en traction [9], et de Young en compression [11] statiques [31][32][33]. Lorsqu'est satisfaite la condition 9, on voit apparaître ces réseaux dans les simulations numériques, d'autant plus vite et avec une densité d'autant plus forte que le maillage est plus fin. Du fait de l'absence d'une échelle de longueur (et de temps) physique dans le problème, il est impossible de faire converger la simulation (voir figure 10). Le passage d'une loi de comportement élastique parfaitement plastique ( $Y = \text{constante}$ ) à une loi « suffisamment » visqueuse de Norton [2] ( $Y \propto \dot{\epsilon}_p^m$ , avec :  $m \geq 0,05$ ) réintroduit une longueur d'onde de coupure [13][14][15][22][23].

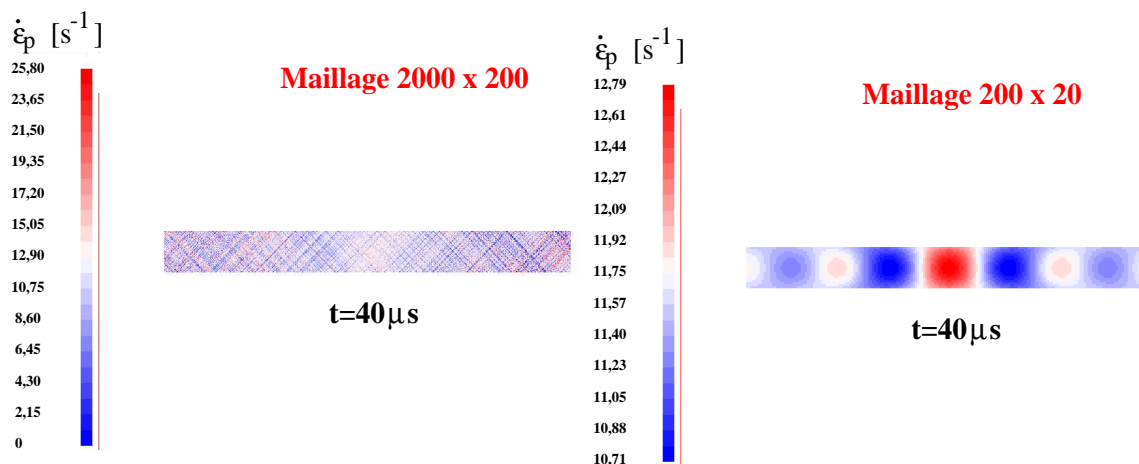


Figure 10 : Apparition d'un réseau de bandes de cisaillement lors d'un essai de traction plane sur matériau de limite d'élasticité  $Y$  constante (l'inégalité 9 est alors bien satisfaite), en lieu et place d'une perturbation multimodale de grande longueur d'onde du champ des vitesses matérielles introduite à l'instant initial  $t_0 = 0$  de la simulation, d'autant plus rapidement que le maillage est plus fin. Dimensions initiales de la plaque :  $2L_{01} = 20 \text{ cm}$  ;  $2L_{03} = 2 \text{ cm}$  - Vitesse de traction  $V_{01} = 1 \text{ m/s}$  - Masse volumique  $\rho = 5000 \text{ kg/m}^3$  - contrainte d'écoulement  $Y = 1 \text{ GPa}$  - module de cisaillement  $G = 100 \text{ GPa}$  - Deux simulations de l'essai ont été réalisées, avec des mailles initialement carrées, de  $100 \mu m$  de côté pour le maillage fin, et  $1 \text{ mm}$  pour le maillage grossier [31]. On compare la vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}_p$  dans les deux calculs à l'instant  $t = 40 \mu s$ .

## 4 Conclusion et perspectives

Dans cette communication, nous avons montré des résultats obtenus en mettant en œuvre une analyse linéaire de stabilité rigoureuse  $3D$  du développement d'instabilités plastiques lors d'essais de traction ou de compression de plaques métalliques chargées biaxialement dans leur plan. Le matériau est supposé satisfaire le critère de plasticité de Von Mises, et la règle de normalité.

Nous envisageons d'étendre notre modèle à des matériaux au comportement plus complexe, en étudiant les effets d'endommagement [12][19] et d'anisotropie [3], de forme de la surface de charge [10][30], voire de texture [24][25]. Dans le cas limite d'essais statiques sur plaques minces, en l'absence d'endommagement et pour un matériau orthotrope satisfaisant le critère de Hill (1948) [3], nous devons retrouver des résultats analytiques classiques publiés en 1991 par Dudzinski et Molinari [21].

## Références

- [1] A. Considère, Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions, Annales des Ponts et Chaussées, Volume 9, no.34, pages 574-775, 1885

- [2] F.-H. Norton, The creep of steel at high temperatures, McGraw-Hill, 1929
- [3] R. Hill, A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals, in : Proceedings of the Royal Society of London, Series A - Mathematical and Physical Sciences, Volume 193 (1948), Numéro 1033, pages 281-297
- [4] R. Hill, The mathematical theory of plasticity, Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, Clarendon Press Oxford, 1950
- [5] P.-G. Hodge, The method of characteristics applied to problems of steady motion in plane plastic stress, Quarterly of Applied Mathematics, Volume 8, Numéro 4 (1951), pages 381-386
- [6] R. Hill, On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 1 (1952), pages 19-30
- [7] Z. Marciniak, K. Kuczynski, Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal, International Journal of Mechanical Sciences, Volume 9 (1967), 609-620
- [8] Z. Marciniak, K. Kuczynski, T. Pokora, Influence of the plastic properties of a material on the forming limit diagram for sheet metal in tension, International Journal of Mechanical Sciences, Volume 15 (1973), pages 789-805
- [9] R. Hill, J.-W. Hutchinson, Bifurcation phenomena in the plane tension test, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 23 (1975), pages 239-264
- [10] S. Stören, J.-R. Rice, Localized necking in thin sheets, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 23 (1975), pages 421-441
- [11] N.-J.-B. Young, Bifurcation phenomena in the plane compression test, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 24 (1976), pages 77-91
- [12] A.-L. Gurson, Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part 1 Yield criteria and flow rules for porous ductile media, Transactions of the ASME, Journal of Engineering Materials and Technology (1977), pages 2-15
- [13] J.-W. Hutchinson, H. Obrecht, Tensile instabilities in strain-rate dependent materials, in : D.-M.-R. Taplin (ed.), Proceedings of the Fourth International Conference on Fracture ICF4, Pergamon Press, Université de Waterloo, Canada, 19-24 juin 1977, Volume 1, pages 101-116
- [14] J.-W. Hutchinson, K.-W. Neale, Influence of strain-rate sensitivity on necking under uniaxial tension, Acta Metallurgica, volume 25 (1977), pages 839-846
- [15] J.-W. Hutchinson, K.-W. Neale, A. Needleman, Sheet Necking 1 : Validity of plane stress assumptions of the long-wavelength approximation, in : D.-P. Koistinen, N.-M. Wang (ed.), Proceedings of a Symposium on Mechanics of Sheet Metal Forming, General Motors Research Laboratories, Warren, Michigan, 17-18 octobre 1977, Plenum Press, New York, 1978, pages 111-126
- [16] J.-W. Hutchinson, K.-W. Neale, Sheet Necking 2 : Time-independent behavior, *ibidem* [15], pages 127-150
- [17] D.-J. Steinberg, S.-G. Cochran, M.-W. Guinan, A constitutive model for metals applicable at high strain rate, Journal of Applied Physics, volume 51 (1980), numéro 3, pages 1498-1504
- [18] G.-R. Johnson, W.-H. Cook, A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures, in : Proceedings of the Seventh International Symposium on Ballistics, The Hague, The Netherlands, 19-21 avril 1983, pages 541-547
- [19] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche, Mécanique des matériaux solides, Seconde édition, Dunod, 1984

- [20] D. Dudzinski, A. Molinari, Instabilité de la déformation viscoplastique en chargement biaxial, *Compte Rendu à l'Académie des Sciences de Paris*, Volume 307, Série 2, pages 1315-1321, 1988
- [21] D. Dudzinski, A. Molinari, Perturbation analysis of thermoviscoplastic instabilities in biaxial loading, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 27 (1991), No.5, pages 601-628,
- [22] C. Fressengeas, A. Molinari, Instability and bifurcation in the plane tension test, *Archives of Mechanics*, volume 44 (1992), numéro 1, pages 93-104
- [23] C. Fressengeas, A. Molinari, Fragmentation of rapidly stretching sheets, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Volume 13 (1994), Numéro 2, pages 251-268,
- [24] L.-S. Tóth, D. Dudzinski, A. Molinari, Forming limit predictions with the perturbation method using stress potential functions of polycrystal viscoplasticity, *International Journal of Mechanical Sciences*, Volume 38 (1996), Numéros 8-9, pages 805-824
- [25] N. Boudeau, J.-C. Gelin, S. Salhi, Computational prediction of the localized necking in sheet forming based on microstructural material aspects, *Computational Materials Science*, Volume 11 (1998), pages 45-64
- [26] V.-B. Shenoy, L.-B. Freund, Necking bifurcations during high strain rate extension, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Volume 47 (1999), pages 2209-2233
- [27] S. Mercier, A. Molinari, Predictions of bifurcation and instabilities during dynamic extension, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 40 (2003), pages 1995-2016,
- [28] G. Chatzigeorgiou, N. Charalambakis, Instability analysis of non-homogeneous materials under biaxial loading, *International Journal of Plasticity*, Volume 21 (2005), pages 1970-1999
- [29] S. Mercier, N. Granier, A. Molinari, F. Llorca, F. Buy, Multiple necking during the dynamic expansion of hemispherical metallic shells, from experiments to modelling, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Volume 58 (2010), pages 955-982
- [30] J.-L. Dequiedt, Localization in elasto-plastic materials : influence of the plasticity yield surface in biaxial loading conditions, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 47 (2010), pages 2937-2951,
- [31] D. Jouve, Étude analytique de l'instabilité plastique de striction pour une plaque sollicitée en traction biaxiale, Thèse, École Polytechnique, 2010
- [32] D. Jouve, Étude analytique d'instabilités plastiques pour une plaque métallique sollicitée biaxialement, en traction ou en compression : modes symétriques et antisymétriques par rapport au plan médian, Rapport CEA-R 6306, 2012
- [33] D. Jouve, Analytic study of plastic necking instabilities during plane tension tests, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Volume 39 (2013), pages 180-196
- [34] S. El Maï, Étude du développement des instabilités dans un anneau en expansion dynamique, Thèse, Université de Lorraine, 2014
- [35] D. Jouve, Analytic study of the onset of plastic instabilities during plane tension and compression tests on metallic plates, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Volume 47 (2014), pages 70-81
- [36] D. Jouve, Analytic study of the onset of plastic necking instabilities during biaxial tension tests on metallic plates, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Volume 50 (2015), pages 59-69