

Frottement pariétal et glissement d'un écoulement viscoplastique ouvert

O. GUILLET,^a O. THUAL,^{b, c} L. LACAZE^{b, c} et M. MOUZOURI^{b, d}

a. Ecole Nationale de la Météorologie, F-31057 Toulouse, France,

b. Université de Toulouse ; INPT, UPS ; IMFT, F-31400 Toulouse, France

c. CNRS ; IMFT ; Allée Camille Soula, F-31400 Toulouse, France

d. Geoservices, F-95700 Roissy, France

Résumé :

On modélise ici la perte de charge linéique de l'écoulement à surface libre, laminaire et stationnaire d'un fluide à seuil viscoplastique qui suit la rhéologie d'Herschel-Bulkley. Une équation implicite est dérivée des équations de Navier-Stokes non newtoniennes adimensionnées par la gravité et le débit. La perte de charge est inversement proportionnelle au nombre de Reynolds basé sur le débit. Elle dépend de manière plus complexe du nombre de Bingham et de l'épaisseur de la couche adimensionnée. Une paramétrisation du glissement sur le fond est introduite à l'aide d'une longueur de glissement adimensionnée. Une analyse de sensibilité à ces paramètres adimensionnels est effectuée autour de valeurs représentatives d'un Carbopol 940 dilué à une concentration de 11%.

Abstract :

We model here the lineic head loss coefficient of an open surface, laminar and stationary flow of a yield viscoplastic fluid following the Herschel-Bulkley rheology. An implicit equation is derived from the Non-Newtonian Navier-Stokes equation made dimensionless through gravity and the discharge flux. The head loss is inversely proportional to the Reynolds number based on the discharge flux. It depends in a more complex manner on the Bingham number and the dimensionless layer depth. A parameterization of the bottom slip is introduced through a dimensionless sliding length. A sensitivity analysis with respect to these dimensionless parameters is performed around values representative of a carbopol 940 diluted at the 11% concentration.

Mots clefs : fluide à seuil; frottement pariétal; perte de charge.

1 Introduction

L'étude des fluides à rhéologie complexe intervient dans un grand nombre de problématiques industrielles. On peut citer comme exemples les puits de forages, l'industrie cosmétique ou encore les écoulements de type avalanches. Dans le cas d'un écoulement à surface libre sur plan incliné d'un fluide viscoplastique, la relation entre la perte de charge linéique et le nombre de Reynolds pour des fluides non-newtoniens a fait l'objet de développements théoriques et expérimentaux ([1, 2, 3, 4, 5]). Toutefois, l'analyse systématique de la sensibilité du coefficient de frottement de ces écoulements n'est pas présentée dans ces travaux.

Le modèle rhéologique utilisé dans cette étude pour décrire la dynamique d'un fluide viscoplastique est le modèle d'Herschel-Bulkley. Ce modèle introduit une relation non-linéaire entre le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\underline{\tau}}(x, y, t)$ et le tenseur des déformations $\underline{\underline{d}}(x, y, t)$:

$$\underline{\underline{\tau}} = 2[\tau_y + k\dot{\gamma}^n]\underline{\underline{d}}/\dot{\gamma}, \quad (1)$$

avec $\dot{\gamma} = \sqrt{2\underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}}$. Ainsi, la phase est solide tant que $\tau = \sqrt{2\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\tau}}} < \tau_y$. Une éventuelle contribution élastique dans cette phase [7] n'est pas introduite ici. La seule propriété importante pour l'étude est alors que le tenseur des contraintes dans la phase solide satisfait aux conditions aux limites à la surface libre et à l'interface liquide/solide. En partant de ce modèle, nous montrons dans cet article que la perte de charge linéique de l'écoulement normal dans un canal incliné (voir par exemple [8] pour sa définition) est solution d'une équation implicite que l'on résout numériquement pour un carbopol réaliste ([7]). Cette démarche permet de retrouver la relation inverse existant entre le coefficient de frottement et le nombre de Reynolds. Une analyse de sensibilité est ensuite effectuée sur quelques cas simples. Une originalité de cette étude est la prise en compte de la longueur de glissement sur le fond.

Dans le paragraphe 2, les équations adimensionnées du modèle et les nombres associés qui caractérisent l'écoulement sont détaillés. Dans le paragraphe 3, le profil de vitesse $u(y)$ est déterminé analytiquement dans le cas homogène et la perte de charge linéique Γ s'en déduit par l'intermédiaire d'une équation implicite. Dans le paragraphe 4, nous mettons en évidence les cas particuliers pour lesquels l'expression de la perte de charge Γ est explicite avant d'effectuer une analyse de sensibilité autour de valeur réalistes.

2 Modélisation de l'écoulement

Nous considérons ici un fluide non-newtonien en écoulement sur un plan infini, incliné d'un angle θ avec la direction horizontale. Dans le cas d'un fluide à seuil, l'écoulement est caractérisé par l'existence d'une phase solide dans un domaine tel que $y \in [h_y, h]$, où h désigne la hauteur de la couche.

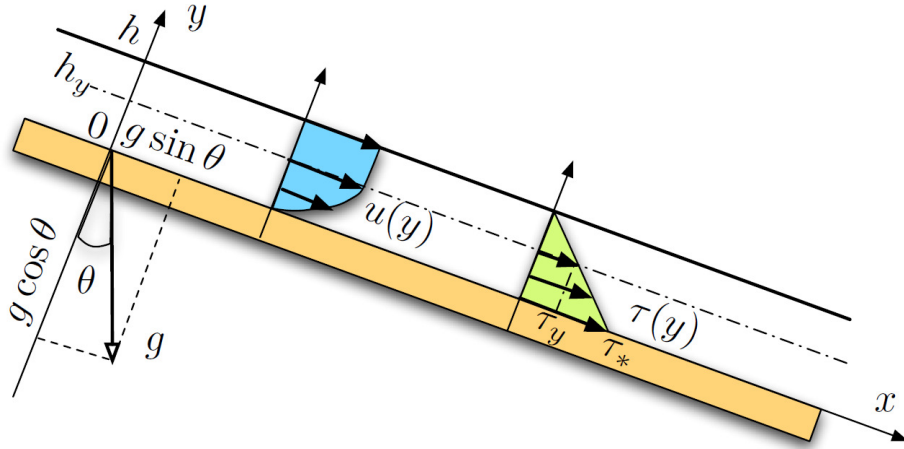


Figure 1: Écoulement à surface libre sur un plan incliné. Profil de vitesse $u(y)$ et de contrainte de cisaillement $\tau(y)$.

Soient $u(x, y, t)$ et $v(x, y, t)$ les champs de vitesses respectivement parallèle et orthogonal à l'écoulement. Les équations de Navier-Stokes sont rendus adimensionnelles avec le système d'unités suivant :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = h_0 \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = U_0 \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$t = \frac{h_0}{U_0} t^*, \quad P = \rho g h_0 P^*; \quad (3)$$

où h_0 est une échelle de longueur horizontale, U_0 est une échelle de vitesse horizontale.

Dans l'optique d'étudier un écoulement stationnaire, nous choisissons d'établir ce système d'unités à partir de la gravité g (m.s^{-2}) et du débit linéique d'entrée q ($\text{m}^2.\text{s}^{-1}$), en posant :

$$h_0 = q^{2/3} g^{-1/3} \quad \text{et} \quad U_0 = q^{1/3} g^{1/3}. \quad (4)$$

Avec les notations précédentes, le système adimensionnel des équations de Navier-Stokes non newtoniennes s'écrit (les $(^*)$ étant omises) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = R^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial y} + \Gamma, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = R^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{Fr^2}. \quad (7)$$

dont la loi de comportement se réécrit :

$$\underline{\tau}(x, y, t) = 2[B + \dot{\gamma}^n] \underline{d}/\dot{\gamma} . \quad (8)$$

Les nombres adimensionnés qui contrôlent ces équations sont exprimés en fonction de q et g :

$$R = \frac{\rho}{k} q^{\frac{n+2}{3}} g^{\frac{2(1-n)}{3}}; \quad B = \frac{\tau_y}{k} q^{\frac{n}{3}} g^{-\frac{2n}{3}}; \quad Fr^2 = \frac{1}{\cos \theta} . \quad (9)$$

avec R le « nombre de Reynolds », B le « nombre de Bingham » et Fr le « nombre de Froude ». Dans l'équation (6), Γ est ici un forçage, par exemple dû à la gravité lorsque $\theta > 0$ ou à un gradient de pression résultant de la pente de la surface libre.

Au fond du canal, la condition de glissement s'écrit $v = 0$ et $u = \Lambda \frac{\partial u}{\partial y}$ en $y = 0$, Λ désignant la longueur de glissement adimensionnée. Lorsque $\Lambda > 0$, cette dernière relation traduit le fait que $u \neq 0$ au fond quand le fluide est cisailé : le fluide « glisse » alors sur la paroi avec une longueur caractéristique Λ . Cette condition traduit un couplage éventuellement complexe entre le milieu en écoulement et le fond solide, en particulier lorsque le milieu en écoulement présente une structure microscopique dont la taille caractéristique est supérieure aux micro-aspérités du fond, comme par exemple dans le cas d'une suspension solide dans un liquide ou d'un polymère.

À la surface libre d'équation $y = H(x, t)$, où H est la hauteur de fluide adimensionnée $H = h q^{-\frac{2}{3}} g^{\frac{1}{3}}$, les deux conditions limites sont la condition limite cinématique $\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} = v$ et la condition dynamique $-P \underline{n} + \underline{\tau} \cdot \underline{n} = -P_a \underline{n}$ où P_a est la pression atmosphérique adimensionnée et \underline{n} est la normale à la surface.

3 Solution homogène

Dans cette section, la perte de charge linéique est déduite de l'expression analytique du profil de vitesse dans le cas d'un écoulement stationnaire.

3.1 Profil de vitesse

On suppose que l'écoulement stationnaire peut être considéré comme étant parallèle au fond dans la direction \underline{e}_x . C'est le cas lorsque la pente relative $\frac{dH}{dx}$ de la surface libre est nulle ou négligeable, sauf peut-être dans le terme de forçage Γ . Dans ce cas, on impose $\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \cdot}{\partial x} = 0$ et $v = 0$ dans l'équation (6) qui s'écrit alors :

$$0 = \Gamma + R^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad \text{avec} \quad \tau = B + \left(\frac{du}{dy} \right)^n , \quad (10)$$

dans la phase fluide, i.e. $\tau > B$. L'équation simplifiée (10) est également l'ordre dominant pour un développement asymptotique en $R \ll 1$, i.e. pour un écoulement

visqueux. Dans les deux cas, nous obtenons à l'ordre dominant une solution pour τ et u qui ne varient que dans la direction y .

En particulier, en intégrant (10) selon y et en utilisant la condition dynamique à la surface libre, qui se simplifie ici en $\tau(H) = 0$ (l'autre composante de la condition dynamique est un raccord de pression à la surface libre, ici de normale $\underline{n} = \underline{e}_y$), on obtient :

$$\tau(y) = R\Gamma(H - y) \quad \text{et donc} \quad \frac{du}{dy} = [R\Gamma(H - y) - B]^{\frac{1}{n}}. \quad (11)$$

Sur le fond du canal, le terme de friction $\tau^* \equiv R^{-1}\tau(0)$ s'écrit $\tau^* = \Gamma H$, le terme de forçage Γ étant égal à la perte de charge linéique.

En intégrant une fois de plus et en utilisant la condition à la limite $u - \Lambda \frac{du}{dy} = 0$ en $y = 0$, le profil de vitesse s'exprime finalement comme :

$$u(y) = (R\Gamma)^{\frac{1}{n}} \left\{ \frac{n}{n+1} \left[H_y^{\frac{n+1}{n}} - (H_y - y)^{\frac{n+1}{n}} \right] + \Lambda H_y^{\frac{1}{n}} \right\}. \quad (12)$$

Ce profil est valable dans la phase liquide $y \in [0, H_y]$ où $H_y = H - \frac{B}{R\Gamma}$, défini par $\tau(H_y) = B$, est la hauteur adimensionnée de l'interface liquide/solide. Dans la phase solide, $y \in [H_y, H]$, la vitesse $u(y) = u(H_y)$ est constante. On remarque que la hauteur H doit être plus grande que $H_{\min} = B/(R\Gamma)$ pour qu'un écoulement soit possible, avec H_{\min} l'épaisseur de la couche solide. Dans cette couche solide la vitesse est $u(H_y) = (R\Gamma)^{\frac{1}{n}} H_y^{\frac{1}{n}} \left\{ \frac{n}{n+1} H_y + \Lambda \right\}$.

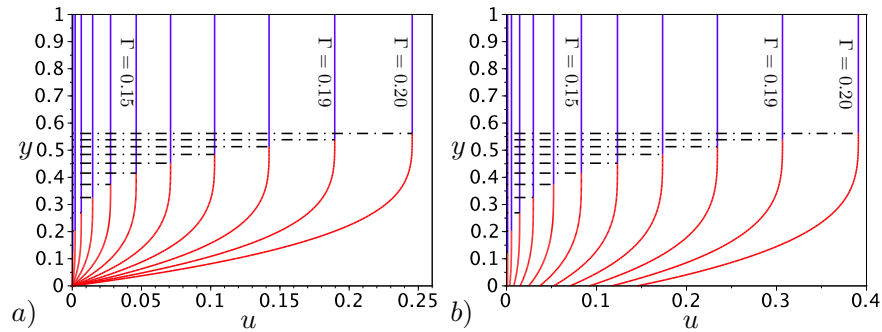


Figure 2: Profil de vitesse $u(y)$ pour la rhéologie $R = 104.6$, $B = 0.92$ et $n = 0.43$ avec $H = 1$ et $\Gamma = \{0.10, 0.11, \dots, 0.2\}$. Les lignes tiretées indiquent la limite entre la phase solide et la phase liquide. a) Sans ($\Lambda = 0$) ou b) avec glissement pour $\Lambda = 0.159$.

Un exemple de profil $u(y)$ est représenté sur la figure 2 pour plusieurs valeurs de forçage Γ , et $R = 104.6$, $B = 0.92$, $n = 0.43$ et $H = 1$. La figure 2a correspond au

cas sans glissement et la figure 2b est un exemple de condition de glissement pour $\Lambda = 0.159$. Comme attendu, le cas avec glissement entraîne un débit plus important pour une valeur de Γ fixée. L'expression de ce débit est présentée dans la section suivante.

3.2 Perte de charge linéique

Le débit linéique $q = \int_0^H u(y) dy$, qui mène à l'expression de la vitesse moyenne $U = q/h$, peut se décomposer en une contribution venant de la partie liquide q_l et une contribution venant de la partie solide q_s :

$$q_l = \int_0^{H_y} u(y) dy \quad ; \quad q_s = u(H_y)(H - H_y), \quad (13)$$

dont on donne les expressions développées :

$$q_l = (R\Gamma H_y)^{\frac{1}{n}} \left\{ H_y \left(\frac{n}{n+1} H_y + \Lambda \right) - \frac{n^2}{(2n+1)(n+1)} H_y^2 \right\}, \quad (14)$$

$$q_s = (R\Gamma H_y)^{\frac{1}{n}} \frac{B}{R\Gamma} \left(\frac{n}{n+1} H_y + \Lambda \right). \quad (15)$$

En sommant les deux expressions (14) et (15) et en utilisant la relation $H_y = H - \frac{B}{R\Gamma}$, on obtient l'expression finale du débit linéique :

$$\begin{aligned} q &= (R\Gamma H_y)^{\frac{1}{n}} \left\{ H \left(\frac{n}{n+1} H_y + \Lambda \right) - \frac{n^2}{(2n+1)(n+1)} H_y^2 \right\} \\ &= (R\Gamma H - B)^{\frac{1}{n}} \left\{ H\Lambda + \frac{n}{n+1} H \left(H - \frac{B}{R\Gamma} \right) - \frac{n^2}{(2n+1)(n+1)} \left(H - \frac{B}{R\Gamma} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Les grandeurs étant adimensionnées, le débit linéique total doit vérifier $q = 1$. Ainsi, la perte de charge linéique Γ et la hauteur H sont solutions de l'équation implicite (16) dont la solution peut être notée sous la forme $\Gamma = \mathcal{F}(B, n, \Lambda; H)/R$ que l'on se propose de résoudre numériquement pour plusieurs valeurs des nombres sans dimensions, représentatives de conditions expérimentales de laboratoire avec un Carbopol comme fluide modèle.

4 Analyse de sensibilité

Dans le cas général d'un fluide non-newtonien, l'équation (16) est implicite pour Γ . En revanche, des solutions explicites peuvent être déterminées sous certaines conditions. En particulier, des solutions pour Γ dans le cas où le fluide ne présente pas de seuil plastique, $B = 0$, peuvent être déterminées explicitement. Dans le cas où $B > 0$, la situation est plus complexe. Nous pouvons tout de même proposer des cas limites, pour lesquels les couches fluide d'une part et solide d'autre part sont considérées très fines devant la hauteur H .

4.1 Solutions explicites pour $B = 0$

Nous considérons ici le cas où $B = 0$ et $\Lambda = 0$ mais n quelconque, i.e. pour un fluide ne présentant ni de seuil plastique ni de glissement au fond. Dans ce cas, nous obtenons

$$\Gamma R \equiv \mathcal{F}(B = 0, n, \Lambda = 0; H) = \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n H^{-(2n+1)}. \quad (17)$$

Notons que l'on retrouve bien l'expression de la perte de charge linéique pour un fluide newtonien, $n = 1$:

$$\Gamma R \equiv \mathcal{F}(B = 0, 1, \Lambda = 0; H) = 3H^{-3}. \quad (18)$$

Si l'on ajoute maintenant la condition de glissement avec $\Lambda > 0$, nous pouvons obtenir une solution explicite

$$\Gamma R \equiv \mathcal{F}(B = 0, n, \Lambda; H) = \left(\frac{\Lambda}{H} + \frac{n}{2n+1} \right)^{-n} H^{-(2n+1)}. \quad (19)$$

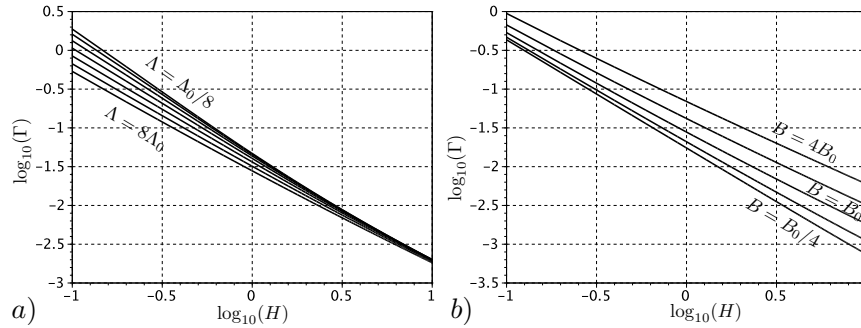


Figure 3: Perte de charge linéique Γ en fonction de H en représentation $\log_{10} - \log_{10}$ autour des valeurs $R_0 = 164.3$, $B_0 = 0.827$ et $n = 0.43$. Tracés pour a) $\Lambda = 2^m \Lambda_0$ avec $\Lambda_0 = 0.159$ et $m \in \{-3, -2, \dots, 3\}$, b) $B = 2^m B_0$ avec $m \in \{-2, -1, \dots, 2\}$.

4.2 Résolution numérique de l'équation implicite

On étudie ici la sensibilité de la perte de charge linéique Γ autour des paramètres rhéologiques $R_0 = 164.3$, $B_0 = 0.827$ et $n = 0.43$, représentatifs d'un Carbopol à 0.11 % (voir [7]). La dépendance de la perte de charge linéique Γ fonction de H est représentée sur la figure 3 pour plusieurs valeurs des paramètres adimensionnels Λ (figure 3a) et B (figure 3b) et $R = R_0$. Les profils de Γ révèlent un comportement proche d'une loi de puissance du type $\Gamma \approx f(B, n, \Lambda)H^{-\alpha}/R$. Notons que dans le cas

d'un fluide sans seuil plastique et sans glissement, on obtient exactement $f(0, n, 0) = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$ et $\alpha = 2n + 1$. Dans le cas de référence $B = B_0$, $n = 0.43$ et $\Lambda = \Lambda_0$, on obtient l'approximation $\Gamma \approx 2.5H^{-1.34}/R$.

La sensibilité du coefficient de perte de charge linéique aux paramètres B et Λ est représentée sur la figure 4. D'autre part, on remarque que pour des valeurs suffisamment élevées de H , le rapport ΓR est indépendant de la longueur de glissement Λ puisque les courbes tendent vers une valeur constante.

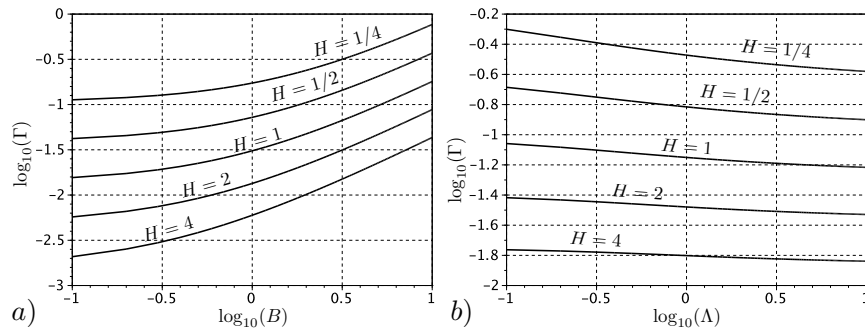


Figure 4: Perte de charge linéique Γ pour en représentation $\log_{10} - \log_{10}$ autour des valeurs $R_0 = 164.3$, $B_0 = 0.827$ et $n = 0.43$. Tracés pour $H = 2^m$ pour les valeurs $m \in \{-2, -1, \dots, 2\}$, en fonction de a) B ou b) Λ .

5 Conclusion

Dans cette étude, on a montré que la perte de charge linéique Γ d'un fluide obéissant à la rhéologie d'Herschel-Bulkley était liée aux grandeurs caractéristiques de l'écoulement au travers d'une équation implicite. Le choix d'un nombre de Reynolds R basé sur le débit conduit à une dépendance de la forme $\Gamma = \mathcal{F}(B, n, \Lambda; H)/R$, où B et n caractérisent la rhéologie et Λ le glissement. La résolution numérique de l'équation implicite permet de mettre en évidence des approximations de Γ en loi de puissance vis-à-vis de l'épaisseur adimensionnée H . Les solutions numériques suggèrent une faible dépendance de Γ vis-à-vis de la longueur de glissement Λ , en particulier pour des hauteurs de fluide importantes. En perspective, on pourra utiliser le calcul du coefficient de perte de charge pour trouver les courbes de remous d'un fluide non-newtonien de manière analytique, et comparer les résultats aux observations faites en laboratoire.

References

- [1] S. Alireza, C. Martin et A. Magnin. Effects of surface properties on the impact process of a yield stress fluid drop. *Experiments in Fluids*, 51(1):211–224, 2011.
- [2] Johan Burger, Rainer Haldenwang et Neil Alderman. Experimental database for non-newtonian flow in four channel shapes. *J. Hydraul. Res.*, 48(3):363–370, 2010.
- [3] G. Chambon, A. Ghemmour and M. Naaim. Experimental investigation of viscoplastic free-surface flows in a steady uniform regime. *J. Fluid. Mech.*, 754:332–364, 2014.
- [4] R. Chilton et D. Gregory-Smith. Steady, laminar, flow of concentrated mud suspensions in open channel. *Journal of Hydraulic Research*, 33(3):412–413, 1995.
- [5] P. Coussot. Steady, laminar, flow of concentrated mud suspensions in open channel. *J. Hydraul. Res.* 32(4):535–559, 1994.
- [6] P. Coussot. *Rhéophysique, la matière dans tous ses états*. 2012.
- [7] L. Lacaze, A. Filella et O. Thual. Steady and unsteady shear flows of a viscoplastic fluid in a cylindrical couette cell. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, DOI: 10.1016/j.jnnfm.2014.12.009, 2015.
- [8] O. Thual. *Hydrodynamique de l’environnement*. Éditions de l’École Polytechnique, 2010.