

# Interaction d'une paroi avec l'écoulement d'un fluide à seuil autour d'un obstacle cylindrique

Z.B. Ouattara , A. Magnin , P. Jay

[ouattara@ujf-grenoble.fr](mailto:ouattara@ujf-grenoble.fr), [albert.magnin@ujf-grenoble.fr](mailto:albert.magnin@ujf-grenoble.fr), [pascal.jay@ujf-grenoble.fr](mailto:pascal.jay@ujf-grenoble.fr)

Laboratoire Rhéologie et Procédés,  
UMR 5520, Université Grenoble Alpes ; CNRS, LRP, Grenoble F-38000, France

## Résumé :

*Notre étude est consacrée à la modélisation numérique de l'écoulement incompressible d'un fluide de Bingham autour d'un obstacle cylindrique de diamètre  $D$  se déplaçant à une vitesse constante près d'une paroi. La plage d'étude couvre les écoulements rampants et les écoulements inertiels caractérisés par des nombre de Reynolds entre 0.001 et 20. L'influence de la paroi est explorée pour des jeux entre le cylindre et la paroi allant de  $0.01D$  à  $100D$ . La plage couverte balaie du domaine où les hypothèses de la lubrification hydrodynamique sont valables ( $0.01D$ ) au milieu infini ( $100D$ ). Les solutions sont déterminées pour des nombres d'Oldroyd  $Od$  (effet du seuil d'écoulement sur les effets visqueux) entre 0 et 10. L'influence des nombres sans dimensions sur les lignes de courant, les recirculations, les zones rigides statiques et en mouvement a été clairement mise en évidence. Les champs de contrainte ont été également étudiés et en particulier, les coefficients de traînée et les coefficients de portance ont été calculés. Les résultats sont comparés aux solutions disponibles dans la littérature correspondant aux solutions asymptotiques des milieux infinis et de la lubrification d'un fluide newtonien ou de Bingham.*

## Abstract:

*A numerical study of the incompressible flow of a Bingham fluid around a cylindrical obstacle with a diameter  $D$  which is moving at constant velocity next to a wall is investigated. The study range covers creeping and inertial flows which are characterized by Reynolds numbers between 0.001 and 20. The influence of the wall was explored for gaps ranging from  $0.01D$  to  $100D$  between the cylinder and the wall. The range covers a large domain from domain of hydrodynamic lubrication ( $0.01D$ ) to the unbounded domain ( $100D$ ). The solutions were determined for Oldroyds numbers (ratio of plasticity effects and viscous effects) between 0 and 10. The influence of non-dimensional numbers on streamlines, recirculations, rigid static zones and zones in movement was clearly demonstrated. The stress fields were also studied and in particular the drag coefficients and the lift coefficients were calculated. The results were compared with the results available in the literature corresponding to asymptotic solutions of unbounded domains and of the lubrication of a Newtonian or Bingham fluid.*

**Mots clefs : Fluide de Bingham, cylindre, paroi, inertie, traînée, portance, seuil d'écoulement, zone rigide**

## 1 Introduction

Les écoulements autour d'obstacle se rencontrent dans de nombreuses applications industrielles et environnementales. Nous retrouvons ce problème de base de la mécanique des fluides dans les domaines tels que dans le mélange, les ouvrages de protection, le bâtiment et travaux publics... Pour établir des règles de dimensionnement, il est nécessaire d'étudier les interactions fluides-structures. En particulier l'écoulement autour d'un cylindre avec l'interaction d'une paroi fera l'objet de notre étude. Plusieurs études ont déjà été menées pour un cylindre en milieu infini. Par exemple, Mossaz [1] a réalisé une étude expérimentale et numérique des écoulements inertiels de fluide à seuil. L'effet des parois a été étudié dans une configuration symétrique notamment par Mitsoulis [2] et par Chhabra [3] dans le cas d'un écoulement rampant de fluide viscoplastique autour d'un cylindre. Zovatto et Pedrizzetti [4] ont étudié l'écoulement d'un fluide newtonien autour d'un obstacle cylindrique circulaire entre deux parois parallèles à fort inertie et en faisant varier le jeu entre le cylindre et une des deux parois.

Dans la présente étude numérique, nous avons considéré le cas où l'obstacle cylindrique se déplace à vitesse constante et uniforme à une certaine distance du fond d'un canal (figure 1). Ici le cylindre n'est pas dans une configuration symétrique comme pour les études de Mitsoulis [2] et Chhabra [3]. De plus nous avons considéré les effets inertiels couplés avec les effets de seuil d'écoulement. Nous avons pu déterminer les coefficients de trainées et de portances appliqués sur l'obstacle en fonction des nombres sans dimensions caractéristiques de l'écoulement pour des jeux variables entre le cylindre et la paroi. Les lignes de courants, les zones rigides ainsi que les évolutions de la trainée et de la portance en fonction du jeu ont été déterminées.

## 2 Formulation du problème

La figure 1 montre le problème considéré. Un cylindre de diamètre  $D$  est situé à une distance  $H$  d'une paroi plane dans un écoulement uniforme avec une vitesse notée  $U$ .

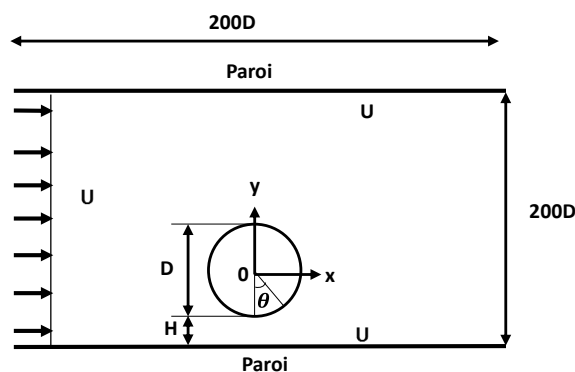


Figure 1. Géométrie de l'écoulement étudié

Les équations fondamentales sont :

Conservation de la masse : 
$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (1)$$

Conservation de la quantité de mouvement : 
$$\rho \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} - g \right) - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0 \quad (2)$$

Avec :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} \quad (3)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique,  $u$  la vitesse,  $g$  les forces de volume,  $\underline{\underline{\sigma}}$  le tenseur des contraintes et  $\underline{\underline{\tau}}$  sa partie déviatoire,  $p$  la pression.

Le fluide à seuil obéit au modèle de Bingham avec un seuil défini par un critère de Von Mises, modèle qui peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\tau}} = \tau_0 + K\underline{\underline{\dot{\gamma}}} & \text{si } \tau > \tau_0 \\ \underline{\underline{\dot{\gamma}}} = 0 & \text{si } \tau \leq \tau_0 \end{array} \right. \quad (4)$$

Où  $K$  est la consistance,  $\tau_0$  la contrainte seuil,  $\underline{\underline{\dot{\gamma}}}$  le tenseur des taux de déformations,  $\tau$  le deuxième invariant du tenseur des contraintes.

Le modèle de Papanastasiou utilisé dans notre étude numérique pour régulariser le seuil d'écoulement est décrit sous la forme de l'équation suivante :

$$\underline{\underline{\tau}} = \left( K + \frac{\tau_0(1-\exp(-m\dot{\gamma}))}{\dot{\gamma}} \right) \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \quad (6)$$

Où  $m$  représente le paramètre de régularisation.

Dans cette étude, la limite des zones rigides est obtenue en utilisant la condition  $\tau = \tau_0(1 \pm \varepsilon)$ , où  $\varepsilon$  est un nombre petit. En se basant sur les études de Mossaz et al [5], et d'Entov et al [6], sa valeur sera prise égale à zéro.

Les conditions aux limites de notre problème s'écrivent de la manière suivante :

- Pour l'entrée et sur les parois :  $U_x = U$  et  $U_y = 0$
- Sur le cylindre :  $U_x = 0$  et  $U_y = 0$  (adhérence)
- La condition de sortie utilisée est la condition de diffusion de flux nul :  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$

L'écoulement peut être caractérisé par les nombres sans dimension suivants :

- le jeu :  $G = \frac{H}{D}$  (7)

- Le nombre d'Oldroyd :  $Od = \frac{\tau_0}{K(U/D)}$  (8)

- Le nombre de Reynolds :  $Re = \frac{\rho UD}{K}$  (9)

- Le coefficient de trainée et de portance :  $Cd = \frac{2F_D}{\rho U^2 D}$   $Cl = \frac{2F_L}{\rho U^2 D}$  (10)

$F_D$  et  $F_L$  sont les forces de trainée et de portance par unité de longueur calculée sur le cylindre.

### 3 Résultats et Discussion

#### 3.1 Paramètre numérique et sensibilité du maillage

La résolution numérique est réalisée avec le logiciel ANSYS-Fluent version 14.5. La méthode SIMPLEC est utilisée pour le couplage entre la pression et la vitesse. Le critère de convergence est

fixé  $10^{-10}$  pour le résidu des variables des vitesses selon x et y ainsi que pour le résidu de l'équation de conservation de la masse. Les maillages raffinés autour du cylindre ont été effectués avec des éléments quadrilatères. Une étude sur l'indépendance des maillages sur les résultats a été faite pour différents jeux entre  $G=100$  et  $0.01$  avec un nombre de Reynolds variant entre  $0.001$  et  $20$ . Les maillages retenus comportent entre  $60.000$  et  $95.000$  nœuds selon la valeur du jeu Le paramètre de régularisation  $m=10^4$  a été choisi pour tous les calculs.

### 3.2 Champs cinématiques

Le profil des lignes de courant pour un nombre de Reynolds de  $20$  est illustré sur la figure 2 en fonction du jeu et du nombre d'Oldroyd  $Od$ . A ce nombre de Reynolds et pour un fluide newtonien ( $Od=0$ ), on observe deux tourbillons derrière le cylindre à jeu grand. Lorsque le cylindre se rapproche de la paroi, le tourbillon proche de la paroi disparaît et le tourbillon supérieur se déplace vers le haut du cylindre. Les points d'arrêt devant et derrière le cylindre sur l'axe de symétrie à jeu grand se déplacent sous le cylindre à jeu petit. Rappelons qu'à jeu grand et pour  $Od=0$ , le tourbillon disparaît pour des Reynolds entre  $5$  et  $6$ .

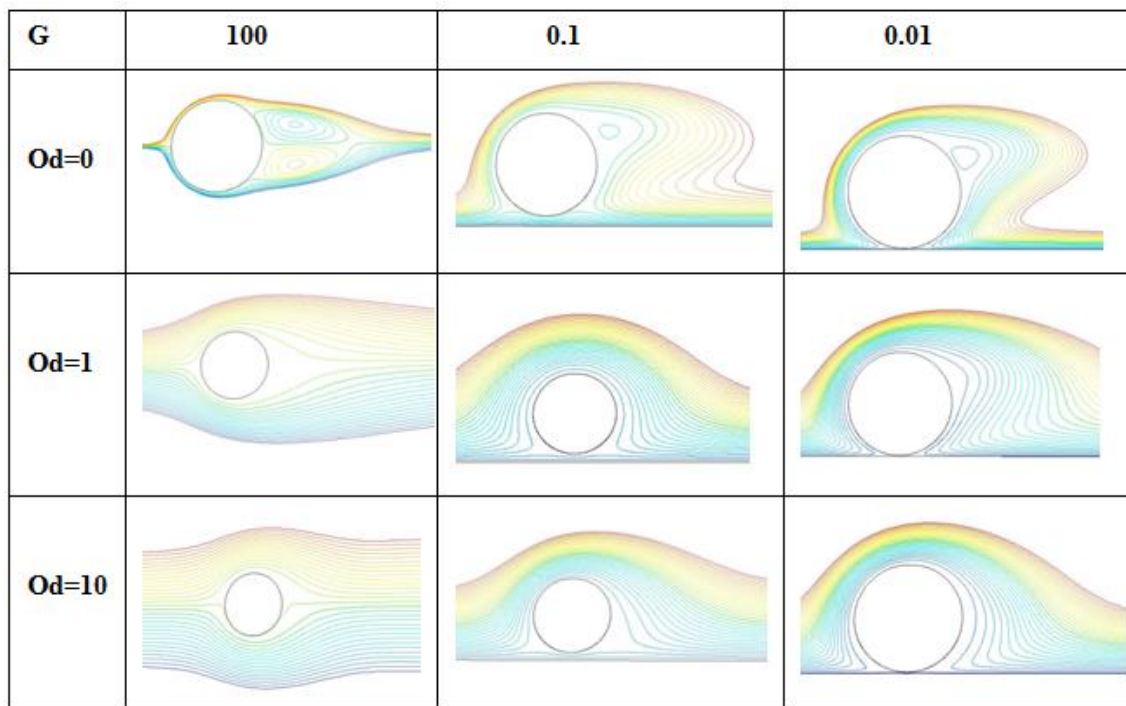


Figure 2. Lignes de courants pour  $Re=20$  en fonction du jeu et du  $Od$

### 3.3 Zones rigides

La figure 3 montre les zones rigides statiques et en mouvement provoquées par la présence d'un seuil d'écoulement. Aux jeux grands, il existe des zones rigides statiques situées aux points d'arrêt devant et derrière le cylindre. Il existe des zones rigides en mouvement : une zone enveloppe composée de 2 lobes loin du cylindre et de deux zones 'oreilles' de chaque côté du cylindre (voir également le zoom montré dans la figure 4). Lorsque le cylindre s'approche de la paroi, la zone rigide enveloppe diminue près de la paroi car le cisaillement y devient plus intense. Lorsque le jeu devient plus petit, le lobe inférieur sur les 2 lobes qui entouraient le cylindre disparaît. Il apparaît une zone rigide entre le

cylindre et la paroi. La figure 4 montre un zoom de cette zone. On constate également que les zones rigides statiques correspondant aux points d'arrêt, ont tendance à se rapprocher du point de jeu minimum comme pour les lignes de courant (Figure 2). Aux petits jeux, on remarque une zone rigide dans la zone de jeu minimum entre le cylindre et la paroi.

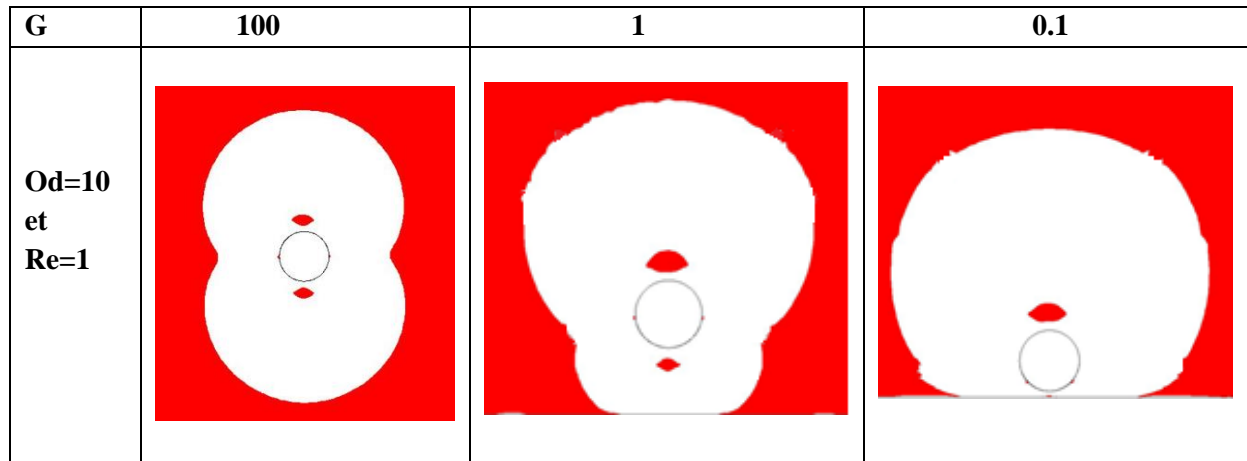


Figure 3. Zones rigides dans le cas d'un fluide de Bingham avec  $Od=10$  et  $Re=1$  pour différents jeux

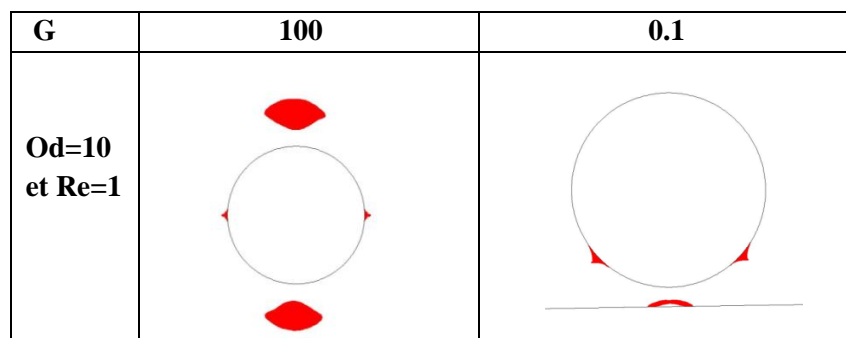


Figure 4. Zoom sur les zones rigides observées pour  $G=100$  et  $0.1$  dans un fluide de Bingham

### 3.4 Coefficient de traînée

La figure 5 montre l'évolution du coefficient de traînée  $C_d$  multiplié par le nombre de Reynolds en fonction du jeu pour  $Re=1$  et  $Re=10$  pour différents nombres d'Oldroyd.

Les évolutions des courbes sont similaires. Aux grands jeux, le coefficient de traînée est indépendant du jeu (milieu infini). Lorsque le jeu diminue et à partir d'un jeu environ de un diamètre, le coefficient de traînée augmente.

Aux grands jeux, le coefficient de traînée est proche de celui d'un milieu infini. Par exemple pour  $Od=0$ , il peut être vérifié par la formule de Wieselsberger valable pour des  $Re$  supérieures à 1 (Mossaz [1]) :

$$C_d * Re = \frac{8\pi}{(2.002 - \log Re)} \quad (11)$$

Aux jeux petits, la traînée est gouvernée principalement par le frottement hydrodynamique dans le jeu entre le cylindre et la paroi. La théorie de la lubrification newtonienne permet alors d'évaluer le coefficient de traînée théorique avec la condition de Sommerfeld [7] (contact noyé) :

$$C_d * Re = \frac{12.44}{\left(\frac{H}{D}\right)^{0.5}} \quad (12)$$

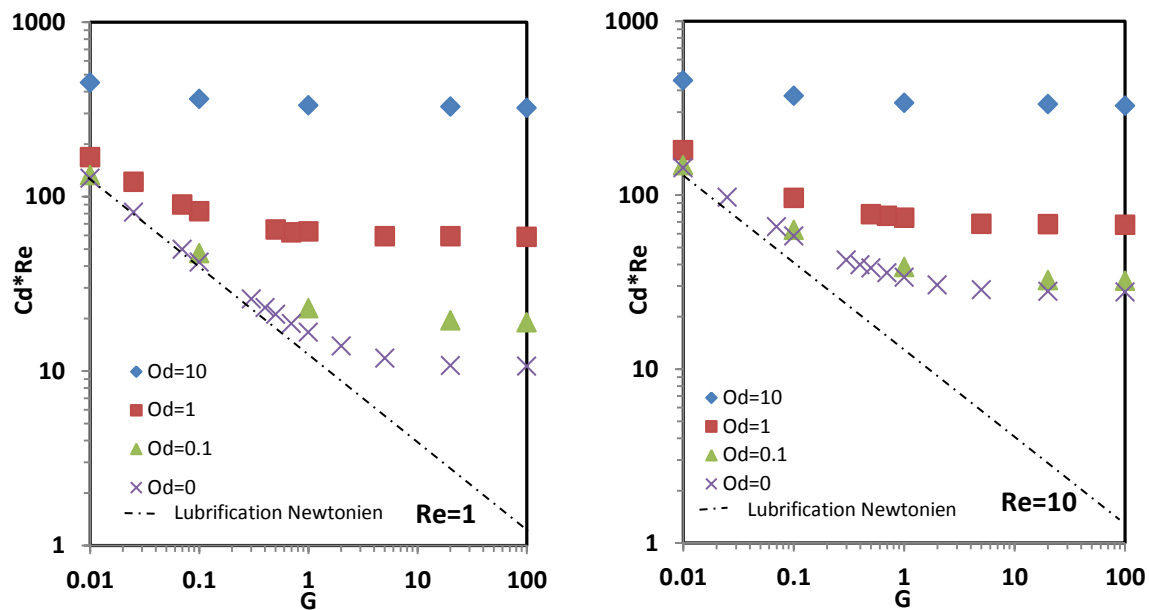


Figure 5. Coefficient de trainée en fonction du jeu pour différents Od

Lorsque le fluide possède un seuil d'écoulement et pour les jeux grands, la force de trainée tend vers une constante qui a été calculée par Topkavi [8] et Mitsoulis [2] pour les écoulements sans inertie. Avec inertie, on peut retenir la formule de Mossaz [1] :

$$Cd*Re = (14.85 + 44.38Od^{0.88}) + (0.59Od + 1.155) Rep \quad (13)$$

Valable pour  $0.1 < Od < 10$  et  $Rep < 50$  avec 
$$Rep = \frac{Re}{1 + Od} \quad (14)$$

Pour les jeux petits, la force de trainée peut être calculée par la théorie de la lubrification pour un fluide de Bingham, Tichy [9] et Kim [10].

Notons que lorsque le produit  $Od*G$  devient petit, la solution de la lubrification avec un fluide de Bingham tend vers la solution de la lubrification newtonienne (Equation 12). Cette observation est confirmée par la figure 5.

La transition de comportement entre jeux grands et petits est environ à un jeu de un diamètre du cylindre ce qui est observé également sur les lignes de courant et sur les zones rigides.

### 3.5 Coefficient de portance

La figure 6 montre l'évolution du coefficient de portance pour la même gamme de  $Re$  et  $Od$  que pour  $Cd$ . Pour les jeux grands et quelques soient la valeur de  $Re$  et  $Od$ , le coefficient de portance est nul pour des jeux grands à cause de la symétrie de la pression et des contraintes de cisaillement exercées sur le cylindre.

Aux petits jeux, la portance n'est pas nulle. La valeur du coefficient de portance tend vers un quasi plateau aux petits jeux et sa valeur dépend du nombre d'Oldroyd. La théorie de la lubrification prédit que le profil de pression est antisymétrique dans le jeu entre le cylindre et la paroi (Cameron [7]) et donc la contribution à la portance sur le cylindre est nulle. Comme pour le  $Cd$ , la transition entre les deux comportements se déroulent pour  $G=1$  environ.

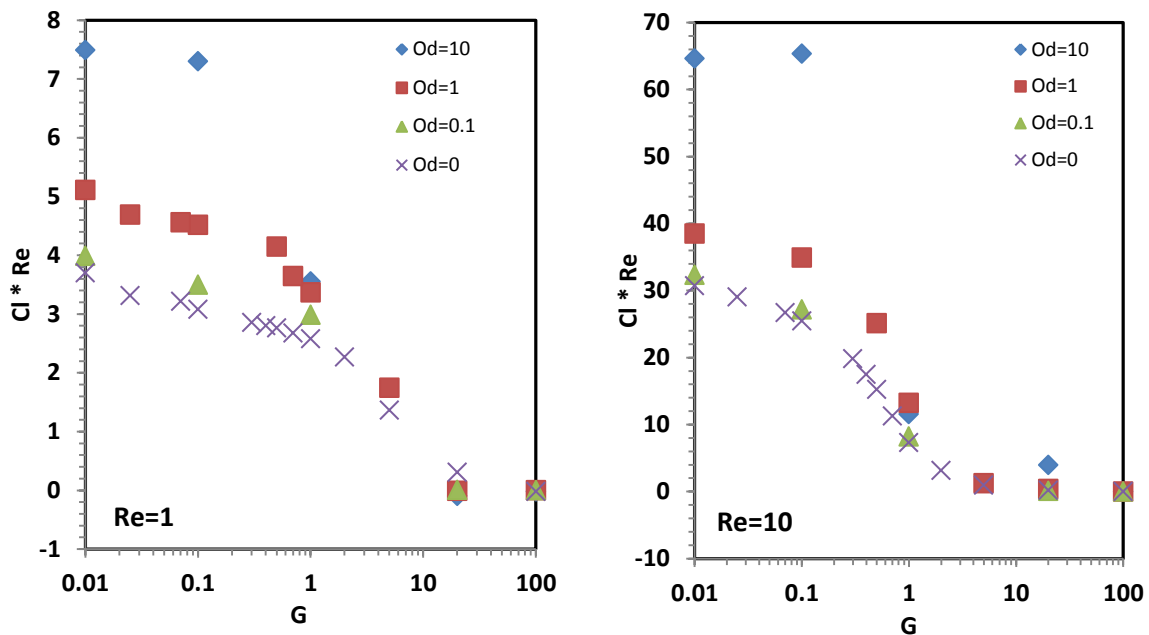


Figure 6. Coefficient de portance en fonction du jeu pour différents Od

## Conclusion

L'influence de l'effet d'une paroi sur l'écoulement d'un fluide de Bingham autour d'un obstacle cylindrique placé dans un canal a été étudiée. Les efforts de trainée et de portance ont été déterminés en fonction des paramètres sans dimensions tels que le jeu ( $G$ ), le nombre de Reynolds ( $Re$ ), et le nombre de Bingham ( $Od$ ). Les lignes de courant et les zones rigides ont permis de comprendre l'évolution du fluide en amont et à l'aval du cylindre. Nos résultats sont comparables à ceux de la littérature aussi bien dans le cas d'un fluide newtonien que celui d'un fluide de Bingham pour les cas asymptotiques. La diminution du jeu entre la paroi et le cylindre augmente significativement les forces de trainée et de portance. La présence de la paroi se fait sentir dès que le jeu est d'environ un diamètre du cylindre. L'ajout d'un seuil d'écoulement affaiblit les effets inertiels par exemple en éliminant la présence de tourbillon. Une étude expérimentale est en cours de réalisation.

## Références

- [1] S. Mossaz, Etudes expérimentales et numériques des écoulements inertiels de fluides à seuil autour d'un cylindre, Thèse de l'Université de Grenoble (2011).
- [2] E. Mitsoulis, On Creeping drag flow of viscoplastic fluid past a circular cylinder: wall effects, *chemical Engineering Science* 59 (2004) 789-800
- [3] R.P. Chhabra, J. Chakraborty, N. Verma, Wall effect in flow past a circular cylinder in a plane channel: numerical study, *Chemical Engineering and processing* 43 (2004) 1529 -1537.
- [4] L. Zovatto, G. Pedrizzetti, Flow about a circular cylinder between parallel walls, *Fluid Mech.* (2001) vol440 pp.1-25
- [5] S. Mossaz, P. Jay, A. Magnin, Criteria for the appearance of recirculating and non-stationary regime behind a cylinder in viscolasptic fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 165 (2010) 1525-1535

- [6] V. Entov, G.R. Burgos, A.N. Alexandrou, on the determination of yield surfaces in Herschel-Bulkley fluids, *J. Rheol.* 43 (3) (1999) 463-483
- [7] A. Cameron, *Basic Lubrication theory*, Mechanical Engineering Imperial College of Science and Technology London: (1971) vol. (XXII-195p.) 61-69
- [8] D. Tokpavi, Very slow flow of Bingham viscoplastic fluid around a circular cylinder, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 154 (2008) 65-76
- [9] J.A. Tichy, Hydrodynamic lubrication theory for the Bingham plastic flow model, *Journal of Rheology* (1991), New York, 12180-3590.
- [10] J.M. Kim, Thermohydrodynamic Lubrication Analysis Incorporating Bingham Rheological Model, *Journal of Tribology* (2000) vol.122