

Instabilités hydrodynamique et thermocapillaire d'un film liquide tombant à grand nombre de Péclet

C. RUYER-QUIL, B. STUTZ, M. CHHAY & N. CELLIER

LOCIE UMR5271 Université de Savoie Mont-Blanc, 73000 Chambéry
ruyerquc@univ-smb.fr

Résumé :

On s'intéresse aux écoulements de films liquides sur parois chauffées à hauts nombres de Péclet en tenant compte des effets Marangoni. Les solutions d'ondes propagatives et solitaires sont calculées pour des modèles approchés et pour les équations de Navier-Stokes-Fourier. Un modèle à quatre équations capturant la dynamique du film est proposé.

Abstract :

Heated falling liquid films at high Peclet numbers including Marangoni effects are considered. Travelling-wave and solitary-wave solutions to the full Navier-Stokes-Fourier equations and low-dimensional models are constructed. A four-equation model satisfactorily capturing the dynamics of the flow is proposed.

Mots clefs : Films liquides, effets Marangoni, instabilités hydrodynamiques, ondes solitaires

1 Introduction

Le développement des procédés de stockage de l'énergie solaire à l'échelle du bâtiment par sorption requiert le développement d'échangeurs compacts et multifonctionnels permettant la valorisation de sources de chaleur à basse température [5]. Les procédés actuels (échangeurs à tubes et calandres) sont limités par leur taille et leur coût de fonctionnement élevé. Les échangeurs à plaques et films ruisselants représentent une alternative intéressante. En effet, la présence d'ondelettes permet d'y augmenter sensiblement les échanges par la réduction de l'épaisseur moyenne du film, la formation de rouleaux au sein des crêtes des ondelettes, par le mélange induit lorsque deux ondes s'apparient ainsi que par la présence de retours d'écoulement [2, 7].

Park et Nosoko [6] ont ainsi mis en évidence une intensification des transferts de masse par la présence de rouleaux dans la crête des ondes. Dans le cas d'un film chauffé

par le bas, les effets thermocapillaires entraînent la formation de rivulets et canalisent l'écoulement, ce qui renforce localement la dynamique des ondelettes [11] et accroît considérablement les transferts de chaleur [1].

les avancées considérables de la modélisation des films liquides à l'aide de méthodes asymptotiques (développement "ondes longues", méthode aux résidus pondérés, approches "à la Saint Venant") [7], ont permis d'obtenir des modèles fiables et quantitatifs permettant d'envisager des simulations numériques pour des domaines étendus à des coûts acceptables. Les travaux de Scheid *et al.* [9, 12, 14, 11, 10] ont montré que le couplage entre instabilité thermocapillaire "longes-ondes" (mode S ou mode de Smith d'après la classification introduite par Goussis et Kelly [3, 13]) et instabilité hydrodynamique (mode H ou de Kapitza) pouvait être correctement décrite par un modèle Saint-Venant obtenu à l'aide de la méthode aux résidus pondérés introduite par Ruyer-Quil et Manneville [8] :

$$\partial_t h + \partial_x q = 0, \quad (1a)$$

$$3Re \left(\partial_t q + \frac{17}{7} \frac{q}{h} \partial_x q - \frac{9}{7} \frac{q^2}{h^2} \partial_x h \right) = \frac{5}{6} \left(h - \frac{3q}{h^2} - Cth \partial_x h + Weh \partial_{xxx} h \right) + 4q \left(\frac{\partial_x h}{h} \right)^2 - \frac{9}{2} \frac{\partial_x h \partial_x q}{h} - 6q \frac{\partial_{xx} h}{h} + \frac{9}{2} \partial_{xx} q - M \frac{5}{4} \partial_x \theta, \quad (1b)$$

$$3Pe \left(\partial_t \theta + \frac{27}{20} \frac{q}{h} \partial_x \theta - \frac{7}{40} \frac{1-\theta}{h} \partial_x q \right) = 3 \frac{[1 - (1 + Bh)\theta]}{h^2} + \left(1 - \theta - \frac{3}{2} Bh\theta \right) \left(\frac{\partial_x h}{h} \right)^2 + \frac{\partial_x h \partial_x \theta}{h} + (1 - \theta) \frac{\partial_{xx} h}{h} + \partial_{xx} \theta. \quad (1c)$$

Le modèle (1) consiste en trois équations couplées pour l'épaisseur du film h , le débit linéique local de fluide $q = \int_0^h u dy$ et la température de surface libre $T(y = h) = \theta$. Malheureusement, l'approche initiée par Scheid *et al.* est limitée aux nombres de Péclet faibles ou modérés. En effet, lorsque le nombre de Péclet se trouve trop élevé, le modèle ne prédit plus une température de surface libre encadrée par la température de la paroi et la température du gaz (soit $\theta \in [0, 1]$) comme illustré par la figure 1 où sont comparées les solutions d'ondes solitaires des équations de Navier-Stokes-Fourier et les solutions du modèle (1).

L'objet de ce travail est donc de corriger les défauts de (1) d'obtenir un modèle sous forme d'équations moyennées pour le champ de température permettant de rendre compte de la dynamique d'un film liquide en présence d'effet Marangoni aux grands nombres de Péclet. L'étude se limite ici aux écoulements bidimensionnels (2D) pour lesquels il n'y a pas d'écoulement dans la direction transverse z ($w = 0$) et qui sont invariants par translation dans cette direction ($\partial_z = 0$). Pour autant, la généralisation de cette étude aux écoulements 3D ne posent pas de difficultés majeures.

2 Position

On s'intéresse donc à l'évolution d'un film liquide d'épaisseur initiale \bar{h}_N s'écoulant par

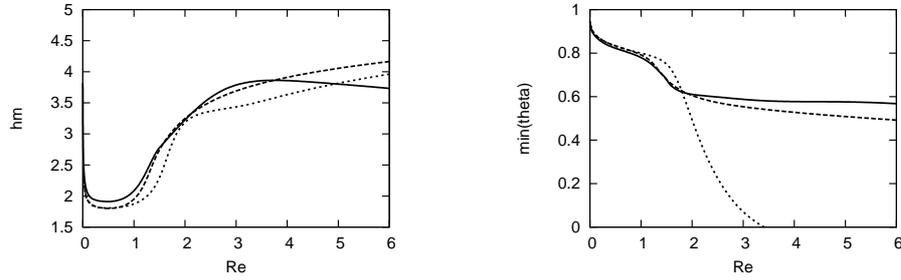


FIGURE 1 – Solutions d’ondes solitaires ($Pr = 7$, $Bi = 0.1$, $\Gamma = 250$, $\beta = 90^\circ$). À gauche : amplitude (hauteur maximale); à droite : minimum de la température de surface ($\min(\theta)$). Les lignes continues correspondent à Navier-Stokes-Fourier (2), les pointillés courts à (1) et les pointillés longs à (1a), (1b) et (5).

gravité sur une paroi chauffée à température imposée T_w et inclinée d’un angle β . On note T_a la température de l’air supposé passif. Soit H le coefficient de transfert entre le liquide et l’atmosphère, $\nu = \mu/\rho$ la viscosité cinématique, $\sigma(T) = \sigma_\infty - \gamma(T - T_\infty)$ la tension de surface. En notant x la direction de l’écoulement, y la direction transverse, u, v les composantes du champ de vitesse, et h l’épaisseur du film, et en se limitant à des écoulements 2D, les équations de Navier-Stokes-Fourier [4] à résoudre se lisent :

$$3Re (\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u) = -\partial_x p + \partial_{xx} u + \partial_{yy} u + 1, \quad (2a)$$

$$\partial_x u + \partial_y v = 0, \quad (2b)$$

$$3Pe (\partial_t T + u\partial_x T + v\partial_y T) = \partial_{xx} T + \partial_{yy} T \quad (2c)$$

complétée par la condition de non-glissement à la paroi,

$$u = v = 0 \quad \text{à} \quad y = 0, \quad (2d)$$

la continuité de la contrainte,

$$p = \frac{2}{n^2} [(\partial_x h)^2 \partial_x u - \partial_x h (\partial_y u + \partial_x v) + \partial_y v] - \frac{1}{n^3} (We - MT) \partial_{xx} h, \quad (2e)$$

$$0 = \frac{1}{n} [2\partial_x h (\partial_y v - \partial_x u) + (1 - (\partial_x h)^2) (\partial_y u + \partial_x v)] + M(\partial_x T + \partial_x h \partial_y T) \quad \text{avec} \quad n = \sqrt{1 + (\partial_x h)^2}, \quad (2f)$$

la condition de surface libre,

$$\partial_t h + u|_h \partial_x h = v|_h \quad (2g)$$

qui est équivalente à

$$\partial_t h + \partial_x q = 0 \quad (2h)$$

où $q = \int_0^h u dy$ est le débit linéique local. La température de la paroi est constante et le coefficient d'échange avec l'atmosphère est supposé constant

$$T = 1 \quad \text{à} \quad y = 0, \quad (2i)$$

$$\partial_y T - \partial_x h \partial_x T = -BT \sqrt{1 + (\partial_x h)^2} \quad \text{à} \quad y = h, \quad (2j)$$

Le système (2) est écrit sans dimension et fait apparaître un nombre de Reynolds, $Re = g \sin \beta \bar{h}_N^3 / (3\nu^2)$, un nombre de Péclet $Pe = Pr Re$ où $Pr = \nu/\chi$, un nombre de Biot $B = H \bar{h}_N / \lambda$, un nombre de Weber $We = \sigma_\infty / (\rho g \bar{h}_N^2 \sin \beta)$, un nombre de Marangoni $M = \gamma(T_w - T_a) / (\rho g \bar{h}_N^2 \sin \beta)$. Pour s'affranchir de la dépendance en fonction de l'épaisseur du film (et donc du nombre de Reynolds), on introduit également $Ma = h_N^2 M$, $Bi = B/h_N$ et le nombre de Kapitza $\Gamma = We h_N^2$ avec $h_N = (3Re)^{1/3}$ une épaisseur adimensionnée.

3 Résolution numérique et modélisation

On cherche les solutions d'ondes propagatives de (2) dans le référentiel en mouvement $\xi = x - ct$. le système (2) devient alors un système d'e.d.o. qui est ensuite projeté sur un ensemble de polynômes de Chebyshev. On obtient ainsi un système dynamique autonome de dimension finie dont les solutions sont calculées à l'aide du logiciel AUTO07P¹. Des exemples de solutions d'ondes solitaires (ondes de très grandes longueurs) sont présentées en figure 2. Dans cet exemple, les effets thermocapillaires ($Ma \neq 0$) modifient notablement l'amplitude des ondes solitaires dont la nature change avec la formation d'un rouleau dans la crête de l'onde. Cette recirculation induit la formation d'une région de forts gradients thermiques (couche limite thermique) à la proximité du point de stagnation amont qui renforce encore les effets thermocapillaires. L'apparition de cette couche limite thermique résulte de la compétition des effets convectifs ($\propto Pe$) et de transfert à la surface libre ($\propto B$) et n'est donc observée que pour des nombres de Péclet élevés et des nombres de Biot relativement faibles.

Comme souligné par Trevelyan *et al.* [14], l'apparition de forts gradients thermiques est à l'origine du mauvais comportement des solutions du modèle (1) dont la formulation est fondée sur l'hypothèse des petits gradients et devient donc caduque lorsque Pe est grand. Afin de résoudre ce problème, l'approche proposée combine la méthode des résidus pondérés à une paramétrisation du champ de température par des variables soigneusement choisies de manière à autoriser le passage à la limite $Pe \gg 1$: la température de surface libre $\theta(x, t) = T(y = h)$ et le flux pariétal $\varphi(x, t)/h(x, t) = \partial_y T|_{y=0}$. En effet, dans la limite $Pe \gg 1$, on a

$$\partial_t \theta + u|_{y=h} \theta = O(1/Pe) \quad \partial_t(\varphi/h) = O(1/Pe) \quad (3)$$

1. <http://indy.cs.concordia.ca/auto/>

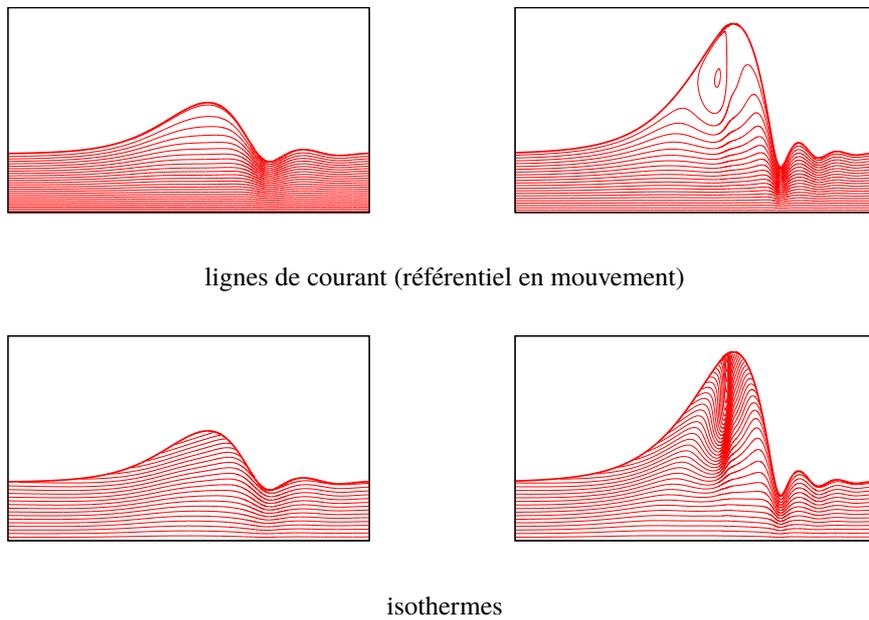


FIGURE 2 – Solutions d’ondes progressives des équations de Navier-Stokes ($Re = 2$, $Pr = 7$, $Bi = 0.1$, $\Gamma = 250$, $\beta = 90^\circ$). À gauche : sans effets thermocapillaires ($Ma = 0$) ; à droite avec effets thermocapillaires ($Ma = 50$).

On choisit ainsi la représentation du champ de température sous la forme

$$T(x, y, t) \approx 1 + \left(\frac{1}{1 + Bh} - 1 \right) \bar{y} + \left(\theta - \frac{1}{1 + Bh} \right) \bar{y}^2 + \left(\varphi + \frac{Bh}{1 + Bh} \right) \left(\bar{y} - \frac{3}{2} \bar{y}^2 + \frac{1}{2} \bar{y}^3 \right) \quad \text{avec } \bar{y} = y/h. \quad (4)$$

On applique ensuite la méthode des résidus pondérés avec les poids $w_1 = \bar{y}$ et $w_2 = 1 - \bar{y}$. Le choix des poids et des fonctions tests (4) permet notamment d'assurer la consistance des résidus avec le développement asymptotique en ondes longues (en introduisant le paramètre de film $\epsilon \sim |\partial_x h/h|$) jusqu'à l'ordre $O(\epsilon)$, condition nécessaire pour capturer correctement les seuils d'instabilités hydrodynamique et thermo-capillaire. Les termes convectifs des résidus $R_i = \langle E_T | w_i \rangle = \int_0^h w_i E_T dy$ où E_T représente l'équation de Fourier (2c) sont réécrits de manière asymptotiquement consistante en faisant apparaître (3). Au final on obtient deux équations d'évolution pour θ et φ consistantes à l'ordre $O(\epsilon)$ pour lesquelles les termes de diffusion sont également consistants à l'ordre $O(\epsilon^2)$ (condition nécessaire pour capturer correctement l'atténuation des ondes linéaires) :

$$Pe \left(\partial_t \theta + \frac{3q}{2h} \partial_x \theta \right) = \frac{12}{17h^2} [15 - (15 + 8Bh)\theta + 7\varphi] + \tilde{J}_\theta (\partial_x h)^2 + \tilde{K}_\theta \partial_x h \partial_x \theta + \tilde{L}_\theta \partial_x h \partial_x \varphi + \partial_{xx} \theta + \tilde{N}_\theta \partial_{xx} \varphi + \tilde{O}_\theta \partial_{xx} h \quad (5a)$$

$$Pe \left(\partial_t \varphi + \frac{\varphi}{h} \partial_x q \right) = \frac{120}{17h^2} [-4 + (4 + Bh)\theta - 3\varphi] + \tilde{J}_\varphi (\partial_x h)^2 + \tilde{K}_\varphi \partial_x h \partial_x \theta + \tilde{L}_\varphi \partial_x h \partial_x \theta + \partial_{xx} \varphi + \tilde{N}_\varphi \partial_{xx} \theta + \tilde{O}_\varphi \partial_{xx} h. \quad (5b)$$

Les symboles $\tilde{J}_\theta \dots \tilde{O}_\varphi$ représentent des fonctions du coefficient de transfert local Bh . Complétée par (1a) et (1b), (5) forme un modèle à quatre équations pour les quatre inconnues h , q , θ et φ dont les solutions d'ondes propagatives sont recherchées également par AUTO07P. La figure 3 présente les profils, lignes de courant et isothermes correspondant aux solutions d'ondes solitaires à comparer aux solutions de Navier-Stokes-Fourier (2) (figure 2). L'accord est satisfaisant, le modèle capturant notamment la formation de la couche limite thermique. Par ailleurs, la présence de températures en dehors de l'intervalle acceptable $[0, 1]$ n'est plus observée (cf. figure 1).

Références

- [1] E. A. Chinnov and O. A. Kabov. The effect of three-dimensional deformations on local heat transfer to a nonuniformly heated falling film of liquid. *High Temperature*, 42 :257–277, 2004.
- [2] G. F. Dietze and C. Ruyer-Quil. Wavy liquid films in interaction with a confined laminar gas flow. *J. Fluid Mech.*, 722 :348–393, 2013.

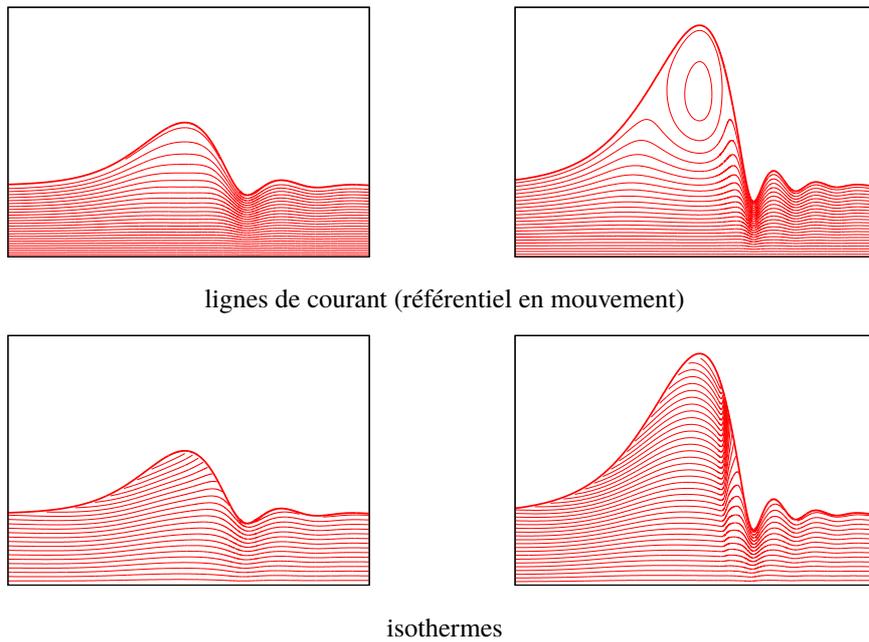


FIGURE 3 – Solutions d'ondes progressives du modèle Saint-Venant ($Re = 2$, $Pr = 7$, $Bi = 0.1$, $\Gamma = 250$, $\beta = 90^\circ$). À gauche : sans effets thermocapillaires ($Ma = 0$) ; à droite avec effets thermocapillaires ($Ma = 50$).

- [3] D. A. Goussis and R. E. Kelly. Surface wave and thermocapillary instabilities in a liquid film flow. *J. Fluid Mech.*, 223 :25, 1991. corrigendum in *J. Fluid Mech.* 226 :663.
- [4] S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, B. Scheid, and M. G. Velarde. *Falling liquid films*, volume 176 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, first edition, 2012.
- [5] K. N'Tsoukpoe, N. L. Pierrès, and L. Luo. Experimentation of a liquid-h₂o absorption process for long-term solar thermal storage : Prototype design and first results. *Energy*, 53 :179–198, 2013.
- [6] C. D. Park and T. Nosoko. Three-dimensional wave dynamics on a falling film and associated mass transfer. *AIChE J.*, 49 :2715–2727, 2003.
- [7] C. Ruyer-Quil, N. Kofman, D. Chasseur, and S. Mergui. Dynamics of falling liquid films. *Eur. Phys. J. E*, 37 :1–17, 2014.
- [8] C. Ruyer-Quil and P. Manneville. Improved modeling of flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B*, 15 :357–369, 2000.
- [9] C. Ruyer-Quil, B. Scheid, S. Kalliadasis, M. G. Velarde, and R. Kh. Zeytounian. Thermocapillary long waves in a liquid film flow. Part 1. Low dimensional formulation. *J. Fluid Mech.*, 538 :199–222, 2005.
- [10] B. Scheid, S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, and P. Colinet. Interaction of three-dimensional hydrodynamic and thermocapillary instabilities in film flows. *Phys. Rev. E*, 78 :066311, 2008.
- [11] B. Scheid, S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, and P. Colinet. Spontaneous channeling of solitary pulses in heated film flows. *Europhys. Lett.*, 84 :64002, 2008.
- [12] B. Scheid, C. Ruyer-Quil, S. Kalliadasis, M. G. Velarde, and R. Zeytounian. Thermocapillary long waves in a liquid film flow. Part 2. linear stability and nonlinear waves. *J. Fluid Mech.*, 538 :223–244, 2005.
- [13] K. A. Smith. On convective instability induced by surface-tension gradients. *J. Fluid Mech.*, 24 :401–414, 1966.
- [14] P. M. J. Trevelyan, B. Scheid, C. Ruyer-Quil, and S. Kalliadasis. Heated falling films. *J. Fluid Mech.*, 592 :295–334, 2007.