

Détermination des fréquences propres d'une machine outils à structure parallèle hyperstatique à l'aide de modèles poutres

A. BENTI^a, B. BLAYSAT^b, S. DURIEUX^a, H. CHANAL^a

a. Clermont Université, IFMA, UMR 6602, Institut Pascal, BP 10448, F-63000, Clermont-Ferrand, aurelie.benti@ifma.fr, severine.durieux@ifma.fr, helene.chanal@ifma.fr

b. Clermont Université, UBP, UMR 6602, Institut Pascal, BP 10448, F-63000, Clermont-Ferrand, benoit.blaysat@univ-bpclermont.fr

Résumé :

Cet article s'intéresse au développement d'un modèle dynamique léger dédié à l'évaluation rapide des fréquences propres de la partie parallèle d'une structure de machine outils hyperstatique en fonction de sa configuration articulaire. Les jambes de la structure sont modélisées par des poutres sollicitées en traction-compression ainsi qu'en flexion. De plus, les contraintes cinématiques associées à la plateforme mobile sont aussi prises en compte en utilisant le formalisme des torseurs de petit déplacement. Enfin, les premiers résultats sont comparés avec des mesures réalisées dans un contexte d'usinage.

Abstract :

This article deals with the development of a light dynamic model in order to evaluate the natural frequencies of the parallel structure of an overconstrained machine tool with regard to its articular configuration. The machine tool legs are modeled with beams loaded in traction-compression and in flexion. Constraint equations between parameters that model the deformation of each leg are established by using small displacement torsor to represent the displacement of the mobile platform.

Mots clefs : modélisation dynamique, fréquences propres, machine outils à structure parallèle

1 Introduction

Industriellement, les robots à architecture parallèle sont principalement utilisés pour des opérations de pick-and-place [1]. Toutefois, quelques machines outils à structure parallèle sont utilisées dans les industries automobile ou aéronautique pour des opérations d'Usinage Grande Vitesse (UGV). En effet, leurs performances dynamiques en terme de potentiel d'accélération sont meilleures pour une motorisation équivalente que celles des machines outils à structure sérielle [2].

Toutefois, ce type de structure présente une perte de précision vis-à-vis des machines outils à structure sérielle. Ces défauts de pose de l'outil sont liés à différents aspects du comportement mécanique de la structure de la machine (thermique, statique ou dynamique). Le travail présenté dans cet article s'intéresse plus particulièrement à la prédiction du comportement dynamique d'une machine outils à structure parallèle à l'aide d'un modèle léger. L'accent est ici effectivement donné sur la proposition d'un outil d'estimation des fréquences propres de la structure parallèle nécessitant une puissance de calcul ainsi qu'un temps d'exécution minime sans avoir de connaissance forte sur la géométrie des éléments de la structure de la machine outils.

L'objectif est ainsi de proposer une structure de modèle permettant d'approximer le comportement d'une jambe composée de liaisons et de pièces mécaniques par une poutre dont les caractéristiques peuvent être identifiées à l'aide de mesures expérimentales. Le niveau de prédiction du modèle doit nous permettre de valider la position d'une pièce ou les paramètres d'usinage afin d'éviter les vibrations de la structure de la machine outils.

En effet de précédents travaux ont montré l'impact que pouvait avoir le comportement vibratoire sur la qualité de la pièce usinée [3] (Figure 1). Suivant la position de la pièce à usiner des marques apparaissent sur les surfaces produites. Ces marques semblent provenir du comportement dynamique de la structure de la machine outils [3]. Un modèle multi-corps de la structure d'une machine outils à structure parallèle hyperstatique a déjà été développé [4]. Ce modèle, complet mais lourd demande toutefois une phase d'identification importante et un temps de calcul incompatible avec des applications temps réel.

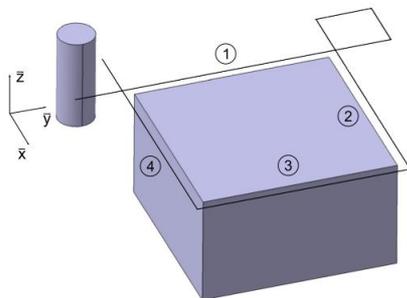


Figure 1 : Trajectoire suivie et défauts générés sur la pièce usinée [3]

Ce travail est la première étape du développement d'un modèle dynamique léger afin de pouvoir évaluer rapidement la fréquence propre de la partie parallèle d'une structure de machine outils hyperstatique en fonction de sa configuration articulaire. Nous basons notre approche sur l'utilisation d'un modèle poutre afin de décrire le comportement de chaque jambe de la structure.

L'objectif des travaux présentés dans cet article est de valider le niveau de prédiction qu'un modèle dynamique basé sur des poutres peut atteindre. Nous effectuons ainsi un certain nombre d'hypothèses qui pourront être levées ou validées dans de futurs travaux.

Dans un premier temps, nous présentons la machine outils support de notre étude, la Tripteur X7. La formulation du problème est ensuite détaillée pour une jambe avant

d'introduire les équations de contraintes représentant l'assemblage des poutres. Finalement, le modèle est exploité pour prédire les fréquences propres de la structure et celles-ci sont comparées avec des mesures effectuées en conditions réelles.

2 Présentation de la machine outils Tripteor X7

La machine étudiée est la machine outils à structure parallèle Triptéor X7 de la société PCI (Figure 2). Elle est constituée d'un robot hybride Exechon 5 axes (structure en rouge) et d'un axe positionné (rotation de la table) ce qui permet d'obtenir une grande accessibilité. La structure du robot Exechon a été développée par Neumann, en s'inspirant de celle du Tricept, afin d'obtenir une plus grande rigidité [5].

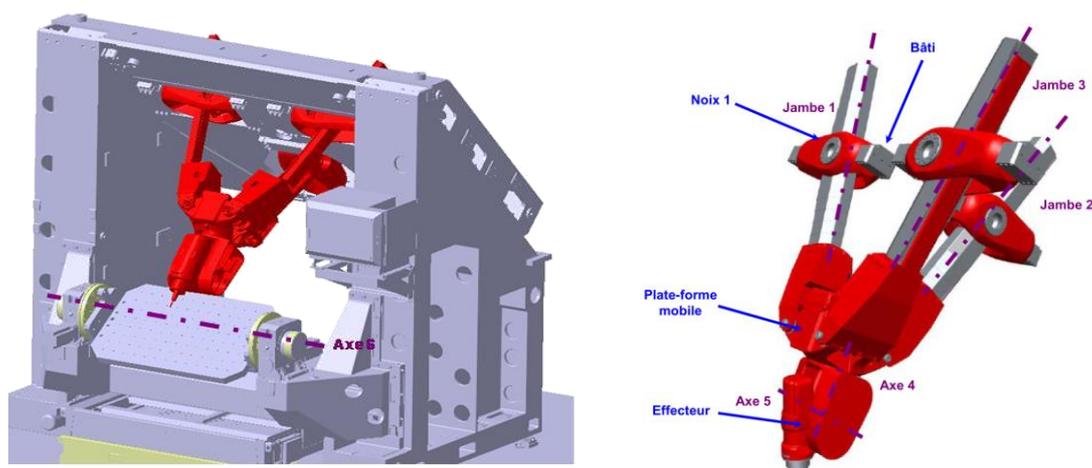


Figure 2 : Machine outils à structure parallèle Tripteor X7

Seul le comportement vibratoire de la partie parallèle composée des jambes 1, 2 et 3 et de la plate-forme mobile (Figure 2) est traité dans cet article.

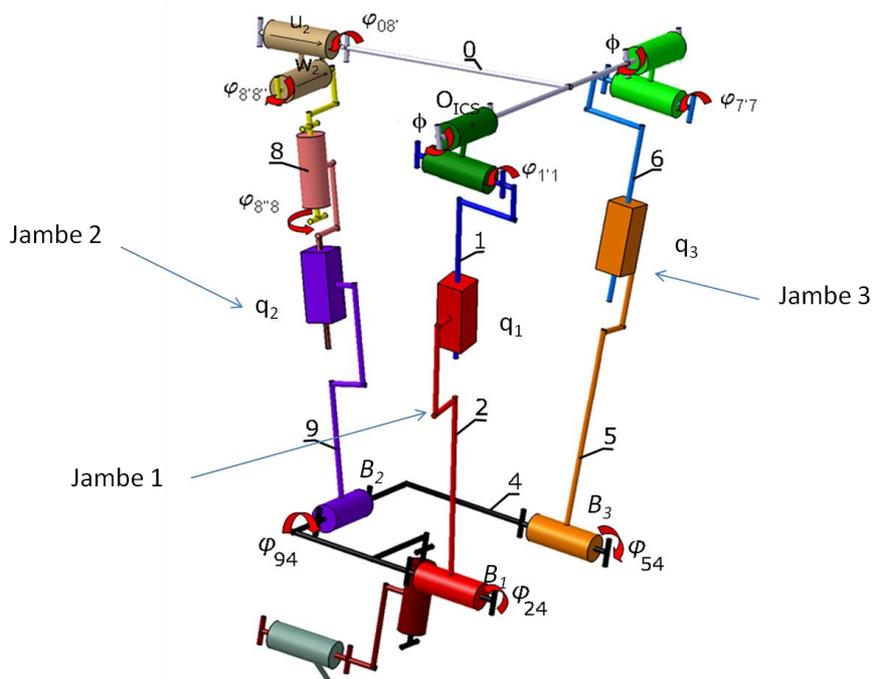


Figure 3 : schéma cinématique de la machine outils Tripteor X7

Chaque jambe est considérée en liaison pivot avec la plate-forme mobile et en liaison cardan avec la plateforme fixe (Figure 3). La jambe 2 est, de plus, en liaison pivot autour de son axe principal.

Ainsi, la jambe 2 n'est sollicitée qu'en flexion et traction-compression. Toutefois en première approche et pour étudier la faisabilité de notre approche, nous négligeons la sollicitation en torsion des jambes 1 et 3 car, la rigidité en torsion de ces jambes semble plus élevée ce qui implique des modes de hautes fréquences. En effet, les modes les plus influents en usinage sont les modes associés aux fréquences les plus faibles. De même, nous négligeons la masse de la plate-forme mobile, de futurs travaux seront menés pour l'identifier.

3 Modélisation d'une jambe de la machine

Dans ces premiers travaux, chaque jambe est modélisée par une poutre de section circulaire creuse de longueur q sollicitée en flexion et traction-compression. Dans un premier nous nous intéressons donc à la modélisation et aux paramétrages d'une poutre élémentaire afin d'en déduire sa matrice de raideur \mathbf{K} et sa matrice de masse \mathbf{M} .

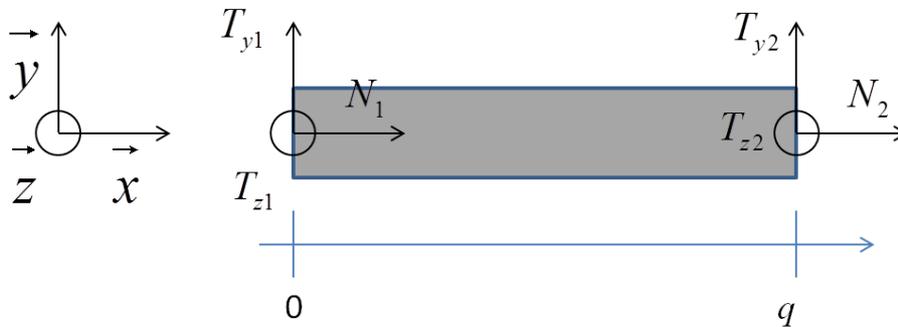


Figure 4 : modélisation poutre d'une jambe

Du fait des liaisons de chaque jambe avec les plateformes fixe et mobile et de l'hypothèse de non sollicitation en torsion, le torseur des efforts de cohésion sollicitant la poutre s'écrit $\{T_{coh}\}$ et comprend un effort normal N , 2 efforts de cisaillement T_y et T_z et deux moments de flexion M_y et M_z (Figure 4). Notons $R = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère associé à la poutre de longueur q .

Le torseur de cohésion s'écrit alors $\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T_y & M_y \\ T_z & M_z \end{Bmatrix}_R$ et le vecteur de déplacement

associé $\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \\ \theta_y(x) \\ \theta_z(x) \end{Bmatrix}$ où $u(x)$, $v(x)$ et $w(x)$ sont les déplacements du point de la poutre de

coordonnée x suivant les directions \vec{x} , y et \vec{z} , et $\theta_y(x)$ et $\theta_z(x)$ les angles de rotation autour de y et \vec{z} . Notons que $u(0)=v(0)=w(0)=0$

Les conditions d'équilibres dans la poutre nous imposent :

$$\frac{d}{dx}\{T_{coh}\} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dN}{dx}(x) = 0, \frac{dT_y}{dx}(x) = 0, \frac{dT_z}{dx}(x) = 0 \\ \frac{dM_y}{dx}(x) - T_z(x) = 0, \frac{dM_z}{dx}(x) + T_y(x) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

L'application des hypothèses de Bernoulli nous permet aussi d'écrire :

$$\begin{cases} \theta_z(x) = \frac{dv}{dx}(x), \theta_y(x) = -\frac{dw}{dx}(x) \\ N(x) = ES \frac{du}{dx}(x), M_y(x) = EI \frac{d\theta_y}{dx}(x), M_z(x) = EI \frac{d\theta_z}{dx}(x) \end{cases} \quad (2)$$

où E est le module d'Young du matériau constituant la poutre, S sa section et I le moment quadratique de la section circulaire de la poutre.

Ainsi à partir des équations (1) et (2), nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{d^2 M_y}{dx^2}(x) - \frac{dT_z}{dx}(x) = EI \frac{d^3 \theta_y}{dx^3}(x) = -EI \frac{d^4 w}{dx^4}(x) = 0 \\ \frac{d^2 M_z}{dx^2}(x) + \frac{dT_y}{dx}(x) = EI \frac{d^3 \theta_z}{dx^3}(x) = EI \frac{d^4 v}{dx^4}(x) = 0 \\ \frac{dN}{dx}(x) = ES \frac{d^2 u}{dx^2}(x) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

A partir du système d'équations (3), nous pouvons en déduire que $u(x)$ est une fonction affine et que $v(x)$ et $w(x)$ sont des polynômes de degré 3.

Nous obtenons ainsi les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, q], \\ u(x) = \frac{x}{q} u(q) \\ v(x) = \theta_z(0)x - \left(\frac{2\theta_z(0) + \theta_z(q)}{q} - \frac{3v(q)}{q^2} \right) x^2 + \left(\frac{\theta_z(0) + \theta_z(q)}{q^2} - \frac{2v(q)}{q^3} \right) x^3 \\ w(x) = \theta_y(0)x - \left(\frac{2\theta_y(0) + \theta_y(q)}{q} - \frac{3w(q)}{q^2} \right) x^2 + \left(\frac{\theta_y(0) + \theta_y(q)}{q^2} - \frac{2w(q)}{q^3} \right) x^3 \\ \theta_y(x) = -\theta_y(0) - 2 \left(\frac{2\theta_y(0) + \theta_y(q)}{q} - \frac{3w(q)}{q^2} \right) x^2 - 3 \left(\frac{\theta_y(0) + \theta_y(q)}{q^2} - \frac{2w(q)}{q^3} \right) x^3 \\ \theta_z(x) = \theta_z(0) - 2 \left(\frac{2\theta_z(0) + \theta_z(q)}{q} - \frac{3v(q)}{q^2} \right) x^2 + 3 \left(\frac{\theta_z(0) + \theta_z(q)}{q^2} - \frac{2v(q)}{q^3} \right) x^3 \end{cases}$$

Notons $\mathbf{U}_{\text{ext}}^T = [\theta_y(0) \quad \theta_z(0) \quad u(q) \quad v(q) \quad w(q) \quad \theta_y(q) \quad \theta_z(q)]$ le vecteur de déplacement des extrémités de la poutre.

$$\text{Ainsi } \forall x \in [0, q], \begin{cases} u(x) = [N_u(x)] \mathbf{U}_{\text{ext}} \\ v(x) = [N_v(x)] \mathbf{U}_{\text{ext}} \\ w(x) = [N_w(x)] \mathbf{U}_{\text{ext}} \\ \theta_y(x) = [N_{\theta_y}(x)] \mathbf{U}_{\text{ext}} \\ \theta_z(x) = [N_{\theta_z}(x)] \mathbf{U}_{\text{ext}} \end{cases}$$

L'énergie potentielle de la poutre s'exprime :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^q \left[ES \left(\frac{du}{dx}(x) \right)^2 + EI \left(\frac{d\theta_y}{dx}(x) \right)^2 + EI \left(\frac{d\theta_z}{dx}(x) \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \mathbf{U}_{\text{ext}}^T \mathbf{K}_e \mathbf{U}_{\text{ext}}$$

Ainsi, la matrice de raideur de la poutre s'exprime :

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{q} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{q^2} & -\frac{2EI}{q} & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{q} & 0 & -\frac{6EI}{q^2} & 0 & 0 & \frac{2EI}{q} \\ 0 & 0 & \frac{ES}{q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI}{q^2} & 0 & \frac{12EI}{q^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{q^2} \\ -\frac{6EI}{q^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{q^3} & \frac{6EI}{q^2} & 0 \\ -\frac{2EI}{q} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{q^2} & \frac{4EI}{q} & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{q} & 0 & -\frac{6EI}{q^2} & 0 & 0 & \frac{4EI}{q} \end{bmatrix}$$

L'énergie cinématique de la poutre s'exprime :

$$\begin{aligned} E_{cin} &= \frac{1}{2} \mathbf{U}_{ext}^T [M_u] \mathbf{U}_{ext} + \frac{1}{2} \mathbf{U}_{ext}^T [M_{\theta_y}] \mathbf{U}_{ext} + \frac{1}{2} \mathbf{U}_{ext}^T [M_{\theta_z}] \mathbf{U}_{ext} + \frac{1}{2} \mathbf{U}_{ext}^T [M_1] \mathbf{U}_{ext} \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{U}_{ext}^T [M_2] \mathbf{U}_{ext} + \frac{1}{2} \mathbf{U}_{ext}^T [M_3] \mathbf{U}_{ext} + \frac{1}{2} \mathbf{U}_{ext}^T [M_4] \mathbf{U}_{ext} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{U}_{ext}^T \mathbf{M}_e \mathbf{U}_{ext} \end{aligned}$$

avec $[M_u] = \rho S \int_0^q [N_u]^T [N_u] dx$, $[M_{\theta_y}] = \rho \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{4} \int_0^q [N_{\theta_y}]^T [N_{\theta_y}] dx$, $[M_{\theta_z}] = \rho \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{4} \int_0^q [N_{\theta_z}]^T [N_{\theta_z}] dx$, $[M_1] = \rho S [N_v(q)]^T [N_v(q)] q$, $[M_2] = \rho S [N_w(q)]^T [N_w(q)] q$,
 $[M_3] = \rho S [N_{\theta_y}(q)]^T [N_{\theta_y}(q)] \frac{q^3}{3} - \rho S [N_{\theta_y}(q)]^T \left[\frac{dN_{\theta_y}(q)}{dx} \right] \frac{q^4}{12} - \rho S \left[\frac{dN_{\theta_y}(q)}{dx} \right]^T [N_{\theta_y}(q)] \frac{q^4}{12} +$
 $\rho S \left[\frac{dN_{\theta_y}(q)}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_{\theta_y}(q)}{dx} \right] \frac{q^5}{30} + \rho S [N_{\theta_y}(q)]^T \left[\frac{d^2 N_{\theta_y}(q)}{dx^2} \right] \frac{q^5}{60} + \rho S \left[\frac{d^2 N_{\theta_y}(q)}{dx^2} \right]^T [N_{\theta_y}(q)] \frac{q^5}{60}$
 $- \rho S \left[\frac{dN_{\theta_y}(q)}{dx} \right]^T \left[\frac{d^2 N_{\theta_y}(q)}{dx^2} \right] \frac{q^6}{120} - \rho S \left[\frac{d^2 N_{\theta_y}(q)}{dx^2} \right]^T \left[\frac{dN_{\theta_y}(q)}{dx} \right] \frac{q^6}{120} + \rho S \left[\frac{d^2 N_{\theta_y}(q)}{dx^2} \right]^T \left[\frac{d^2 N_{\theta_y}(q)}{dx^2} \right] \frac{q^7}{420}$ et
 $[M_4] = \rho S [N_{\theta_z}(q)]^T [N_{\theta_z}(q)] \frac{q^3}{3} - \rho S [N_{\theta_z}(q)]^T \left[\frac{dN_{\theta_z}(q)}{dx} \right] \frac{q^4}{12} - \rho S \left[\frac{dN_{\theta_z}(q)}{dx} \right]^T [N_{\theta_z}(q)] \frac{q^4}{12} +$
 $\rho S \left[\frac{dN_{\theta_z}(q)}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_{\theta_z}(q)}{dx} \right] \frac{q^5}{30} + \rho S [N_{\theta_z}(q)]^T \left[\frac{d^2 N_{\theta_z}(q)}{dx^2} \right] \frac{q^5}{60} + \rho S \left[\frac{d^2 N_{\theta_z}(q)}{dx^2} \right]^T [N_{\theta_z}(q)] \frac{q^5}{60}$
 $- \rho S \left[\frac{dN_{\theta_z}(q)}{dx} \right]^T \left[\frac{d^2 N_{\theta_z}(q)}{dx^2} \right] \frac{q^6}{120} - \rho S \left[\frac{d^2 N_{\theta_z}(q)}{dx^2} \right]^T \left[\frac{dN_{\theta_z}(q)}{dx} \right] \frac{q^6}{120} + \rho S \left[\frac{d^2 N_{\theta_z}(q)}{dx^2} \right]^T \left[\frac{d^2 N_{\theta_z}(q)}{dx^2} \right] \frac{q^7}{420}$
où ρ est la masse volumique du matériau constituant la poutre.

ainsi

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} \frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)q}{30} + \frac{2\rho Sq^3}{105} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)}{40} - \frac{\rho Sq^2}{14} & -\frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)q}{120} - \frac{\rho Sq^3}{70} & 0 \\ 0 & \frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)q}{30} + \frac{2\rho Sq^3}{105} & 0 & -\frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)}{40} - \frac{\rho Sq^2}{14} & 0 & 0 & -\frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)q}{120} - \frac{\rho Sq^3}{70} \\ 0 & 0 & \frac{\rho Sq}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)}{40} - \frac{\rho Sq^2}{14} & 0 & \frac{3\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)}{10q} + \frac{47}{35}\rho Sq & 0 & 0 & -\frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)q}{40} + \frac{\rho Sq^2}{35} \\ -\frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)}{40} - \frac{\rho Sq^2}{14} & 0 & 0 & 0 & \frac{3\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)}{10q} + \frac{47}{35}\rho Sq & -\frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)}{40} - \frac{\rho Sq^2}{35} & 0 \\ -\frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)q}{120} - \frac{\rho Sq^3}{70} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)}{40} - \frac{\rho Sq^2}{35} & \frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)q}{30} + \frac{3\rho Sq^3}{35} & 0 \\ 0 & -\frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)q}{120} - \frac{\rho Sq^3}{70} & 0 & -\frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)}{40} - \frac{\rho Sq^2}{35} & 0 & 0 & \frac{\rho\pi(R_e^4 - R_i^4)q}{30} + \frac{3\rho Sq^3}{35} \end{bmatrix}$$

avec R_e le rayon extérieur de la poutre modélisant la jambe et R_i le rayon intérieur.

Afin de pouvoir exprimer la matrice de masse et de raideur du système complet, nous devons exprimer les contraintes entre les déplacements de chacune des extrémités des poutres modélisant les jambes 1, 2 et 3.

4 Détermination des équations de contrainte

Pour déterminer les équations de contraintes entre le mouvement des extrémités des poutres, nous considérons la plateforme mobile comme rigide. Nous déterminons le déplacement de la plateforme mobile par rapport à la position rigide de la structure de la machine outils à l'aide des torseurs de petits déplacements (Figure 5) [7]. Notons $R_{MPS} = (\vec{x}_{MPS}, \vec{y}_{MPS}, \vec{z}_{MPS})$ le repère associé à la plate forme mobile.

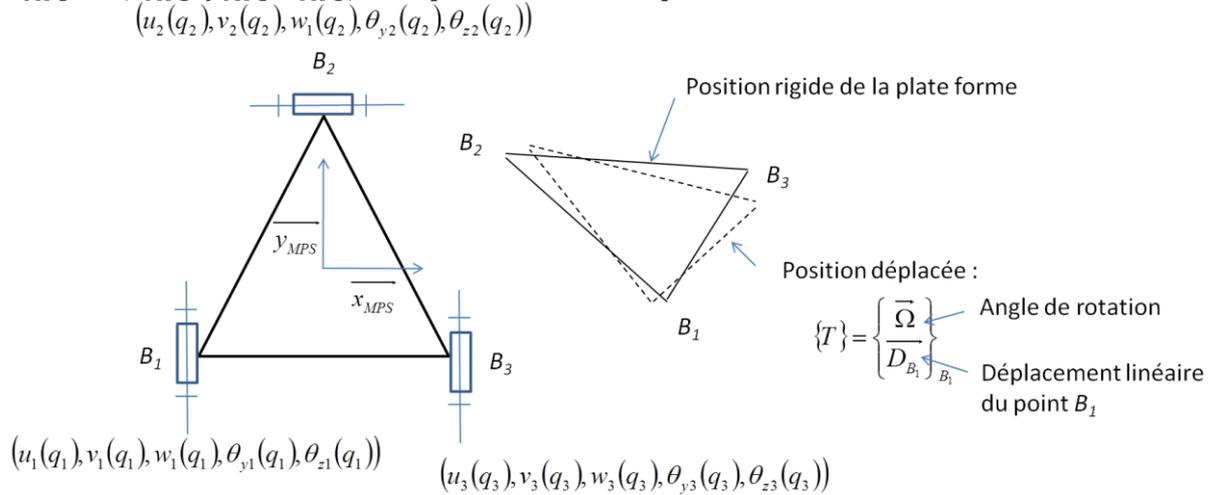


Figure 5 : paramétrage de la plateforme mobile

Notons \vec{z}_1, \vec{z}_2 et \vec{z}_3 les axes principaux de chacune des jambes 1, 2 et 3. Ainsi la matrice de passage entre le repère de la poutre et celui de la jambe est $\mathbf{R}_{\text{poutre} \rightarrow \text{jambe}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. A l'aide des travaux de Pateloup définissant le modèle géométrique rigide inverse de la partie parallèle de la machine outils Tripteor, nous pouvons calculer l'orientation du repère R_{MPS} et des jambes par rapport à la base fixe [6]. Nous déterminons ainsi les angles entre chaque jambe et la plateforme mobile $\varphi_{24} = (\vec{z}_{MPS}, \vec{z}_1)$, $\varphi_{54} = (\vec{z}_{MPS}, \vec{z}_2)$ et $\varphi_{94} = (\vec{z}_{MPS}, \vec{z}_3)$.

Ainsi au vu des liaisons pivots des jambes avec la plateforme mobile, l'angle de rotation de la plateforme mobile par rapport à la position rigide s'exprime dans le repère R_{MPS} :

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{24})\theta_{z1}(q_1) = \cos(\varphi_{94})\theta_{z3}(q_3) \\ \cos(\varphi_{54})\theta_{y2}(q_2) \\ -\sin(\varphi_{24})\theta_{z1}(q_1) = -\sin(\varphi_{94})\theta_{z3}(q_3) = \sin(\varphi_{54})\theta_{z2}(q_2) \end{pmatrix}$$

Ainsi, il existe un couplage entre la rotation des jambes 1, 2 et 3 autour des axes \vec{z}_1, \vec{z}_2 et \vec{z}_3 qui sont les axes perpendiculaires aux liaisons pivots.

De même le déplacement linéaire de la plateforme mobile par rapport à la position rigide s'exprime dans le repère R_{MPS} :

$$\begin{aligned} \vec{D}_{B1} &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{24})w_1(q_1) - \sin(\varphi_{24})u_1(q_1) \\ v_1(q_1) \\ -\cos(\varphi_{24})u_1(q_1) - \sin(\varphi_{24})w_1(q_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_2(q_2) + \sin(\varphi_{24})\theta_{z1}(q_1)\overrightarrow{B_1B_2} \cdot \overrightarrow{y_{MPS}} \\ \cos(\varphi_{54})v_2(q_2) + \sin(\varphi_{54})u_2(q_2) + \sin(\varphi_{24})\theta_{z1}(q_1)\overrightarrow{B_1B_2} \cdot \overrightarrow{x_{MPS}} \\ -\cos(\varphi_{54})u_2(q_2) + \sin(\varphi_{24})v_2(q_2) + \cos(\varphi_{54})\theta_{y2}(q_2)\overrightarrow{B_1B_2} \cdot \overrightarrow{x_{MPS}} - \cos(\varphi_{24})\theta_{z1}(q_1)\overrightarrow{B_1B_2} \cdot \overrightarrow{y_{MPS}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{94})w_3(q_3) - \sin(\varphi_{94})u_3(q_3) \\ v_3(q_3) + \sin(\varphi_{24})\theta_{z1}(q_1)\overrightarrow{B_1B_3} \cdot \overrightarrow{x_{MPS}} \\ -\cos(\varphi_{94})u_3(q_3) - \sin(\varphi_{94})w_3(q_3) + \cos(\varphi_{54})\theta_{y2}(q_2)\overrightarrow{B_1B_3} \cdot \overrightarrow{x_{MPS}} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons ainsi 9 équations de contraintes liant les paramètres dépendants $\mathbf{U}_D^T = \{u_2(q_2), v_2(q_2), w_2(q_2), \theta_{y2}(q_2), u_3(q_3), v_3(q_3), w_3(q_3), \theta_{y3}(q_3), \theta_{z3}(q_3)\}$ aux paramètres indépendants

$\mathbf{U}_I^T = \{\theta_{y1}(0), \theta_{z1}(0), u_1(q_1), v_1(q_1), w_1(q_1), \theta_{y1}(q_1), \theta_{z1}(q_1), \theta_{y2}(0), \theta_{z2}(0), \theta_{z2}(q_2), \theta_{y3}(0), \theta_{z3}(0)\}$ sous la forme :

$$\mathbf{L}_D \mathbf{U}_D + \mathbf{L}_I \mathbf{U}_I = 0$$

où \mathbf{L}_D est une matrice 9x9 et \mathbf{L}_I est une matrice 12x9.

La détermination du comportement vibratoire de la partie parallèle de la machine outils Tripteur X7 passe par l'expression de la matrice de masse et de raideur de la structure composée des 3 poutres reliées par la plateforme mobile.

5 Calcul des fréquences propres

Afin de pouvoir calculer la matrice de masse et de raideur de la structure parallèle nous devons assembler les matrices de masse et de raideur des 3 poutres composant la structure de sorte que :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_D & \mathbf{K}_{DI} \\ \mathbf{K}_{DI}^T & \mathbf{K}_I \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_D & \mathbf{M}_{DI} \\ \mathbf{M}_{DI}^T & \mathbf{M}_I \end{bmatrix}$$

où \mathbf{K}_D et \mathbf{M}_D sont les matrices de raideur et de masse liées aux paramètres dépendants, \mathbf{K}_I et \mathbf{M}_I sont les matrices de raideur et de masse associées aux paramètres indépendants et \mathbf{K}_{DI} et \mathbf{M}_{DI} sont les matrices de raideur et de masse de couplage.

Ainsi la matrice de masse et de raideur de la structure parallèle liant les seuls paramètres indépendants s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{L}_I^T \mathbf{L}_D^T \mathbf{K}_D \mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_I - \left(\mathbf{K}_{DI} \mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_I + (\mathbf{K}_{DI} \mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_I)^T \right) + \mathbf{K}_I \text{ et}$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{L}_I^T \mathbf{L}_D^T \mathbf{M}_D \mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_I - \left(\mathbf{M}_{DI} \mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_I + (\mathbf{M}_{DI} \mathbf{L}_D^{-1} \mathbf{L}_I)^T \right) + \mathbf{M}_I$$

Les fréquences propres \mathbf{f}_0 de la structure parallèle peuvent être déduites des valeurs propres \mathbf{VP} de la matrice $\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}$:

$$\mathbf{f}_0 = \frac{\sqrt{\mathbf{VP}}}{2\pi}$$

Nous choisissons de calculer les fréquences propres d'une structure composée de 3 poutres en acier de rayon extérieur 100 mm et d'épaisseur 40 mm ayant les dimensions de la Tripteur X7 [6]. Les longueurs des jambes sont choisies tel que $q_1 = 1968,90$ mm, $q_2 = 2269,18$ mm et $q_3 = 1986,99$ mm. Les fréquences propres obtenues sont :

$$f_0 = \left\{ \begin{array}{l} 31,79 \text{ Hz} \\ 47,09 \text{ Hz} \\ 87,23 \text{ Hz} \\ 148,99 \text{ Hz} \\ 152,51 \text{ Hz} \\ 172,42 \text{ Hz} \\ 193,04 \text{ Hz} \\ 199,75 \text{ Hz} \\ 203,24 \text{ Hz} \\ 274,02 \text{ Hz} \\ 361,54 \text{ Hz} \\ 413,051 \text{ Hz} \end{array} \right.$$

Des travaux précédents ont permis, à l'aide d'un pot vibrant, de réaliser une analyse modale de la structure parallèle du robot de la Tripteur X7 dans différentes configurations [8]. Les résultats obtenus, présentés Figure 6, nous montre 4 modes à environ 40, 50, 70 et 90 Hz. Ces modes sont du même ordre de grandeur que ceux calculés par notre modèle.

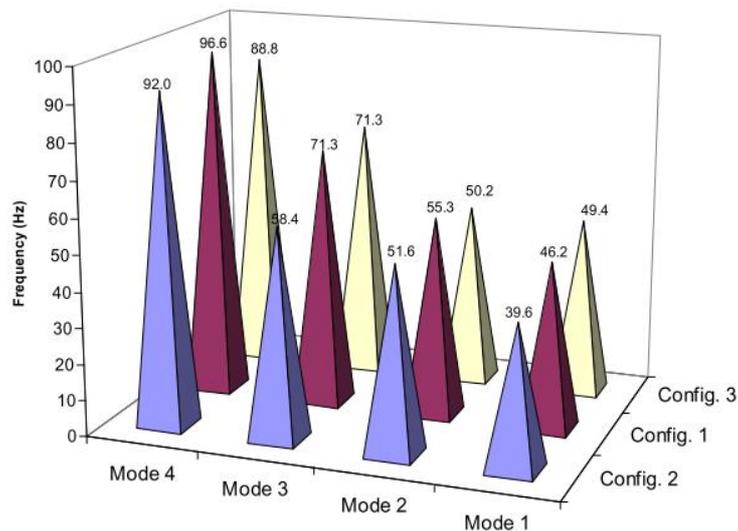


Figure 6 : Modes propres de la structure parallèle dans différentes configurations [8]

Toutefois des travaux complémentaires doivent être menés pour étalonner le modèle proposé avec le comportement réel de la structure et valider la forme des modes propres associés.

6 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé un travail préliminaire au développement d'une méthodologie de développement d'un modèle dynamique légers de la partie parallèle d'une structure de machine outils. La méthode proposée se base sur une modélisation de type poutre, des ensembles «jambes» composant la structure, associée à la modélisation du déplacement engendré de la plateforme mobile à l'aide d'un torseur de petit déplacement.

Les travaux proposés sont de premiers travaux qui doivent maintenant être approfondis. En effet, nous devons recalibrer les paramètres du modèle avec le comportement réel de la partie parallèle de la machine outils Tripteur X7. De même, il est pertinent d'évaluer l'impact de la torsion des jambes 1 et 3 sur le comportement du modèle ainsi que la masse de la plateforme mobile.

Références

- [1] Y.H. Li, Y.Ma, S.T. Liu, Z.J. Luo, J.P. Mei, T. Huang, D.G. Chetwynd, Integrated design of a 4-DOF high-speed pick-and-place parallel robot, *CIRP Annals-Manufacturing Technology* 63 (2014) 185-188.
- [2] M. Terrier, A. Dugas, J.Y. HASCOET, Qualification of parallel kinematics machines in high-speed milling on free form surfaces, *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 44 (2004) 865-877.
- [3] A. Benti, S. Durieux, H. Chanal, Mesure du comportement vibratoire en usinage d'une machine outils à structure parallèle, Assises MUGV 2014, Clermont Ferrand, 2014.
- [4] T. Bonnemains, Etude du comportement mécanique des machines outils à structure parallèle en Usinage Grande Vitesse, Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal – Clermont I, 2009.
- [5] K.-E Neuman, Exechon Concept, Parallel Kinematic Machines in research and Practice (PKS'2006), Chemnitz, Germany, pp. 787-802, 2006.
- [6] S. Pateloup, H. Chanal, E. Duc – Geometric and kinematic modeling of a new Parallel Kinematic Machine Tool: the Tripteor X7 designed by PCI, *Advanced Materials Research*, 112 (2010) pp 159-169.
- [7] P. Bourdet, L. Mathieu, C. Lartigue, The concept of the small displacement torso in metrology, *Advanced mathematical tools in metrology II. Series advances in mathematics for applied sciences*, 40 (1996), pp 110-122.
- [8] T. Bonnemains., H. Chanal., C. Bouzgarrou, P. Ray, Dynamic analysis of the Tripteor X7 : model and experiments, IDMME, Toulouse, 2010.