

Cristal phononique piézomagnétique à une dimension : contrôle de la propagation par inductance variable

M.-F. PONGE^a, J. VASSEUR^b, O. BOU MATAR^c,
A.-C. HLADKY-HENNION^d, B. DUBUS^e

a. IEMN, UMR CNRS 8520. marie-fraise.ponge@isen.fr

b. IEMN, UMR CNRS 8520. jerome.vasseur@univ-lille1.fr

c. IEMN, Ecole Centrale de Lille, UMR CNRS 8520. olivier.boumatar@iemn.univ-lille1.fr

d. IEMN, ISEN, UMR CNRS 8520. anne-christine.hladky@isen.fr

e. IEMN, ISEN, UMR CNRS 8520. bertrand.dubus@isen.fr

Résumé

Cette étude concerne un cristal phononique à une dimension constitué d'un empilement de couches piézomagnétiques identiques. Chaque couche est entourée par une bobine connectée à une inductance extérieure. Les ondes élastiques longitudinales se propageant dans cette structure sont étudiées théoriquement et une expression analytique de l'équation de dispersion est obtenue. Suivant la valeur de l'inductance extérieure, la solution est une onde non dispersive ou dispersive. Dans ce dernier cas, la courbe de dispersion présente une bande de fréquence interdite dont la largeur varie avec la valeur de l'inductance extérieure.

Abstract

This work concerns a one-dimensional phononic crystal constituted by a stack of identical piezomagnetic layers. Each layer is surrounded by a coil connected to an external inductor. Longitudinal elastic waves propagating in this structure are theoretically studied and an analytical expression of dispersion equation is provided. According the external inductance, non dispersive or dispersive wave is obtained. In the former case, dispersion curve exhibits a frequency band gap, the width of which varies with external inductance.

Mots clefs : cristal phononique ; piézomagnétisme

1 Introduction

Les cristaux phononiques (CP) sont des milieux périodiques présentant des bandes de fréquences interdites dans lesquelles aucune onde élastique ne peut se propager. Cette propriété de l'onde élastique est déterminée par la géométrie et les propriétés des matériaux constitutifs du CP [1]. Parmi les méthodes permettant d'ajuster les propriétés du CP après fabrication, le contrôle par champ électrique

ou magnétique présente l'avantage d'un faible temps de réponse et d'un interfaçage sans contact mécanique, simple à connecter à un dispositif électronique extérieur. Il repose sur l'insertion dans le CP d'une phase active caractérisée par une transduction linéaire (piézoélectrique, piézomagnétique) ou non linéaire (électrostrictive, magnétostrictive). Dans le cas non linéaire, le contrôle est réalisé par variation du champ statique de polarisation ou aimantation, de manière à modifier les constantes élastiques effectives du milieu. Cette méthode a été mise en œuvre dans un CP constitué d'un réseau de barreaux de Terfenol-D dans une matrice époxy dont la structure de bande est pilotée par le champ magnétique d'aimantation [2]. Dans le cas linéaire, l'élasticité apparente dépend des conditions aux limites électriques ou magnétiques imposées via des électrodes ou un bobinage. Ainsi, une impédance de charge variable (capacité dans le cas piézoélectrique, inductance dans le cas magnétique) peut permettre de modifier les courbes de dispersion. L'étude théorique et expérimentale de CP à une dimension constitué partiellement [3, 4] ou totalement de couches piézoélectriques [5, 6] a démontré qu'il était possible de faire apparaître ou disparaître la bande interdite et d'en modifier la largeur ou la position en fréquence.

Le travail présenté aborde le cas d'un cristal phononique piézomagnétique à une dimension : le développement analytique conduisant à l'équation de dispersion est présenté dans le paragraphe 2. Les résultats illustrant l'effet d'une inductance externe sur la première bande interdite sont discutés dans le paragraphe 3.

2 Modèle analytique

Le cristal phononique étudié est constitué d'un empilement de couches piézomagnétiques identiques entourées par une bobine (Fig. 1). Les dimensions de la couche sont notées l dans la direction x_1 de l'empilement, h dans la direction x_3 de l'aimantation et w suivant x_2 . On suppose que $l \gg h$ et $l \gg w$. La normale aux spires de la bobine est suivant x_3 . Le matériau piézomagnétique est supposé appartenir à la classe de symétrie 6mm [7]. On considère la propagation d'une onde longitudinale suivant x_1 pour laquelle les différents champs physiques peuvent varier avec x_1 . Les équations du piézomagnétisme dans la couche s'écrivent [8]

$$S_1 = s_{11}^H T_1 + d_{31} H_3, \quad (1)$$

$$B_3 = d_{31} T_1 + \mu_{33}^T H_3, \quad (2)$$

où S_1 , T_1 , H_3 et B_3 sont respectivement les composantes de la déformation, de la contrainte et des champs magnétiques H et B . s_{11}^H , d_{31} et μ_{33}^T sont la constante d'élasticité à champ H constant, la constante piézomagnétique et la constante de perméabilité magnétique à contrainte constante. L'application du théorème d'Ampère suivant un contour rectangulaire à x_1 constant enlaçant la bobine, permet d'exprimer H_3 sous la forme

$$H_3 = \frac{N I}{h}, \quad (3)$$

où N est le nombre de spires de la bobine et I l'intensité du courant. L'expression (3) montre que H_3 est constant (indépendant de x_1) dans la couche. La relation fondamentale de la dynamique

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (4)$$

où u_1 est la composante du déplacement et ρ la masse volumique, est combinée avec la dérivée de l'équation (1) par rapport à x_1 pour donner l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \rho s_{11}^H \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Dans le cas d'une dépendance temporelle suivant $e^{+j\omega t}$, le déplacement dans la couche s'écrit sous la forme

$$u_1(x_1) e^{+j\omega t} = (A e^{-jk_1 x_1} + C e^{+jk_1 x_1}) e^{+j\omega t}, \quad (6)$$

où $k_1 = \omega/v$ et $v = 1/\sqrt{\rho s_{11}^H}$ sont respectivement le nombre d'onde et la vitesse associés à l'onde longitudinale dans le milieu piézomagnétique.

L'écriture, pour le déplacement u_1 et la contrainte T_1 , de la relation de phase de Bloch-Floquet entre les surfaces de la couche

$$u_1(l) = u_1(0) e^{-jk_1 l} = u_1(0) X, \quad (7)$$

$$T_1(l) = T_1(0) e^{-jk_1 l} = T_1(0) X, \quad (8)$$

où k est le nombre d'onde associé à l'onde se propageant dans l'empilement de couches, conduit au système matriciel suivant

$$\begin{pmatrix} e^{-jk_1 l} - X & e^{+jk_1 l} - X \\ -(e^{-jk_1 l} - X) & e^{+jk_1 l} - X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d_{13} H_3(0) (1 - X) \\ jk_1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Le terme $H_3(0)$ apparaissant dans le second membre peut être évalué à partir de la loi de Faraday

$$e = \frac{-d\Phi}{dt} = \frac{-d}{dt} [Nw \int_0^l B_3(x_1) dx_1], \quad (10)$$

où e est la force électromotrice induite aux bornes de la bobine, Φ le flux du champ magnétique B à travers la même bobine et w la largeur de la couche suivant x_2 . En combinant les équations (10), (1), (2) et (6), on obtient

$$e = -j\omega Nw \left[\frac{d_{31}^H}{s_{11}^H} (u_1(l) - u_1(0)) + \left(\mu_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^H} \right) \frac{NI}{h} \right]. \quad (11)$$

Si la bobine est connectée à une inductance extérieure L_{ext} (Fig. 1), la relation entre la tension aux

bornes de la bobine V et I doit également vérifier

$$e = -V = jL_{ext} \omega I. \quad (12)$$

L'expression de $H_3(0)$ est alors obtenue en combinant les équations (3), (11) et (12)

$$H_3(0) = \frac{-d_{31}}{s_{11}^H \left(\mu_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^H} \right) l \left(\frac{L_{ext}}{L_0} + 1 \right)} (u_1(l) - u_1(0)). \quad (13)$$

avec

$$L_0 = \frac{\left(\mu_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^H} \right) N^2 w l}{h}. \quad (14)$$

Le report de l'équation (13) dans le système matriciel (9) donne le système d'équations final

$$\begin{pmatrix} e^{-jk_1 l} - X & e^{+jk_1 l} - X \\ (e^{-jk_1 l} - X) + (e^{-jk_1 l} - 1) \frac{\gamma(1-X)}{jk_1 l} & -(e^{+jk_1 l} - X) + (e^{+jk_1 l} - 1) \frac{\gamma(1-X)}{jk_1 l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

où

$$\gamma = -\left(\frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2} \right) \left(\frac{1}{\frac{L_{ext}}{L_0} + 1} \right). \quad (16)$$

k_{31} est le coefficient de couplage piézomagnétique défini par

$$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^H \mu_{33}^T}. \quad (17)$$

L'annulation du déterminant de la matrice de l'équation (15) donne la relation de dispersion

$$\cos(kl) = \frac{\cos(k_1 l) - \gamma \frac{\sin(k_1 l)}{k_1 l}}{1 - \gamma \frac{\sin(k_1 l)}{k_1 l}}. \quad (18)$$

3 Résultats

La Figure 2 présente les courbes de dispersion calculées par recherche des racines de l'équation (18) pour un CP constitué de couches de Terfenol-D d'épaisseur 1 cm avec les propriétés suivantes [9] : $s_{11}^H = 2.7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \cdot \text{N}^{-1}$, $d_{31} = -5.2 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{A}^{-1}$, $\mu_{33}^T = 5.53 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\rho = 9.21 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Quatre cas sont considérés : circuit ouvert ($L_{ext} \rightarrow +\infty$) ; court-circuit ($L_{ext} = 0$) ; inductance externe positive ($L_{ext} = L_0$) ; inductance externe négative ($L_{ext} = -3 L_0/4$). L'onde élastique est non dispersive lorsque la bobine est en circuit ouvert et devient dispersive avec apparition d'une bande interdite quand la bobine est en court-circuit. La largeur de la bande interdite peut être modifiée en fonction de l'inductance externe connectée à la bobine, variant entre zéro et la largeur obtenue en court-circuit dans le cas d'une inductance externe positive. Des largeurs de bandes plus importantes peuvent être obtenues en utilisant des valeurs d'inductances externes négatives, synthétisées par des circuits électroniques. L'ensemble de ces résultats démontrent la possibilité de contrôler la dispersion de l'onde se propageant dans un cristal phononique piézomagnétique par simple variation de l'inductance connectée aux bornes de la bobine.

Références

- [1] P.A. Deymier, *Acoustic metamaterials and phononic crystals*, Springer, Berlin, 2013
- [2] O. Bou Matar, J.-F. Robillard, J.O. Vasseur, A.-C. Hladky-Hennion, P.A. Deymier, P. Pernod, V. Prebrazhensky, Band gap tunability of magneto-elastic phononic crystal, *J Appl. Phys* 111 (2012) 054901
- [3] S. Degraeve, C. Granger, B. Dubus, J.O. Vasseur, A.-C. Hladky-Hennion, M. Pham Thi, Contrôle électrique de la propagation d'ondes élastiques dans des cristaux phononiques piézoélectriques, 21^{ème} Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, 2013
- [4] S. Degraeve, C. Granger, B. Dubus, J.O. Vasseur, M. Pham Thi, A.-C. Hladky-Hennion, Tunability of a one-dimensional elastic/piezoelectric phononic crystal using external capacitances, *Acta Acustica united with Acustica* 101 (2015) 494-501
- [5] S. Degraeve, C. Granger, B. Dubus, J.O. Vasseur, M. Pham Thi, A.-C. Hladky-Hennion, Bragg band gaps tunability in an homogeneous piezoelectric rod with periodic boundary conditions, *J Appl. Phys* 115 (2014) 194508
- [6] A.A. Kutsenko, A.L. Shuvalov, O. Poncelet, A.N. Dariinski, Tunable effective constants of the one-dimensional piezoelectric phononic crystal with internal connected electrodes, *J Acoust. Soc. Am.* 137 (2015) 606-616
- [7] J.-F. Nye, *Physical properties of crystals*, Clarendon Press, Oxford, 1957
- [8] O.B. Wilson, *Introduction on the theory and design of sonar transducers*, Peninsula Publishing, Los Altos, 1988
- [9] F. Claeysen, R. Bossut, D. Boucher, Modeling and characterization of the magnetostrictive coupling in: B. Hamonic, O.B. Wilson, J.-N. Decarpigny (ed.), *Power transducers for sonics and ultrasonics*, Springer-Verlag, 1991, pp. 132–151

Remerciements

Ce travail a été soutenu par l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre du projet MIRAGES ANR-12-BS09-0015.

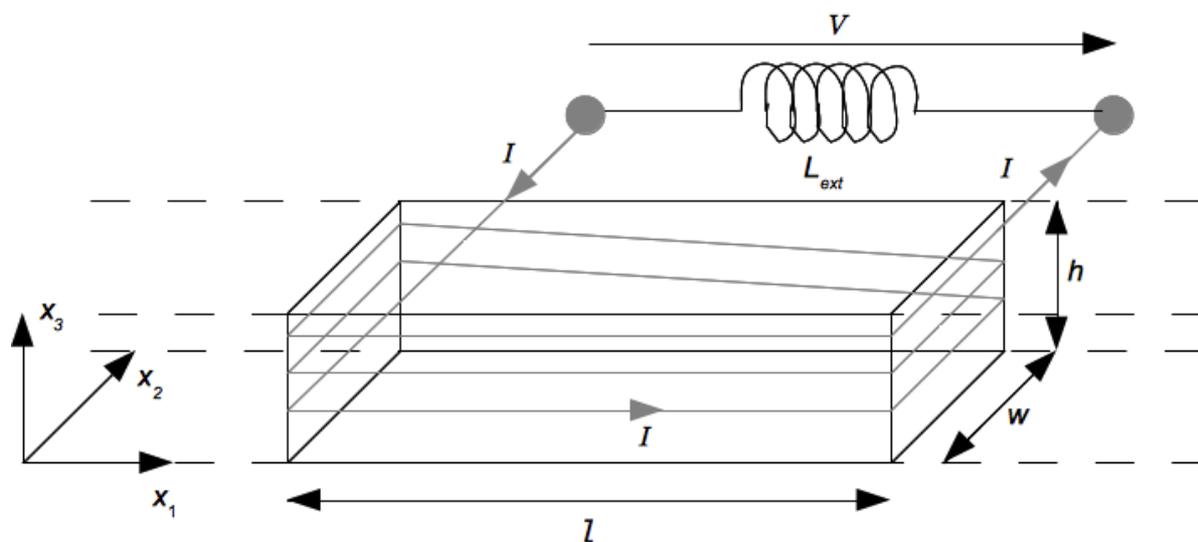


FIG. 1 – Géométrie du cristal phononique piézomagnétique.

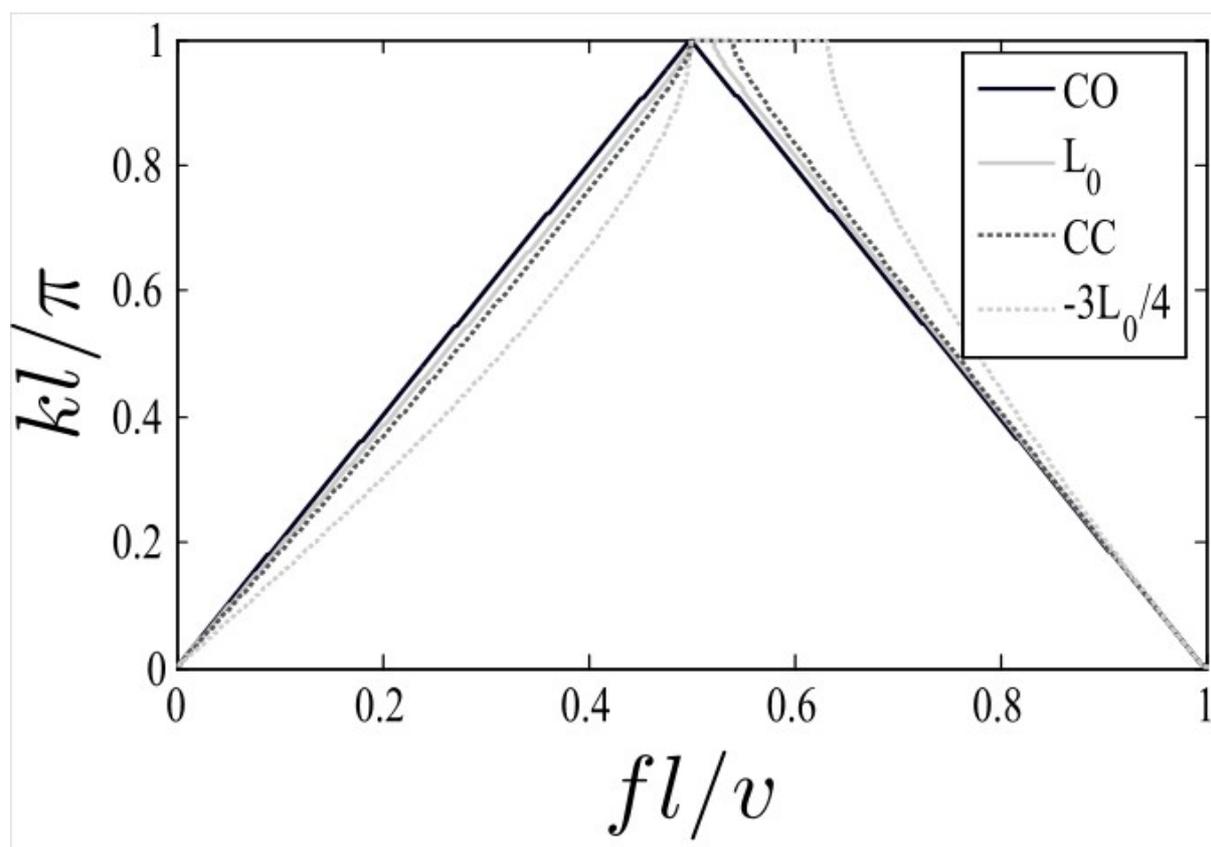


FIG. 2 – Courbes de dispersion d'un cristal phononique piézomagnétique pour différentes valeurs de l'inductance externe connectée aux bornes de la bobine.