

Influence de la flexion sur la dynamique d'une capsule dans un écoulement élongationnel

M. LEONETTI^a, G. BOEDEC^a, M. JAEGER^b

a. Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE UMR 7342, Technopôle de Château-Gombert, 13384 Marseille, France.

(mail : leonetti@irphe.univ-mrs.fr, boedec@irphe.univ-mrs.fr)

b. Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, M2P2 UMR 7340, Technopôle de Château-Gombert, 13451 Marseille Cedex 13 France.

(mail : marc.jaeger@centrale-marseille.fr)

Résumé :

Les effets de la résistance à la flexion sur la dynamique d'une capsule élastique soumise à un écoulement élongationnel axisymétrique sont étudiés numériquement. La méthode est basée sur le couplage des éléments finis pour le calcul des forces interfaciales avec la méthode intégrales de frontières pour l'hydrodynamique. La résistance à la flexion stabilise les formes plissées qui apparaissent à faible nombre capillaire du fait d'une zone de tension négatives.

Abstract :

Effects of bending resistance on the dynamics of an elastic capsule under axisymmetric elongational flow are studied numerically. The method is based on the coupling of finite elements for interfacial forces with boundary element method for hydrodynamics. The bending resistance stabilizes the wrinkle appearing for weak capillary numbers due to negative tensions.

Mots clefs : Ecoulements de Stokes, capsule, flexion

1 Introduction

Les capsules sont des gouttes enrobées par une membrane élastique, ce qui leur confère des propriétés interfaciales originales. Ces capsules sont très étudiées à la fois pour leurs applications cosmétiques ou pharmaceutique, mais aussi en tant que système modèle pour étudier des objets biologiques comme le globule rouge. En effet, la membrane d'un globule rouge et la membrane d'une capsule présentent des similarités

mécaniques fortes : résistance au cisaillement et à la flexion notamment. Du fait de leur grande déformabilité, ces objets présentent des dynamiques très riches lorsqu'ils sont soumis à un écoulement. Pour étudier pleinement ces dynamiques, le recours à la modélisation numérique est indispensable car les théories analytiques sont souvent restreintes au régime des faibles déformations. Une difficulté majeure de la simulation de tels objets réside dans le calcul des forces interfaciales liées à la flexion: un calcul direct requiert une représentation C^4 de l'interface, ce qui n'est possible qu'en utilisant une méthode spectrale. L'utilisation d'une telle méthode implique cependant que toute l'interface doit être raffinée uniformément pour représenter des déformations localisées. Il est donc intéressant de développer des méthodes locales permettant une plus grande souplesse. Pour cela, nous proposons une nouvelle méthode basée sur la représentation de l'interface par des éléments de subdivision (éléments de Loop). L'interface est alors C^2 , sauf en quelques points particuliers où elle est seulement C^1 . Cette méthode permet néanmoins d'utiliser une formulation faible (éléments finis) pour le calcul des forces interfaciales. La méthode éléments finis est couplée à une méthode intégrales de frontières pour les calculs hydrodynamiques. La méthode est validée par rapport aux résultats de la littérature puis des résultats préliminaires incluant la résistance à la flexion sont présentés.

2 Modélisation

On considère la membrane de la capsule comme une coque mince, de configuration de référence sphérique, paramétrisée par un système de coordonnées (ξ, η) . La position d'un point matériel sur la configuration de référence est notée $\mathbf{X}(\xi, \eta)$, et la position sur la configuration déformée est notée $\mathbf{x}(\xi, \eta)$. On définit le gradient de la transformation entre la configuration de référence et la configuration déformée par $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$. Les propriétés mécaniques de la membrane sont décrites par une énergie w^S de déformation surfacique définie sur la configuration de référence, qui dépend uniquement des invariants (I_1, I_2) du tenseur des déformations de Green-Lagrange $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T - \mathbf{I}d)$. Deux lois sont couramment utilisées pour modéliser la membrane des capsules: la loi néo-Hookéenne (NH) et la loi Skalak (Sk). L'énergie surfacique pour la loi NH s'écrit

$$w_{NH}^S = \frac{G}{2} \left(I_1 - 1 + \frac{1}{I_2 + 1} \right)$$

où G est le module de cisaillement surfacique. Pour la loi Sk, un paramètre supplémentaire C est introduit, qui caractérise la résistance à l'augmentation de surface :

$$w_{Sk}^S = \frac{G}{4} (I_1^2 + 2I_1 - 2I_2 + CI_2^2)$$

La résistance à la flexion est modélisée par l'énergie de Helfrich, définie sur la configuration déformée :

$$E^\kappa = \frac{\kappa}{2} \int_S (2H)^2 dS$$

où H est la courbure moyenne de la surface. Les forces interfaciales (élasticité de membrane et flexion) sont calculées par une méthode éléments finis utilisant des éléments de Loop [1].

Les écoulements internes et externe sont décrits par les équations de Stokes:

$$-\nabla p^{i,e} + \mu \Delta \mathbf{v}^{i,e} = \mathbf{0} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^{i,e} = 0$$

où (\mathbf{v}, p) désignent la vitesse et la pression du fluide interne (exposant i) ou externe (exposant e), et μ la viscosité des fluides.

La capsule est soumise à un écoulement élongationnel axisymétrique $\mathbf{v}^\infty = (-\frac{\dot{\epsilon}}{2}x, -\frac{\dot{\epsilon}}{2}y, \dot{\epsilon}z)$. Les champs de vitesse internes et externes sont continus à l'interface $\mathbf{v}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^e(\mathbf{x})$ et celle ci est advectée par l'écoulement $\frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$. Enfin, l'interface est en équilibre mécanique quasi-statique : $[\boldsymbol{\sigma}^e - \boldsymbol{\sigma}^i] \cdot \mathbf{n} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$, où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes fluides, \mathbf{n} est la normale sortante à l'interface, et \mathbf{f} est la densité surfacique de forces interfaciales. Les équations de Stokes sont résolues en utilisant une méthode intégrale de frontière [2]. L'équation d'évolution en temps de la position de l'interface est discrétisée de façon implicite à l'aide d'un schéma trapézoïdal. Le système implicite qui en résulte est résolu itérativement à l'aide de la méthode GMRES.

Deux nombres sans dimension caractérisent cette situation : le nombre capillaire $Ca = \frac{\mu \dot{\epsilon} R}{G}$ qui mesure le rapport des effets hydrodynamiques par rapport à l'élasticité, et un nombre $\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{GR^2}$ qui mesure les effets de la flexion par rapport à l'élasticité.

3 Résultats

La méthode numérique développée a été validée par rapport aux résultats de la littérature. Comme on peut le voir sur la figure 1, les résultats obtenus sont en excellent accord avec les résultats de référence [3].

Lorsque la capsule est placée dans un écoulement élongationnel axisymétrique, à faible nombre capillaire, des tensions négatives se développent dans la direction azimuthale. Ces tensions peuvent alors donner lieu au développement de modulations (plis) de la forme sur toute la zone de tensions négatives. La longueur d'onde de ces modulations dépend de l'importance de la résistance à la flexion (cf. figure 2): un module de flexion élevé permet de supprimer l'apparition des plis, alors que de faibles modules de flexion conduisent à des modulations de courte longueur d'onde.

4 Conclusion

Une nouvelle méthode numérique couplant intégrale de frontières et éléments finis a été développée pour étudier l'influence de la flexion sur la dynamique de capsules soumise à un écoulement élongationnel. Celle ci permet la stabilisation des plis qui apparaissent sur la capsule dans la zone de tension azimuthale négative. La flexion contrôle la longueur d'onde de ces plis. La stabilité et la dynamique des formes plissées seront également discutées.

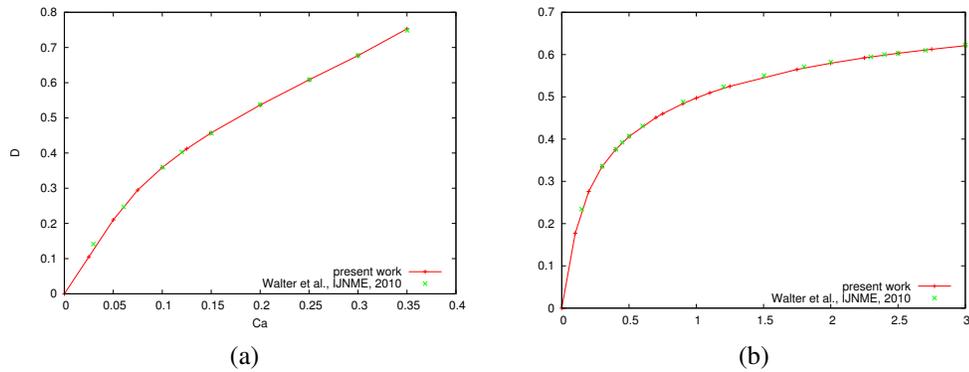


Figure 1: Validation de la méthode numérique, comparaison aux résultats de [3] : (a) Paramètre de Taylor en fonction du nombre capillaire pour une capsule NH dans un écoulement extensionnel plan (b) Paramètre de Taylor en fonction du nombre capillaire pour une capsule Sk dans un écoulement de cisaillement.

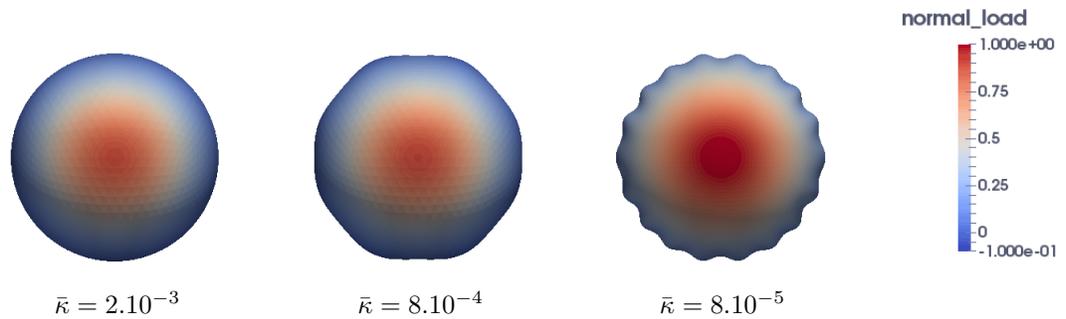


Figure 2: Influence de la flexion sur l'état stationnaire en élongationnel axisymétrique: loi Skalak, nombre capillaire 0.1, vue xy .

References

- [1] Cirak, F., Ortiz, M. Schroder, P. Subdivision surfaces: a new paradigm for thin-shell finite-element analysis. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 47 (12), 2039–2072. 2000.
- [2] Pozrikidis, C., *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*. Cambridge University Press. 1992
- [3] J. Walter, A.-V. Salsac, D. Barthès-Biesel P. Le Tallec, Coupling of finite element and boundary integral methods for a capsule in a Stokes flow, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 2010.