

# Contrôle de forme de coques multistables

W. HAMOUCHE<sup>a,b</sup>, A. VINCENTI<sup>a,b</sup>, S. VIDOLI<sup>a,b,c</sup>, C. MAURINI<sup>a,b</sup>

a. Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005, Paris, France  
walid.hamouche@dalembert.upmc.fr

b. CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005, Paris, France

c. Dip. Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Università di Roma La Sapienza, via Eudossiana 18, 00184 Rome, Italy

...

## Résumé :

*Un disque mince isotrope soumis à des courbures inélastiques sphériques et uniformes possède une infinité de configurations cylindriques identiques et stables. Dans ce travail, on étudie la multistabilité d'une telle structure et la manière de contrôler le passage d'une configuration stable à l'autre. Sur la base du modèle non-linéaire de coques minces de Von Kármán, on montre que le fait de générer des courbures inélastiques dans au moins trois directions permet le contrôle de la courbure de la coque à 360°. Les résultats sont validés par des simulations aux éléments finis via le code Abaqus.*

## Abstract :

*An isotropic disk when submitted to a spherical and uniform inelastic curvature possesses an infinite number of cylindrical configurations identical and stable. In this work, we study the multistability of such a structure and the way to control the actuation from a stable shape to another. On the basis of the non linear Von Kármán shell model, we show that in generating additional curvatures in at least three independant directions allows to control the shape of the shell at 360°. The results are validated by finite element simulations through the software Abaqus.*

**Mots clefs : Multistabilité, Contrôle de forme, Coques non-linéaires.**

## 1 Introduction

Le contrôle de forme de structures multistables a connu un essor important ces dernières années. On désigne par structure multistable une structure qui possède plusieurs configurations distinctes d'équilibre stable pouvant se maintenir en l'absence de sollicitation extérieure. Ce principe de multistabilité est appliqué pour la création de structures adaptatives, c'est-à-dire capables d'adapter leur forme à différents régimes de fonctionnement. Dans ce sens, les plaques et coques sont d'excellentes candidates pour la conception de structures multistables en exploitant les non-linéarités induites par le couplage entre courbure Gaussienne et déformations de membrane.

En particulier, un disque mince isotrope, lorsqu'il est soumis à des courbures inélastiques sphériques et uniformes possède une infinité de configurations stables cylindriques (courbure Gaussienne nulle) identiques par rotation du champ de courbures. De fait, la structure se comporte comme un mécanisme à rigidité nulle (*neutrally stable*) étant donné l'invariance de l'énergie pour toutes les configurations stables []. L'intérêt de ce type de structures réside dans le fait que l'apport énergétique nécessaire à l'actionnement est quasi-nul.

Dans ce travail, on étudie la multistabilité d'une telle structure et on s'intéresse à caractériser les possibles moyens d'actionnement permettant de contrôler le passage d'une configuration stable à l'autre. Sur la base du modèle de coques minces de Von Kármán à courbures uniformes, deux modèles extensible et inextensible sont déduits, qui montrent que le contrôle actif de forme de la coque à 360° est possible en générant des courbures inélastiques additionnelles dans au moins trois directions.

Des simulations numériques par éléments finis suivant un modèle non-linéaire géométrique dans le code Abaqus valident les résultats obtenus via l'approche analytique du modèle à courbures uniformes.

## 2 Modèle de coques minces de Föppl-Von Kármán

On considère une configuration plate comme configuration de référence pour la coque, décrite par un domaine bi-dimensionnel  $\mathcal{S}$ . Le modèle de coques minces de Von Kármán permet, par l'intermédiaire d'une procédure de réduction décrite par exemple dans [], d'écrire l'énergie potentielle d'une coque uniquement en fonction de la courbure actuelle  $K$  (en notation de Voigt), sous la forme adimensionnée :

$$U(K) = \frac{1}{2} D (K - H_0 - H_i) \cdot (K - H_0 - H_i) + \frac{1}{2} (\det K - \det H_0)^2, \quad (1)$$

où  $H_0$  et  $H_i$  sont les courbures initiale et inélastique, respectivement, et  $D$  est la matrice de rigidité de flexion adimensionnée définie comme :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad -1 < \nu < 1, \quad \gamma \geq 0. \quad (2)$$

Les courbures sont supposées uniformes et la coque est libre aux bords. De plus, les seuls chargements extérieurs considérés correspondent à l'application de courbures inélastiques uniformes  $H_i$ .

Le paramètre  $\beta$  désigne le rapport entre les deux modules d'Young dans le plan,  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $\gamma$  le module de cisaillement. Finalement,  $\beta$ ,  $\nu$  et  $\gamma$  sont les seuls paramètres constitutifs qui ont une influence sur la stabilité des coques de Föppl-Von Kármán à courbures uniformes. Pour plus de détails sur la méthodologie de dérivation du modèle de Föppl-Von Kármán se référer par exemple à [].

## 3 Modèles extensible (exact) et inextensible (approximé)

On considère un disque pour lequel  $H_0 = 0$  (courbure initiale nulle),  $\beta = 1$  et  $\gamma = (1-\nu)/2$  (isotropie). On perturbe légèrement l'isotropie de telle manière que  $\gamma = (1-\nu)/2 + \eta$ . Par l'intermédiaire d'un changement de coordonnées dans l'espace des courbures (problème aux valeurs propres sur la matrice  $D$ ), l'énergie peut être réécrite sous la forme :

$$U(K, H_i) = (K_m - H_m)^2 + (K_d - H_d)^2 + (K_t - H_t)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{K_m^2}{1+\nu} - \frac{K_d^2}{1-\nu} - \frac{K_t^2}{1+2\eta-\nu} \right)^2 \quad (3)$$

où  $K_m$  représente la partie sphérique de  $K$ ,  $K_d$  et  $K_t$  son déviateur. Une configuration  $K$  est un minimum de  $U(K, H_i)$  si elle satisfait l'équation d'équilibre  $\partial U / \partial K = 0$  et si la matrice Hessienne  $\partial^2 U / \partial K^2$  correspondante est de valeurs propres positives. La détermination des configurations stables correspond ainsi au problème suivant :

$\mathbb{P}_e$  : Pour une courbure inélastique  $H_i$  donnée, trouver tous les minima de (3) :

$$\min_K U(K, H_i) \quad (4)$$

Dans la limite d'inextensibilité ( $\det K = 0$ ), la minimisation de l'énergie équivaut à minimiser la distance carrée :

$$\|K - H_i\|^2 = (K_m - H_m)^2 + (K_d - H_d)^2 + (K_t - H_t)^2 \quad (5)$$

sous la contrainte :

$$\frac{K_m^2}{1+\nu} - \frac{K_d^2}{1-\nu} - \frac{K_t^2}{1+2\eta-\nu} = 0 \quad (6)$$

ce qui revient à annuler le dernier terme de la somme (3) représentant l'énergie de membrane. On remarque aisément que l'expression (6) décrit un cône d'axe  $K_m$  et de section elliptique dans le plan  $(K_d, K_t)$ , cf. Figure 1a. Le problème  $\mathbb{P}_e$  peut ainsi être approximé par le problème suivant :

$\mathbb{P}_i$  : Trouver les points  $K = (K_m, K_d, K_t)$ , appartenant au cône (6), minimisant la distance (5), c'est-à-dire les plus proches d'un point donné  $H_i = (H_m, H_d, H_t)$ .

Un champ de courbures inélastiques sphériques  $H_{ix} = H_{iy}$  et  $H_{ixy} = 0$ , soit  $H_m \neq 0, H_d = H_t = 0$  conduit au phénomène bien connu de bifurcation du champ de courbures  $K$  et donc à la multistabilité lorsque  $H_m > H_m^{crit}$ . Dans le cas isotrope ( $\eta = 0$ ), le cône (6) est de section circulaire, et de fait, une infinité de points se trouvent à la même distance minimale d'un point donné  $\bar{H}_m > H_m^{crit}$  (structure *neutrally stable*, cf. Figure 1). Pour  $\eta > 0$ , le cône a une section elliptique et seulement deux points sont toujours à égale distance minimale d'un point donné sur l'axe (bistabilité).

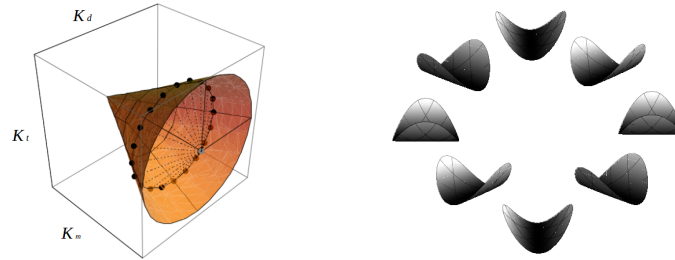


FIGURE 1 – a) Le cône  $\det K = 0$  dans le cas isotrope ( $\eta = 0$ ) ; b) Configurations stables cylindriques.

## 4 Actionnement de coques *neutrally stable* : modèle analytique et validation par éléments finis

### 4.1 Modèle réduit à courbures uniformes

Supposons fixé un champ de courbures inélastiques sphériques  $\bar{H}_m > H_m^{crit}$  (par exemple obtenu par effet thermo-élastique) conduisant à la bistabilité pour  $\eta > 0$ . On s'intéresse à l'actionnement de la structure bistable, c'est-à-dire au passage entre deux configurations d'équilibre stable, par l'intermédiaire des paramètres de courbure inélastique  $H_d$  et  $H_t$ . En résolvant le problème  $\mathbb{P}_i$ , on montre que la trajectoire d'actionnement sur le cône (6) est une ellipse dans le plan  $(K_d, K_t)$ . La valeur  $H_d^*$  permettant de perdre l'équilibre est définie comme celle qui rend un des deux équilibres instable (*snap* entre deux configurations) :

$$H_d^* = 2\eta \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{1 - \nu}} + o(\eta^2), \quad \text{où } \lambda = \frac{\bar{H}_m}{H_m^{crit}} \quad (7)$$

ce qui montre que lorsque  $\eta \rightarrow 0$  (isotropie), l'énergie nécessaire à l'actionnement tend vers 0. Cependant, le seul paramètre  $H_d$  n'est pas suffisant pour contrôler de manière stable le passage entre deux configurations d'équilibre (rotation du champ de courbures). Ainsi, il est nécessaire d'introduire le terme de torsion  $H_t$ .

Afin de générer une combinaison voulue des paramètres  $H_d$  et  $H_t$ , il est nécessaire d'avoir trois directions d'actionnement. Par exemple, pour réaliser la rotation de la direction principale des courbures  $K$  d'un angle  $t$ , il faudrait appliquer les courbures inélastiques  $H_d = \bar{H}_m \cos t/2$  et  $H_t = \bar{H}_m \sin t/2$  (chemin d'actionnement orange en Figure 2a). Ceci peut être obtenu, par exemple, en utilisant trois actionneurs piézoélectriques orientés selon trois directions espacées de  $\pi/3$  entre elles, et de voltages (Figure 2b) :

$$V_1(t) = \frac{2\rho}{3} (1 + \cos t), \quad V_2(t) = \frac{\rho}{3} (2 - \sqrt{3} \sin t - \cos t), \quad V_3(t) = \frac{\rho}{3} (2 + \sqrt{3} \sin t - \cos t) \quad (8)$$

### 4.2 Validation numérique par éléments finis

Il existe plusieurs manières de générer des courbures inélastiques pour obtenir des structures multistables. Dans ce travail, on considère un disque bilame aluminium-cuivre auquel on applique une variation de température uniforme  $\Delta T$  pour obtenir des courbures inélastiques sphériques  $H_m$ . Pour des valeurs de  $\Delta T$  suffisamment élevées, les courbures

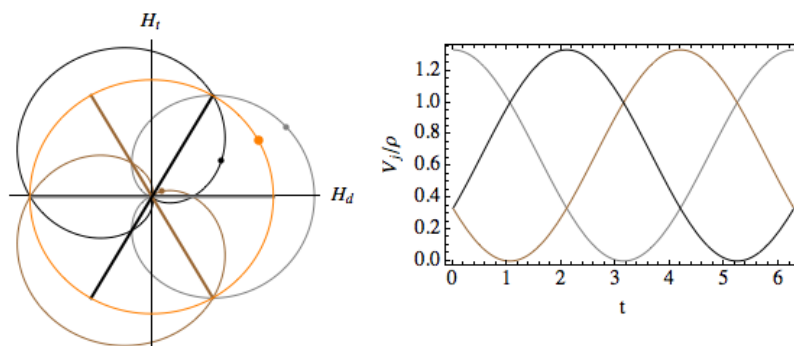


FIGURE 2 – a) Cardioïde des trois voltages  $V_j$  (8) et le chemin d'actionnement associé (orange); b) Les voltages  $V_j$  en fonction de l'angle  $t$ .

inélastiques induites par les dilatations différentielles dans les deux matériaux conduisent à la bifurcation du champ de courbures et donc à la multistabilité (cf. Figure 3a). On fixe l'épaisseur totale du disque à 0,6 mm et le diamètre à 245 mm, ce qui permet d'obtenir la multistabilité pour une faible variation de température (cf. Figure 3a). Les propriétés matériaux sont données dans le Tableau 1. La méthode d'actionnement retenue consiste à disposer six actionneurs

TABLE 1 – Propriétés matériaux du disque

Propriétés	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\alpha$ ( $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ )	$\beta_1$ ( $10^{-7}/\text{V}$ )	$\beta_2$ ( $10^{-7}/\text{V}$ )
Al A5 H18	69	69	25.94	0.33	24.5	–	–
Cu al H14	124	124	46.62	0.33	17.3	–	–
MFC (piézo)	30.3	15.9	5.51	0.31	–	7.2	-3.8

piézoélectriques (MFC) sur une face du disque. Les actionneurs sont espacés de  $60^{\circ}$  et utilisés par paires de même orientation, permettant de caractériser trois directions d'actionnement orientées aux angles  $90^{\circ}$  et  $\pm 30^{\circ}$  (cf. Figure 3b).

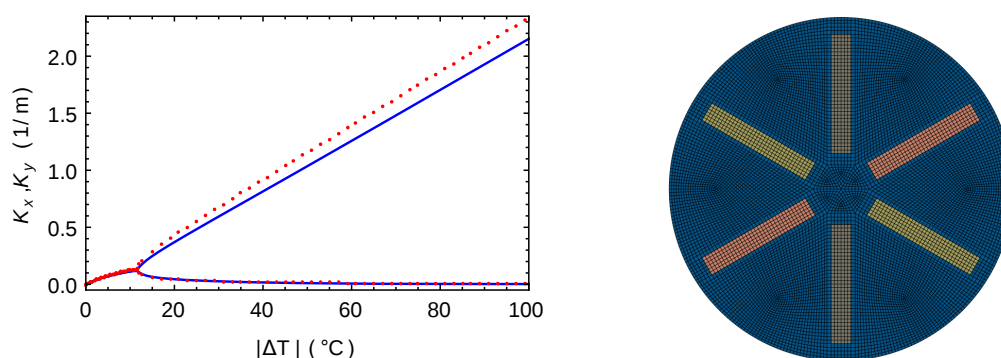


FIGURE 3 – a) Bifurcation du champ de courbures (trait plein : Abaqus ; trait pointillé : Von Kármán). b) Disposition des actionneurs sur le disque et maillage éléments finis.

Les actionneurs, lorsqu'ils sont soumis à un voltage se dilatent et génèrent des courbures inélastiques additionnelles permettant de débiter le processus d'actionnement. Des combinaisons entre les différents actionneurs permettent par la suite de générer les courbures additionnelles  $H_d$  et  $H_t$  pour contrôler la forme de la structure à  $360^{\circ}$  (cf. Figure 4a). La figure 4b décrit la variation d'énergie totale de la plaque pendant le processus d'actionnement pour différentes amplitudes de voltages appliqués : on remarque que cette variation d'énergie reste très faible et la structure se comporte comme un mécanisme à rigidité quasi-nulle.

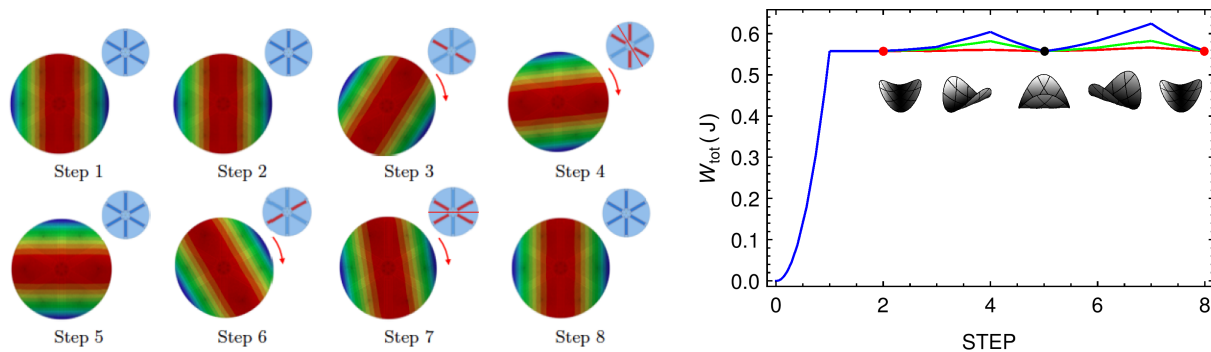


FIGURE 4 – a) Configurations de la coque pendant l'actionnement et b) variations énergétiques.

## Références

- [1] A. Fernandes, C. Maurini, and S. Vidoli. *Multiparameter actuation for shape control of bistable composite plates*, International Journal of Solids and Structures, 47(10) :1449–1458, 2010.
- [2] K. A. Seffen. *Morphing bistable orthotropic elliptical shallow shells*, Proceedings of the Royal Society, London, A, 463(2077) :67–83, 2007.
- [3] S.D. Guest, E. Kebabze, and S. Pellegrino. *A zero-stiffness elastic shell structure*, Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2011.
- [4] S. Vidoli and C. Maurini. *Tristability of thin orthotropic shells with uniform initial curvature*, Proceedings of the Royal Society A-mathematical Physical and Engineering Sciences, 464(2099) :2949–2966, 2008.