

22^{ème} Congrès Français de Mécanique

Lyon, 24 au 28 Août 2015

Modélisation du contact entre matériaux viscoélastiques

K. E. KOUMI^{a,b}, D. NELIAS^a, T. CHAISE^a

a. INSA-Lyon, LaMCoS UMR CNRS 5259, Université de Lyon F69621 Villeurbanne, France e-mail : koffi-espoir.koumi@insa-lyon.fr

b. SNECMA, Centre de Villaroche 77550 Moissy Cramayel, France

Résumé

Ce papier propose une méthode de résolution des problèmes de contact entre matériaux viscoélastiques. Le modèle présenté peut résoudre à la fois les problèmes d'indentation, de roulement, ou de glissement entre deux matériaux viscoélastiques. Il s'agit d'un modèle 3D basé sur les méthodes semi-analytiques. L'algorithme de gradient conjugué et les méthodes FFT sont utilisés pour réduire les temps de calculs.

Abstract

In this paper, a new method for solving contact between viscoelastic materials is proposed. The model developed here is able to account for, indentation, rolling/sliding contact between two viscoelastic bodies. The model is three dimensional and based on semi-analytical method. A conjugate Gradient Method and the Fast Fourier Transforms are used to reduce computation cost.

Mots clefs : contact, viscoélasticité, roulement

1 Introduction

Dans cette étude, une modélisation du contact entre matériaux viscoélastiques sera présentée. Le modèle développé est basé sur les approches semi-analytiques. Il est alors possible de prendre en compte dans la modélisation des matériaux viscoélastiques avec plusieurs temps de relaxation. L'approche théorique peut s'appliquer à l'indentation entre matériaux viscoélastiques homogènes, hétérogènes, ou à des problématiques de roulement entre matériaux viscoélastiques. Dans ce modèle, on se limitera à la théorie de la viscoélasticité linéaire. Afin de faciliter la compréhension du document, on introduira assez succinctement, les variables utilisées dans la suite de ce document.

2 Généralités sur les matériaux viscoélastiques

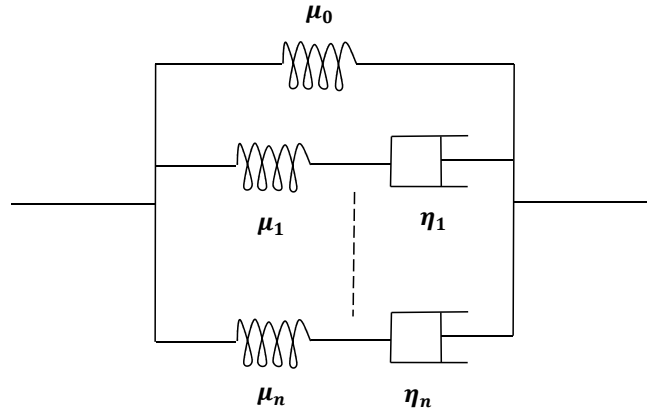


Figure 1: Modèle de Maxwell Généralisé.

Le comportement d'un matériau viscoélastique est intermédiaire entre celui d'un solide élastique idéal symbolisé par un ressort de module et celui d'un liquide visqueux newtonien symbolisé par un amortisseur de viscosité. Que ce soit en fluage ou en relaxation, la réponse à une sollicitation d'un matériau viscoélastique dépend du temps. Afin de caractériser la dépendance au temps de ces types de matériaux, on introduit la fonction de relaxation qui est définie par la relation suivante :

$$R(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

Inversement on peut également définir la fonction de fluage définie par :

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (2)$$

Afin de décrire le comportement du matériau on choisit un modèle type maxwell généralisé (Fig 1). Partant du modèle de maxwell généralisé, la fonction de relaxation peut s'écrire sous la forme :

$$R(t) = \left[\mu_0 + \sum_{i=1}^n \mu_i \exp(-t/\tau_i) \right] H(t) \quad (3)$$

Il s'agit d'une décomposition en séries de Prony, où μ_i représente le module de cisaillement, η_i l'amortisseur de viscosité et τ_i le temps de relaxation d'un modèle élémentaire. Dans

le cadre de la viscoélasticité linéaire les champs de contraintes et de déformations s'écrivent sous la forme :

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t - \xi) \frac{d\varepsilon(\xi)}{d\xi} d\xi \quad (4)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \xi) \frac{d\sigma(\xi)}{d\xi} d\xi \quad (5)$$

3 Théorie du contact viscoélastique

Contrairement au cas élastique, l'aspect viscoélastique des matériaux nous obligent à prendre en compte en plus des variables spatiales, la variable temporelle . La solution du problème [1, 2,3] est obtenue en résolvant simultanément les trois équations suivantes:

- La conservation de la charge à chaque pas de temps. La charge appliquée $W(t)$ et l'intrégrale de la pression $p(x_1, x_2, t)$ sur l'aire réelle de contact $\Gamma_c(t)$ doivent être strictement égales.

$$W(t) = \int_{\Gamma_c(t)} p(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2 \quad (6)$$

- La déformée des deux massifs en contact: La déformée des deux massifs ($B1$ et $B2$) en contact $h(x_1, x_2, t)$ est définie par la géométrie initiale $h_i(x_1, x_2)$, le déplacement de corps rigide δ ainsi que le déplacement relatif des deux corps $u_3(x_1, x_2, t)$

$$h(x_1, x_2, t) = h_i(x_1, x_2) + \delta + u_3(x_1, x_2, t) \quad (7)$$

Où $h_i(x_1, x_2)$ la géométrie initiale, δ le déplacement de corps rigide. Le déplacement normal de la surface viscoélastique , $u_3(x_1, x_2, t)$, à l'instant t est donné par :

$$u_3(x_1, x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t G(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, x_3, t - \xi) \frac{\partial p(x'_1, x'_2, t)}{\partial \xi} dx'_1 dx'_2 d\xi \quad (8)$$

Où, $G(x_1, x_2, t)$ est le tenseur de Green viscoélastique. $G(x_1, x_2, t)$ peut être décomposé en une partie spatiale et une partie temporelle.

$$G(x_1, x_2, t) = \frac{(1 - \nu)}{\pi \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} J(t) = \bar{G}(x_1, x_2) J(t) \quad (9)$$

Le déplacement u_3 est obtenu de la solution élastique en remplaçant le module élastique $\frac{1}{2\mu}$, par la fonction de fluage $J(t)$

$$u_3(x_1, x_2, \alpha \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2) dx'_1 dx'_2 \sum_{k=0}^{\alpha} J[(\alpha - k)\Delta t] \times [p(x'_1, x'_2, k) - p(x'_1, x'_2, k - 1)] \quad (10)$$

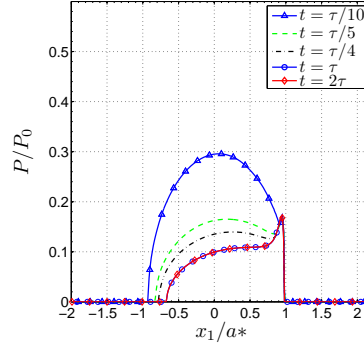


Figure 2: Distribution des champs de pression pour un chargement en déplacement normal imposé pour une vitesse de glissement de $v\tau/a^* = 0.4$.

- Les conditions de contact :

$$\text{contact : } h(x_1, x_2, t) = 0 \text{ et } p(x_1, x_2, t) > 0 \text{ à l'intérieur } \Gamma_c(t)$$

$$\text{séparation : } h(x_1, x_2, t) > 0 \text{ et } p(x_1, x_2, t) = 0 \text{ à l'extérieur } \Gamma_c(t) \quad (11)$$

Le modèle présenté ici ne prend pas en compte, l'adhésion des deux surfaces (des pressions négatives ne sont pas autorisées à l'interface des deux corps en contact). Le roulement d'une sphère rigide sur un massif viscoélastique homogène sera considéré. Le diamètre de la sphère rigide sera $D = 20mm$ et un chargement de type déplacement imposé d'une valeur $\delta = 0.1mm$ sera considéré. Les propriétés matériaux du massif viscoélastique seront données par:

la fonction de fluage:

$$J(t) = \left[\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] = \left[\frac{1}{\mu_\infty} + \frac{1}{\mu_1} (1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)) \right] \quad (12)$$

la fonction de relaxation:

$$R(t) = \left[\mu_0 + (\mu_\infty - \mu_0) \exp\left(-\frac{t}{\frac{\mu_0}{\mu_\infty} \tau}\right) \right] \quad (13)$$

où μ est le module de cisaillement avec $\mu_\infty = 3.86MPa$, $\mu_\infty/\mu_0 = 10$, et τ le temps de relaxation. Il s'agit ici donc d'un modèle de type Maxwell avec un seul temps de relaxation. a^* et P_0 sont respectivement le rayon de contact et la pression maximum de Hertz correspondant au cas homogène élastique quand le module de cisaillement instantané est utilisé $R(0) = \mu_\infty$. Autrement dit le rayon de contact $a^*(t = 0) = a^*$ et $Pmax(t = 0) = P_0$. La figure 2 présente la distribution du champ de pression pour une valeur fixée de la vitesse de glissement $v\tau/a^* = 0.4$.

Références

[1] K.-E. Koumi, T. Chaise, D. Nélias, Rolling contact of a rigid sphere / sliding of a spherical indenter upon a viscoelastic half-space containing an ellipsoidal inhomogeneity, *J. Mech. Phys. Solid.*,80, 2015, 1-25.

[2]K.-E. Koumi,L.Zhao, L. Leroux, T. Chaise ,D. Nélias, Contact analysis in the presence of an ellipsoidal inhomogeneity within a half space, *International Journal of Solids and Structures* 51, 2014, 1390–1402.

[3] K.-E. Koumi, D. Nélias, T. Chaise, A. Duval, Modeling of the contact between a rigid indenter and a heterogeneous viscoelastic material,” *Mechanics of Materials*, 77, 2014, 28-42.