

Une technique sans maillage pour simuler l'écoulement d'un fluide compressible à surface libre

A. TIMESLI^{a,b}, B. BRAIKAT^a,

- a. Laboratoire d'Ingénierie et Matériaux LIMAT, Faculté des Sciences Ben M'Sik, Université Hassan II de Casablanca, Sidi Othman, B.P 7955 Casablanca, Maroc.
b.braikat@gmail.com
- b. Département de Génie Civil et Environnement, Ecole Nationale des Sciences Appliquées (ENSA), BP 03, Ajdir Al Hoceima Maroc.
abdelaziz.timesli@gmail.com

Résumé :

Dans cette communication, nous présentons une méthode sans maillage couplée avec une technique implicite d'ordre élevé pour la simulation des écoulements de fluides compressibles. Les difficultés de la mise en œuvre numérique sont axées sur les équations du mouvement et les conditions aux limites. Cet algorithme combine les procédures mathématiques suivantes: une discrétisation en temps, une méthode des moindres carrés mobiles MLS, une transformation d'homotopie, un développement en séries de Taylor et d'une méthode de continuation [1, 2, 3]. L'algorithme proposé permet d'obtenir un grand nombre de pas de temps qui minimise le nombre de décompositions de matrices tangentes. La formulation forte est considérée pour éviter l'inconvénient d'intégration numérique. Les conditions aux limites de la surface libre sont traitées par la technique de collocation qui est la plus appropriée pour les grandes déformations sans la nécessité de redéfinir le maillage.

Abstract :

In this paper, we present a meshless method coupled with a high order implicit technique for the simulation of compressible fluid flows. The difficulties of the numerical implementation are focused on the governing equations and the boundary conditions. This algorithm combines the following mathematical procedures: a time discretization, a Moving Least Square MLS, a homotopy transformation, a perturbation technique and a continuation method [1, 2, 3]. The proposed algorithm allows obtaining very large time steps and reducing computation time by minimizing the number of tangent matrix decompositions.

The strong formulation is considered to avoid the drawback of numerical integration. The boundary conditions of free surface and solid wall are treated by meshless collocation technique which is most appropriate to large deformations without the need to redefine a computational mesh.

Mots clefs : Fluide compressible, Surface libre, Technique sans maillage

1 Introduction

La modélisation et la simulation des écoulements de fluides compressibles à surface libre occupe une place importante dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien et deviennent une préoccupation majeure de ces dernières années. L'utilisation des modèles mathématiques dans la simulation de tels phénomènes est devenue essentielle comme moyen de prédiction. Le besoin d'un logiciel robuste pouvant traiter ce type de problème a conduit au développement de méthodes numériques capables de gérer les différentes difficultés appliquées sur différentes formulations [4, 5].

Notre travail est une contribution à la modélisation et à la simulation des écoulements de fluides compressibles à surface libre à l'aide d'un algorithme basé sur le couplage d'une méthode sans maillage, pour gérer les grandes déformations, et une technique implicite d'ordre élevé permettant de réduire considérablement le temps de calcul. La méthode sans maillage est basée sur la technique des moindres carrés mobiles MLS [6] introduite sur une formulation forte du problème évitant l'intégration numérique utilisée dans le cas de la méthode des éléments finis. La technique implicite d'ordre élevé utilise un schéma en temps d'Euler implicite classique, une transformation homotopique, un développement en séries de Taylor et une méthode de continuation. La transformation homotopique consiste à introduire un paramètre et un pré-conditionneur arbitraire en modifiant le problème à résoudre. Lorsque ce paramètre d'homotopie est nul, on obtient un problème linéaire facile à résoudre et lorsqu'il est égal à un, on recouvre le problème initial.

Afin de montrer l'efficacité et la robustesse de la modélisation proposée en comparaison avec un algorithme itératif couplé avec un schéma en temps de type Euler [1, 2, 3], nous avons traité la simulation de l'exemple d'un écoulement de fluide compressible entraîné par un solide en rotation uniforme.

2 Equations du problème

En général, la dynamique d'un fluide peut être décrite par trois quantités de lois de conservation à savoir la conservation de la masse, de la quantité de

mouvement et de l'énergie totale. Dans cette étude, nous considérons les deux premières lois pour un fluide visqueux et compressible [7]:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \rho \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \end{cases} \quad (1)$$

où u et v sont les composantes du vecteur vitesse, p est la pression, ρ est la masse volumique et μ est la viscosité dynamique. Le présent modèle suppose que l'écoulement est isotherme et le système est fermé en utilisant la loi des gaz parfaits donnée par [7]:

$$p = C_0\rho \quad (2)$$

où C_0 est une constante. Tenant compte de la dérivée de l'équation (2) par rapport aux variables x et y , le problème de l'équation (1) prend la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \rho \frac{du}{dt} &= -C_0\frac{\partial\rho}{\partial x} + \mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \rho \frac{dv}{dt} &= -C_0\frac{\partial\rho}{\partial y} + \mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \end{cases} \quad (3)$$

Pour le problème considéré, deux types de conditions aux limites sont utilisées: une sur le solide en rotation et la surface libre [7]. Sur le solide en rotation, nous supposons que les vitesses u et v et la densité ρ satisfont aux équations suivantes:

$$\begin{cases} u &= u_{wall} \\ v &= v_{wall} \\ C_0(n_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + n_y\frac{\partial\rho}{\partial y}) &= -\rho(n_x\frac{du}{dt} + n_y\frac{dv}{dt}) + \mu(n_x(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + n_y(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2})) \end{cases} \quad (4)$$

où n_x et n_y sont les composantes du vecteur normal à la paroi du solide en rotation. Sur la surface libre, nous considérons les conditions imposées suivantes:

$$\begin{cases} -C_0\rho - \mu\left(\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - 2(n_x^2\frac{\partial u}{\partial x} + n_y^2\frac{\partial v}{\partial y} + n_x n_y\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right))\right) + q &= -p_{at} \\ 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)n_x n_y + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)(n_y^2 - n_x^2) &= 0 \\ -\rho(n_x\frac{du}{dt} + n_y\frac{dv}{dt}) + \mu\left(n_x\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + n_y\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\right) &= C_0(n_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + n_y\frac{\partial\rho}{\partial y}) \end{cases} \quad (5)$$

La contrainte normale q est proportionnelle à la courbure de la surface libre [7] et p_{at} est la pression atmosphérique. A l'instant initial, le fluide est considéré au repos.

3 Algorithme proposé

Pour résoudre le problème (3) avec les conditions aux limites (4) and (5), nous proposons de suivre les étapes suivantes: schéma d'intégration temporelle d'Euler implicite, approche sans maillage MLS, transformation homotopique et développement en séries de Taylor suivi d'une procédure de continuation.

a- Schéma d'intégration temporelle d'Euler implicite

En utilisant le schéma d'intégration temporelle d'Euler implicite et en introduisant par la suite les incréments Δu , Δv et $\Delta \rho$ définis par:

$$\begin{cases} \Delta u &= u^{n+1} - u^n \\ \Delta v &= v^{n+1} - v^n \\ \Delta \rho &= \rho^{n+1} - \rho^n \end{cases} \quad (6)$$

où u^n , v^n et ρ^n représentent les valeurs des inconnues au temps $t^n = n\Delta t$ avec Δt est le pas de temps, le problème vérifié par ces nouvelles variables s'écrit:

$$([m] - \Delta t[k])\{\Delta x\} + \Delta t\{fq(\{\Delta x\}, \{\Delta x\})\} = \Delta t\{f^n\} \quad (7)$$

où $[m]$ est une matrice dépendant de ρ^n , $[k]$ est une matrice d'opérateurs, $\{fq\}$ est un vecteur quadratique, $\{f^n\}$ est un vecteur dépendant des solutions à l'instant $t^n = n\Delta t$ et ${}^t\{\Delta x\} = \langle \Delta u, \Delta v, \Delta \rho \rangle$ est un vecteur des inconnues.

La solution du problème (3) à l'instant t^{n+1} est donnée par:

$$\{x^{n+1}\} = \{x^n\} + \{\Delta x\} \quad (8)$$

b- Approche sans maillage MLS

Le vecteur inconnu principal mixte $\{\Delta x\}$ est appoximé par la méthode des moindres carrés mobiles MLS [6] et après substitution et assemblage, le problème s'écrit sous la forme condensée suivante:

$$[K_t^n]\{\Delta X\} + \Delta t\{FQ(\{\Delta X\}, \{\Delta X\})\} = \Delta t\{F^n\} \quad (9)$$

où $[K_t^n]$ est la matrice tangente dépendant de la solution à l'instant précédent $t^n = n\Delta t$, $\{FQ(\{\Delta X\}, \{\Delta X\})\}$ est une forme quadratique et $\{F^n\}$ est un second membre connu qui dépend de la solution à l'instant $t^n = n\Delta t$.

c- Transformation d'homotopie

En introduisant un pré-conditionneur arbitraire $[K^*]$ et un paramètre d'homotopie " ϵ " dans l'équation (9) via la transformation d'homotopie suivante:

$$[K^*]\{\Delta \chi(\epsilon)\} + \epsilon([K_t^n] - [K^*])\{\Delta \chi(\epsilon)\} + \epsilon \Delta t\{FQ(\{\Delta \chi(\epsilon)\}, \{\Delta \chi(\epsilon)\})\} = \epsilon \Delta t\{F^n\} \quad (10)$$

où $\{\Delta\chi(\epsilon)\}$ est la nouvelle inconnue du problème (10) telle que si $\epsilon = 1$, elle coïncide avec la solution du problème (3) et si $\epsilon = 0$, elle est nulle. La solution du problème (3) est obtenue en écrivant:

$$\{X^{n+1}\} = \{X^n\} + \{\Delta\chi(\epsilon = 1)\} \quad (11)$$

d- Développement en séries de Taylor

Les inconnues du problème artificiel (10) sont cherchées sous forme d'un développement en séries de Taylor tronquées à l'ordre p par rapport au paramètre d'homotopie " ϵ ". En injectant ces développements dans le problème artificiel (10) et en identifiant les coefficients suivant les puissances de " ϵ ", on obtient une suite de problèmes linéaires de même matrice tangente $[K^*]$ donnés par:

Ordre 1:

$$[K^*]\{\Delta\chi_1\} = \Delta t\{F^n\} \quad (12)$$

Ordre $2 \leq j \leq p$:

$$[K^*]\{\Delta\chi_j\} = ([K^*] - [K_T^n])\{\Delta\chi_{j-1}\} + \Delta t\{F_j^{nl}\} \quad (13)$$

où $\{F_j^{nl}\}$ est un vecteur qui dépend des solutions aux ordres inférieurs et $\{\Delta\chi_j\}$ sont les termes du développement en séries de Taylor.

e- Méthode de continuation

Le critère du domaine de validité des séries de Taylor est donné par la relation définie dans la référence [8] par:

$$\epsilon = \left(\kappa \frac{\|\{\chi_1\}\|}{\|\{\chi_p\}\|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (14)$$

où κ est le paramètre de tolérance. Les branches de solution sont obtenues quand le paramètre $\epsilon \geq 1$. La solution complète est obtenue branche par branche via une procédure de continuation [3].

4 Application numérique

Considérons un arbre circulaire de rayon $R_1 = 5mm$ en rotation uniforme d'une vitesse angulaire $\omega = 100rad/s$ complètement immergé dans un fluide compressible. Le domaine de fluide a la forme d'un anneau de rayon externe $R_2 = 12mm$ dont les limites se composent de l'arbre et une surface libre. Cette surface libre est soumise à une tension nulle. Les paramètres de ce model sont choisis tel que le nombre de Reynold $R_e = 10$ et le nombre de Mach $M_a = 0.0028$. La solution numérique est cherchée sur l'intervalle de temps $[0, 0.2s]$.

D'après une série de calcul, on a remarqué que notre algorithme devient efficace à partir de l'ordre $p = 8$. Avec cet ordre, la solution est obtenue en une seule branche c'est à dire une seule inversion de la matrice tangente. Les

conditions aux limites sont traitées par la méthode de collocation. Cette remarque nous a permis de choisir les paramètres suivants: l'ordre de troncature $p = 8$, le paramètre de tolérance $\kappa = 10^{-6}$, le pas de temps $\Delta t = 5.10^{-4}s$, le pré-conditionneur $[K^*] = [K_T^0]$ et le domaine occupé par le fluide est remplacé par 318 points (voir figure 1).

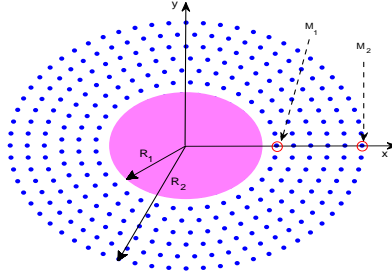
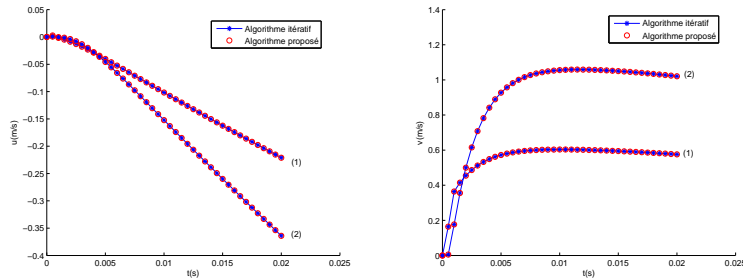


Figure 1: Configuration du modèle discret à l'instant initial

La figure 2 représente l'évolution temporelle des composantes u (voir figure 2a) et v (voir figure 2b) du vecteur vitesse respectivement aux points M_1 et M_2 de coordonnées $(x = 0.0062, y = 0)$ et $(x = 0.012, y = 0)$ représentés sur la figure 1. Les résultats obtenus par l'algorithme proposé coïncident parfaitement avec ceux de l'algorithme itératif. Ces résultats sont calculés à l'aide d'une seule inversion de la matrice tangente.



(a) Composante u aux points M_1 et M_2 (b) Composante v aux points M_1 et M_2

Figure 2: Evolution temporelle des composantes du vecteur vitesse, ordre $p = 8$, $\kappa = 10^{-6}$

Sur la figure 3, on représente l'évolution du module du vecteur vitesse en fonction du rayon $r \in [R_1, R_2]$ au différents instants. On remarque qu'après un instant $t = 0.125s$, le domaine occupé par le fluide se comporte comme un

solide rigide ce qui correspond à l'état stationnaire. Ces résultats sont analogues à ceux de la référence [7].

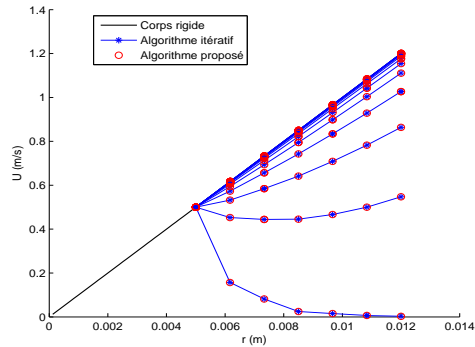


Figure 3: Module du vecteur vitesse en fonction du rayon r aux différents instants

Sur la figure 4, on représente le module du vecteur vitesse en fonction de r comparé avec la solution d'un corps rigide et de l'algorithme itératif. Ces résultats montrent que le module du vecteur vitesse dépend que du rayon r .

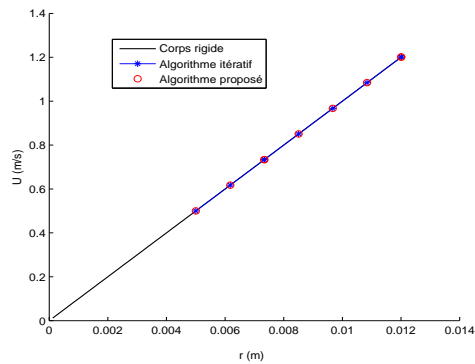


Figure 4: Comparaison de la vitesse des particules avec la solution exacte du mouvement d'un corps rigide.

5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une technique implicite d'ordre élevé couplée avec une méthode sans maillage pour la simulation des écoulements de

fluides compressibles en présence de la surface libre. Une description détaillée des conditions aux limites sur le solide en rotation et sur la surface libre a été donnée. Les résultats obtenus sont convaincants. L'algorithme proposé ne nécessite aucune correction et une seule inversion nous permet d'obtenir la solution complète. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la méthode itérative. L'algorithme proposé présente les avantages suivants: simple traduction de l'équation différentielle partielle algébrique, une bonne évolutivité par rapport au nombre de nœuds, une formulation forte permettant d'éviter l'intégration numérique et une souplesse dans le choix du pré-conditionneur.

References

- [1] M. Jamal, B. Braikat, S. Boutmir, N. Damil, M. Potier-Ferry, A high order implicit algorithm for solving instationary non-linear problems. *Computational Mechanics*, 28, 375-380, 2002.
- [2] A. Timesli, B. Braikat, H. Lahmam, H. Zahrouni, An Implicit Algorithm Based on Continuous Moving Least Square to Simulate Material Mixing in Friction Stir Welding Process. *Modelling and Simulation in Engineering*, 2013, 14 pages, 2013.
- [3] A. Timesli, B. Braikat, H. Lahmam, H. Zahrouni, A new algorithm based on Moving Least Square method to simulate material mixing in friction stir welding. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 50, 372-380, 2015.
- [4] J. Grooss, J. S. Hesthaven, A level set discontinuous Galerkin method for free surface flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 3406-3429, 2006.
- [5] C. W. Hirt, B. D. Nichols, Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39, 201-225, 1981.
- [6] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, The diffuse approximation. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 313, 293-296, 1991.
- [7] C. L. Felner, J. H. Walther, C. Henriksen, Moving least squares simulation of free surface flows. *Computers & Fluids*, 91, 47-56, 2014.
- [8] B. Cochelin, A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers Structures*, 53, 1181-1192, 1994.