

# Bifurcation et stabilité des matériaux cellulaires à l'aide de la théorie des groupes

C. COMBESURE<sup>a,b</sup>, N. TRIANTAFYLLIDIS<sup>b</sup>, R.S. ELLIOTT<sup>a</sup>

a. AEM, University of Minnesota, Minneapolis (MN), USA, [combesc@umn.edu](mailto:combesc@umn.edu)

b. LMS Ecole Polytechnique, Palaiseau, FRANCE, [nick@lms.polytechnique.fr](mailto:nick@lms.polytechnique.fr)

## Résumé :

*Les méthodes issues de la théorie des groupes permettent de résoudre un certain nombre des problèmes posés par le haut degré de symétrie interne de certains matériaux cellulaires et ainsi d'étudier, de manière exhaustive, le champ des états possibles co-existants dans un tel système. On propose ici d'étudier le comportement post-bifurqué de matériaux cellulaires à murs courbes, sollicités en grandes transformations, dans leur plan. Plusieurs types de comportements non-linéaires sont considérés ainsi que plusieurs symétries d'empilement.*

## Abstract :

*Group theoretical methods provide tools to solve a number of problems related to the high degree of internal symmetries presented by some cellular solids. Thus it becomes possible to determine all the possible coexisting stable and instable states of our system. In this paper, we suggest to study the post-bifurcated behavior of finitely strained cellular solids with curved walls, under in-plane solicitations. Different types of non-linear behavior are considered as well as various piling symmetries.*

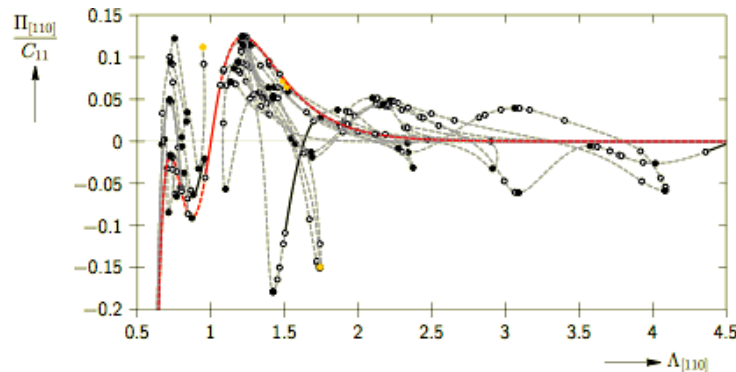
**Mots clefs : Stabilité, Bifurcation, Théorie des Groupes, Matériaux Cellulaires, Eléments Finis Courbes**

## 1 Contexte

Les matériaux à microstructure régulière de type nids d'abeilles sont largement utilisés dans l'industrie grâce à leurs propriétés élastiques avantageuses et leur comportement de ruine par écrasement successif de bandes de microstructure favorisant une haute dissipation d'énergie sous sollicitations dynamiques de type écrasement. Il a été récemment souligné que ces matériaux, lorsqu'ils sont sollicités dans leur plan, peuvent présenter des comportements étonnants, via notamment des instabilités élastiques. Ainsi, selon l'arrangement de la microstructure régulière de ces matériaux, ces

instabilités peuvent mener à des effets de structure correspondant à un coefficient de Poisson négatif [1] pour le matériau global ou à un stockage d'énergie via des flambements internes bistables.

Traditionnellement, l'étude de telles instabilités repose sur l'utilisation de perturbations introduites comme des imperfections dans le modèle initial de manière à mener à l'instabilité recherchée. Il a été démontré [6] que cette technique peut, dans certains cas, mener à un risque de ne pas détecter une instabilité critique pour la structure, en particulier en présence de modes multiples de bifurcation. Or, dans les systèmes comprenant un grand nombre de symétries internes, il est fréquent de voir apparaître des modes multiples de bifurcations ou des modes simples très rapprochés le long du chemin de charge. De manière à lever le risque précédemment évoqué, il est alors nécessaire d'avoir accès à tout l'espace des bifurcations possibles afin de pouvoir déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système de manière exhaustive et ainsi être capable de prédire le chemin stable critique suivi par le système. Dans le domaine des matériaux cellulaires que sont les alliages à mémoire de forme, de telles méthodologies ont été mises en place [3] [2] pour expliquer les nuances de martensite et d'austénite constatées lors des changements de phase à l'origine des propriétés constitutives de ces matériaux. Ces méthodologies se basent sur l'utilisation de la théorie des groupes de symétries et utilisent des algorithmes de suivi des branches de bifurcation pour, *in fine*, établir une cartographie des chemins de bifurcations stables et instables auquel le système a accès. Cette cartographie est appelée *diagramme de bifurcation* (voir Figure1).



**Figure 1: Diagramme de bifurcation pour les changements de phase martensitique dans un cristal bi-atomique [4].**

Les matériaux architecturés se situent à l'interface des deux problématiques présentés ci-avant. Dans une démarche de *Material-by-Design*, avoir accès au diagramme complet de bifurcation du matériau est alors une information cruciale pour le concepteur. Ainsi, comme suggéré dans [6], on présente ici une technique d'étude des systèmes à grand nombre de symétries en se basant sur l'exemple bien documenté des nids d'abeilles à murs courbes [7].

## 1 2 Théorie

Ce travail s'intéresse à l'analyse du comportement post-bifurqué des matériaux périodiques architecturés que sont les nids d'abeilles à murs courbes. La géométrie des matériaux de ce type peut être décrite à l'aide de groupes de symétries via la théorie des groupes d'espace, à l'image de ce qui est fait en cristallographie pour l'étude de la structure interne des cristaux. Ainsi, un nid d'abeille à murs courbes et à structure hexagonale peut être décrit par le groupe d'espace P622 selon la notation des Tables Internationales de la Cristallographie [5]. La procédure que nous suivons pour conduire l'analyse de stabilité d'un matériau périodique débute par une analyse par ondes de Bloch sur une cellule primitive de manière à déterminer les longueurs d'ondes critiques correspondant aux différentes instabilités pouvant subvenir dans le système étudié. Une cellule de base correspondant à ces longueurs d'ondes est ensuite construite et son groupe de symétries associé est identifié. En se basant sur les outils de la théorie des représentations, de nombreuses informations sur les bifurcations du système découlent de cette identification et les branches bifurquées peuvent alors être identifiées puis suivies pour construire le diagramme de bifurcation du système.

### 1.1 2.1 Ondes de Bloch

Dans un système périodique infini, il est nécessaire de détecter les instabilités à l'échelle microscopique qui peuvent survenir dans une à plusieurs cellules primitives. A partir de calculs effectués sur la plus petite cellule de base possible, *la cellule primitive*, la théorie des ondes de Bloch permet de déterminer les différentes longueurs d'ondes associées aux instabilités du système. Cette théorie considère des perturbations en déplacement de type ondes planes avec toutes les longueurs d'ondes possibles et aucune déformation globale, sur la cellule primitive. Ces ondes planes sont paramétrées par un vecteur d'onde  $k$  comme suit:

$$u(X) = p(X)e^{ik \cdot X} \quad (1)$$

où  $u$  est la perturbation en déplacement,  $X$  est le vecteur position et  $p$  est une fonction périodique sur la cellule primitive. La fonction périodique  $p$  correspond à l'amplitude d'une onde plane donnée tandis que le vecteur d'onde  $k$  donne son orientation (direction de  $k$ ) et sa longueur d'onde (inverse de la longueur de  $k$ ) et prend des valeurs, sur la cellule de base comprises entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

Pour une configuration d'équilibre donnée, un critère de stabilité, basé sur les ondes de Bloch peut être défini à partir de la matrice Hermitienne *dynamique*.

$$K(k) = \phi(m, n)e^{ik \cdot (X(m) - X(n))} \quad m \neq n \in \mathbb{N}^2 \quad (2)$$

où  $m$  et  $n$  sont des points différents du maillage et  $\phi(m, n)$  est la matrice de rigidité entre ces deux points.

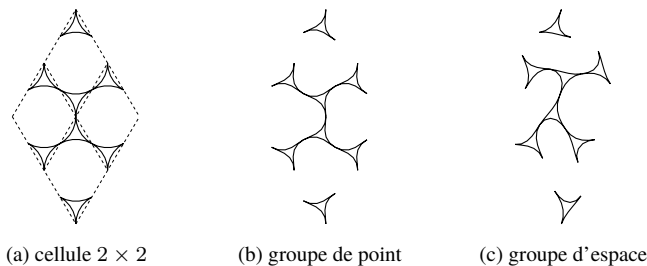
*Critère de stabilité des ondes de Bloch:* Pour chaque vecteur d'onde  $k$ , la matrice  $K$  est calculée et ses valeurs propres sont déterminées. Une instabilité est détectée quand une quelconque valeur propre de  $K$  devient négative. Le vecteur d'onde  $k$  correspondant donne alors la longueur d'onde de cette instabilité.

## 1.2 2.2 Groupe de symétries

Une fois une longueur d'onde d'intérêt identifiée, une cellule de base correspondante est construite en translatant la cellule primitive le long des vecteurs d'onde critiques déterminés par l'analyse par ondes de Bloch. Cette cellule de base sera affectée de conditions aux limites périodiques.

Les symétries d'un système sont catégorisées en deux types : les rotations, qui forment le groupe de symétries ponctuelles (ou groupe de point) du système, et les translations qui, alliées aux rotations, forment son groupe d'espace. Les symétries de translations se répétant à l'infini sans jamais revenir sur un élément du groupe déjà existant, les groupes d'espaces sont des groupes de dimension infinie, difficiles à manier en pratique. Cependant, un groupe d'espace réduit peut être associé à la nouvelle cellule de base, en restreignant le groupe des translations aux seules translations qui permettent de construire la cellule à partir de la cellule primitive, *i.e.* aux translations associées au vecteur d'onde  $k$  des ondes de Bloch. On crée ainsi un groupe de symétries de dimensions finies et la périodicité de la cellule, au delà de ces translations internes, permet de recréer la structure infinie sur laquelle on travaille.

Grâce à la théorie des représentations, des éléments théoriques appelés *représentations irréductibles*, qui prennent la forme de matrices, décrivent les symétries de notre système. On peut distinguer les représentations irréductibles associées au groupe de point, qui vont décrire des transformations identiques pour chaque cellule primitive composant notre cellule de base, et les représentations associées aux translations qui vont décrire des transformations différentes (voir Figure 2).



**Figure 2: Cellule  $2 \times 2$  (a) non déformée et exemples de déformations associées à une représentation (b) du groupe de point et (c) du groupe d'espace**

Le groupe de symétries du système étant appliqué non seulement au système lui-même mais aussi au chargement que ce système subit, toutes les équations constitu-

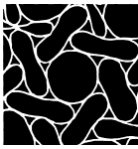

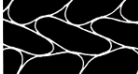

tives et d'équilibre du problème peuvent se projeter dans un espace réduit adapté aux symétries. Ainsi, lorsqu'une instabilité apparaît, celle-ci mène à la perte d'une ou plusieurs symétries, caractérisée par la projection du système dans une et une seule représentation irréductible.

## 2 3 Résultats

### 2.1 3.1 Systèmes étudiés

La procédure évoquée précédemment est appliquée à plusieurs systèmes de manière à la valider puis à produire des résultats nouveaux. La validation se fait sur des nids d'abeille classiques à cellules circulaires en 2 dimensions dans le plan, et les résultats sont comparés aux résultats expérimentaux de [7]. Par la suite, un système de nids d'abeilles avec un empilement carré est étudié. A ces deux types de systèmes sont appliqués des chargements généraux dans le plan en déplacements et en efforts et plusieurs types de comportements non-linéaires des matériaux sont envisagés.

### 2.2 3.2 Resultats

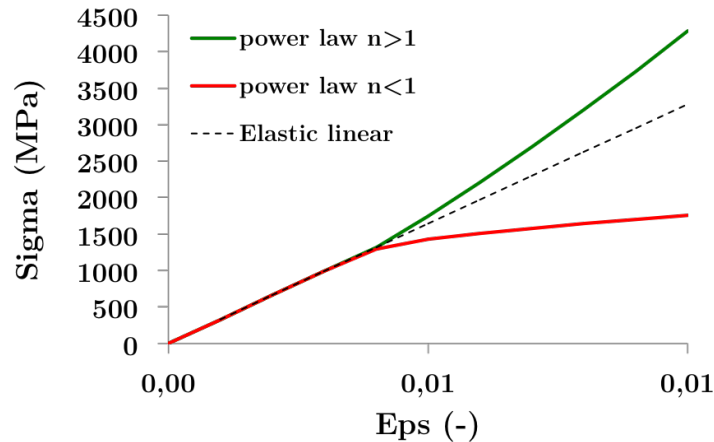
	expérience	simulation
chargement equibiaxial		
chargement uniaxial		

**Figure 3: Comparaison expérimental/numérique pour des chargements équi-biaxial et uni-axial. Résultats expérimentaux d'après [7]**

Les résultats expérimentaux établis par [7] sont retrouvés par notre procédure :

- le chargement équi-biaxial en déplacement mène à une première bifurcation triple avec un mode stable de plus faible énergie totale de type *mode de fleur* tel que trouvé expérimentalement dans [7]
- le chargement uniaxial en déplacement dans un sens ne mène à aucune bifurcation et dans l'autre sens à une bifurcation telle que présentée également dans les expériences de [7].

Une fois cette validation effectuée, nous explorons l'espace complet des sollicitations dans le plan du nid d'abeille pour établir les surfaces limites de bifurcation, puis nous nous intéressons à trois types de comportement envisageables pour les matériaux constitutifs de ces nids d'abeilles : un comportement élastique pur, un comportement durcissant et un adoucissant représentés par des lois puissances (voir Figure 4).



**Figure 4:** Lois de comportement considérées pour l'étude du nid d'abeilles à cellules circulaires

Enfin, on s'intéresse au système à empilement carré. Nous verrons ainsi le nouveau groupe de symétries utilisé pour un tel système et l'influence de ce changement sur les résultats obtenus.

## References

- [1] K. Bertoldi, P.M. Reis, S. Willshaw, T. Mullin *Negative Poisson's ratio behavior induced by an elastic instability*, Advanced Materials, 22(3), 361-366, 2010
- [2] R.S. Elliott, *Multiscale bifurcation and stability of multilattices*, J. of Computer-Aided Materials Design, Springer, 1(14),143-157, 2007.
- [3] R.S. Elliott, J.A. Shaw, N. Triantafyllidis *Stability of thermally-induced martensitic transformations in bi-atomic crystals*, J. of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, 11(50),2463-2493, 2002.
- [4] R.S. Elliott, N. Triantafyllidis, J.A. Shaw *Reversible stress-induced martensitic phase transformations in a bi-atomic crystal*, J. of the Mechanics and Physics of Solids, 2 (59), 216-236,2011

- [5] T. Hahn, *International tables for crystallography*. D. Reidel Publishing Company, 2005.
- [6] T. J. Healey, *A group-theoretic approach to computational bifurcation problems with symmetry*, *Comp. Methods in App. Mech. and Eng.* 67(3):257-295, 1988
- [7] S.D. Papka, S. Kyriakides, *Biaxial crushing of honeycombs: Part 1: Experiments*. *Int. J. of Solids and Structures*, Elsevier, 36(29):4367–4396, 1999.
- [8] N. Triantafyllidis, M. Schraad, *Onset of failure in aluminum honeycombs under general loading*. *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier, 46, 1089-1124, 1998.