

Prédiction d'une turbulence homogène en présence de la rotation à l'aide du modèle de Gibson-Launder

S. Naifer^a, M. Bouzaiane^{a b}

a. Laboratoire de Mécanique des Fluides Faculté des Sciences de Tunis
saida17naifer@gmail.com

b. Faculté des Sciences de Bizerte mbouzaiane@yahoo.fr

Résumé :

Dans ce travail, les états d'équilibre des grandeurs adimensionnelles d'une turbulence homogène cisailée soumise aux effets de la rotation sont prédits à l'aide du modèle de Gibson-Launder. La méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 est retenue pour l'intégration numérique des équations d'évolution de l'écoulement après modélisation. Le modèle retenu confirme l'existence de valeurs d'équilibre pour les grandeurs adimensionnelles cinématiques et thermique

Abstract :

In this work, equilibrium states of dimensionless parameters in homogeneous sheared turbulence submitted to rotation effects are predicted using the Gibson-Launder second order model. The Fourth order Runge-Kutta method is retained for integrating non linear differential system after modeling. The retained model confirms the existence of equilibrium states for non dimensional kinematics and thermal parameters.

Mots clefs : Turbulence et rotation, modèles au second ordre, états d'équilibre

1 Introduction

Depuis une dizaine d'années, des progrès significatifs ont été réalisés dans la compréhension d'une turbulence soumise aux effets de la rotation., notamment grâce à des expériences sur les instabilités [1] et à des travaux alliant théorie et études numériques sur les deux axes instabilités et turbulence [2]. La place considérable que prennent les fluides dans les systèmes physiques et industriels en rotation a constitué la motivation essentielle de cette étude. Dans ce travail, consacré à l'étude d'une turbulence homogène cisailée soumise aux effets de la rotation, nous commençons au paragraphe suivant par présenter les équations générales de l'écoulement et la mise en évidence du problème de fermeture des équations. Le paragraphe 3 est consacré à l'écriture d'une forme adimensionnelle des équations et à leurs modélisations. Au paragraphe 4, nous présentons les principaux résultats obtenus et nous terminons par une conclusion générale.

2 Equations générales de l'écoulement

Nous présentons dans ce paragraphe les équations d'évolution des tensions de Reynolds $\overline{u_i u_j}$, des flux thermiques turbulents $\overline{u_i \theta}$, de l'énergie cinétique turbulente K et de la variance de la température $\overline{\theta^2}$, décrivant un écoulement turbulent homogène cisailé associé à un champ thermique présentant un gradient constant de la température moyenne dans la même direction que le cisaillement. La rotation est selon l'axe x_3 . Dans le cadre d'une modélisation au second ordre, ces équations sont écrites sous les formes condensées suivantes[3] :

$$\frac{d}{dt} \left(\overline{u_i u_j} \right) = P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + R_{ij} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\overline{u_i \theta} \right) = P_{i\theta} + \phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} - 2 e_{mik} \Omega_m \overline{U_k \theta} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\overline{\theta^2} \right) = 2P_{\theta\theta} - 2\varepsilon_{\theta\theta} \quad (3)$$

Les termes notés P sont les termes de production dus aux gradients cinématiques et thermiques moyens :

$$P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}, \quad (4)$$

$$P_{i\theta} = -\overline{U_i U_k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} - \overline{U_j \theta} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \quad (5)$$

$$P_{\theta\theta} = -\overline{u_i \theta} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \quad (6)$$

Les termes notés ϕ sont les termes de corrélation faisant intervenir les fluctuations de pression :

$$\phi_{ij} = \frac{p}{\rho_0} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

$$\phi_{i\theta} = \frac{p'}{\rho_0} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (8)$$

Les termes ε sont les termes de dissipation dus aux effets moléculaires. Les termes notés R sont les termes dus aux effets de la rotation :

$$R_{ij} = -2 \left(e_{imk} \overline{u_j u_k} \Omega_m + e_{jmk} \overline{u_i u_k} \Omega_m \right) \quad (9)$$

e_{mik} est le tenseur de permutation et $\Omega_m = \Omega \delta_{m3}$ est le taux de rotation.

A grand nombre de Reynolds de l'écoulement, le taux de dissipation visqueux des flux des scalaires est supposé être isotrope ($\varepsilon_{i\theta} = 0$).

Une contraction des indices dans l'équation (1), permet d'obtenir l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente, $K = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$.

$$\frac{dK}{dt} = P - \varepsilon \quad (10)$$

où $P = P_{ii}/2$ est la production de la turbulence due au cisaillement moyen, et $\varepsilon = \varepsilon_{ii}/2$ est le taux de dissipation visqueux. Un modèle de l'équation d'évolution de la dissipation ε est écrit sous la forme :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (11)$$

On précise ici que les formes retenues des modèles des termes de corrélation pression-déformation et pression-température s'écrivent sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_{ij} = & -C_1 b_{ij} \varepsilon + C_2 K S_{ij} + C_3 K \left(b_{ik} S_{kj} + b_{jk} S_{ki} - \frac{2}{3} b_{nm} S_{nm} \delta_{ij} \right) + C_4 K \left(b_{ik} \overline{W}_{jk} + b_{jk} \overline{W}_{ik} \right) \\ & - C_5 \left(G_{ij} - \frac{1}{3} G_{kk} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\varphi_{i\theta} = -c_{\theta 1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{U_i \theta} + (c_{\theta 2} + c_{\theta 3}) \overline{U_k \theta} S_{ik} + (c_{\theta 2} - c_{\theta 3}) \overline{U_k \theta} \overline{W}_{ik} + c_{\theta 4} \overline{U_i U_k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} \quad (13)$$

où $\overline{W}_{ij} = W_{ij} + e_{jim} \Omega_m$ est le tenseur de taux de rotation .

un modèle algébrique simple est écrit pour la dissipation ε_θ :

$$\varepsilon_\theta = \frac{\overline{\theta^2}}{r} \frac{\varepsilon}{K} \quad (14)$$

Où r est le rapport des temps caractéristiques cinématique et thermiques.

3 Equations adimensionnelles

Une forme adimensionnelle des équations d'évolution est écrite en introduisant des grandeurs adimensionnelles cinématiques $K^* = \frac{K}{K_0}$, $b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{2K} - \frac{\delta_{ij}}{3}$ et thermiques. Pour une forme simple de ce papier nous nous limitons à la présentation des équations adimensionnelles cinématiques.

$$\frac{dK^*}{d\tau} = - \left(2b_{12} + \frac{\varepsilon}{SK} - F_2 \right) K^* \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(b_{ij})}{d\tau} = & - \left(\frac{C_1}{2} - 1 + \frac{P+G}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\varepsilon}{SK} \right) b_{ij} + \left(\frac{C_3 - 2}{2} \right) \left(b_{ik} S_{jk}^* + b_{jk} S_{ik}^* - \frac{2}{3} b_{nm} S_{nm}^* \delta_{ij} \right) \\ & \left(\frac{C_4 - 2}{2} \right) (b_{ik} W_{jk}^* + b_{jk} W_{ik}^*) + \left(\frac{C_2}{2} - \frac{2}{3} \right) S_{ij}^* - \left(\frac{C_5 - 1}{2} \right) \left(F_i \delta_{j2} + F_j \delta_{i2} - \frac{2}{3} F_k \delta_{k2} \delta_{ij} \right) \\ & + \left(\frac{C_4 - 4}{2} \right) (b_{ik} e_{3kj} + b_{jk} e_{3ki}) \left(\frac{\Omega}{S} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\varepsilon}{SK} \right) = \left[(C_{\varepsilon 1} - 1) \left(\frac{P+G}{\varepsilon} \right) - (C_{\varepsilon 2} - 1) \right] \left(\frac{\varepsilon}{SK} \right)^2 \quad (17)$$

Où K_0 est la valeur initiale de l'énergie cinétique turbulente. Les quantités adimensionnelles sont:

$$\tau = St, \quad S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{S}, \quad W_{ij}^* = \frac{W_{ij}}{S} \quad (18)$$

Le modèle de la turbulence considéré dans cette étude est le modèle de Gibson et Launder (GL) [4], qui est l'un des plus utilisés dans les codes CFD.

4 Résultats obtenus et discussion

Dans une turbulence homogène, la solution du système des équations différentielles non-linéaires dépend des conditions initiales des grandeurs adimensionnelles et du nombre adimensionnel de rotation (Ω/S). La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est utilisée ici pour l'intégration numérique des équations différentielles non linéaires obtenues après les modélisations au second ordre à travers le modèle de Gibson Launder. Les conditions initiales sont celles d'une turbulence initialement isotrope. L'intégration numérique est menée pour des différentes valeurs du taux de rotation (Ω/S). En poursuivant l'intégration numérique vers des intervalles de temps suffisamment grands et pour les valeurs (Ω/S) allant de 0 à 0,3 du nombre adimensionnel de rotation, nous avons obtenu les valeurs d'équilibre des grandeurs adimensionnelles cinématiques (le apport (ε/SK), la composante b_{12} du tenseur d'anisotropie et thermique (le rapport des flux thermiques turbulentes $\rho_1 = \frac{\overline{\theta u_1}}{\theta u_2}$).

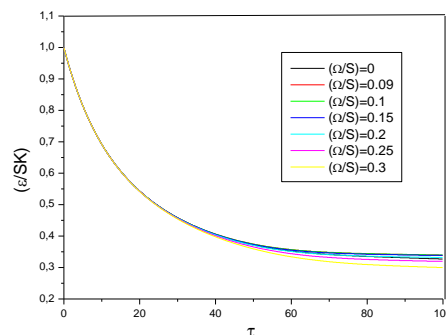


Fig 1. Evolution temporelle de (ε/SK) pour les différentes valeurs de (Ω/S) .

Les évolutions du rapport adimensionnel (ε/SK) sont présentées sur la figure 1 pour les valeurs du rapport (Ω/S) allant de 0 à 0,3 et jusqu'à un temps adimensionnel $\tau = 100$. Nous avons constaté que ces évolutions sont pratiquement confondues jusqu'à $\tau = 40$. Une légère différence apparaît ensuite dans l'intervalle $[40, 100]$. Au tableau suivant, nous présentons les valeurs d'équilibre atteintes par le rapport adimensionnel (ε/SK) en fonction du taux de rotation (Ω/S) .

(Ω/S)	0	0,09	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$(\varepsilon/SK)_\infty$	0,327	0,339	0,34	0,339	0,332	0,320	0,3

Tableau 1: Les valeurs d'équilibre de (ε/SK) pour les différentes valeurs de (Ω/S) .

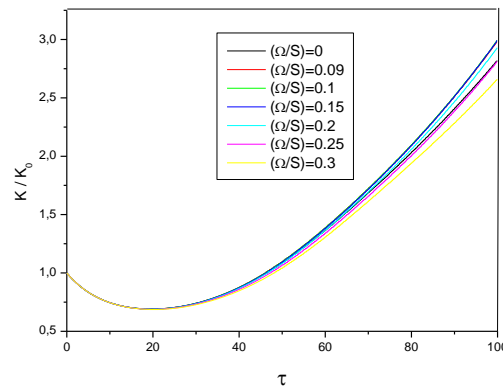


Fig 2. Evolution temporelle de (K/K_0) pour les différentes valeurs du (Ω/S) .

Sur la figure 2, nous présentons l'évolution du rapport adimensionnel de l'énergie cinétique turbulente K^* . Nous précisons que les effets de la rotation ne sont pas explicites dans l'équation d'évolution de K^* . Nous constatons qu'à partir d'un temps égal à 40, on peut constater qu'il y a une légère variation entre les différentes évolutions de K^* pour les différentes valeurs du rapport (Ω/S) . En particulier, pour une augmentation du nombre de rotation (Ω/S) de 0 à 0,15 une croissance de l'énergie cinétique turbulente est observée et pour des valeurs de (Ω/S) allant de 0,2 à 0,3 une diminution de K^* est observée. Ce résultat est en contradiction avec les résultats connus dans la littérature [5].

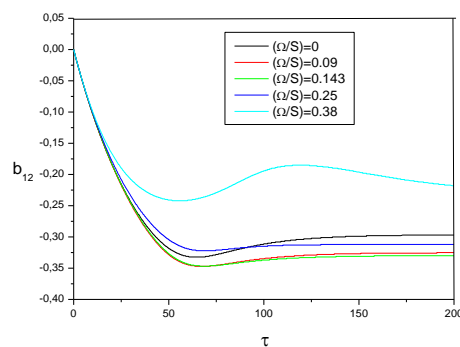


Fig 3. Evolution temporelle de b_{12} pour les différentes valeurs du (Ω/S) .

Les effets de la rotation sur la composante principale d'anisotropie sont maintenant étudiés. Nous présentons sur la figure 3 les évolutions de la composante b_{12} en fonction du taux (Ω/S) . Une tendance générale vers des valeurs d'équilibre est observée. Les valeurs d'équilibre de b_{12} en fonction de (Ω/S) sont présentées au tableau 3.

(Ω/S)	0	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
$(b_{12})_{\infty}$	-0.311	-0.311	-0.311	-0.337	-0.331	-0.311	-0.286

Tableau 2: Les valeurs d'équilibre de b_{12} pour les différentes valeurs de (Ω/S) .

Une augmentation de l'anisotropie de l'écoulement est observée quand (Ω/S) passe de 0 à 0,15 correspondant à $(b_{12})_\infty$ allant de -0,311 à -0,337. L'anisotropie de l'écoulement semble légèrement diminuer quand (Ω/S) passe de 0,2 à 0,3. Dans ce dernier intervalle, le résultat est en désaccord avec les résultats connus dans la littérature [5].

Nous présentons maintenant les effets du nombre de rotation (Ω/S) sur le champ thermique. Sur le tableau suivant sont présentées les valeurs d'équilibre de la grandeur adimensionnelle thermique $\rho_1 = \frac{\overline{\theta u_1}}{\overline{\theta u_2}}$ rapport des flux thermiques turbulents :

(Ω/S)	0	0,09	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$(\rho_1)_\infty$	1,42	1,42	1,42	1,42	1,42	1,43	1,45

Tableau 3: Les valeurs d'équilibre de ρ_1 pour les différentes valeurs de (Ω/S) .

Nous présentons sur la figure 4 les évolutions du rapport adimensionnel ρ_1 en fonction du taux (Ω/S) allant de 0 à 0,3 et jusqu'à un temps adimensionnel $\tau = 100$. Nous avons constaté que ces évolutions sont pratiquement confondues. De plus la rotation affecte très faiblement ce rapport adimensionnel.

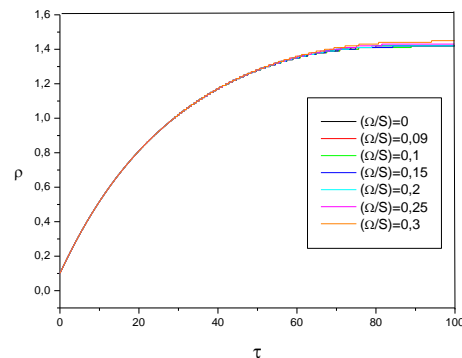


Fig 4. l'évolution temporelle de ρ_1 pour les différentes valeurs du (Ω/S) .

5 Conclusion

Nous avons étudié à l'aide d'une modélisation au second ordre l'évolution du champ cinématique et thermique d'une turbulence homogène cisailée soumise aux effets de la rotation. Le modèle G L a montré une tendance générale des grandeurs adimensionnelles vers des états d'équilibre ce qui confirme les résultats connus dans la littérature. Cependant l'évolution temporelle des grandeurs adimensionnelles, à part celle de la composante principale d'anisotropie b_{12} , ne semble pas être affectée par la rotation. Nous avons constaté que le modèle G L prédit les mêmes évolutions des différentes grandeurs adimensionnelles cinématiques (ε/SK) , (K/K_0) et le rapport adimensionnel thermique ρ_1 . Cette défaillance du modèle GL nous ramène à penser à une correction qui tiendra compte des effets de la rotation sur la turbulence.. La correction incluant un effet de rotation disponible pour le modèle k-

epsilon pourrait nous permettre de s'inspirer pour inclure une modification similaire dans le modèle de Gibson-Lauder . De même des résultats récents de simulations numériques directes notamment pourraient servir de base de comparaison pour le modèle GL. Ce ci pourrait faire l'objet d'une prochaine étude.

References

- [1] C.G.Speziale, Analytical methods for the development of Reynolds stress closures in turbulence, Annual Rev. Fluid Mech 23 (1991) 107-157.
- [2] C.Bailly et O.Marsden : *Physique des écoulements turbulents*, Université de Lyon, Ecole Centrale de Lyon et LMFA-UMR CNRS 5509 et institut universitaire de France, (1997).
- [3] J.R.Ristorcelli, J.L.Lumley, R.Abid, A rapid pressure covariance representation consistent with the Taylor-Proudman Theorem naturally frame indifferent in the two-dimensional limit, J. Fluid Mech. 292 (1995) 111-152.
- [4] C.G.Speziale, M.G.Mhuiris, on the prediction of equilibrium states in homogeneous turbulence, J. Fluid Mech. 209 (1989) 591-615.
- [5] G. Brethouwer, the effect of rotation on rapidly sheared homogeneous turbulence and passive scalar transport. J. Fluid Mechanic 542 (2005) 305-340.

